Символ-алгебры и цикличность алгебр после расширения скаляров*

У. РЕМАН
Университет Билефельда, Германия
e-mail: rehmann@math.uni-bielefeld.de

С. В. ТИХОНОВ
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: tsv@im.bas-net.by

В. И. ЯНЧЕВСКИЙ
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: yanch@im.bas-net.by

УДК 512.7

Ключевые слова: центральная простая алгебра, скрещённое произведение, многообразие Севери—Брауэра.

Аннотация

Пусть F — поле. Для семейства центральных простых F-алгебр мы доказываем, что существует регулярное расширение E/F, сохраняющее индексы F-алгебр, такое что все алгебры семейства циклические после расширения скаляров до E. Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра степени n и примитивный корень степени n из единицы принадлежит F. Построено квазиаффинное F-многообразие $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$, такое что для расширения L/F многообразие $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$ обладает L-рациональной точкой тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}\otimes_F L$ — символ-алгебра. Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра степени n и K/F — циклическое расширение степени n. Построено квазиаффинное F-многообразие $C(\mathcal{A}, K)$, такое что для расширения L/F со свойством $[KL : L] = [K : F]$ многообразие $C(\mathcal{A}, K)$ обладает L-рациональной точкой тогда и только тогда, когда KL — подполе алгебры $\mathcal{A}\otimes_F L$.

Abstract

U. Rehmann, S. V. Tikhonov, V. I. Yanchevskiĭ, Symbol algebras and cyclicity of algebras after a scalar extension, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 193—209.

For a field F and a family of central simple F-algebras we prove that there exists a regular field extension E/F preserving indices of F-algebras such that all the algebras from the family are cyclic after scalar extension by E. Let $\mathcal{A}$ be a central simple algebra over a field F of degree n with a primitive nth root of unity ρ_n. We construct a quasi-affine F-variety $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$ such that for a field extension L/F $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$ has an L-rational point if and only if $\mathcal{A}\otimes_F L$ is a symbol algebra. Let $\mathcal{A}$ be a central simple algebra over a field F of degree n and K/F be a cyclic field extension of degree n. We

*Второй и третий авторы благодарны Центру совместных исследований 701 (CRC 701) в университете города Билефельда за поддержку во время подготовки этой статьи.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 193—209.

construct a quasi-affine F-variety $C(\mathcal{A}, K)$ such that, for a field extension L/F with the property $[KL : L] = [K : F]$, the variety $C(\mathcal{A}, K)$ has an L-rational point if and only if KL is a subfield of $\mathcal{A} \otimes_F L$.

1. Введение

Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая алгебра конечной размерности над полем F. По теореме Веддербёрна существуют однозначно определённое целое $m \geqslant 1$ и центральная F-алгебра с делением $\mathcal{D}$, которая определена с точностью до F-изоморфизма, такие что $\mathcal{A} \cong \mathrm{M}_m(\mathcal{D})$. Как обычно, степень алгебры $\mathcal{A}$ определяется как $\deg(\mathcal{A}) = \sqrt{\dim_F \mathcal{A}}$, индекс $\mathcal{A}$ — как $\operatorname{ind}(\mathcal{A}) = \deg(\mathcal{D})$, а экспонента $\exp(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ — как порядок соответствующего класса эквивалентности $[\mathcal{A}]$ в группе Брауэра $\mathrm{Br}(F)$. Если $[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}]$, то будем писать $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. Запись $\mathcal{A} \sim 1$ означает, что алгебра $\mathcal{A}$ представляет тривиальный элемент группы Брауэра. Для расширения полей E/F через $\mathrm{res}\colon \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(E)$ будем обозначать гомоморфизм ограничения, а через $\mathcal{A}_E$ — тензорное произведение $\mathcal{A} \otimes_F E$.

В статье рассматриваются следующие задачи, связанные со свойствами центральных простых алгебр после расширения скаляров.

Задача 1.1. Пусть $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — семейство центральных простых F-алгебр. Зафиксируем некоторое свойство $\mathcal{P}$ центральной простой алгебры. Существует ли такое расширение E/F (по возможности регулярное), что всякий член семейства $\{\mathcal{A}_\alpha \otimes_F E\}_{\alpha \in I}$ обладает этим свойством $\mathcal{P}$?

Задача 1.2. Пусть $\mathcal{A}/F$ — центральная простая алгебра. Зафиксируем некоторое свойство $\mathcal{P}$ центральной простой алгебры. Существует ли такое алгебраическое F-многообразие V (аффинное, квазиаффинное, проективное или квазипроективное), что алгебра $\mathcal{A} \otimes_F L$ обладает свойством $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда у V есть L-рациональная точка?

Конечно, эти задачи в своей полной общности слишком неясные, поэтому ниже мы объясняем, какие свойства $\mathcal{P}$ мы рассматриваем. В качестве примеров укажем следующие.

Пример 1.3. $\mathcal{P}$ — свойство иметь заданный индекс.

Пример 1.4. $\mathcal{P}$ — свойство иметь заданную экспоненту;

Пример 1.5. $\mathcal{P}$ — свойство иметь заданные экспоненту и индекс.

В связи с этими примерами отметим результат из [15, лемма 1.3.], где доказано, что для всякой центральной простой алгебры $\mathcal{A}$ над F экспоненты e и индекса d с разложение по степеням простых делителей $d = \prod p^{v_p(d)}$ и для всякого делителя δ числа d существует расширение $E^{(\delta)}$, такое что

$$\exp\bigl(\mathcal{A} \otimes_F E^{(\delta)}\bigr) = \text{НОД}(e, \delta) \quad \text{и} \quad \operatorname{ind}\bigl(\mathcal{A} \otimes_F E^{(\delta)}\bigr) = \prod_{p \mid \delta} p^{v_p(d)}.$$

Пример 1.6. $\mathcal{P}$ — свойство алгебры иметь совпадающие экспоненту и индекс (свойство равенства экспоненты и индекса).

Замечание 1.7. Последний пример приводит к следующей хорошо известной проблеме равенства экспоненты и индекса.

Задача 1.8. Описать класс полей F, для которых $\operatorname{ind}(\mathcal{A}) = \exp(\mathcal{A})$ для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{A}$.

До сих пор неизвестно, верно ли, что эта проблема имеет положительное решение в классе C_2-полей.

Недавние результаты А. де Йонга [14] и М. Либлиха [17] показывают, что для класса полей функций поверхностей над алгебраически замкнутыми полями эта проблема решается положительно.

Примеры другого типа связаны с представлением алгебр образующими и определяющими соотношениями. Наиболее известные примеры относятся к следующим классам алгебр.

