УДК 517.44

А.Г. ДЕЙЦЕВА

АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В БАЗИСЕ КОЙФЛЕТОВ

In the present paper an approximation of differential operator by means of multiresolution analyses, generated by Coifman scaling function is established. The accuracy of approximation is found. Formula of numerical differentiation and estimation of its error are received.

С использованием исследований И. Добеши [1, 2] в работах [3, 4] Дж. Бейлкин, Р. Койфман и В. Рохлин получили вейвлет-представления некоторых операторов и установили их свойства в базисе вейвлетов Добеши. На основании этих результатов были разработаны алгоритмы нахождения численного решения некоторых дифференциальных и интегральных уравнений [5–7].

Настоящая работа посвящена аппроксимации оператора дифференцирования $T=\frac{d^n}{dx^n}$, $n\in\mathbf{N}$ – фиксированное число, в базисе койфлетов. В базисе койфлетов аппроксимация оператора дифференцирования значительно проще, чем в базисе вейвлетов Добеши, что позволило получить формулу численного дифференцирования и оценки погрешности аппроксимации (в [3, 4] такие исследования не проводились).

1. Аппроксимация гладких функций в базисе койфлетов

Пусть $\{V_j, j\in\mathbf{Z}\}$ – КМА пространства $L_2(\mathbf{R})$, порожденный масштабирующей функцией Койфмана [1, 2] $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ порядка $L=2K$, $K\in\mathbf{N}$, $\psi\in L_2(\mathbf{R})$ – соответствующий койфлет. При этом функции φ и ψ непрерывны и обладают следующими свойствами (см. [2]):

$$\int_{\mathbf{R}}\varphi(x)dx=1,\ \int_{\mathbf{R}}x^l\varphi(x)dx=0,\ l=\overline{1,L-1},\ \operatorname{supp}\varphi\subseteq[-L,2L-1],\tag{1}$$

$$\int_{\mathbf{R}}x^l\psi(x)dx=0,\ l=\overline{0,L-1},\ \operatorname{supp}\psi\subseteq[-2L+1,L].\tag{2}$$

Согласно определению КМА произвольная функция $f\in L_2(\mathbf{R})$ может быть представлена как предел последовательных приближений $P_jf\in V_j$, $j\in\mathbf{Z}$, определенных следующим образом:

$$P_jf(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_{jk}\,\varphi_{jk}(x),\ x\in\mathbf{R},\ j\in\mathbf{Z},\tag{3}$$

$$\alpha_{jk}=\int_{\mathbf{R}}f(x)\,\varphi_{jk}(x)\,dx,\ \ j,k\in\mathbf{Z},\tag{4}$$

где система функций

$$\varphi_{jk}(x)=2^{j/2}\varphi\left(2^jx-k\right),\ x\in\mathbf{R},\ \ j,k\in\mathbf{Z},\tag{5}$$

образует ортонормированный базис пространства V_j.

Далее будем полагать, что функция $f\in C^L(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$, а масштабирующая функция $\varphi\in C^n(\mathbf{R})$, $n+1<L$.

Для аппроксимирующих вейвлет-коэффициентов (4) имеем

$$\alpha_{jk}=2^{j/2}\int_{\mathbf{R}}f(x)\,\varphi\left(2^jx-k\right)dx=2^{-j/2}\int_{\mathbf{R}}f\left(2^{-j}x+2^{-j}k\right)\varphi(x)\,dx,\ \ j,k\in\mathbf{Z}.$$

Отсюда, используя формулу Тейлора для функции $f:x\to f\left(2^{-j}x+2^{-j}k\right)$ в окрестности точки $x=0$ и тождества (1), получим, что

$$\alpha_{jk}=2^{-j/2}f\left(2^{-j}k\right)+2^{-j/2}\int_{\mathbf{R}}\frac{f^{(L)}\left(2^{-j}(k+\theta x)\right)}{L!}\left(2^{-j}x\right)^L\varphi(x)\,dx\le$$

$$\le s_{jk}+\frac{2^{-j/2}\left((2L-1)^{L+1}+L^{L+1}\right)}{(L+1)!\,2^{jL}}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|f^{(L)}(x)\right|\sup_{x\in\mathbf{R}}|\varphi(x)|,\ \ 0<\theta<1,\ \ j,k\in\mathbf{Z}.$$

