

Grupos fundamentales orbifold en dimensión baja



Lorién Lascorz Lozano

Máster Universitario en Modelización e Investigación
Matemática, Estadística y Computación
Trabajo de fin de Máster

Director: Enrique Artal Bartolo

Resumen

El estudio de variedades diferenciables aparece de manera natural en la ciencia puesto que estos espacios suelen constituir los escenarios topológicos más comunes. La topología y geometría diferencial estudian las propiedades y resultados de las variedades diferenciables, y sus aplicaciones son numerosas en las matemáticas y en la física. Sin embargo, existe una estructura que generaliza y amplía el concepto de variedad: el orbifold. Se trata de unos espacios similares a las variedades diferenciables, en la que las cartas se sustituyen por cocientes locales por la acción de grupos finitos. Esta nueva estructura tiene propiedades más generales y por tanto nuevas aplicaciones como en la teoría de cuerdas, la geometría y topología diferencial, la topología geométrica y la geometría algebraica.

Vamos a estudiar los orbifolds desde el punto de vista de la topología algebraica. El contexto teórico conocido para variedades se extiende al caso de orbifold, surgiendo de manera natural nociones como el de espacio recubridor o grupo fundamental.

En este trabajo se va a estudiar la definición y propiedades de estos espacios y sus grupos, con el objetivo de establecer una estrategia general y eficiente para el cálculo de grupos fundamentales de orbifolds de dimensión baja. Para ello, se diferenciarán orbifolds locales y globales (cocientes globales de una variedad) y se utilizarán diferentes procedimientos como el Teorema de Seifert-Van Kampen (extendido al caso orbifold) y la relación entre espacio recubridor y grupo fundamental. A lo largo del trabajo, se presentarán numerosos ejemplos e ilustraciones para aclarar y justificar la secuencia argumental.

Abstract

The study of differentiable manifolds appears naturally in science since these spaces are usually the most common topological scenarios. Differential topology and geometry study the properties and results of differentiable manifolds, and their applications are numerous in mathematics and physics. However, there is a structure that generalizes the concept of variety: the orbifold. These kinds of spaces are similar to differentiable manifolds, but the charts are replaced by local quotient with respect to the action of finite groups. This new structure has more general properties and therefore new applications as in string theory, differential geometry and topology, geometric topology and algebraic geometry.

We are going to study orbifolds from the point of view of algebraic topology. The theoretical context studied for manifolds extends to the case of orbifold, arising in a natural way notions such as covering spaces or fundamental group.

In this work, we shall study the definition and properties of these spaces and their groups, with the objective of establishing a general and efficient strategy for the computation of fundamental groups of low dimension orbifolds. Therefore, local and global orbifolds will be differentiated (the global quotient of a manifold) and different procedures will be used such as the Seifer-Van Kampen theorem (extended to the orbifold case) and the relationship between covering spaces and fundamental group. Throughout the work, many examples and illustrations will be presented in order to clarify and justify the general picture.

Índice general

Resumen	iii
Abstract	v
1. Introducción al concepto de orbifold	1
1.1. Elementos algebraicos	2
1.2. Elementos topológicos	3
1.3. Conceptos transversales: acciones y espacios recubridores	5
2. Definición de orbifold y propiedades.	9
2.1. Aplicaciones orbifold	14
2.2. Conexión por caminos, homotopía y grupo fundamental orbifold	16
2.3. Espacios recubridores en orbifold	18
3. Grupos fundamentales orbifold	23
3.1. Primeros ejemplos	23
3.2. Propiedades principales	24
3.3. Elementos para el cálculo de grupos fundamentales orbifold	25
3.3.1. Cubiertas orbifold	25
3.3.2. Teorema de Seifert - Van Kampen	27
4. Cálculo de grupos fundamentales orbifold en dimensión baja	31
4.1. Generalización de los espacios orbifold	31
4.2. Ejemplos del cálculo del grupo fundamental orbifold	32
4.2.1. Superficie de género 2 con un punto singular	32
4.2.2. Grupo rotaciones	35
4.2.3. Grupo diédrico	36
4.2.4. Banda de Möbius actuando \mathbb{Z}_2	38
4.2.5. Representaciones poligonales de orbifolds	39
4.2.6. Corona circular: estudio de las componentes de borde	43
4.3. Teorema general	48
4.3.1. Ejemplos representativos	49
5. Conclusiones	53
Bibliografía	55

Capítulo 1

Introducción al concepto de orbifold

La división de las matemáticas en diferentes ramas independientes no obedece a la realidad de esta ciencia, de hecho, se conocen relaciones de interdependencia entre áreas desligadas a priori. Concretamente, en el área comprendida entre la topología algebraica y la geométrica se utilizan elementos propios del álgebra para interpretar resultados topológicos y viceversa, creándose una correlación que acentúa el vínculo existente entre la Topología y el Álgebra. En este apartado de las matemáticas encontramos el concepto de *orbifold*.

Fue introducido por primera vez por Satake [14] en 1956, describiéndose entonces los orbifolds como una clase de espacios singulares que podían ser definidos como cocientes de variedades por grupos finitos. El término que utilizó para describir estos espacios fue *V-manifold*. En este artículo, Satake demuestra que la teoría de geometría diferencial establecida para variedades puede extenderse de manera natural a estos nuevos espacios.

El autor que introdujo el nombre de orbifold fue Thurston [17] en 1979. En este libro, Thurston desarrolla formalmente el nuevo término y describe una teoría extendiendo los conceptos topológicos y algebraicos conocidos para las variedades tales como espacio recubridor o grupo fundamental.

Como hemos comentado, la noción de orbifold nació como una extensión a las variedades dentro de la geometría diferencial, pero sus aplicaciones se han ido desarrollando también sobre otras materias. Actualmente, existen estudios donde estos espacios son herramientas para la investigación en distintas áreas de la topología algebraica como la cohomología (Hatcher [10, capítulo 3]) o la homotopía (Gepner [8]), geometría diferencial (Satake [15]) o incluso aplicaciones físicas como la teoría de cuerdas (Dixon [7], Cornalba [6]).

Este trabajo pretende recoger los principios básicos de los orbifold, sus principales propiedades y características. Se mostrarán para estos espacios los resultados propios de la topología algebraica conocidos en variedades, prestando mayor atención a los conceptos de grupo fundamental y de cubierta. Podremos interpretar las cubiertas ramificadas como cubiertas sin ramificar, y establecer un paralelismo entre cubiertas y grupos fundamentales por un lado y cubiertas orbifold y grupos fundamentales orbifold por otro. El objetivo principal del trabajo es comprender los orbifolds como espacios topológicos generalizados donde podamos calcular su grupo fundamental. Para ello, nos ayudaremos del teorema de Seifert-Van Kampen y la teoría de los espacios recubridores, extendidos para el caso de espacios orbifold. Los orbifolds sobre los que realizaremos el trabajo serán espacios de dimensión baja, dimensión 2; las técnicas aplicadas se pueden usar en dimensión 3 pero hemos preferido centrarnos en el caso de superficies y tratar éste en toda su generalidad.

La estructura del trabajo está formada por cinco capítulos en los que, a través de ejemplos, iremos motivando la línea argumental. Una vez establecida la definición de orbifold y sus principales propiedades en el capítulo 2, veremos de qué manera se extiende la geometría de variedades a estos nuevos espacios y explicaremos los grupos fundamentales orbifold y las herramientas que utilizaremos para su cálculo: el teorema de Seifert-Van Kampen y la cubierta orbifold. Será en

el cuarto capítulo donde lleguemos al objetivo principal del trabajo: cálculo concreto de grupos fundamentales de espacios orbifold. Finalmente, en el apartado de conclusiones expresaremos cuáles son los resultados obtenidos del estudio realizado.

Para finalizar este primer capítulo del estudio, presentaremos brevemente los conceptos teóricos básicos para comprender la lectura completa. Vamos a encontrar términos estrictamente topológicos junto a elementos propios del álgebra y la teoría de grupos.

1.1. Elementos algebraicos

Los términos iniciales relativos al álgebra que se tratarán a lo largo del trabajo están contenidos dentro de la teoría de grupos. Entre los conceptos más importantes destacan la noción de grupo, subgrupo y subgrupo normal, acciones de grupos sobre espacios topológicos. Daremos también brevemente una revisión de otros conceptos relacionados orientada hacia la utilidad en el trabajo.

Definición 1.1. Un *grupo* es un conjunto G dotado de una operación binaria interna ‘ \cdot ’ verificando:

- ‘ \cdot ’ es asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, para todo $a, b, c \in G$.
- ‘ \cdot ’ posee elemento neutro e : $e \cdot a = a \cdot e$, para todo $a \in G$.
- Cada elemento $a \in G$ posee simétrico: existe $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$.

Se dice que un subconjunto no vacío H de G es un *subgrupo* de G si H también es un grupo con la operación restringida.

Se dice que un grupo es *libre* si existe un subconjunto S de G tal que todo elemento de G puede escribirse de manera única como producto finito de los elementos de S y sus inversos. Si se cumple lo anterior, diremos que el grupo libre generado por S es G : $\mathbb{F}(S) = G$.