1. *Матричные алгебры* $\mathrm{M}_n(F)$.
2. *Скрещённые произведения* $(L/F, \mathrm{Gal}(L/F), f)$. Пусть L/F — расширение Галуа с группой $\mathrm{Gal}(L/F)$ и f — 2-коцикл группы G со значениями в L^*. Тогда $(L/F, \mathrm{Gal}(L/F), f)$ — левый L-модуль с L-базисом $\{u_\tau\}_{\tau\in\mathrm{Gal}(L/F)}$ и таблицей умножения
$$u_s l = l^s u_s, \quad u_s u_t = f(s,t) u_{st}$$
для всех $s, t \in \mathrm{Gal}(L/F)$ и $l \in L$.
3. *Циклические алгебры* $(Z/F, s, a)$. Это специальный вид скрещённых произведений. Пусть Z/F — циклическое расширение степени n, s — образующая группы $\mathrm{Gal}(Z/F)$ и $a \in F^*$. Тогда $(Z/F, s, a)$ — левый Z-модуль с Z-базисом $\{u_s^i\}_{i=1,\ldots,n}$ и таблицей умножения
$$u_s^i c = c^{s^i} u_s^i, \quad u_s^n = a$$
для всех $i = 1, \ldots, n$ и $c \in Z$.
4. *Символ-алгебры* $(a, b)_n$. Эти алгебры также имеют простое множество образующих и определяющих соотношений. Пусть $\rho_n \in F$ — примитивный корень степени n из единицы и $a, b \in F^*$. Тогда $(a, b)_n$ — векторное F-пространство размерности n^2 с F-базисом
$$\{A^i B^j\}_{i,j=1,\ldots,n}$$
и таблицей умножения
$$A^j B^i = \rho_n^j B^i A^j, \quad A^n = a, \quad B^n = b.$$

Замечание 1.9. Ввиду простоты множеств образующих и определяющих соотношений интересным является рассмотрение свойств $\mathcal{P}$ алгебр быть после расширения скаляров алгебрами четырёх вышеперечисленных типов 1—4, особенно циклическими или символ-алгебрами (более общо, скрещёнными произведениями с группами Галуа простой структуры, например абелевыми).

Замечание 1.10. Произвольная центральная простая алгебра $\mathcal{A}/F$ не обязательно принадлежит одному из классов 1—4: У. Гамильтон в 1843 году доказал, что над полем $\mathbb{R}$ не всякая центральная простая алгебра матричная; А. Алберт [5] в 1932 году построил пример нециклической алгебры с делением, и позднее С. А. Амицур [6] в 1972 году доказал, что существуют нескрещённые произведения. Из этих результатов также следует, что не все алгебры являются символ-алгебрами.

Нам потребуются несколько известных фактов, связанных с вышеупомянутыми свойствами $\mathcal{P}$.

1. Если $\mathcal{P}$ — свойство алгебры быть матричной, то для всякой конечномерной центральной простой алгебры $\mathcal{A}/F$ задача 1.1 всегда имеет решение — так называемое поле расщепления для $\mathcal{A}$. Имеется много результатов о полях расщепления, являющихся регулярными расширениями поля F, полученных Э. Виттом, Р. Брауэром, П. Рокеттом, Ф. Шатле, А. Ковачем, А. Хойзером и другими. В этом случае также и проблема 1.2 имеет решение: многообразие Севери—Брауэра, соответствующее алгебре $\mathcal{A}$, обладает требуемыми свойствами.
2. В случае когда $\mathcal{P}$ — свойство быть скрещённым произведением с заданной конечной группой G и инъективным гомоморфизмом ограничения $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(E)$, ответ положительный. Добавление к [9, теорема 4] содержит доказательство следующего результата.

Теорема 1.11 (Д. Солтман). *Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра степени n и G — конечная группа порядка n. Тогда существует конечно порождённое расширение E/F, такое что*

1) *алгебра $\mathcal{A}_E$ изоморфна скрещённому произведению с группой G;*
2) *гомоморфизм ограничения $\mathrm{res}\colon \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(E)$ инъективен.*

Замечание 1.12. Для циклической группы G и $\rho_n \in F$ простое доказательство этого утверждения дано в [11, теорема 5.5.1].

Замечание 1.13. Первое упоминание о существовании положительного решения в случае циклических алгебр было в работе М. ван ден Берга и А. Шофилда [7]. Там же отмечено, что для заданной центральной алгебры с делением $\mathcal{A}$ над полем F существует регулярное расширение E/F, такое что $\mathcal{A}_E = \mathcal{A} \otimes_F E$ — циклическая алгебра (см. обсуждение после теоремы 2.6 в [7]).

Мы обобщаем это результат и доказываем существование регулярного расширение E/F, сохраняющего индексы всех центральных простых F-алгебр и такого, что все E-алгебры циклические.

Кроме того, нами построено квазиаффинное многообразие, такое что наличие у него L-рациональной точки влечёт существование у $\mathcal{A}_L$ максимального подполя, приходящего с заданного циклического расширения Z/F степени $\deg(\mathcal{A})$. (Факт существования для заданного циклического расширения Z/F степени $\deg(\mathcal{A})$ хотя бы одного регулярного расширения L/F, для которого $[LZ : L] = \deg(\mathcal{A})$ и LZ — максимальное подполе в $\mathcal{A}_L$, следует из [8, теорема 3.7].)

Более точно, в разделе 2 нами доказана следующая теорема.

Теорема 1.14. *Пусть F — поле. Тогда существует регулярное расширение E/F со следующими свойствами*:

1) *всякая центральная простая E-алгебра циклическая*;
2) $\mathrm{ind}(\mathcal{C}_E) = \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ *для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{C}$*;
3) $\exp(\mathcal{C}_E) = \exp(\mathcal{C})$ *для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{C}$*;
4) *гомоморфизм ограничения* $\mathrm{res}\colon \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(E)$ *инъективен.*

В разделах 3 и 4 мы устанавливаем справедливость следующих утверждений.

Теорема 1.15. *Пусть $\rho_n \in F$ и $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра степени n. Тогда существует квазиаффинное F-многообразие* $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$, *такое что для расширения L/F многообразие* $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$ *обладает L-рациональной точкой тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_L$ — символ-алгебра.*

Теорема 1.16. *Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая алгебра над полем F степени n и K/F — циклическое расширение степени n. Существует квазиаффинное F-многообразие $C(\mathcal{A}, K)$, такое что для расширения L/F со свойством $[KL : L] = [K : F]$ многообразие $C(\mathcal{A}, K)$ обладает L-рациональной точкой тогда и только тогда, когда KL — максимальное подполе в $\mathcal{A}_L$.*

В качестве приложений приведённых выше результатов покажем, как можно свести известную гипотезу А. А. Суслина об общем элементе приведённой группы Уайтхеда к случаю центральных алгебр с делением специального типа.

Напомним сначала несколько определений.

Для всякой центральной простой алгебры $\mathcal{A}/F$ определено отображение приведённой нормы $\mathrm{Nrd}_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to F$. Его ограничение на мультипликативную группу $\mathcal{A}^*$ алгебры $\mathcal{A}$ даёт гомоморфизм $\mathrm{Nrd}_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A}^* \to F^*$. Фактор-группа $\mathrm{SK}_1(\mathcal{A})$ ядра этого гомоморфизма по коммутанту группы $\mathcal{A}^*$ обычно называется приведённой группой Уайтхеда алгебры $\mathcal{A}$. Эта группа интересна по крайней мере в двух отношениях: в связи с гипотезой Кнезера—Титса для алгебраических групп [10] и в связи с проблемой рациональности для групповых алгебраических многообразий [10].

