С. В. ГИЛЕВСКИЙ, П. П. КОРЖУКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕНДА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Работа сложных динамических систем различной физической природы (особенно силовых агрегатов продукции машиностроения) сопровождается, как правило, стохастическими процессами, которые характеризуют их состояние. На сегодняшний момент известны модели и методы, которые описывают наблюдаемые процессы в машиностроении (шумы и вибрации), в медицине (электрокардиограммы и электроэнцефалограммы), в геофизике (сейсмограммы) и др. Проведено много работ по созданию аппаратных и программных средств диагностирования состояния таких сложных систем в указанных областях. Однако полученные теоретические и практические результаты применимы лишь для ограниченного класса диагностических процессов при условии их стационарности, в то время как именно нестационарные процессы характеризуют моменты наступления тех или иных отклонений в состоянии контролируемой системы.

На сегодняшний день не существует единой методики, в рамках которой можно анализировать нестационарный случайный процесс любого типа, пользуясь единичной его реализацией. Потому для анализа нестационарных процессов приходится разрабатывать специальные методы, применимые только к отдельным классам нестационарных процессов [1, 2, 3].

Важным этапом анализа нестационарных случайных процессов является определение тренда [1, 2]. Под трендом обычно понимают аддитивную составляющую процесса, период которой сравним с длиной реализации. Во многих случаях исключение тренда из исходных данных является необходимым требованием для получения неискаженных данных при последующем анализе. Кроме того, существует ряд задач, в которых знание тренда желательно само по себе. В некоторых случаях исходные данные для анализа могут содержать посторонние случайные тренды. Обычными источниками таких трендов служат дрейф нуля регистрирующей аппаратуры и операции интегрирования сигнала. Соответственно, при последующей обработке данных в оценках корреляционных функций и спектральных характеристик могут быть внесены сильные искажения. В частности, совершенно недостоверной окажется оценка спектральной плотности на низких частотах.

Классическим способом определения тренда является метод наименьших квадратов [1, 2]. Так, если $f(x)$ – функция исследуемого процесса, заданная на промежутке (a, b), то в методе наименьших квадратов она представляется следующей приближающей функцией:

$$F_K(x) = \sum_{k=0}^{K} c_k \varphi_k ,$$

где базисные функции $\varphi_k = x^k$.

Выполнение условия равенства нулю разницы исследуемого сигнала и приближающей функции для любого значения x невозможно в силу конечного значения степени аппроксимирующего полинома K. Тем не менее, коэффициенты c_k подбирают таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений искомого полинома от значений аппроксимируемой функции во всех точках промежутка (a, b) была насколько возможно меньше. Приближение многочленами дает систему линейных алгебраических уравнений, а, увеличивая степень аппроксимирующего многочлена K, необходимо пересчитывать все коэффициенты. Приближение другими функциями, отличными от полиномов, приводит к решению нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, что влечет за собой в практическом аспекте большие вычислительные затраты.

Процедура определения тренда нестационарного процесса методом наименьших квадратов значительно упрощается, когда система функций $\varphi_k(x)$ ортогональна. Приближающая функция тогда имеет вид

$$F_K(x) = h_1\varphi_1(x) \;+\; \ldots \;+ h_K\varphi_K(x),$$

где $h_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,p(x)\,dx$, $p(x)$ – весовая функция разложения;

h_k – значения коэффициентов c_k, для которых квадрат разности значений исходной и приближающей функций достигает минимума.

Преимущество использования системы ортогональных полиномов заключается в том, что не требуется пересчитывать коэффициенты при улучшении аппроксимации путем увеличения степени аппроксимирующего полинома K.

Система полиномов $g_n(x)$ (n=0, 1, 2, …) называется ортогональной в промежутке (a ,b) с весом $p(x)$, если при всяком $m \neq n$ имеет место следующее равенство:

$$\int_a^b p(x) g_m(x) g_n(x)\,dx = 0 ,$$

где $p(x)$ – некоторая фиксированная неотрицательная функция, не зависящая от индексов m и n. Среди систем ортогональных полиномов обычно рассматриваются системы, называемые классическими, к числу которых чаще всего относятся полиномы: Чебышева, Лежандра, Якоби, Лагерра, Эрмита [4–9].

Система полиномов Чебышева первого рода на промежутке (–1,1) определяется дифференциальным весом

$$p(x) = 1\Big/\sqrt{1 - x^2}\,.$$

Положив $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, ортонормированная система полиномов Чебышева первого рода задается равенствами

$$\tilde{T}_0(x) = (1/\sqrt{\pi})T_0(x),$$

$$\tilde{T}_n(x) = \sqrt{2/\pi}\,T_n(x) = \sqrt{2/\pi}\cos(n \arccos x), \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных полинома Чебышева:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Это равенство может быть использовано для последовательного вычисления рассматриваемых полиномов.