En relación con grupos y subgrupos algebraicos, existe una estructura que utilizaremos en el trabajo: *sucesiones exactas*.

Definición 1.2. Sean A_1, \dots, A_n grupos algebraicos y $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ morfismos. Se dice que la sucesión

$$A_1 \xrightarrow{\delta_1} A_2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} A_n$$

es una *sucesión exacta* si se cumple que $\text{Im } \delta_{i+1} = \text{Ker } \delta_i$. En particular, llamaremos *sucesión exacta corta* a la sucesión

$$1 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\delta_1} A_2 \xrightarrow{\delta_2} A_3 \rightarrow 1$$

cumpliendo la misma condición anterior. Se deduce que la aplicación δ_1 es inyectiva, δ_3 es suprayectiva y $A_2/\text{Im } \delta_1 \cong A_3$.

Estas primeras nociones básicas nos bastan para describir nuestra principal herramienta de la teoría de grupos: *las presentaciones de grupos*.

Un subconjunto $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ de un grupo G es un *conjunto de generadores* si cada elemento $g \in G$ se puede expresar como un producto finito de los elementos de X y sus inversos:

$$g = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Así pues, a partir del grupo libre generado por X , $\mathbb{F}(X)$, se construyen todas las palabras de G , incluso las triviales. Es decir, la aplicación $\psi : \mathbb{F}(X) \rightarrow G$ es suprayectiva. Por el primer teorema de isomorfía, obtenemos lo siguiente:

$$\psi : \mathbb{F}(X) \rightarrow G \quad \implies \quad G \cong \mathbb{F}(X)/N$$

donde N es el n3cleo de la aplicaci3n, es decir, las palabras triviales de G . Si $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ es un conjunto de palabras tal que R y sus conjugados engendran N , diremos que R es un *conjunto de relaciones* de la presentaci3n. Definimos la expresi3n $\langle X : R \rangle$ como la presentaci3n del grupo $\mathbb{F}(X)/N$.

Definici3n 1.3. Diremos que G es un grupo *finitamente presentado* si existen conjuntos finitos X y R tal que:

$$G \cong \langle X : R \rangle$$

donde $\langle X : R \rangle$ es una presentaci3n del grupo G .

A partir de la presentaci3n de grupos fundamentales, podemos realizar operaciones entre grupos y calcular el producto directo, semidirecto y libre.

Ejemplo 1.4. Sean las presentaciones $\mathbb{Z} = \langle \alpha : - \rangle$, $\mathbb{Z}_2 = \langle \beta : \beta^2 = 1 \rangle$. Entonces el *producto directo* de grupos lo calcularemos tomando los generadores y las relaciones de ambos y a3adiremos la relaci3n de conmutaci3n:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 = \langle \alpha, \beta : \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$$

Ejemplo 1.5. El conjunto subyacente del *producto semidirecto* de dos grupos es el producto cartesiano de ambos grupos; el producto viene definido por una acci3n del segundo sobre el primero y una presentaci3n se obtiene a3adiendo a los generadores y relaciones de ambos grupos la acci3n de los generadores del segundo sobre el primero como una acci3n de conjugaci3n. Por ejemplo:

$$\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}_2 = \langle \alpha, \beta : \beta^2 = 1, \beta\alpha\beta = \alpha^{-1} \rangle$$

Ejemplo 1.6. Siguiendo la l3nea de los ejemplos anteriores, una presentaci3n del *producto libre* de dos grupos est3 formada por todos los generadores y relaciones de los grupos implicados en la operaci3n.

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 = \langle \alpha, \beta : \beta^2 = 1 \rangle$$

1.2. Elementos topol3gicos

En el aspecto geom3trico y topol3gico, es necesario conocer la teor3a existente alrededor del concepto de variedad, ya que el punto de partida de nuestra 3rea de estudio es este t3rmino. En dimensi3n 2, una *variedad* es una abstracci3n matem3tica que representa una superficie com3n como podr3amos asociar a la superficie de una mesa o cualquier plano. En general, se puede definir una variedad n -dimensional o *n-variedad* como un espacio topol3gico Hausdorff y 2-numerable, tal que cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U_x homeomorfo a la bola abierta n -dimensional \mathbb{B}^n .

Dos ejemplos sencillos de variedades son el plano \mathbb{R}^2 y la esfera de dimensi3n 3, \mathbb{S}^3 . Sin embargo, tambi3n consideramos variedad al disco plano cerrado y no cumple la propiedad. Esta superficie entra dentro de las *variedades con borde*, que se definen como variedades en las que todo punto tiene un entorno homeomorfo a una bola o a una semibola.

Definici3n 1.7. Dado un espacio topol3gico X , llamamos *camino* a la aplicaci3n continua $\gamma : I = [a, b] \rightarrow X$. Llamaremos *origen* o *punto inicial* al punto $\gamma(a)$ y *punto final* a $\gamma(b)$, siendo $I = [a, b]$ un intervalo de la recta real \mathbb{R} . En general, consideraremos I como el intervalo $[0, 1]$.

Las variedades sobre las que trabajaremos ser3n espacios conexos por caminos, es decir, para todo par de puntos de la variedad existe un camino que los une. Las 3nicas 1-variedades conexas son la circunferencia \mathbb{S}^1 (variedad compacta) y la recta real \mathbb{R} (variedad no compacta). A partir de ahora, estudiaremos principalmente el caso compacto de variedades de dimensi3n 1 y 2. Las 2-variedades reciben el nombre de *superficies*.

Definición 1.8. La *suma conexa* es un procedimiento de construcción de n -variedades conexas a partir de dos de ellas. Sean dos variedades conexas de dimensión n y eliminamos una bola \mathbb{B}^n a cada una de las variedades. El borde generado en ambas variedades al eliminarse esta bola será una esfera de dimensión $n - 1$. La operación suma conexa es el resultado de identificar los bordes \mathbb{S}^{n-1} de ambas variedades y se representa con el símbolo $\#$.

Uno de los problemas más importantes de la topología es la clasificación de variedades. Este problema para dimensión 1 y 2 está resuelto. Para el caso de superficies, esta clasificación diferencia entre variedades orientables y no orientables. Estas últimas se dice que tienen una cara porque podemos recorrer toda la superficie desde la misma cara. Por ejemplo, la banda de Möbius. Las variedades orientables tienen dos caras diferenciadas. En particular, llamamos *superficie tipo* a las superficies:

- $F_g = \mathbb{S}^2 \# g\mathbb{T}^2$, $g \geq 0$.
- $N_k = \mathbb{S}^2 \# k\mathbb{P}^2$, $k > 0$.

donde \mathbb{S}^2 es la esfera, \mathbb{T}^2 el toro y \mathbb{P}^2 el plano proyectivo.

El teorema de clasificación para 2-variedades es el siguiente (ver [5]):

Teorema 1.9. *Toda superficie compacta y sin borde es homeomorfa exactamente a una de las superficies tipo F_g ($g \geq 0$) ó N_k ($k > 0$).*

Para la construcción del concepto de orbifold necesitamos entender las variedades y sus propiedades. El objetivo del trabajo es calcular el grupo fundamental de los espacios orbifold, por eso a continuación presentamos los conceptos y resultados topológicos necesarios para el estudio y cálculo de los grupos fundamentales.

Definición 1.10. Dado un espacio topológico X , un camino $\alpha : I \rightarrow X$ tal que: $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, se llama *lazo basado en x_0* .

Definición 1.11. Se dice que dos aplicaciones $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ continuas son *homótopas* si existe una aplicación $F : X \times I \rightarrow Y$ continua, donde I es el intervalo cerrado $[0, 1]$, tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$. La aplicación F es una homotopía entre f_0 y f_1 .

Se dice que la homotopía es *relativa* al subconjunto A de X si $F(a, t) = f_0(a)$, $\forall a \in A$.

Definición 1.12. Se definen las *clases de equivalencia de $f : I \rightarrow X$* camino en X como

$$[f] = \{g : I \rightarrow X \mid f \sim g\}$$

siendo g otro camino en X , y la equivalencia \sim representa una homotopía relativa a los extremos del intervalo I .

Definición 1.13. Dado un espacio topológico X y un punto base x_0 , el conjunto de clases de equivalencia de lazos basados en x_0 se define como:

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha \text{ lazo basado en } x_0\}$$

Definición 1.14. El conjunto $\pi_1(X, x_0)$ con la operación producto de clases de equivalencia de caminos tiene estructura de grupo. A este grupo se le llama *grupo fundamental de X basado en el punto x_0* .

Para calcular los grupos fundamentales, nos ayudaremos de estas presentaciones mediante el teorema de *Seifert-Van Kampen*.