Таким образом, для достаточно больших $j\in\mathbf{Z}$

$$\alpha_{jk}\approx s_{jk},\ \ k\in\mathbf{Z},$$

где $s_{jk} = 2^{-j/2} f\left(2^{-j} k\right),\ \ j,k \in \mathbf{Z}.$ При этом погрешность приближения

$$\left|\alpha_{jk} - s_{jk}\right| \le C_1\, 2^{-j/2}\, 2^{-jL} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right|,\ \ j,k \in \mathbf{Z}, \tag{6}$$

где C_1 – положительная постоянная, не зависящая ни от j, ни от f.

Лемма 1. *Пусть* φ *и* ψ *– масштабирующая функция Койфмана и койфлет порядка* $L = 2K$, $K \in \mathbf{N}$, *соответственно функция* $f \in C^L(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$ *такова, что* $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(l)}(x) \right| < +\infty,\ \ l = \overline{1,L}.$ *Тогда для всех* $x \in \mathbf{R}$ *справедливо неравенство*

$$\left|f(x) - P_j f(x)\right| \le C_2\, 2^{-jl} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(l)}(x) \right|,\ \ l = \overline{1,L},\ \ j \in \mathbf{Z},$$

где C_2 *– положительная постоянная, не зависящая ни от* j, *ни от* f, *а оператор* $P_j f$ *определен соотношением* (3).

Доказательство. Для детализирующих вейвлет-коэффициентов β_{Jk} имеем, что

$$\beta_{Jk} = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\psi_{Jk}(x)\,dx = 2^{-J/2} \int_{\mathbf{R}} f\left(2^{-J} x + 2^{-J} k\right) \psi(x)\,dx,\ \ J,k \in \mathbf{Z}.$$

Используя формулу Тейлора для функции $f : x \to f\left(2^{-J} x + 2^{-J} k\right)$ в окрестности точки $x = 0$ и учитывая (2), получим

$$\beta_{Jk} = 2^{-Jl - J/2} \int_{\mathbf{R}} \frac{f^{(l)}\left(2^{-J}\left(k + \theta x\right)\right)}{l!}\, x^l\, \psi(x)\,dx \le \tilde{C}_2\, 2^{-Jl-J/2} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(l)}(x) \right|,$$

$$0 < \theta < 1,\ \ l = \overline{1,L},\ \ J,k \in \mathbf{Z},\ \text{где}\ \tilde{C}_2 = \frac{\left(2l-1\right)^{l+1} + l^{l+1}}{(l+1)!} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \psi(x) \right|.$$

Таким образом,

$$\left| f(x) - P_j f(x) \right| = \left| \sum_{J\ge j} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \beta_{Jk}\, \psi_{Jk}(x) \right| \le \sum_{J\ge j} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left| \beta_{Jk} \right| \left| \psi_{Jk}(x) \right| \le$$

$$\le \tilde{C}_2 \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(l)}(x) \right| \sum_{J\ge j} \sum_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-Jl} \left| \psi\left(2^J x - k\right) \right| \le$$

$$\le \tilde{C}_2 (3L-1) \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(l)}(x) \right| \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \psi(x) \right| \sum_{J\ge j} 2^{-Jl} = C_2\, 2^{-jl} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(l)}(x) \right|,\ \ l = \overline{1,L},\ \ j \in \mathbf{Z}.$$

Лемма доказана.