Гипотеза 1.17 (А. А. Суслин, 1991 г. [4, 21]). Пусть $\mathcal{A}/F$ — центральная простая алгебра, $\mathrm{ind}(\mathcal{A})$ взаимно прост с $\mathrm{char}(F)$, $\mathbb{G}$ — алгебраическая группа, определяемая $\mathrm{SL}(1, \mathcal{A})$, $F(\mathbb{G})$ — её поле функций, $\mathbb{G}\big(F(\mathbb{G})\big)$ — группа $F(\mathbb{G})$-рациональных точек многообразия $\mathbb{G}$. Если $\mathrm{ind}(\mathcal{A})$ не является свободным от квадратов, то общая точка $\xi \in \mathbb{G}\big(F(\mathbb{G})\big)$ приводит к нетривиальному общему элементу в группе $\mathrm{SK}_1\big(\mathcal{A} \otimes_F F(\mathbb{G})\big)$.

В настоящее время эта гипотеза доказана только в случае, когда $\mathrm{ind}(\mathcal{A})$ делится на 4 (см. [18]).

Замечание 1.18. Легко заметить, что для доказательства гипотезы Суслина достаточно доказать следующее утверждение: для всякой центральной простой алгебры $\mathcal{A}/F$ с не являющимся свободным от квадратов индексом $\mathrm{ind}(\mathcal{A})$ существует расширение E/F, такое что $\mathrm{SK}_1(\mathcal{A} \otimes_F E) \neq \{0\}$.

Используя приведённые выше результаты, немедленно получаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1.19. *Гипотеза Суслина верна тогда и только тогда, когда она верна для всех циклических алгебр.*

Комбинируя предыдущее утверждение с основным результатом из [3], замечаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1.20. *Гипотеза Суслина верна тогда и только тогда, когда она верна для всех циклических алгебр с делением вида* $(a,c)_p \otimes (b,d)_p$.

2. Цикличность после расширения скаляров

Для доказательства основного результата этого раздела — теоремы 1.14 — нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 2.1 [7, теорема 1.3; 20, теорема 13.10]. *Пусть* $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ — *центральные алгебры с делением над полем* F *индексов* m *и* n *соответственно. Пусть* $\mathrm{SB}(\mathcal{E})$ — *многообразие Севери—Брауэра алгебры* $\mathcal{E}$ *и* K — *его поле функций. Тогда*

$$\mathrm{ind}(\mathcal{D} \otimes_F K) = \text{НОД}\{\mathrm{ind}(\mathcal{D} \otimes_F \mathcal{E}^i)\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Замечание 2.2. Обычно последняя формула называется формулой редукции индекса.

Следствие 2.3. *Пусть* $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ — *центральные алгебры с делением над* F. *Пусть* K — *поле функций многообразия Севери—Брауэра* $\mathrm{SB}(\mathcal{E})$. *Предположим, что* $\mathrm{ind}(\mathcal{D})$ *взаимно прост с* $\mathrm{ind}(\mathcal{E})$. *Тогда* $\mathrm{ind}(\mathcal{D} \otimes_F K) = \mathrm{ind}(\mathcal{D})$.

Доказательство. Используем формулу редукции индекса. □

Лемма 2.4 [1, с. 200, упражнение 7]. *Пусть* E/F — *циклическое расширение степени* q^{l-1} (q — *простое число*). *Пусть также* $\mathrm{Gal}(E/F) = \langle\sigma\rangle$ *и* $(\mathrm{char}(F), q) = 1$. *Предположим, что найдётся элемент* $\beta \in E$, *такой что* $N_{E/F}(\beta) = \rho_q$ (ρ_q — *примитивный корень степени* q *из единицы*). *Пусть* $a \in E$ — *такой элемент, что* $a^\sigma/a = \beta^q$. *Тогда*

1) *для всякого элемента* $\lambda \in F^*$ *многочлен* $x^q - \lambda a$ *неприводим над* E,
2) *если* θ — *корень этого многочлена, то* $E(\theta)$ — *циклическое расширение поля* F *степени* q^l.

Следующий результат будет использоваться нами только в случае $p = 2$, однако ради полноты изложения мы приводим его доказательство для любого p.

Лемма 2.5. *Предположим, что* $\rho_p \in F$. *Тогда для любого* $m \in \mathbb{N}$ *существует башня расширений полей*

$$F \subset K \subset E,$$

такая что

1) E/F — *регулярное расширение*;
2) E/K — *циклическое расширение степени* p^m;
3) $\operatorname{ind}(\mathcal{C}_E) = \operatorname{ind}(\mathcal{C})$ *для всякой центральной простой* F*-алгебры* $\mathcal{C}$.

Доказательство. Применим индукцию по m. Пусть $\mathcal{C}$ — центральная простая F-алгебра. При $m = 1$ можно взять $K = F(x)$ и $E = K(\sqrt[p]{x})$, где x — трансцендентная переменная над F.

Предположим, что лемма справедлива при $m = m_0$ (т. е. существует башня расширений полей $F \subset K_{m_0} \subset E_{m_0}$, такая что E_{m_0}/K_{m_0} — циклическое расширение степени $|E_{m_0} : K_{m_0}| = p^{m_0}$, расширение E_{m_0}/F регулярно и

$$\operatorname{ind}(\mathcal{C}_{E_{m_0}}) = \operatorname{ind}(\mathcal{C}),$$

и пусть $m = m_0 + 1$. Тогда $\mathcal{B} = (E_{m_0}/K_{m_0}, \sigma, \rho_p)$ — циклическая алгебра над полем K_{m_0}. Пусть также M — поле функций многообразия Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\mathcal{B})$.

Заметим, что композит ME_{m_0}/M — циклическое расширение степени p^{m_0}. Поскольку поле E_{m_0} расщепляет алгебру $\mathcal{B}$, то ME_{m_0} является чисто трансцендентным расширением поля E_{m_0}. Следовательно, расширение ME_{m_0}/F регулярно и

$$\operatorname{ind}(\mathcal{C}_{ME_{m_0}}) = \operatorname{ind}(\mathcal{C}_{E_{m_0}}) = \operatorname{ind}(\mathcal{C}).$$

Кроме того, M расщепляет $\mathcal{B}$. Тогда найдётся элемент $\beta \in ME_{m_0}$, такой что

$$N_{ME_{m_0}/M}(\beta) = \rho_p.$$

Пусть $a \in ME_{m_0}$ и $a^\sigma/a = \beta^p$. Пусть также y — ещё одна трансцендентная переменная. Тогда расширение $ME_{m_0}(y)/M(y)$ циклическое степени p^{m_0}. Ввиду леммы 2.4 получаем, что $ME_{m_0}(\sqrt[p]{ay})/M(y)$ — циклическое расширение степени p^{m_0+1}. Понятно, что расширение $ME_{m_0}(\sqrt[p]{ay})/F$ регулярно и

$$\operatorname{ind}\bigl(\mathcal{C}_{ME_{m_0}(\sqrt[p]{ay})}\bigr) = \operatorname{ind}(\mathcal{C}_{ME_{m_0}}) = \operatorname{ind}(\mathcal{C}). \qquad \square$$

Лемма 2.6. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует башня расширений полей*

$$F \subset K \subset E,$$

такая что E/F *— регулярное расширение,* E/K *— циклическое расширение степени* n *и*

$$\operatorname{ind}(\mathcal{C}_E) = \operatorname{ind}(\mathcal{C})$$

для всякой центральной простой F*-алгебры* $\mathcal{C}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $\operatorname{char}(F) = 2$ или $4 \nmid n$. Пусть x — трансцендентная переменная и v_x — нормирование поля $F(x)$, соответствующее многочлену x. Тогда ввиду [19, теорема 5] существует циклическое расширение $E/F(x)$ степени n, такое что пополнение E_{v_x} относительно нормирования v_x совпадает с полем $F(x)_{v_x}$. Заметим, что $F(x)_{v_x}$ совпадает с полем формальных степенных рядов $F((x))$. Следовательно,

$$\operatorname{ind}(\mathcal{C}) = \operatorname{ind}\bigl(\mathcal{C}_{F((x))}\bigr) = \operatorname{ind}(\mathcal{C}_{E_{v_x}})$$

для любой центральной простой F-алгебры $\mathcal{C}$. Тогда $\operatorname{ind}(\mathcal{C}) = \operatorname{ind}(\mathcal{C}_E)$.