Система полиномов Чебышева второго рода определяется на том же промежутке (–1, 1), но с весом $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$, и задается равенством

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos(x)}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Заметим, что полиномы $U_n(x)$ являются, не считая постоянных множителей, производными от полиномов $T_{n+1}(x)$:

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}\right].$$

Полиномы $U_n(x)$ удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и полиномы $T_n(x)$ первого рода.

Полиномы Лежандра на интервале ортогональности: (–1, 1) с весом $p(x) = 1$ для любых вещественных или комплексных значений переменной x определяются при помощи формулы

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Откуда получается общее выражение для полинома n-го порядка:

$$X_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{2^n k(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

где обозначение $[\alpha]$ – целая часть числа α.

Имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$X_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x X_n(x) - \frac{n}{n+1} X_{n-1}(x).$$

Ортонормированная система полиномов Лежандра определяется формулой

$$\tilde{X}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} X_n(x), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Для изучения точности определения тренда использовались приближающие полиномы от нулевой до десятой степени при длине реализации нестационарного процесса $N = 1024$ дискретных отсчета. Проведенные исследования на моделях нестационарных процессов с различными видами тренда (низкочастотный, синусоидальный и экспоненциальный) показали, что метод наименьших квадратов дает достаточно хорошее приближение как при использовании обыкновенных, так и ортогональных полиномов. При этом среднее значение ошибки определения тренда практически не зависит от степени аппроксимирующего полинома при $K \geq 5$, а дисперсия ошибки растет с увеличением степени аппроксимирующего полинома. Поэтому при определении тренда методом наименьших квадратов не рекомендуется использовать большие степени (больше 8) приближающих многочленов.

Проведен анализ вычислительных затрат на процесс при определении тренда методом наименьших квадратов с обыкновенными и ортогональными полиномами. Поскольку операции сложения занимают сравнительно мало процессорного времени и существенно на общую картину не влияют, статистика по ним не учитывалась. На рис. 1 приведено количество операций умножения в зависимости от степени приближающего полинома для четырех видов полиномов. Видно, что начиная с первой степени число операций умножения для метода наименьших квадратов как с обыкновенными, так и с ортогональными полиномами растет линейно. Но уже при переходе к пятой степени апроксимация обыкновенными полиномами требует значительно больше операций умножения, чем использование ортогональных полиномов. Заметим, что практически одинаково работают полиномы Чебышева второго рода и полиномы Лежандра. Чем больше степень аппроксимирующего полинома, тем больше разница между количеством операций умножения метода наименьших квадратов с обыкновенными и ортогональными полиномами. Однако следует учитывать, что при увеличении степени полиномов растет дисперсия ошибки определения тренда процесса.

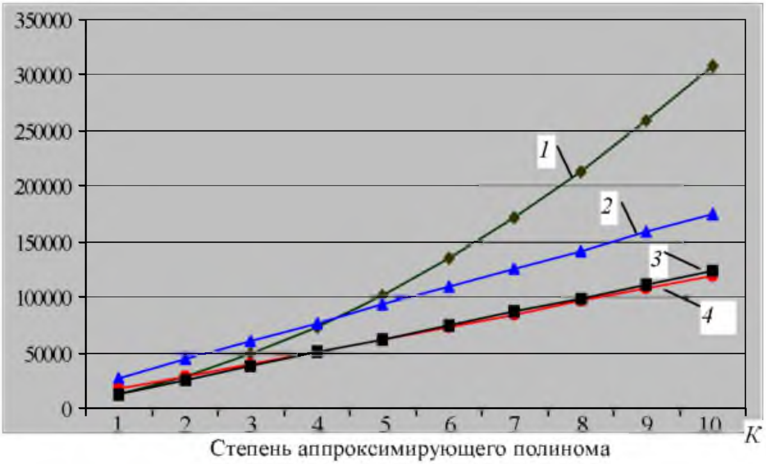

Рис. 1. Количество операций умножения в зависимости от степени приближающего полинома для обычных полиномов МНК (*1*), Чебышева 1 рода (*2*), Чебышева 2 рода (*3*) и Лежандра (*4*)

Проведенное сравнение вычислительных затрат доказывает, что использование в методе наименьших квадратов ортогональных полиномов, практически не изменяя статистических характеристик определения тренда, значительно уменьшает количество операций умножения, что имеет важное практическое применение, так как позволяет увеличить диапазон реального масштаба времени при обработке нестационарных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бендат Дж., Пирсол А. Х.* Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974. 464 с.
2. *Бендат Дж., Пирсол А. Х.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
3. *Цветков Э. И.* Нестационарные случайные процессы и их анализ. М.: Энергия, 1973. 129 с.
4. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.
5. *Корн Г. А., Корн Т. М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
6. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.–Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
8. *Геронимус Я. Л.* Теория ортогональных многочленов. М.: Гостехиздат, 1950. 164 с.
9. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.