2. Оператор дифференцирования в базисе койфлетов

Для любой функции f определим оператор $T_j : C^L(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R}) \to V_j$ [4]:

$$T_j\, f(x) = P_j\, T\, P_j\, f(x) = 2^{jn} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} \alpha_{j,\,k-m}\, r_m^{(n)}\, \varphi_{jk}(x),\ \ x \in \mathbf{R},\ \ j \in \mathbf{Z}, \tag{7}$$

$$r_m^{(n)} = \left\langle \varphi(x-m), \varphi^{(n)}(x) \right\rangle = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x-m)\, \varphi^{(n)}(x)\,dx,\ \ m \in \mathbf{Z}. \tag{8}$$

Поскольку масштабирующая функция Койфмана не имеет аналитического задания, то непосредственное вычисление коэффициентов оператора дифференцирования по формулам (8) затруднительно. В [8] предложен алгебраический метод нахождения этих коэффициентов, не использующий соотношений (8), а также установлено, что

$$r_m^{(n)} = 0,\ \ |m| \ge 3L-1,\ \ r_m^{(n)} = (-1)^n r_{-m}^{(n)},\ \ |m| \le 3L-2, \tag{9}$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^l\, r_m^{(n)} = \left(-1\right)^n n!\, \delta_{ln},\ \ l = \overline{0, L-1}, \tag{10}$$

где δ_{ln} – символ Кронекера.

Лемма 2. *Пусть* φ *– масштабирующая функция Койфмана порядка* $L = 2K$, $K \in \mathbf{N}$, $\varphi \in C^n(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$ *– фиксированное число,* $n < L$, *коэффициенты* $r_m^{(n)}$, $m = \overline{-3L+2, 3L-2}$, *задаются соотношениями* (8). *Тогда справедливы неравенства*

$$\int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi_{jk}(\tilde{x})\, \varphi_{jk}(x) \right| d\tilde{x} \le 2(3L-1)^2 \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \varphi(x) \right|^2, \quad x\in\mathbf{R}, \quad j\in\mathbf{Z}, \tag{11}$$

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} \left| r_m^{(n)} \right| \le (3L-1)(6L-3) \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \varphi(x)\varphi^{(n)}(x) \right|, \tag{12}$$

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} \left| m^L r_m^{(n)} \right| \le 2(3L-1) \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \varphi(x)\, \varphi^{(n)}(x) \right| \sum_{m=1}^{3L-2} m^L, \tag{13}$$

где функции φ_{jk} *определяются соотношениями* (5).

Доказательство следует из свойств (1) масштабирующей функции φ и соотношений (8) – (10).

Теорема. *Пусть* φ *и* ψ *– масштабирующая функция Койфмана и койфлет порядка* $L=2K$, $K\in\mathbf{N}$, *соответственно* $\varphi\in C^n(\mathbf{R})$, $n\in\mathbf{N}$ *– фиксированное число,* $n<L$, *функция* $f\in C^L(\mathbf{R})\bigcap L_2(\mathbf{R})$ *такова, что* $\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right| < +\infty$. *Тогда для всех* $x\in\mathbf{R}$ *справедлива оценка*

$$\left| f^{(n)}(x) - T_j f(x) \right| \le C_3\, 2^{-j(L-n)} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right|, \quad j\in\mathbf{Z},$$

где C_3 *– положительная постоянная, не зависящая ни от* j, *ни от* f, *а оператор* $T_j f$ *определяется формулой* (7).

Доказательство. Аппроксимирующие вейвлет-коэффициенты

$$\alpha_{j,k-m} = \int_{\mathbf{R}} f(\tilde{x})\varphi_{j,k-m}(\tilde{x})\, d\tilde{x} = \int_{\mathbf{R}} f\left(\tilde{x} - 2^{-j} m\right) \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x}.$$

Используя формулу Тейлора

$$f\left(\tilde{x} - 2^{-j} m\right) = \sum_{l=0}^{L-1} \frac{f^{(l)}(\tilde{x})}{l!} \left(-2^{-j} m\right)^l + \frac{f^{(L)}(\tilde{x} - \theta\cdot 2^{-j} m)}{L!} \left(-2^{-j} m\right)^L,$$