Более того, поскольку поле F алгебраически замкнуто в E_{v_x}, то E/F — регулярное расширение.

Далее рассмотрим случай $\mathrm{char}(F) \neq 2$ и $4 \mid n$. Пусть $n = 2^s m$, где $2 \nmid m$. С учётом рассмотренного выше случая получаем существование башни расширений полей $F \subset K_1 \subset E_1$, такой что расширение E_1/F регулярно, E/K циклично степени m, а E_1 сохраняет индексы F-алгебр. Кроме того, из леммы 2.5 вытекает существование башни расширений полей $F \subset K_2 \subset E_2$, такой что E_2/F регулярно, E_2/K_2 циклично степени 2^s и $\mathrm{ind}(\mathcal{C}_{E_2}) = \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{C}$. Пусть $K = K_1K_2$, $E = E_1E_2$ — свободные над F композиты полей K_1, K_2 и E_1, E_2. Тогда расширение E/K циклическое степени n. Более того, так как E_i не изменяет индекс алгебры $\mathcal{C}$, то

$$\mathrm{ind}(\mathcal{C}) = \mathrm{ind}(\mathcal{C}_{E_1}) = \mathrm{ind}(\mathcal{C}_{E_1E_2}) = \mathrm{ind}(\mathcal{C}_E). \qquad \square$$

Установим теперь справедливость следующих фактов, необходимых нам в дальнейшем.

Лемма 2.7. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — центральные простые F-алгебры. Предположим, что $\mathrm{ind}(\mathcal{A}) = p^m$, $\mathrm{ind}(\mathcal{B}) = p^n$ и $m \geqslant n$. Тогда $\mathrm{ind}(\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}) \geqslant p^{m-n}$.*

Доказательство. Пусть E/F — расширение степени p^n, расщепляющее алгебру $\mathcal{B}$. Пусть также $\mathrm{ind}(\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}) = p^s$. Предположим, что $p^s < p^{m-n}$. Тогда существует расширение L/F степени p^s, расщепляющее $\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B}$. Следовательно,

$$1 \sim (\mathcal{A} \otimes_F \mathcal{B})_{EL} \sim \mathcal{A}_{EL} \otimes_{EL} \mathcal{B}_{EL} \sim \mathcal{A}_{EL}.$$

Таким образом, поле EL расщепляет алгебру $\mathcal{A}$. Так как $|EL : F| < p^m$, то $\mathrm{ind}(\mathcal{A}) < p^m$, и мы получаем противоречие. $\square$

Лемма 2.8. *Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра индекса $\mathrm{ind}(\mathcal{A}) = p^m$. Тогда $\mathrm{ind}(\mathcal{A}^{\otimes p}) < \mathrm{ind}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что существует поле расщепления L алгебры $\mathcal{A}$, такое что $|L : F| = \mathrm{ind}(\mathcal{A})$ и L содержит подполе K степени $|L : K| = p$. Тогда $\mathrm{ind}(\mathcal{A}_K) = p$. Следовательно, $1 = \mathrm{ind}(\mathcal{A}_K^{\otimes p})$. Таким образом,

$$\mathrm{ind}(\mathcal{A}^{\otimes p}) \leqslant |K : F| < |L : F| = \mathrm{ind}(\mathcal{A}). \qquad \square$$

Лемма 2.9. *Пусть K/F — циклическое расширение, $\langle \sigma_i \rangle = \mathrm{Gal}\big(K(z)/F(z)\big)$ и z — трансцендентная переменная. Пусть также $\mathcal{C}$ — центральная простая F-алгебра с делением, такая что $\mathcal{C}_K$ — алгебра с делением. Тогда $(K(z)/F(z), \sigma, z) \otimes \mathcal{C}_{F(z)}$ — $F(z)$-алгебра с делением.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.3 из [16]. $\square$

В обозначениях предыдущей леммы немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 2.10. *Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра и $\mathrm{ind}(\mathcal{A}_K) = \mathrm{ind}(\mathcal{A})$. Тогда*

$$\mathrm{ind}\big((K(z)/F(z), \sigma, z) \otimes \mathcal{A}_{F(z)}\big) = \mathrm{ind}\big((K(z)/F(z), \sigma, z)\big)\,\mathrm{ind}(\mathcal{A}).$$

Теорема 2.11. *Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая алгебра над полем F. Тогда существует регулярное расширение M/F, такое что*

1) *алгебра $\mathcal{A}_M$ циклическая*;
2) $\mathrm{ind}(\mathcal{C}_M) = \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ *для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{C}$*;
3) $\exp(\mathcal{C}_M) = \exp(\mathcal{C})$ *для всякой центральной простой F-алгебры $\mathcal{C}$*;
4) *гомоморфизм ограничения* $\mathrm{res}\colon \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(M)$ *инъективен.*

Более того, для всякого расширения L/F свободный над F композит ML сохраняет индексы L-алгебр.

Доказательство. Пусть $\deg(\mathcal{A}) = n = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}$ (p_i — различные простые числа) и $\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^{s} \mathcal{A}_i$, где $\mathrm{ind}(\mathcal{A}_i) = p_i^{l_i}$, $l_i \leqslant n_i$. По лемме 2.6 существует башня расширений полей $F \subset K \subset E$, такая что расширение E/F регулярно, E/K циклично степени n и E сохраняет индексы F-алгебр. Пусть E_i/K — циклическое подрасширение степени $p_i^{n_i}$.

Рассмотрим алгебры

$$\mathcal{D}_i = (E_i(z)/K(z), \sigma_i, z), \quad i = 1, \ldots, s,$$

где $\langle \sigma_i \rangle = \mathrm{Gal}\big(E_i(z)/K(z)\big)$ и z — трансцендентная переменная.

Положим

$$\mathcal{D} = \bigotimes_{i=1}^{s} \mathcal{D}_i.$$

Так как

$$\mathcal{D}_i \sim (E(z)/K(z), \sigma, z^{n/p^{n_i}}),$$

где $\langle \sigma \rangle = \mathrm{Gal}\big(E(z)/K(z)\big)$, имеем

$$\mathcal{D} \cong \Big(E(z)/K(z), \sigma, z^{\sum_{i=1}^{s} n/p^{n_i}}\Big).$$

Тогда $\mathcal{D}$ — циклическая алгебра индекса n с максимальным подполем $E(z)$.

Имеем

$$\mathcal{D} \sim \mathcal{D} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}^{\mathrm{op}} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}.$$

Пусть M — поле функций многообразия Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\mathcal{D} \otimes_{K(z)} \mathcal{A}_{K(z)}^{\mathrm{op}})$. Тогда $\mathcal{A}_M \sim \mathcal{D}_M$. Поскольку $\deg(\mathcal{A}_M) = \deg(\mathcal{D}_M)$, то $\mathcal{A}_M \cong \mathcal{D}_M$.