Teorema 1.15 (Seifert-Van Kampen). *Sea X un espacio topol3gico conexo por caminos. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos conexos por caminos tales que $X = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ es conexo por caminos. Sea $x_0 \in U_1 \cap U_2$ y conocidas las presentaciones de los espacios U_1 , U_2 y $U_1 \cap U_2$, entonces podemos conocer la presentaci3n del grupo fundamental de X basado en x_0 .*

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(U_1, x_0) = \langle S_1 : R_1 \rangle & \\
 i_1 \nearrow & & \searrow \\
 \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle S : R \rangle & & \pi_1(X, x_0) = \langle S_1 \cup S_2 : R_1 \cup R_2 \cup R_\cap \rangle \\
 i_2 \searrow & & \nearrow \\
 & \pi_1(U_2, x_0) = \langle S_2 : R_2 \rangle &
 \end{array}$$

Las aplicaciones i_1, i_2 definen las inclusiones. Para todo $s \in S$, tomamos su imagen con respecto a las dos inclusiones: $i_1(s), i_2(s)$. Obtendremos, pues, dos expresiones en funci3n de los generadores S_1 y S_2 . Estas expresiones en el grupo del espacio total han de ser equivalentes, es decir, $i_1(s) \cdot (i_2(s))^{-1} = 1$. El conjunto de relaciones R_\cap est3 formado por los elementos de la forma $r_s = i_1(s) \cdot (i_2(s))^{-1}$, para cada $s \in S$.

1.3. Conceptos transversales: acciones y espacios recubridores

Comenzamos a introducir ciertos conceptos existentes la topolog3a y el 3lgebra. Aunque los espacios recubridores se presentan como herramientas de la topolog3a y las acciones pueden aparecer en textos p3ramente algebraicos, ambas definiciones son reinterpretadas para darles sentido desde los dos puntos de vista y as3 probar las fuertes relaciones entre estas 3reas. Estos instrumentos los utilizaremos a lo largo del estudio de orbifolds y trabajaremos difereentes t3cnicas propias de estos espacios cocientes.

Definici3n 1.16. Una *acci3n a izquierda* de un grupo G sobre un espacio topol3gico X es una aplicaci3n continua

$$\begin{aligned}
 \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\
 (g, x) &\longrightarrow \varphi(g, x) = g \cdot x
 \end{aligned}$$

cumpliendo que $e \cdot x = x$, $g \cdot (g' \cdot x) = (g \cdot g') \cdot x$, $\forall g, g' \in G$, $x \in X$. An3logamente se definen las acciones a derecha.

Definici3n 1.17. La *3rbita* de un punto $x \in X$ por la acci3n φ se define como todos los puntos $y \in X$ tal que $g \cdot x = y$, para alg3n $g \in G$.

- Se dice que una acci3n es *libre* si $\varphi(g, x) = x$ para alg3n $x \in X \implies g = e$. Es decir, el 3nico elemento que tiene puntos fijos es el neutro.
- Se dice que una acci3n es *fiel* si $\varphi(g, x) = x, \forall x \in X \implies g = e$. Es decir, el 3nico elemento que fija a todo X es el neutro.
- Se dice que una acci3n es *transitiva* si solo tiene una 3rbita, es decir, si para todo $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $\varphi(g, x) = y$.
- Se dice que una acci3n act3a de manera *propriadamente discontinua* si todo par de puntos $x, y \in X$ tienen un entorno U y V tal que $gU \cap V \neq \emptyset$, para un n3mero finito de elementos $g (\neq e) \in G$. Se dice que una acci3n act3a de manera *discontinua* si cada punto $x \in X$ tiene un entorno U que no corta a ninguno de sus trasformados por la acci3n. Es decir, $gU \cap U \neq \emptyset, \forall g (\neq e) \in G$.

Definición 1.18. Sea X un espacio topológico y G un grupo algebraico que determina una acción no libre sobre X . Para cada $x \in X$, se define el *grupo de isotropía de x* como el subgrupo de G formado por los elementos de G que dejan fijo a x :

$$\text{ISO}_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

Definición 1.19. Sea $\varphi : G \times X \rightarrow X$ una acción libre y discontinua. Consideramos F un subconjunto de X que contiene un punto y solo uno de cada órbita. Llamaremos *dominio fundamental* de X por la acción φ a la clausura de F , \bar{F} .

Consideramos X un espacio topológico y G actuando libre y discontinuamente, se puede construir el espacio X/G donde todos los puntos de la misma órbita están identificados. Particularmente, si la acción es transitiva, el espacio cociente es trivial.

El concepto que presentamos a continuación generaliza el de cociente por una acción libre y discontinua explicado anteriormente.

Definición 1.20. Un *espacio recubridor* o *cubierta* de un espacio topológico X es un par (\tilde{X}, p) , donde $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es una aplicación continua de manera que verifique la siguiente condición: cada elemento $x \in X$ tiene un entorno abierto conexo por caminos U_x tal que las componentes conexas por caminos de su preimagen por p son homeomorfas a U_x por la restricción: $p^{-1}(U_x) = \cup W_i$ y $p|_{W_i} : W_i \xrightarrow{\cong} U_x$. Este entorno U_x lo llamaremos *entorno elemental*, y llamaremos *fibra de $x \in X$* a las preimagenes de x por la aplicación p : $p^{-1}(x)$.

La teoría construída sobre los espacios recubridores está muy ligada al estudio de grupos fundamentales. Cuando se aborda un problema topológico sobre un espacio topológico y sus espacios recubridores, comúnmente se reduce el problema a cuestiones algebraicas sobre los grupos fundamentales. Para enunciar esta relación, debemos aclarar primero cómo se relacionan las aplicaciones entre X y \tilde{X} .

Proposición 1.21. Sea (\tilde{X}, p) un espacio recubridor de X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ y $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Entonces, para todo camino $\alpha : I \rightarrow X$ con origen en x_0 , $\exists! \tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ con origen en \tilde{x}_0 tal que $p\tilde{\alpha} = \alpha$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

De manera análoga se elevan homotopías. La elevación de lazos es un caso particular de la elevación de caminos.

Proposición 1.22. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $\alpha_0, \alpha_1 : [0, 1] \rightarrow X$ dos caminos homótopos, $H : \alpha_0 \sim \alpha_1$ con origen en la imagen de \tilde{x}_0 . Entonces $\exists! \tilde{H}$ tal que $p \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$. Además, si los caminos elevados tienen el mismo origen, entonces son homótopos.

La unicidad y correspondencia de lazos y equivalencia homotópica entre espacios topológicos y las cubiertas nos permite extender las relaciones entre estos espacios a los grupos fundamentales.

Proposición 1.23. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora con $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$. Entonces, el homomorfismo

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$$

es inyectivo.

Este enunciado indica que el grupo fundamental de un espacio recubridor podemos verlo como un subgrupo del grupo fundamental de X : $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \leq \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$.

Definici3n 1.24. Sea (\tilde{X}, p) un espacio recubridor de X . Se dice que este espacio recubridor es *regular* si su grupo fundamental es un subgrupo normal del grupo fundamental de X :

$$\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \trianglelefteq \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$$

Proposici3n 1.25. Sea \tilde{X} un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos y $\pi_1(X, p)$ su grupo fundamental. Entonces, cada clase de conjugaci3n de subgrupos de $\pi_1(X, p)$ define un espacio recubridor. Los subgrupos normales definen exactamente las cubiertas regulares.

Definici3n 1.26. Se dice que un espacio recubridor (\tilde{X}, p) es un *recubridor universal* si su grupo fundamental es trivial, es decir, si el espacio \tilde{X} es simplemente conexo. De hecho, el espacio recubridor universal de un espacio X es cubierta de cualquier cubierta de X .

Definici3n 1.27. Sea (\tilde{X}, p) un espacio recubridor de X . Llamamos *transformaci3n recubridora* o *deck transformation* a un homeomorfismo $\phi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tal que $p \circ \phi = p$. El conjunto $G_p(\tilde{X})$ de las transformaciones recubridoras de \tilde{X} respecto p es un grupo con la composici3n de aplicaciones: el *grupo de las transformaciones recubridoras* (ver [11]).

Proposici3n 1.28. Sea \tilde{X} un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Si Γ actúa de manera libre y propiamente discontinua, entonces la proyecci3n $p : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\Gamma$ es una aplicaci3n recubridora regular y $\Gamma = G_p(\tilde{X})$.

A lo largo del trabajo, las situaciones que consideraremos partirán de un espacio cociente de una variedad \mathcal{S} por un grupo G . Por tanto, podremos entender la proyecci3n $p : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/G$ como una aplicaci3n recubridora de \mathcal{S} . Si el grupo no actúa libremente, existe un conjunto D tal que $\text{ISO}_{x_i} \neq \{1\}$. Es decir, que existirán ciertos elementos del grupo que dejarán fijo cada punto del conjunto D . En este contexto, el espacio recubridor $(\mathcal{S}/G, p)$ se denomina *cubierta ramificada*. El concepto de orbifold nos permite tratar estos objetos como cubiertas sin ramificar.

Debemos mencionar que la teoría subyacente a todos estos conceptos es muy extensa y la revisi3n expuesta en este capítulo sólo hace referencia a los enunciados necesarios para el desarrollo del trabajo. El libro de W. Massey [12] es una referencia necesaria en estos aspectos de la topología algebraica.