$\tilde{x}\in\mathbf{R}$, $0<\theta<1$, $j,m\in\mathbf{Z}$, равенства (7) и (10), получим, что

$$T_j f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \sum_{l=0}^{L-1} \frac{f^{(l)}(\tilde{x})}{l!} \left(-2^{-j}\right)^l \sum_{m\in\mathbf{Z}} m^l r_m^{(n)} \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right) \varphi_{jk}(x) +$$

$$+2^{j(n-L)} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{f^{(L)}\left(\tilde{x} - \theta\cdot 2^{-j} m\right)}{L!} m^L r_m^{(n)} \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right) \varphi_{jk}(x) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} f^{(n)}(\tilde{x})\, \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right) \varphi_{jk}(x) +$$

$$+2^{j(n-L)} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{f^{(L)}\left(\tilde{x} - \theta\cdot 2^{-j} m\right)}{L!} m^L r_m^{(n)} \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right) \varphi_{jk}(x)$$

или

$$T_j f(x) = P_j f^{(n)}(x) + 2^{-j(L-n)} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{f^{(L)}\left(\tilde{x} - \theta\cdot 2^{-j} m\right)}{L!} m^L r_m^{(n)} \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right) \varphi_{jk}(x),$$

$x\in\mathbf{R}$, $0<\theta<1$, $j\in\mathbf{Z}$.

Изменив порядок суммирования и с учетом линейности определенного интеграла, будем иметь

$$\left| \sum_{k\in\mathbf{Z}} \sum_{m\in\mathbf{Z}} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{f^{(L)}(\tilde{x} - \theta\cdot 2^{-j} m)}{L!} m^L r_m^{(n)} \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right) \varphi_{jk}(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{m\in\mathbf{Z}} \left| m^L r_m^{(n)} \right| \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{f^{(L)}\left(\tilde{x} - \theta\cdot 2^{-j} m\right)}{L!} \right| \left| \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi_{jk}(\tilde{x})\, \varphi_{jk}(x) \right| d\tilde{x} \le$$

$$\le \frac{1}{L!} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right| \sum_{m\in\mathbf{Z}} \left| m^L r_m^{(n)} \right| \int_{\mathbf{R}} \left| \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi_{jk}(\tilde{x})\varphi_{jk}(x) \right| d\tilde{x}.$$

С учетом неравенства (11) и (13) получим, что

$$\left| T_j f(x) - P_j f^{(n)}(x) \right| \le \breve{C}_3\, 2^{-j(L-n)} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right|, \quad x\in\mathbf{R},\quad j\in\mathbf{Z}. \tag{14}$$

Применяя лемму 1 к функции $f^{(n)}$ и полагая $l = L - n$, получим

$$\left| f^{(n)}(x) - P_j f^{(n)}(x) \right| \le \widehat{C}_3\, 2^{-j(L-n)} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \left(f^{(n)}\right)^{(L-n)}(x) \right| = \widehat{C}_3\, 2^{-j(L-n)} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right|, \tag{15}$$

$x\in\mathbf{R},\ \ j\in\mathbf{Z}.$

Тогда с учетом неравенств (14), (15) и

$$\left| f^{(n)}(x) - T_j f(x) \right| \le \left| f^{(n)}(x) - P_j f^{(n)}(x) \right| + \left| T_j f(x) - P_j f^{(n)}(x) \right|, \quad x\in\mathbf{R},\quad j\in\mathbf{Z},$$

заключаем о справедливости теоремы. □

Заменив в задании (7) оператора T_j вейвлет-коэффициенты α_{jk} соответствующими приближениями s_{jk}, определим оператор $T_j^s : C^L(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R}) \to V_j$ формулой

$$T_j^s f(x) = 2^{jn} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} s_{j,k-m} r_m^{(n)} \varphi_{jk}(x), \quad x\in\mathbf{R},\quad j\in\mathbf{Z}. \tag{16}$$

Из теоремы получим

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для всех $x\in\mathbf{R}$ *справедлива оценка*

$$\left| f^{(n)}(x) - T_j^s f(x) \right| \le 2^{-j(L-n)}\, C_4 \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right|, \quad j\in\mathbf{Z},$$

где C_4 *– положительная постоянная, не зависящая ни от* j, *ни от* f, *а оператор* $T_j^s f$ *задается равенством* (16).