Пусть $\mathcal{C}$ — центральная простая F-алгебра и $\mathcal{C} = \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i$ — разложение алгебры $\mathcal{C}$ в тензорное произведение алгебр примарных индексов. Так как $\mathrm{ind}(\mathcal{C}_M) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{ind}(\mathcal{C}_{iM})$, то достаточно рассмотреть случай, когда алгебра $\mathcal{C}$ имеет примарный индекс. Кроме того, если $p_i \nmid \mathrm{ind}(\mathcal{C})$, $1 \leqslant i \leqslant s$, то $\mathrm{ind}(\mathcal{C}_M) = \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ по следствию 2.3. Таким образом, можно предполагать, что $\mathrm{ind}(\mathcal{C}) = p_i^{m_i}$ — степень простого числа p_i для некоторого $1 \leqslant i \leqslant s$.

Воспользуемся формулой редукции индекса. Получим

$$\mathrm{ind}(\mathcal{C}_M) = \text{НОД}\bigl\{\mathrm{ind}\bigl(\mathcal{D}^{\otimes j} \otimes_{K(z)} {\mathcal{A}^{\mathrm{op}}_{K(z)}}^{\otimes j} \otimes_{K(z)} \mathcal{C}_{K(z)}\bigr)\bigr\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Так как индекс $\mathrm{ind}(\mathcal{C})$ примарен, то

$$\mathrm{ind}(\mathcal{C}_M) = \min_{j=1}^{n_i}\bigl\{\mathrm{ind}\bigl(\mathcal{D}_i^{\otimes j} \otimes_{K(z)} {\mathcal{A}_i{}^{\mathrm{op}}_{K(z)}}^{\otimes j} \otimes_{K(z)} \mathcal{C}_{K(z)}\bigr)\bigr\}.$$

Рассмотрим алгебру

$$\mathcal{B}_{i,j} = \mathcal{D}_i^{\otimes j} \otimes_{K(z)} {\mathcal{A}_i{}^{\mathrm{op}}_{K(z)}}^{\otimes j} \otimes_{K(z)} \mathcal{C}_{K(z)}.$$

Ввиду следствия 2.10 получаем

$$\mathrm{ind}(\mathcal{B}_{i,j}) = \mathrm{ind}(\mathcal{D}_i^{\otimes j})\,\mathrm{ind}(\mathcal{A}_i{}^{\mathrm{op}\otimes j}_K \otimes_K \mathcal{C}_K).$$

Зафиксируем некоторое j. Пусть $j = {p_i}^t j_1$, где $p_i \nmid j_1$. Тогда $\mathrm{ind}(\mathcal{D}_i^{\otimes j}) = p_i^{n_i - t}$. Пусть $\mathrm{ind}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}\otimes j}) = p_i^{s_i}$. Тогда из леммы 2.8 следует, что $s_i \leqslant l_i - t$. Следовательно, по лемме 2.7

$$\mathrm{ind}(\mathcal{B}_{i,j}) = p_i^{n_i - t} p_i^{|s_i - m_i|} = p_i^{n_i - t + |s_i - m_i|}.$$

Наконец, рассмотрим два случая.

1. Если $s_i \geqslant m_i$, то $n_i - t \geqslant m_i$ и $n_i - t + |s_i - m_i| \geqslant m_i$.
2. Если $s_i < m_i$, то $n_i - t + |s_i - m_i| = n_i - t - s_i + m_i \geqslant m_i$.

Следовательно, $\mathrm{ind}(\mathcal{B}_{i,j}) \geqslant p^{m_i} = \mathrm{ind}(\mathcal{C})$ для всякого j. Таким образом, $\mathrm{ind}(\mathcal{C}_M) = \mathrm{ind}(\mathcal{C})$.

Заметим, что расширение M/F сохраняет индексы всех F-алгебр, а это влечёт также сохранение экспонент F-алгебр. Действительно, предположим, что $\mathcal{C}_M^{\otimes m} \sim 1$ для некоторой центральной простой F-алгебры $\mathcal{C}$. Поскольку

$$1 = \mathrm{ind}(\mathcal{C}_M^{\otimes m}) = \mathrm{ind}(\mathcal{C}^{\otimes m}),$$

то $\mathcal{C}^{\otimes m} \sim 1$. Таким образом, $\exp(\mathcal{C}_M) = \exp(\mathcal{C})$. Более того, сохранение экспонент, в свою очередь, влечёт инъективность гомоморфизма ограничения $\mathrm{res}\colon \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(M)$.

Рассмотрим последнее утверждение о свободном композите. Свободный композит LM может быть построен с помощью процедуры, аналогичной процедуре построения поля M, следует лишь заменить поле F на поле L. Далее утверждение о сохранении индексов L-алгебр получается автоматически. □

Замечание 2.12. Нетрудно заметить, что сохранение экспонент всех F-алгебр не влечёт сохранения индексов.

Докажем теперь наш основной результат.

Доказательство теоремы 1.14. Прежде всего заметим, что сохранение индексов влечёт сохранение экспонент и инъективность гомоморфизма ограничения.

Докажем теперь, что для всякого поля K существует регулярное расширение, превращающее все K-алгебры в циклические и сохраняющее их индексы.

Если множество I центральных простых K-алгебр счётно, то построим последовательность расширений полей

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_i \subset E_{i+1} \subset \ldots,$$

такую что E_{i+1} — регулярное расширение поля E_i, сохраняющее индексы E_i-алгебр, а ${\mathcal{A}_{i+1}}_{E_i}$ — циклическая алгебра. Тогда поле $E = \bigcup\limits_i E_i$ имеет требуемые свойства.

Наконец, если I не является счётным, то воспользуемся леммой Цорна. Действительно, пусть

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l|l} & \text{для всякого расширения } L/F \text{ свободный} \\ \text{регулярные} & \text{композит } LK \text{ над } F \text{ сохраняет} \\ \text{расширения } K/F & \text{индексы } L\text{-алгебр и существует} \\ & F\text{-алгебра } \mathcal{A}, \text{ такая что } \mathcal{A}_K \text{ циклическая} \end{array} \right\}$$

(предполагается, что все поля в $\mathcal{M}$ погружены в некоторую универсальную область). Включения полей определяют частичный порядок на этом множестве. Для совершенно упорядоченного подмножества $\mathcal{S} = \{K_\alpha\} \subset \mathcal{M}$ его верхней границей будет $\bigcup\limits_\alpha K_\alpha$. Следовательно, по лемме Цорна существует максимальный элемент E в $\mathcal{M}$. Покажем, что поле E имеет требуемые свойства. Предположим, что найдётся F-алгебра $\mathcal{A}$, такая что $\mathcal{A}_E$ не является циклической. По теореме 2.11 существует такое расширение $E_1 \in \mathcal{M}$, что алгебра $\mathcal{A}_{E_1}$ циклическая. Тогда $E_1 E$ принадлежит $\mathcal{M}$ и содержит E. Противоречие.

Завершим доказательство теоремы. Пусть K_0 — поле, превращающее все F-алгебры в циклические и сохраняющее их индексы. Рассмотрим поле K_1, превращающее все K_0-алгебры в циклические и сохраняющее их индексы, и т. д. Тогда поле $\bigcup\limits_i K_i$ обладает требуемыми свойствами. $\square$

3. Многообразие $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$

Доказательство основного результата предварим одним из определений многообразия Севери—Брауэра.