Capítulo 2

Definición de orbifold y propiedades.

Un primer acercamiento al concepto que se plantea es entender un orbifold como una generalización natural de una variedad. Esta generalización consiste en considerar las cartas de las variedades como cocientes locales por grupos finitos. Es decir, un orbifold quiere capturar localmente el concepto de acción de un grupo finito sobre una variedad. En el caso particular en el que el grupo finito sea el grupo trivial, nos encontraremos en una variedad. De esta manera, el concepto de orbifold generaliza al de variedad.

Veamos un ejemplo sencillo para afianzar la idea general que vamos a exponer:

Ejemplo 2.1. Consideramos la variedad \mathbb{R}^2 , el plano de dimensión 2, donde actúa el grupo \mathbb{Z}^2 de traslaciones por enteros mediante Γ .

$$\begin{aligned}\Gamma : \quad \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((n, m), (x, y)) &\longrightarrow (x + n, y + m)\end{aligned}$$

En el espacio cociente del plano por la acción Γ , todo punto (x, y) con los puntos trasladados por enteros están identificados, es decir, $(x, y) \sim (x, y + 1) \sim (x + 1, y) \sim (x + 1, y + 1) \sim \dots$. Luego, un dominio fundamental de esta acción es un cuadrado de lado 1.

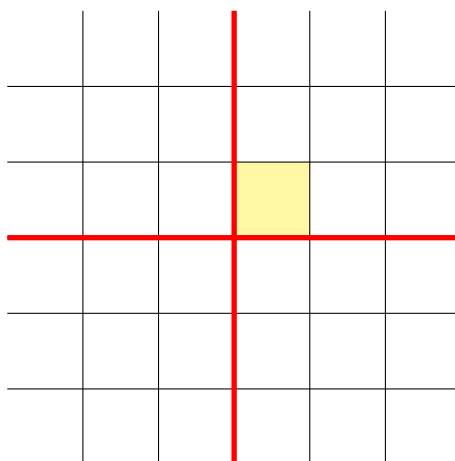


Figura 2.1: El plano \mathbb{R}^2 actuando el grupo de traslaciones de enteros.

La interpretación de la figura anterior es que las cuadrículas están identificadas y un cuadrado representa un dominio fundamental de la acción sobre \mathbb{R}^2 . En este cuadrado, tenemos identificados dos a dos lados como se indica en la Figura 2.2.

Así pues, los puntos del interior son los únicos representantes de su órbita. En cambio en el borde del cuadrado, tenemos que los lados verticales están identificados, estos son puntos de la forma (x_0, y) y $(x_0 + 1, y)$ con $y \in [y_0, y_0 + 1]$. Análogamente los lados horizontales. La figura

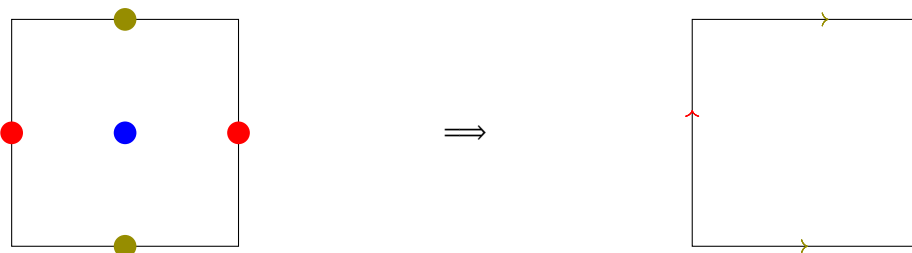


Figura 2.2: El plano \mathbb{R}^2 actuando el grupo de traslaciones de enteros.

resultante es un toro \mathbb{T}^2 . Por tanto, podemos afirmar que la superficie resultante de aplicar la acción del grupo de traslaciones por enteros sobre el plano \mathbb{R}^2 resulta ser el toro \mathbb{T}^2 .

Observar que la acción Γ actúa de manera libre y propiamente discontinua. Debido a esto, el espacio resultante del cociente entre el plano y la acción es otra variedad. Podemos plantearnos qué ocurriría si la acción no fuera libre, es decir, si la acción dejara ciertos puntos fijos. Para este escenario ya no nos revirían las cartas como bolas n -dimensionales. Es aquí donde aparecen los espacios orbifold (motivación de los espacios orbifold [13]).

Ejemplo 2.2. Consideramos ahora como espacios topológicos el plano complejo \mathbb{C} y este mismo plano menos el origen $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, donde actúa un grupo algebraico finito de 2 elementos, \mathbb{Z}_2 . Diferenciaremos entre tres casos dependiendo de la naturaleza del grupo y del espacio.

Para todo $z = r \cdot e^{i\theta} = x + iy \in \mathbb{C}$:

- El grupo Λ_{r^*} rotación de 180° con centro en el origen de coordenadas, sobre el espacio \mathbb{C}^* .

$$g(z) = r \cdot e^{i(\theta+\pi)} = -x - iy (\neq 0)$$

- El grupo Λ_r rotación de 180° con centro en el origen de coordenadas, sobre el espacio \mathbb{C} .

$$g(z) = r \cdot e^{i(\theta+\pi)} = -x - iy$$

- El grupo Λ_s simetría respecto al eje horizontal, sobre el espacio \mathbb{C} .

$$g(z) = r \cdot e^{i(-\theta)} = x - iy$$

En el primer caso, la acción es libre ya que todo número complejo aumentará en π su ángulo, por tanto el espacio que nos resulte será una variedad. El único número complejo que queda fijo por esta acción es el origen, pero no está en nuestro espacio. Por tanto, el espacio cociente de \mathbb{C}^* por esta acción indentificará los números complejos con parte real positiva con los de parte real negativa. En la recta donde la parte real es cero, la semirrecta positiva se identificará con la negativa (ver Figura 2.3).

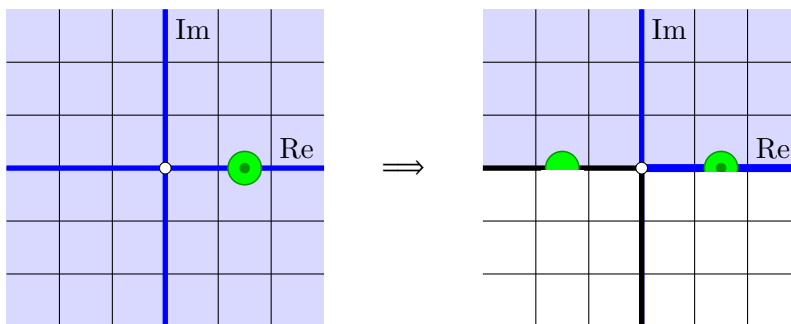


Figura 2.3: El espacio cociente del plano complejo por la acción Λ_{r^*} .

Notar que podemos encontrar un entorno homeomorfo a un disco de dimensi3n 2 para todo punto del espacio cociente, por tanto estamos ante una variedad sin borde.

En el segundo caso, al considerar el punto (0,0) dentro del espacio, la acci3n si que deja un punto fijo ya que si $z = 0$, $g(z) = 0 \cdot e^{i(0+\pi)} = 0 + i0 \Rightarrow g(z) = 0$. El espacio cociente entre \mathbb{C} y la acci3n es el mismo espacio que en el caso anterior al que hemos a3nadido el punto origen.

En la tercera situaci3n, en cambio, la acci3n deja infinitos puntos fijos:

$$z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

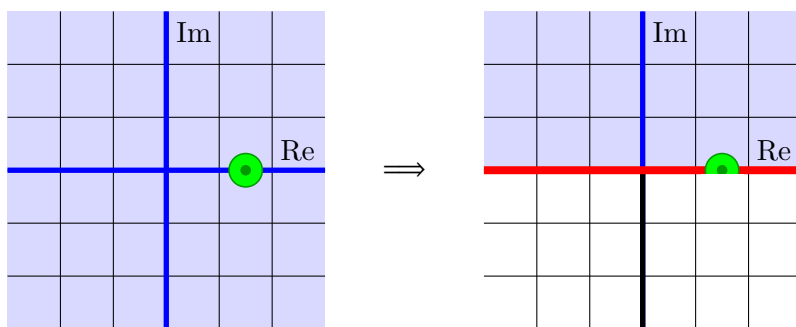


Figura 2.4: El espacio cociente del plano complejo por la acci3n Λ_s .

El espacio resultante es el semiplano superior: $\mathbb{C}^*/\Lambda_s = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$. En cuanto a la acci3n, la 3rbita de un punto rojo es 3l mismo, los dos elementos del grupo lo dejan fijo. Debemos tener esto en cuenta para determinar un entorno de estos puntos. En la Figura 2.4 se ilustra c3mo el entorno del punto $(\frac{3}{2}, 0)$ se “dobla” y se convierte en un semidisco doble. Este entorno no se puede describir con las cartas propuestas para variedades, sino que es un disco \mathbb{D}^2 sobre el que act3a el grupo de las simetr3as. Este es el concepto de carta que debemos desarrollar en este espacio, por lo que ya no es una variedad, sino un orbifold. Notar que el concepto de orbifold no solo hace referencia al espacio cociente resultante del espacio por la acci3n un grupo algebraico, sino que incluye un conocimiento sobre el grupo y de qu3 manera act3a.