3. Формула численного дифференцирования

Согласно определению КМА n-я производная функции f является пределом при $j\to+\infty$ последовательных приближений $P_j f^{(n)}$, определенных соотношениями

$$P_j f^{(n)}(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_{jk}^{(n)} \varphi_{jk}(x), \quad j\in\mathbf{Z}, \tag{17}$$

где $\alpha_{jk}^{(n)} = \int\limits_{\mathbf{R}} f^{(n)}(x)\, \varphi_{jk}(x)\, dx.$ При этом вейвлет-коэффициенты $\alpha_{jk}^{(n)}$ при $j\to+\infty$ могут быть заменены коэффициентами

$$s_{jk}^{(n)} = 2^{-j/2} f^{(n)}\left(2^{-j}k\right), \quad j,k\in\mathbf{Z}.$$

Таким образом, сравнивая приближения (16) и (17), заключаем, что значение производной $f^{(n)}(x)$ в точках $x = 2^{-j}k,\ \ j,k\in\mathbf{Z},$ может быть найдено по следующей формуле численного дифференцирования:

$$f^{(n)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \approx 2^{jn} \sum_{m\in\mathbf{Z}} f\left(\frac{k-m}{2^j}\right) r_m^{(n)}, \quad j,k\in\mathbf{Z}.$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда справедлива оценка

$$\left| f^{(n)}\left(\frac{k}{2^j}\right) - 2^{jn} \sum_{m\in\mathbf{Z}} f\left(\frac{k-m}{2^j}\right) r_m^{(n)} \right| \le 2^{-j(L-n-1)} \left(2^{-j} C_5 + C_6\right) \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right|,$$

$j,k\in\mathbf{Z},\ \ n+1<L,$ *где* C_5 *и* C_6 *– положительные постоянные, не зависящие ни от* j, *ни от* f.

Доказательство. Рассмотрим модуль разности $\left| s_{jk}^{(n)} - 2^{jn} \sum\limits_{m\in\mathbf{Z}} s_{j,k-m}\, r_m^{(n)} \right|$, где $s_{jk} = 2^{-j/2} f\left(2^{-j}k\right)$ и $s_{jk}^{(n)} = 2^{-j/2} f^{(n)}\left(2^{-j}k\right),\ \ j,k\in\mathbf{Z}.$ Вводя обозначения $\alpha_{jk}^{T_j} = 2^{jn} \sum\limits_{m\in\mathbf{Z}} \alpha_{j,k-m}\, r_m^{(n)},\ \ j,k\in\mathbf{Z},$ получим, что

$$\left| s_{jk}^{(n)} - 2^{jn} \sum_{m\in\mathbf{Z}} s_{j,k-m}\, r_m^{(n)} \right| \le \left| s_{jk}^{(n)} - \alpha_{jk}^{(n)} \right| + \left| \alpha_{jk}^{(n)} - \alpha_{jk}^{T_j} \right| + \left| \alpha_{jk}^{T_j} - 2^{jn} \sum_{m\in\mathbf{Z}} s_{j,k-m}\, r_m^{(n)} \right|.$$

Оценим каждый модуль разности в правой части последнего неравенства.

С учетом неравенств (6) и (12) будем иметь

$$\left| \alpha_{jk}^{T_j} - 2^{jn} \sum_{m\in\mathbf{Z}} s_{j,k-m}\, r_m^{(n)} \right| \le 2^{jn} \left| \alpha_{j,k-m} - s_{j,k-m} \right| \sum_{m\in\mathbf{Z}} \left| r_m^{(n)} \right| \le$$

$$\le 2^{-j/2}\, 2^{-j(L-n)} C_1 (3L-1)(6L-3) \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \varphi(x)\, \varphi^{(n)}(x) \right| \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right|, \quad j,k\in\mathbf{Z}.$$