Для заданного векторного F-пространства V размерности n пусть $\mathrm{Grass}_F(m, V)$ — множество подпространств размерности m. На $\mathrm{Grass}_F(m, V)$ задаётся структура проективного многообразия с помощью плюккерова вложения. Пусть $\bigwedge^m V$ — m-я внешняя степень пространства V и $\mathbb{P}\left(\bigwedge^m V\right)$ — проективное пространство, соответствующее векторному пространству $\bigwedge^m V$. Тогда существует отображение (плюккерово вложение)

$$\mathrm{Grass}_F(m, V) \to \mathbb{P}\Big(\bigwedge\nolimits^m V\Big),$$
$$Fw_1 \oplus Fw_2 \oplus \ldots \oplus Fw_m \mapsto F(w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_m).$$

Зафиксируем базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ для V, тогда $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$, является базисом для $\bigwedge^m V$. Последний, в свою очередь, определяет проективные координаты для точки $F(w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_m)$.

Далее, пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая F-алгебра с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_{n^2}$. Многообразие Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\mathcal{A})$ определяется как подмногообразие грассманиана $\mathrm{Grass}_F(n, \mathcal{A})$, состоящее из точек, соответствующих правым идеалам в $\mathcal{A}$. Это условие может быть выражено с помощью полиномиальных уравнений следующим образом (см. [13, с. 112]).

Пусть $T \subset \mathcal{A}^*$ — такое подмножество, что мультипликативная группа, им порождённая, содержит базис алгебры $\mathcal{A}$. Пусть

$$I = F(w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_n) \in \mathrm{Grass}_F(n, \mathcal{A}),$$

т. е. I соответствует векторному пространству

$$W = Fw_1 \oplus Fw_2 \oplus \ldots \oplus Fw_n \subset \mathcal{A}.$$

Тогда W — правый идеал в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

$$I = F(w_1 t \wedge w_2 t \wedge \ldots \wedge w_n t)$$

для всех $t \in T$.

Для $t \in T$ пусть

$$e_i t = \sum a_{ij} e_j. \tag{3.1}$$

Тогда

$$e_{i_1} t \wedge e_{i_2} t \wedge \ldots \wedge e_{i_n} t = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant n^2} t_{j_1, \ldots, j_n, i_1, \ldots, i_n} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \ldots \wedge e_{j_n},$$

где

$$t_{j_1, \ldots, j_n, i_1, \ldots, i_n} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_n j_1} & \ldots & a_{i_n j_n} \end{vmatrix}.$$

Для

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant n^2} p_{i_1, \ldots, i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$$

имеем

$$w_1 t \wedge w_2 t \wedge \ldots \wedge w_n t = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant n^2} q_{i_1, \ldots, i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_n},$$

где

$$q_{i_1, \ldots, i_n} = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant n^2} t_{i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n} p_{j_1, \ldots, j_n}.$$

Таким образом, $F(w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_n) = F(w_1 t \wedge w_2 t \wedge \ldots \wedge w_n t)$ тогда и только тогда, когда их плюккеровы координаты пропорциональны, т. е.

$$q_{i_1, \ldots, i_n} p_{j_1, \ldots, j_n} = q_{j_1, \ldots, j_n} p_{i_1, \ldots, i_n}.$$

Следовательно, всякий $t \in T$ определяет следующее множество полиномиальных уравнений для $\mathrm{SB}(\mathcal{A})$:

$$\Bigl(\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_n\leqslant n^2} t_{i_1,\ldots,i_n,k_1,\ldots,k_n}\xi_{k_1,\ldots,k_n}\Bigr)\xi_{j_1,\ldots,j_n} - \\ - \Bigl(\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_n\leqslant n^2} t_{j_1,\ldots,j_n,k_1,\ldots,k_n}\xi_{k_1,\ldots,k_n}\Bigr)\xi_{i_1,\ldots,i_n} = 0,$$

где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant n^2$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant n^2$.

Таким образом, многообразие Севери—Брауэра алгебры $\mathcal{A}$ задаётся в $\mathrm{Grass}_F(n, \mathcal{A})$ этой системой уравнений для всех $t \in T$.

Пусть $\rho_n \in F$ и $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра степени m. Положим

$$\mathcal{D} = (x, y)_n \otimes_{F(x,y)} \mathcal{B}_{F(x,y)},$$

где $F(x, y)$ — чисто трансцендентное расширение поля F. Пусть $\sqrt[n]{x}^i\,\sqrt[n]{y}^j$, $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$, — стандартный базис для алгебры $(x, y)_n$ и $v_1, \ldots, v_{m^2}$ — базис для $\mathcal{B}$ над F, состоящий из обратимых элементов. Тогда $\sqrt[n]{x}^i\,\sqrt[n]{y}^j v_l$, $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$, $1 \leqslant l \leqslant m^2$, — базис для $\mathcal{D}$ над $F(x, y)$.

Используя описанную выше процедуру, построим уравнения для многообразия Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\mathcal{D})$. Рассмотрим сначала стандартные многочлены $G_j \in F(x,y)[\xi_0, \ldots, \xi_N]$, $j \in J$, определяющие грассманиан $\mathrm{Grass}(nm, \mathcal{D}) \subset \mathbb{P}^N$, где $N = C^{nm}_{n^2m^2} - 1$. Заметим, что коэффициенты многочленов G_j, $j \in J$, принадлежат множеству $\{\pm 1, 0\}$.

Положим

$$T_{\mathcal{D}} = \bigl\{\sqrt[n]{x},\ \sqrt[n]{y}, v_1, \ldots, v_{m^2}\bigr\}.$$

Мультипликативная группа, порождённая множеством $T_{\mathcal{D}}$, содержит базис алгебры $\mathcal{D}$ над $F(x, y)$. Тогда всякий $t \in T_{\mathcal{D}}$ определяет семейство полиномиальных уравнений $\bigl\{F_i^{(t)}\bigr\}$, $i \in I_t$, многообразия $\mathrm{SB}(\mathcal{D})$. Заметим, что

$$\bigl\{F_i^{(t)}\bigr\} \in F[x, y][\xi_0, \ldots, \xi_N], \quad i \in I_t.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что для всякого $t \in T_{\mathcal{D}}$ коэффициенты a_{ij} из (3.1) принадлежат $F[x, y]$. Действительно, если $t = v_l$, то

$$\bigl(\sqrt[n]{x}^i\,\sqrt[n]{y}^j v_k\bigr)v_l = \sqrt[n]{x}^i\,\sqrt[n]{y}^j\Bigl(\sum a_s v_s\Bigr)$$

для некоторого $a_s \in F$. Если $t = \sqrt[n]{x}$, то

$$\bigl(\sqrt[n]{x}^i\,\sqrt[n]{y}^j v_k\bigr)\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \rho_n^j\,\sqrt[n]{x}^{i+1}\,\sqrt[n]{y}^j v_k, & \text{если}\ \ i < n-1,\\ x\rho_n^j\,\sqrt[n]{y}^j v_k, & \text{если}\ \ i = n-1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Подобные соотношения имеют место и для $\sqrt[n]{y}$.