La interpretaci3n de este ejemplo mediante la teor3a de cubiertas, podr3amos entender en el primer caso que el espacio \mathbb{C}^* es una cubierta doble del $\mathbb{C}^*/\Lambda_{r^*}$, donde todo punto en el espacio final tiene 2 preim3genes, es decir, si $p_{r^*} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*/\Lambda_{r^*}$, $|p_{r^*}^{-1}(z)| = 2, \forall z \in \mathbb{C}^*/\Lambda_{r^*}$.

Sin embargo, para la segunda cubierta $p_r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_r$ todos los puntos de \mathbb{C}/Λ_r no tienen el mismo n3mero de preim3genes, sino que el origen tiene solo una porque la aplicaci3n recubridora lo deja fijo. Este es un ejemplo de cubierta ramificada. An3logamente para la tercera cubierta $p_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_s$.

Como comentamos en el cap3tulo anterior, una variedad se caracteriza por comportarse localmente como una bola abierta (o carta) de la misma dimensi3n. An3logamente, para dar una definici3n formal de un orbifold se debe conocer el espacio topol3gico en el que nos encontramos y las nuevas cartas (cocientes locales de estas bolas n -dimensionales).

Definici3n 2.3. Un orbifold n -dimensional \mathcal{O} consta de un espacio topol3gico $X_{\mathcal{O}}$ y un atlas maximal que contenga las cartas orbifold $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ compatibles.

En general, se suele considerar como espacios topol3gicos los espacios de Hausdorff (T_2 -espacios) y 2-numerables. En la definici3n formal de orbifold, se hace referencia a las cartas que lo determinan. Vamos a ir definiendo estos t3rminos que hemos introducido.

Definici3n 2.4. Una carta orbifold n -dimensional sobre un espacio topol3gico X es una cuaterna $(\tilde{U}, G, \sigma, U)$, donde:

- \tilde{U} es un abierto de \mathbb{R}^n .
- G es un grupo finito de homeomorfismos de \tilde{U} .
- $\sigma : \tilde{U} \rightarrow U$ es una aplicación cociente donde U es un abierto de X .

Para el caso de variedades, las cartas se correspondían a abiertos \tilde{U} de \mathbb{R}^n . En cambio ahora, esta carta se sustituye por la acción de este abierto por el grupo que actúa localmente.

Definición 2.5. Diremos que una carta es una *carta centrada en $x \in X$* si existe una única preimagen de x en el abierto \tilde{U} de la carta.

Definición 2.6. Un *atlas orbifold n -dimensional* sobre un espacio topológico X es una colección de cartas compatibles $\mathcal{U} = \{(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \sigma_\alpha, U_\alpha)\}$ que cubren todo el espacio X .

Así pues, un orbifold se debe entender como un espacio donde localmente se puede comportar como un cociente por un grupo finito junto a un atlas de cartas orbifold donde se determinen los grupos finitos y de qué manera actúan. Estas cartas, en los entornos donde se interseccionan, deben comportarse de la misma manera. Esto es lo que se refiere la definición de atlas con el término *compatibles*.

Definición 2.7. Sean $(\tilde{U}_1, G_1, \sigma_1, U_1)$ y $(\tilde{U}_2, G_2, \sigma_2, U_2)$ dos cartas orbifold tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Estas cartas se dicen *compatibles* si $\forall x \in U_1 \cap U_2$ existe un entorno abierto $V \subseteq U_1 \cap U_2$ de x y una carta orbifold (\tilde{V}, H, ϕ, V) centrada en x tal que existen dos aplicaciones $\tilde{\lambda}_i, \nu_i$ para cada carta $(\tilde{U}_i, G_i, \sigma_i, U_i)$ que cumplan:

- $\nu_i : H \rightarrow G_i$ es un homomorfismo de grupos, $i = 1, 2$.
- $\tilde{\lambda}_i : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}_i$ es una aplicación tal que $\sigma_i \circ \tilde{\lambda}_i = \phi$, $i = 1, 2$.
- $\tilde{\lambda}_i(h \cdot \tilde{x}) = \nu_i(h)\tilde{\lambda}_i(\tilde{x})$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{V}$, $h \in H$, $i = 1, 2$.

Ahora podemos ver si es cierta la observación que hemos comentado al comienzo del capítulo: un orbifold donde el grupo finito que actúa (globalmente) sea el grupo trivial, nos encontraremos en una variedad (o *manifold*). En efecto: tomamos el grupo G como el grupo trivial y X como el espacio orbifold. En el diagrama de las cartas orbifold, la aplicación p va del abierto \tilde{U} en sí mismo y $\hat{\sigma}$ induce un homeomorfismo entre el abierto \tilde{U} de \mathbb{R}^n y el abierto $U \subset X$. Por tanto, todo abierto de X es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , es decir, X es una variedad.

Esta es una relación entre una variedad y un orbifold, donde comprobamos que este nuevo término extiende al de variedad, pero también podemos aprovechar esta propiedad para construir nuevos espacios orbifold.

Proposición 2.8. *Sea M una variedad o manifold y G un grupo actuando propiamente discontinua sobre M , entonces el espacio cociente M/G tiene estructura de orbifold.*

Demostración. Para cualquier punto $x \in M/G$, elegimos $\tilde{x} \in M$ tal que se proyecta en x tras la acción del grupo. Tomamos $\text{ISO}_{\tilde{x}}$ el grupo de isotropía de \tilde{x} , es decir, los elementos de G que dejan fijo \tilde{x} . Por ser G un grupo propiamente discontinuo sobre M , existe un entorno abierto \tilde{U}_x de \tilde{x} invariante por $\text{ISO}_{\tilde{x}}$ y disjunto de sus abiertos trasladados por los elementos de $G \setminus \text{ISO}_{\tilde{x}}$. Así pues, la proyección de U_x sobre $\tilde{U}_x/\text{ISO}_{\tilde{x}}$ es un homeomorfismo. Por tanto, este entorno U_x tiene estructura orbifold.

Para extender este razonamiento a todo el espacio M/G , tomamos un recubrimiento $\{U_x\}$ añadiendo intersecciones finitas. Considerando cualesquiera $U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k} \neq \emptyset$, esto implica que existirán ciertos elementos de G tal que $g_1 \tilde{U}_{x_1} \cap \dots \cap g_k \tilde{U}_{x_k}$ es no vacía. Esta intersección puede tomarse como $(U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k})$ sobre el que actúa el grupo $g_1 \text{ISO}_{x_1} g_1^{-1} \cap \dots \cap g_k \text{ISO}_{x_k} g_k^{-1}$. \square

La demostraci3n completa se puede consultar en el libro de W. Thurston [17, p. 302].

Con la informaci3n que hemos descrito hasta este punto, consideremos el estudio local de un orbifold. Sea \mathcal{O} un orbifold y $x \in X_{\mathcal{O}}$ un punto del espacio orbifold. Si localmente en este punto el grupo que actúa G_x es el grupo trivial, es decir, si existe un entorno $U \subset X_{\mathcal{O}}$ homeomorfo a $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, entonces en este abierto U el orbifold se comporta localmente como una variedad. Si esto sucede $\forall x \in X_{\mathcal{O}}$, entonces el orbifold es una variedad. En los puntos $y \in X_{\mathcal{O}}$ donde el grupo que actúa localmente no es el trivial, $G_y \neq \{1\}$, existen $g \in G_y$ ($g \neq 1$) tal que $gy = y$. Estos puntos $y \in X_{\mathcal{O}}$ se denominan *puntos singulares* y los elementos g que fijan un punto y forman el grupo de isotropía de y , definido en el Capítulo 1.

Definici3n 2.9. Sea \mathcal{O} un orbifold. Los puntos $x \in X_{\mathcal{O}}$ tal que $ISO_x \neq \{1\}$ se denominan *puntos singulares*. Al conjunto de puntos singulares de un orbifold \mathcal{O} lo denotamos $\Sigma_{\mathcal{O}}$.

$$\Sigma_{\mathcal{O}} = \{x \in X | G_x \neq \{1\}\} = \{x \in X | \exists g \in G_x \text{ tal que } gx = x, (g \neq 1)\}$$

Los puntos singulares caracterizan un orbifold. Fuera de estos puntos, el espacio se comporta como una variedad. Esta interpretaci3n se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10. Sea \mathbb{S}^2 la esfera de dimensi3n 3. Sobre esta variedad hacemos actuar el grupo de las rotaciones de $2\pi/3$ radianes, es decir, el grupo \mathbb{Z}_3 . Tomando como eje de rotaci3n el eje vertical, utilizando coordenadas polares sobre el plano X-Y, tenemos que el conjunto que contiene un punto y y solo uno de cada 33rbita (dominio fundamental) es el siguiente:

$$F = \left\{ z \in \mathbb{S}^2 \mid 0 \leq \theta < \frac{2\pi}{3}, \text{ siendo } \theta \text{ el 33ngulo sobre el plano X-Y} \right\}$$

Así pues, su clausura \hat{F} es un dominio fundamental para la acci3n, donde los puntos con $\theta = 0$ y $\theta = \frac{2\pi}{3}$ est3n identificados. Por tanto, la figura resultante vuelve a ser una esfera en la que los polos han sido recorridos 3 veces: tomando p como el polos norte tenemos que $gp = p$, $\forall g \in \mathbb{Z}_3$, an3logamente tenemos el mismo resultado para el polo sur q (ver Figura 2.5). Es decir,

$$ISO_p = \{0, 1, 2\} = ISO_q \cong \mathbb{Z}_3$$

Estos puntos p y q son los puntos singulares. Fuera de estos, el espacio se comporta como una variedad. En este caso, se dice que tienen orden 3.