Оценим выражение $\left| \alpha_{jk}^{(n)} - \alpha_{jk}^{T_j} \right|$. Используя равенства (10), для коэффициентов $\alpha_{jk}^{T_j}$ получим

$$\alpha_{jk}^{T_j} = \alpha_{jk}^{(n)} + 2^{-j(L-n)} \sum_{m\in\mathbf{Z}} m^L r_m^{(n)} \int_{\mathbf{R}} \frac{f^{(L)}(\tilde{x} - \theta\cdot 2^{-j} m)}{L!}\, \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x}, \quad j,k\in\mathbf{Z}.$$

Тогда с учетом неравенства (13) при любых $j,k\in\mathbf{Z}$ имеем, что

$$\left| \alpha_{jk}^{(n)} - \alpha_{jk}^{T_j} \right| = \left| 2^{-j(L-n)} \sum_{m\in\mathbf{Z}} m^L r_m^{(n)} \int_{\mathbf{R}} \frac{f^{(L)}(\tilde{x} - \theta\cdot 2^{-j} m)}{L!}\, \varphi_{jk}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \right| \le$$

$$\le 2^{-j(L-n)} \frac{1}{L!} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right| \sum_{m\in\mathbf{Z}} \left| m^L r_m^{(n)} \right| \int_{\mathbf{R}} \left| \varphi_{jk}(\tilde{x}) \right| d\tilde{x} \le$$

$$\le 2^{j/2}\, 2^{-j(L-n)} \frac{1}{L!} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right| 2(3L-1)^2 \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \varphi(x)\, \varphi^{(n)}(x) \right| \sum_{m=1}^{3L-2} m^L \int_{\mathbf{R}} \left| \varphi(x) \right| dx.$$

Поскольку функция $f\in C^L \cap L_2(\mathbf{R})$ и $\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| f^{(L)}(x) \right| < +\infty$, то для коэффициентов $s_{jk}^{(n)}$ и $\alpha_{jk}^{(n)}$ справедлива оценка

$$\left| s_{jk}^{(n)} - 2^{jn} \sum_{m\in\mathbf{Z}} s_{j,k-m}\, r_m^{(n)} \right| \le 2^{-j(L-n-1/2)} \left(2^{-j} C_6 + C_7 \right).$$

Для завершения доказательства остается учесть, что

$$\left| f^{(n)}\left(\frac{k}{2^j} \right) - 2^{jn} \sum_{m\in\mathbf{Z}} f\left(\frac{k-m}{2^j} \right) r_m^{(n)} \right| = 2^{j/2} \left| s_{jk}^{(n)} - 2^{jn} \sum_{m\in\mathbf{Z}} s_{j,k-m} r_m^{(n)} \right|, \quad k\in\mathbf{Z}. \ \square$$

1. D a u b e c h i e s I. // Comm. Pure Appl. Math. 1988. Vol. 46. P. 909.
2. D a u b e c h i e s I. // SIAM J. Math. Anal. 1993.Vol. 24. № 2. P. 499.
3. B e y l k i n G., C o i f m a n R., R o k h l i n V. // Comm. Pure. Appl. Math. 1991. Vol. 44. P. 141.
4. B e y l k i n G. // SIAM J. Numer. Anal. 1992. Vol. 6. № 6. P. 1716.
5. A l p e r t B. // SIAM J. Math. Anal. 1993. Vol. 24. № 1. P. 246.
6. F a n n G., B e y l k i n G., H a r r i s o n R.J., J o r d a n K.E. // IBM J. Res. and Dev. 2004. Vol. 48. № 2. P. 161.
7. B e y l k i n G., G r a m e r R., F a n n G., H a r r i s o n R.J. // Appl. Comp. Harmon. Anal. 2007. Vol. 23. № 2. P. 235.
8. D e y t s e v a A. // 4th International Workshop Computer Algebra Systems in Teaching and Research, Siedlce, Poland, January 31 – February 3, 2007. Siedlce, 2007. P. 52.

Поступила в редакцию 25.06.09.

Анна Геннадьевна Дейцева – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики ГрГУ им. Я. Купалы.