Далее, пусть L/F — расширение полей и $a, b \in L^*$. Рассмотрим алгебру

$$\bar{\mathcal{D}} = (a, b)_n \otimes_L \mathcal{B}_L.$$

Тогда $\sqrt[n]{a}^{\,i}\sqrt[n]{b}^{\,j}v_l$, $0\leqslant i,j\leqslant n-1$, $1\leqslant l\leqslant m^2$, — базис для $\bar{\mathcal{D}}$ над L. Более того, мультипликативная группа, порождённая множеством $\{\sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{b},\ v_l \mid 1\leqslant l\leqslant m^2\}$, содержит базис алгебры $\bar{\mathcal{D}}$ над L. Следовательно, это множество может быть использовано для построения уравнений многообразия Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\bar{\mathcal{D}})$.

Специализируя x и y в (3.2) ($x\mapsto a$, $y\mapsto b$), мы немедленно приходим к равенствам

$$\left(\sqrt[n]{a}^{\,i}\sqrt[n]{b}^{\,j}v_k\right)\sqrt[n]{a}=\begin{cases}\rho_n^j\sqrt[n]{a}^{\,i+1}\sqrt[n]{b}^{\,j}v_k, & \text{если } i<n-1,\\ a\rho_n^j\sqrt[n]{b}^{\,j}v_k, & \text{если } i=n-1.\end{cases}$$

Подобные соотношения имеют место для $\sqrt[n]{b}$ и v_l, $1\leqslant l\leqslant m^2$.

Следовательно, многочлены из $L[\xi_1,\ldots,\xi_N]$, задающие многообразие $\mathrm{SB}(\bar{\mathcal{D}})$, получаются специализацией $x\mapsto a$, $y\mapsto b$ многочленов из $F[x,y][\xi_1,\ldots,\xi_N]$, определяющих $\mathrm{SB}(\mathcal{D})$.

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть $\rho_n\in F$, $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра степени m. Пусть также $\mathcal{D}=(x,y)_n\otimes_{F(x,y)}\mathcal{B}_{F(x,y)}$. Тогда многообразие Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\mathcal{D})$ алгебры $\mathcal{D}$ может быть задано такими многочленами в $F[x,y][\xi_0,\ldots,\xi_N]$ ($N=C^{nm}_{n^2m^2}-1$), что для любого расширения L/F и $a,b\in L^*$ их специализация $x\mapsto a$, $y\mapsto b$ даёт многочлены в $L[\xi_0,\ldots,\xi_N]$, определяющие многообразие Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\bar{\mathcal{D}})$ алгебры $\bar{\mathcal{D}}=(a,b)_n\otimes_L\mathcal{B}_L$.*

Теперь мы можем доказать основной результат этого раздела.

Доказательство теоремы 1.15. Пусть

$$\mathcal{D}=(x,y)_n\otimes_{F(x,y)}\mathcal{A}^{\mathrm{op}}_{F(x,y)},$$

где $F(x,y)$ — чисто трансцендентное расширение поля F.

Многообразие Севери—Брауэра алгебры $\mathcal{D}$ — подмногообразие проективного пространства $\mathbb{P}^N_{F(x,y)}$, где $N=C^n_{n^2}-1$. Пусть $F_j\in F[x,y][\xi_0,\ldots,\xi_N]$, $j\in J$, — многочлены, определяющие $\mathrm{SB}(\mathcal{D})$, построенные в доказательстве леммы 3.1. Рассмотрим многочлены F_j как многочлены из $F[x,y,\xi_0,\ldots,\xi_N]$. Тогда эти многочлены определяют аффинное многообразие $X\subset\mathbb{A}^{N+3}_F$. Для $H\in F[x,y,\xi_0,\ldots,\xi_N]$ через $D(H)$ обозначим открытое дополнение в $\mathbb{A}^{N+3}_F$ к многообразию, определённому многочленом H. Пусть

$$\mathrm{Symb}(\mathcal{A})=X\cap D(x)\cap D(y)\cap\left(\bigcup_{i=0}^{N}D(\xi_i)\right).$$

Покажем, что многообразие $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$ обладает требуемыми свойствами. Предположим, что $(x_0,y_0,c_0,\ldots,c_N)\in\mathrm{Symb}(\mathcal{A})(L)$ для некоторого расширения L/F. Следовательно,

$$F_j(x_0,y_0,c_0,\ldots,c_N)=0 \tag{3.3}$$

для всех $j \in J$. Заметим, что специализация $x \mapsto x_0$, $y \mapsto y_0$ многочленов $F_j \in F[x, y, \xi_0, \ldots, \xi_N]$ даёт многочлены, определяющие многообразие Севери—Брауэра алгебры $(x_0, y_0)_n \otimes_L \mathcal{A}_L^{\mathrm{op}}$. Условие (3.3) показывает, что $\mathrm{SB}\big((x_0, y_0)_n \otimes_L \mathcal{A}_L^{\mathrm{op}}\big)$ обладает L-рациональной точкой. Тогда $(x_0, y_0)_n \otimes_L \mathcal{A}_L^{\mathrm{op}}$ — матричная алгебра, т. е. алгебра $(x_0, y_0)_n$ Брауэр-эквивалентна алгебре $\mathcal{A}_L$. Так как $\deg(\mathcal{A}_L) = \deg\big((x_0, y_0)_n\big)$, то $(x_0, y_0) \cong \mathcal{A}_L$.

Предположим, что $(x_0, y_0)_n \cong \mathcal{A}_L$ для некоторых $x_0, y_0 \in L^*$. Тогда $\mathrm{SB}\big((x_0, y_0)_n \otimes \mathcal{A}_L^{\mathrm{op}}\big)$ обладает L-рациональной точкой, обозначим её через $(c_0, \ldots, c_N)$. Получаем, что $F_j(x_0, y_0, c_0, \ldots, c_N) = 0$ для всех $j \in J$. Следовательно, $(x_0, y_0, c_0, \ldots, c_N) \in X$. Поскольку $x_0, y_0 \in L^*$ и некоторые из c_i не равны 0, то $(x_0, y_0, c_0, \ldots, c_N) \in \mathrm{Symb}(\mathcal{A})$. $\square$

Наконец, нетрудно доказать следующее свойство многообразия $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$.

Предложение 3.2. *Пусть $\mathcal{A}/F$ — центральная простая алгебра. Тогда*

$$\mathrm{Symb}(\mathcal{A} \otimes_F K) = \mathrm{Symb}(\mathcal{A}) \times_F K$$

для всякого расширения K/F.

4. Многообразие $C(\mathcal{A}, K)$

Пусть $\mathcal{A}/F$ — центральная простая алгебра степени n и K/F — циклическое расширение степени n.

Рассмотрим $F(x)$-алгебру $\mathcal{C} = \big(K(x)/F(x), \sigma, x\big)$, где $\mathrm{Gal}\big(K(x)/F(x)\big) = \langle\sigma\rangle$. Имеем $\mathcal{C} = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} u_{\sigma^i} K(x)$ и

$$u_{\sigma^i} u_{\sigma^j} = \begin{cases} u_{\sigma^{i+j}}, & \text{если } \ i + j < n, \\ x u_{\sigma^{i+j-n}}, & \text{если } \ i + j \geqslant n. \end{cases}$$

Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — базис F-векторного пространства K и $v_1, \ldots, v_{n^2}$ — базис центральной простой F-алгебры $\mathcal{B}$ степени n, состоящий из обратимых элементов. Тогда мультипликативная группа, порождённая множеством $\{u_\sigma, b_1, \ldots, b_n, v_1, \ldots, v_{n^2}\}$, содержит базис алгебры $\mathcal{D} = \mathcal{C} \otimes_{F(x)} \mathcal{B}_{F(x)}$. Как и в разделе 3, можно построить многочлены $F_j \in F(x)[\xi_0, \ldots, \xi_N]$, $j \in J$, определяющие многообразие Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\mathcal{D})$, где $N = C_{n^4}^{n^2} - 1$. Более того, можно показать, что эти многочлены имеют коэффициенты не просто в $F(x)$, а в $F[x]$.