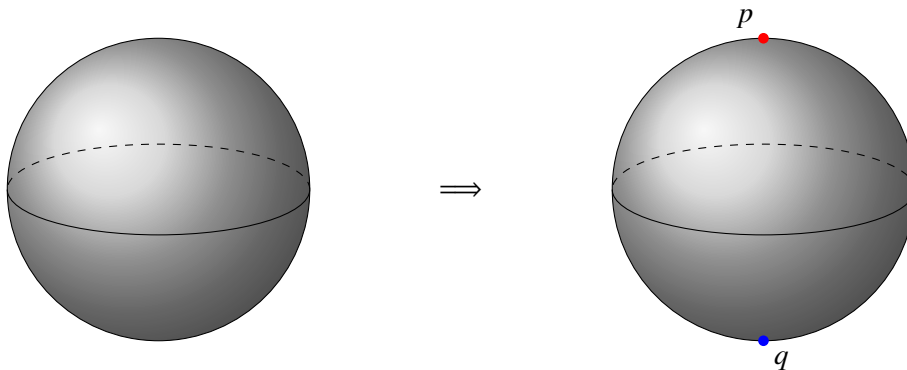


Figura 2.5: La esfera \mathbb{S}^2 actuando el grupo \mathbb{Z}_3 .

2.1. Aplicaciones orbifold

Una vez definidos los espacios orbifold, debemos introducir las aplicaciones entre estos nuevos espacios: las *aplicaciones orbifold*. Diversos autores como W. Chen [3, 4] han presentado definiciones diferentes para las aplicaciones entre orbifolds dependiendo de la finalidad del estudio. En el artículo de Borzellino [1], se analizan las diferentes acepciones y la relación entre ellas. En este trabajo se tratará de formalizar una definición con el objetivo de poder trabajar posteriormente con caminos, lazos y equivalencia homotópica de éstos.

Las aplicaciones entre orbifolds deben ser una extensión del concepto de aplicación sobre variedades, es decir, en las zonas donde espacio de partida se comporte como una variedad, la aplicación procederá de manera normal. Ahora bien, debemos exponer qué sucederá en los puntos singulares.

Una aplicación entre dos orbifolds \mathcal{M} y \mathcal{N}

$$F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

es un par $F = (f, \{\tilde{f}_x\}_{x \in X_{\mathcal{M}}})$, donde $x \in X_{\mathcal{M}}$ y $(\tilde{U}_x, G_x, \sigma, U_x)$ es una carta centrada de x , de manera que se verifica que:

- f determina el comportamiento de la función en el espacio cociente: $f : X_{\mathcal{M}} \rightarrow X_{\mathcal{N}}$.
- $\{\tilde{f}_x\}_{x \in X_{\mathcal{M}}}$ es una familia de aplicaciones \tilde{f}_x que determinan el comportamiento de la función en un entorno abierto \tilde{U}_x y cumplen la siguiente propiedad.

Tomando $f(x) = y \in X_{\mathcal{N}}$ y una carta centrada en y $(\tilde{V}_y, G_y, \tau, V_y)$, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_x & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{V}_y \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\ U_x & \xrightarrow{f} & V_y \end{array}$$

donde se cumple que $f \circ \sigma = \tau \circ \tilde{f}$.

Dos aplicaciones orbifold pueden tener la misma representación en el espacio cociente. Es decir, pueden existir varias funciones \tilde{f}_x para una misma aplicación f en el cociente. Dos funciones $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$, con \tilde{U}, \tilde{V} abiertos de \mathbb{R}^n se dicen que son *elevaciones compatibles* si dan lugar a la misma aplicación entre los espacios cocientes U, V .

Notar que la función \tilde{f}_x determina la función f sobre el punto x , es más, sobre los puntos contenidos en un entorno U_x . De esta manera, la elección de cada función \tilde{f}_x no es independiente para cada punto, sino que \tilde{f}_x condiciona también a los puntos dentro del entorno U_x . La función sobre un punto $x' \in U_x$ debe ser compatible con la función \tilde{f}_x .

Ejemplo 2.11. Para ilustrar la definición de aplicación orbifold, desarrollaremos un ejemplo en una situación similar al Ejemplo 2.2. El espacio orbifold de partida es el espacio \mathbb{C} donde actúa el grupo trivial, es decir, el orbifold es la variedad conocida como el plano complejo. El espacio de llegada es el mismo plano donde actúa globalmente el grupo G de simetrías respecto al eje X . Es decir, en este espacio los números complejos conjugados están relacionados: sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (con $x, y \in \mathbb{R}$) y su conjugado es $\bar{z} = x + i(-y)$, entonces $z \sim \bar{z}$.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}/G \\ (x, y) & \longmapsto & (x, |y|) \end{array}$$

El resultado es el semiplano superior, donde los coeficientes imaginarios son mayores o iguales que cero (ver Figura 2.6).

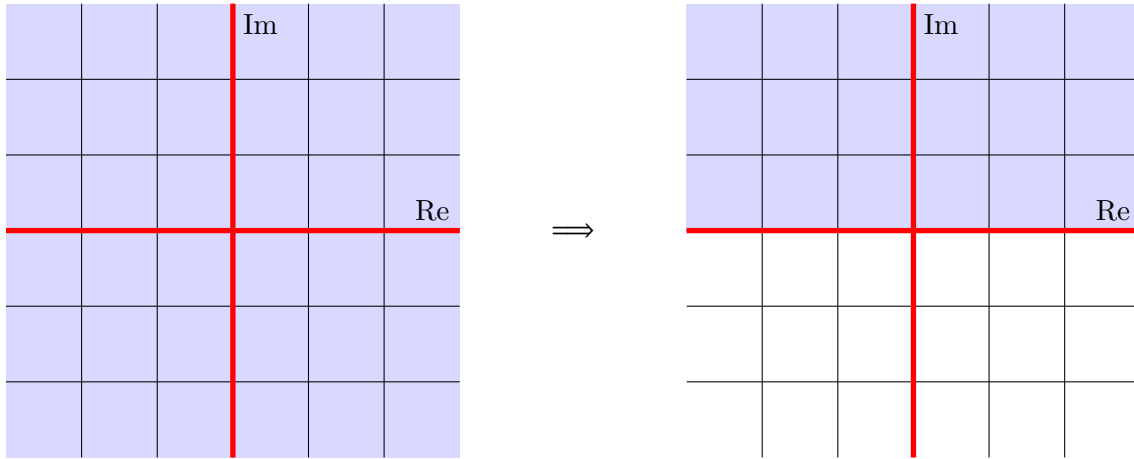


Figura 2.6: La funci3n f va del plano complejo al semiplano cerrado superior.

Sea $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}/G$ tal que $z_1 = f(z_2)$. En este ejemplo se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 U_{z_1} & \xrightarrow{\tilde{f}} & V_{z_2} \\
 Id_{\mathbb{C}} = \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\
 U_{z_1} & \xrightarrow{f} & V_{z_2}/G
 \end{array}$$

Es claro que para el caso del orbifold \mathbb{C} , la carta σ es la identidad ya que es una variedad. Para \mathbb{C}/G , definimos τ como la aplicaci3n resultante de la acci3n del grupo G sobre el plano. Podemos encontrar dos funciones $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ para que se cumpla el diagrama:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_1(x, y) &= (x, |y|) \\
 \tilde{f}_2(x, y) &= (x, y)
 \end{aligned}$$

Ambas aplicaciones representan la misma funci3n en los orbifolds, es decir, se tiene la igualdad $f \circ \sigma = \tau \circ \tilde{f}$. Por tanto, las dos aplicaciones orbifold $F_1 = (f, \tilde{f}_1)$, $F_2 = (f, \tilde{f}_2)$ representan la misma aplicaci3n en los espacios orbifold pero son distintas, ya que $\tilde{f}_1 \neq \tilde{f}_2$ y no son compatibles.

En el ejemplo hemos visto el caso en el que dos funciones \tilde{f} determinan una misma aplicaci3n en los espacios cocientes. La existencia de diversas funciones \tilde{f} se debe a la compatibilidad de cartas. La idea es que existe una regi3n com3n de \mathbb{R}^n donde dos funciones \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 son la misma funci3n, y aunque en el resto del espacio difieren, componiendo con la acci3n del grupo se obtiene la misma funci3n en el orbifold. En esencia, son aplicaciones diferentes en el espacio \mathbb{R}^n pero iguales tras la acci3n del grupo. Expliquemos esto de manera formal.

Sean \mathcal{A}, \mathcal{B} dos orbifold y $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ una aplicaci3n orbifold. Sea $x \in U \subseteq X_{\mathcal{A}}$ y $f(x) = y \in V \subseteq X_{\mathcal{B}}$ tal que $f(U) \subset V$. Tomamos las cartas de ambos puntos $(\tilde{U}, G, \sigma_1, U)$, $(\tilde{V}, H, \sigma_2, V)$. De esta manera tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{V} \\
 \sigma_1 \downarrow & & \downarrow \sigma_2 \\
 U & \xrightarrow{f} & V
 \end{array}$$

Ahora tomamos dos cartas compatibles para cada punto de manera que:

$$(\tilde{U}_i, G_i, \sigma_{1i}, U_i), \quad i = 1, 2 \quad x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$$

$$(\tilde{V}_i, H_i, \sigma_{2i}, V_i), \quad i = 1, 2 \quad x \in V \subseteq V_1 \cap V_2$$

Esta compatibilidad viene dada por cuatro funciones λ_i y μ_i , $i = 1, 2$. Para estos abiertos U_i, V_i del orbifold también debemos mantener la condición $f(U_i) \subseteq V_i$. De esta manera tenemos definido el mismo diagrama anterior para cada $i = 1, 2$. Relacionando estos diagramas con la compatibilidad de cartas tenemos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{U}_i & \xleftarrow{\mu_i} & \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{V} & \xrightarrow{\lambda_i} & \tilde{V}_i \\ \downarrow \sigma_{1i} & & \downarrow \sigma_1 & & \downarrow \sigma_2 & & \downarrow \sigma_{2i} \\ U_i & \xleftarrow{\quad} & U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{\quad} & V_i \end{array}$$

Por tanto, quedan definidas dos funciones \tilde{f}_i entre \tilde{U}_i y \tilde{V}_i y dos funciones.

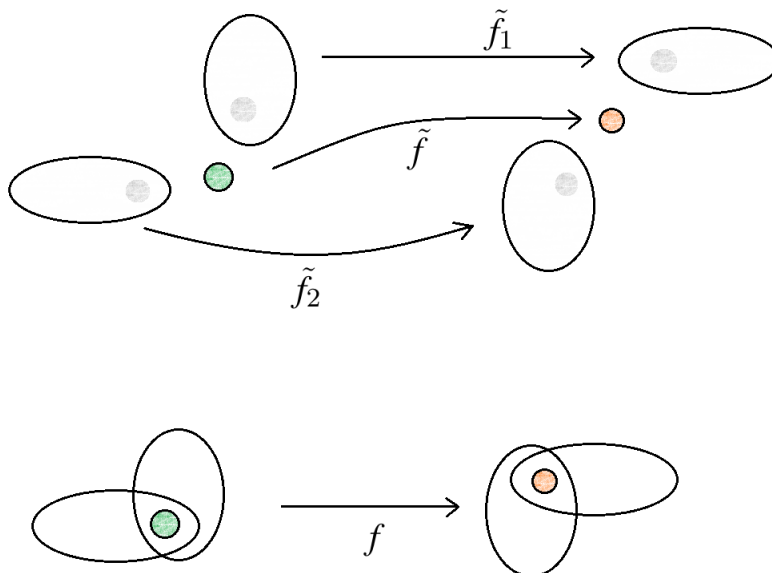


Figura 2.7: La compatibilidad de cartas da lugar a elevaciones compatibles.

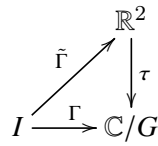
El resultado muestra dos funciones sobre abiertos de \mathbb{R}^n que derivan en dos funciones en los orbifold $f_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$ que sobre el abierto U se comportan igual que la función inicial f .

2.2. Conexión por caminos, homotopía y grupo fundamental orbifold

El objetivo del trabajo es estudiar grupos fundamentales de espacios orbifold. Como hemos introducido en el capítulo anterior, los grupos fundamentales se basan en el estudio de las homotopías entre caminos cerrados. En esta sección redefiniremos estos conceptos adaptándolos a los nuevos espacios.

Definición 2.12. Sea I un intervalo cerrado $[a, b]$ y \mathcal{O} un orbifold. Un *camino-orbifold* (o *camino* si no ha lugar a confusión) es una aplicación orbifold continua $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$. En particular, llamaremos *lazo-orbifold* (o *lazo*) a un camino-orbifold tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Observaci3n 2.13. Un lazo-orbifold cuya imagen est3 contenida en una carta-orbifold puede levantarse en un camino que no es un lazo. En el ejemplo anterior, podemos definir el lazo $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{C}/G$ tal que $\Gamma(t) = 1 + i(2t - 1)$, cuya elevaci3n $\tilde{\Gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ viene dada por $\tilde{\Gamma}(t) = (1, 2t - 1)$.



Esta aplicaci3n define un lazo en el espacio cociente ya que $\Gamma(0) = 1 + i = \Gamma(1)$, pero en el espacio \mathbb{R}^2 recorre un camino abierto: $\tilde{\Gamma}(0) = (1, -1)$, $\tilde{\Gamma}(1) = (1, 1)$.

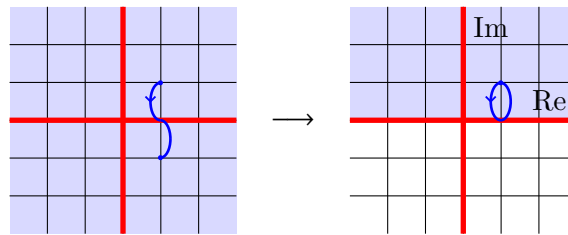


Figura 2.8: El camino abierto $\tilde{\Gamma}$ (en azul) es un lazo Γ en el orbifold.

Ejemplo 2.14. Atendiendo a la observaci3n anterior, se puede deducir que la elevaci3n al espacio real de un lazo en el espacio orbifold puede dar lugar a un camino abierto o a un lazo. Concretamente, en un espacio donde act3e el grupo de las simetr3as dos aplicaciones orbifold diferentes, pueden tener la misma representaci3n en el espacio cociente. Desde el mismo ejemplo anterior en el que sobre el plano complejo act3a el grupo de las simetr3as, tomamos un lazo donde un punto es un punto singular. As3 pues, al elevar este lazo al plano real tenemos dos opciones ilustradas en la Figura 2.9.

En este ejemplo donde el grupo que act3a globalmente tiene dos elementos $G = \{1, g\}$, podemos entender dos lazos orbifold son diferentes porque su elevaci3n en el plano real es diferente, aunque su imagen en el orbifold sea la misma. El lazo que se eleva en un camino normal, tambi3n es lazo en la elevaci3n, por lo que es un lazo trivial en el orbifold. La segunda opci3n consiste en que el camino elevado continuar3 realizando una simetr3a del lazo con respecto al eje X. El resultado es un camino abierto en el plano real. Este lazo en el orbifold no es trivial porque su elevaci3n es un camino abierto.

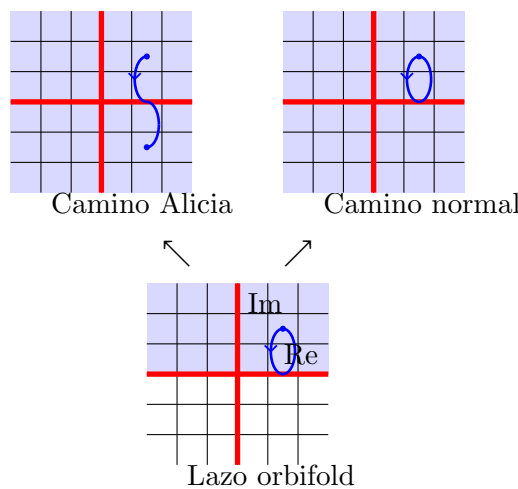


Figura 2.9: El camino Alicia o camino normal.

De manera general, cuando tengamos un espacio sobre el que actúa el grupo de las simetrías, el lazo en el espacio cociente tal que al elevarlo da lugar a un camino abierto determina este espacio. A este camino que “atraviesa” la línea de simetría le llamaremos *camino Alicia*.

Definición 2.15. Sea \mathcal{O} un espacio orbifold, $U \subseteq \mathcal{O}$ un abierto sobre el que está actuando localmente el grupo $\mathbb{Z}_2 = \{1, g\}$ como simetría con respecto a un hiperplano.