Пусть L/F — такое расширение полей, что $[LK : L] = [K : F]$. Для $a \in L^*$ рассмотрим алгебру $\bar{\mathcal{D}} = (LK/L, \tau, a) \otimes_L \mathcal{B}_L$, где $\mathrm{Gal}(LK/L) = \langle\tau\rangle$. Имеем $(LK/L, \tau, a) = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} w_{\tau^i} LK$ и

$$w_{\tau^i} w_{\tau^j} = \begin{cases} w_{\tau^{i+j}}, & \text{если } \ i + j < n, \\ a w_{\tau^{i+j-n}}, & \text{если } \ i + j \geqslant n. \end{cases}$$

Так как $[LK : L] = [K : F]$, то $b_1, \ldots, b_n$ — базис L-векторного пространства LK. Тогда мультипликативная группа, порождённая множеством $\{w_\tau, b_1, \ldots, b_n, v_1, \ldots, v_{n^2}\}$, содержит базис алгебры $\bar{\mathcal{D}}$.

Действуя как в доказательстве леммы 3.1, получаем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{B}$ — центральная простая F-алгебра степени n, K/F — циклическое расширение степени n. Пусть также*

$$\mathcal{D} = (K(x)/F(x), \sigma, x) \otimes_{F(x)} \mathcal{B}_{F(x)}.$$

Тогда многообразие Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\mathcal{D})$ алгебры $\mathcal{D}$ может быть задано такими многочленами из $F[x][\xi_0, \ldots, \xi_N]$, что для любого расширения L/F и $a \in L^*$ их специализация $x \mapsto a$ даёт многочлены в $L[\xi_0, \ldots, \xi_N]$, определяющие многообразие Севери—Брауэра $\mathrm{SB}(\bar{\mathcal{D}})$ алгебры $\bar{\mathcal{D}} = (LK/L, \tau, a) \otimes_L \mathcal{B}_L$.

Доказательство теоремы 1.16. Пусть

$$\mathcal{D} = (K(x)/F(x), \sigma, x) \otimes_{F(x)} \mathcal{A}_{F(x)},$$

где $F(x)$ — чисто трансцендентное расширение поля F.

Многообразие Севери—Брауэра алгебры $\mathcal{D}$ — замкнутое подмногообразие проективного пространства $\mathbb{P}^N_{F(x)}$, где $N = C^{n^2}_{n^4} - 1$. Пусть $F_j \in F[x][\xi_0, \ldots, \xi_N]$, $j \in J$, — многочлены, задающие многообразие $\mathrm{SB}(\mathcal{D})$, построенные в доказательстве леммы 4.1. Рассмотрим F_j как многочлены в $F[x, \xi_0, \ldots, \xi_N]$. Тогда эти многочлены определяют аффинное многообразие $X \subset \mathbb{A}^{N+2}_F$. Для $H \in F[x, \xi_0, \ldots, \xi_N]$ через $D(H)$ обозначим открытое дополнение в $\mathbb{A}^{N+2}_F$ многообразия, задаваемого многочленом H. Положим

$$C(\mathcal{A}, K) = X \cap D(x) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{N} D(\xi_i) \right).$$

Оставшаяся часть доказательства теоремы использует рассуждения, аналогичные применявшимся при доказательстве теоремы 2.11. □

Как и в случае многообразия $\mathrm{Symb}(\mathcal{A})$, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — центральная простая алгебра над полем F степени n и K/F — циклическое расширение степени n. Пусть также L/F — такое расширение, что $|K : F| = |LK : L|$. Тогда*

$$C(\mathcal{A} \otimes_F L, LK) = C(\mathcal{A}, K) \times_F L.$$

Литература

[1] Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. Гл. IV—VI. — М.: Наука. 1965.

[2] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир. 1986.

[3] Прокопчук А. В., Тихонов С. В., Янчевский В. И. Об общих элементах в группах SK_1 для центральных простых алгебр // Весці НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. навук. — 2008. — № 3. — С. 35—42.

[4] Суслин А. А. Снова об SK_1 алгебр с делением и о когомологиях Галуа // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. — 2005. — Т. 12.

[5] Albert A. A. A construction of non-cyclic normal division algebras // Bull. Amer. Math. Soc. — 1932. — Vol. 38, no. 6. — P. 449—456.

[6] Amitsur S. A. On central division algebras // Israel J. Math. — 1972. — Vol. 12. — P. 408—420.

[7] Van den Berg M., Schofield A. The index of a Brauer class on a Brauer—Severi variety // Trans. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 333, no. 2. — P. 729—739.

[8] Van den Berg M., Schofield A. Division algebra coproducts of index n // Trans. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 341, no. 2. — P. 505—517.

[9] Berhuy G., Frings C. On the second trace form of central simple algebras in characteristic two // Manuscripta Math. — 2001. — Vol. 106. — P. 1—12.

[10] Gille Ph. Le problème de Kneser—Tits // Séminaire BOURBAKI 60ème année. — 2006—2007. — No. 983.

[11] Gille Ph., Szamuely T. Central Simple Algebras and Galois Cohomology. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. — (Cambridge Stud. Adv. Math.; Vol. 101).

[12] Harris J. Algebraic Geometry. A First Course. — New York: Springer, 1992. — (Grad. Texts Math.; Vol. 133).

[13] Jacobson N. Finite-Dimensional Division Algebras. — Berlin: Springer, 1996.

[14] De Jong A. J. The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface // Duke Math. J. — 2004. — Vol. 123, no. 1. — P. 71—94.

[15] Kersten I., Rehmann U. Excellent algebraic groups. I // J. Algebra. — 1998. — Vol. 200, no. 1. — P. 334—346.

[16] Kunyavskiĭ B. È., Rowen L. H., Tikhonov S. V., Yanchevskiĭ V. I. Bicyclic algebras of prime exponent over function fields // Trans. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 358, no. 6. — P. 2579—2610.

[17] Lieblich M. Twisted sheaves and the period-index problem // Compositio Math. — 2008. — Vol. 144, no. 1. — P. 1—31.

[18] Merkurjev A. S. Generic element in SK_1 for simple algebras // K-Theory. — 1993. — Vol. 7. — P. 1—3.

[19] Miki H. On Grunwald—Hasse—Wang's theorem // J. Math. Soc. Japan. — 1978. — Vol. 30, no. 2. — P. 313—325.

[20] Saltman D. J. Lectures on Division Algebras. — Providence: Amer. Math. Soc., 1999.

[21] Suslin A. A. SK_1 of division algebras and Galois cohomology // Algebraic K-Theory. — Providence: Amer. Math. Soc., 1991. — (Adv. Soviet Math.; Vol. 4). — P. 75—99,