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n & \\
 \tilde{\Gamma} \nearrow & & \downarrow \text{acción } \mathbb{Z}_2 \\
 I & \xrightarrow{\Gamma} & U \subseteq \mathcal{O}
 \end{array}$$

Sea p un punto del abierto U . Llamaremos *camino Alicia* al lazo orbifold $\Gamma : I \rightarrow U$ tal que $\Gamma(0) = p = \Gamma(1)$ y su elevación se define como un camino abierto a través de la simetría: $\tilde{\Gamma}(0) = p$, $\tilde{\Gamma}(1) = q = g \cdot p$.

Un elemento esencial para el estudio de grupos fundamentales es la equivalencia de lazos mediante homotopía. Vamos a extender este concepto a orbifolds. Para ello debemos aclarar previamente que consideraremos el espacio $I \times M$, siendo M un orbifold, como el espacio generado por el producto cartesiano entre un orbifold y el intervalo $I = [0, 1]$ (variedad de dimensión 1).

Definición 2.16. Dadas dos aplicaciones orbifold $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ continuas, se define la *homotopía-orbifold* como la aplicación orbifold $F : M \times I \rightarrow N$, donde $I = [0, 1]$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$. Si esta aplicación F existe, se dice que f_0 y f_1 son aplicaciones homótopas, $f_0 \simeq f_1$. Si además F deja fijo un subconjunto A de X_M , se dice que F es una *homotopía relativa a A*.

Una vez tenemos establecido el concepto de homotopía para espacios orbifold, ya podemos definir el grupo fundamental en estos espacios. Recordar que en el caso de variedades, el grupo fundamental de un espacio X y un punto base x_0 se define como las clases de equivalencia de lazos basados en x_0 :

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha \text{ lazo basado en } x_0\}$$

donde la equivalencia representa una homotopía relativa al punto base. Este conjunto $\pi_1(X, x_0)$ con la operación producto de clases de equivalencia de caminos tiene estructura de grupo.

Cuando nos encontramos en un espacio orbifold, los lazos son aplicaciones orbifold continuas donde el extremo inicial coincide con el final en el espacio cociente. Así pues, de manera directa podemos traducir la definición anterior. Para simplificar la definición, tomaremos como punto base un punto no singular.

Definición 2.17 (Grupo Fundamental Orbifold). Sea \mathcal{O} un orbifold y $x_0 \in X_{\mathcal{O}}$ el punto no singular. El *grupo fundamental orbifold* de \mathcal{O} es el conjunto de las clases de equivalencia de lazos en el espacio orbifold con punto base x_0 ; las clases de equivalencia de un lazo se componen de los lazos homotópicamente equivalentes (homotopía-orbifold) a éste.

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha \text{ lazo basado en } x_0\}$$

Más adelante desarrollaremos ejemplos de grupos fundamentales orbifold y sus principales propiedades.

2.3. Espacios recubridores en orbifold

Otra manera de poder estudiar el grupo fundamental de un espacio comprende el uso de los teoremas que lo relacionan con espacios recubridores. Para ello, en este apartado presentaremos la *cubierta orbifold*, una extensión del concepto de espacio recubridor a los espacios orbifold entendiendo el espacio recubridor como otro orbifold junto a una aplicación orbifold.

Definici3n 2.18. Una *cubierta orbifold* de un orbifold \mathcal{O} es un orbifold $\tilde{\mathcal{O}}$ junto a una aplicaci3n orbifold $p : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}$ entre estos espacios tal que:

- Para todo $x \in X_{\mathcal{O}}$, existe un entorno abierto $U = \tilde{U}/G$ con $p^{-1}(U) = \bigcup V_i$, donde V_i son abiertos de $X_{\tilde{\mathcal{O}}}$.
- La restricci3n de la cubierta a cada uno de estos abiertos $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$, induce un homeomorfismo entre sus abiertos de \mathbb{R}^n , $\tilde{V}_i \cong \tilde{U}$. Todo entorno abierto U que satisfaga la condici3n anterior se llama *entorno elemental orbifold*.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_i & \xrightarrow{\cong} & \tilde{U} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\ \tilde{V}_i/G_i = V_i & \xrightarrow{p} & U = \tilde{U}/G \end{array}$$

Ejemplo 2.19. Continuando en la l3nea de los ejemplos anteriores, el espacio es el plano complejo donde act3a globalmente el grupo G de simetr3as respecto al eje X . Vamos a considerar la funci3n $F = (f, \tilde{f})$, donde $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G$ est3 definida por la acci3n del grupo y la elevaci3n sobre el plano real viene dada por $\tilde{f}(x, y) = (x, |y|)$. Veamos que esta aplicaci3n orbifold es una cubierta donde el plano recubre al espacio \mathbb{C}/G .

Tomando un entorno del punto $(1, 2)$ espacio final, se puede ver que en el espacio recubridor tenemos dos entornos: el entorno del punto $(1, 2)$ y el del punto $(1, -2)$ (Figura 2.10).

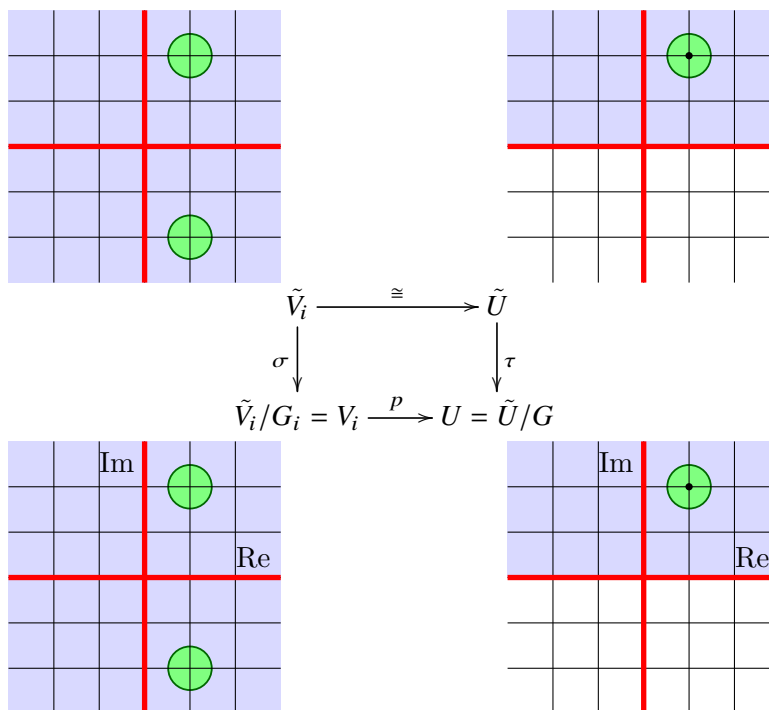


Figura 2.10: Comportamiento del espacio recubridor en el punto $(1, 2)$.

Notar que en este caso particular, los grupos de las cartas G_i y G son triviales, con $i = 1, 2$.

Un caso especial son los puntos del semiplano complejo cuyo grupo de isotrop3a no es trivial. Por ejemplo el punto $(2, 0)$. En este punto, el entorno que podemos crear es un semidisco, en cambio, el entorno del plano de partida, es un disco entero. Aqu3 se ve de manera m3s evidente que el homeomorfismo lo encontramos en los abiertos del plano de \mathbb{R}^2 (Figura 2.11).

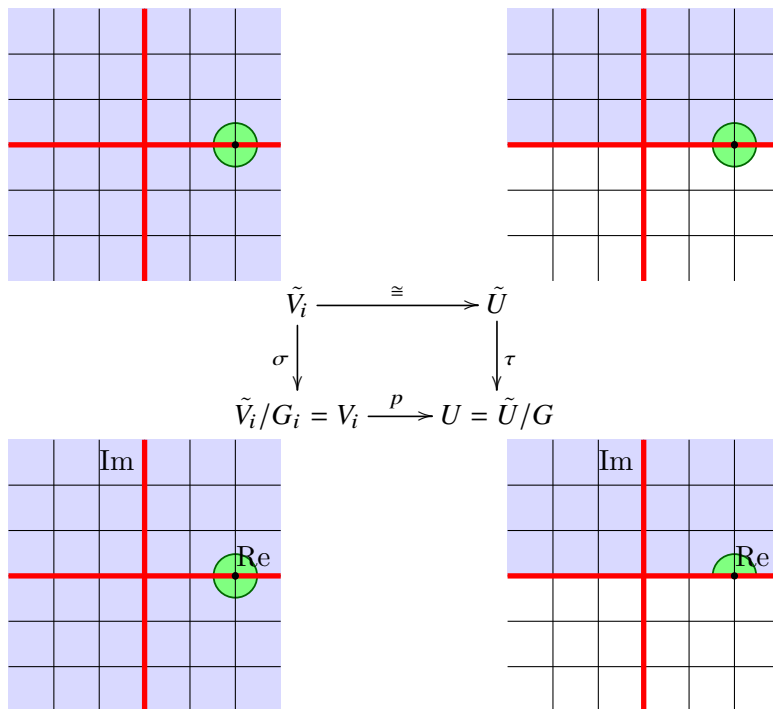


Figura 2.11: Comportamiento del espacio recubridor en el punto $(2,0)$.

En este punto, el grupo G_i (para i_1) vuelve a ser trivial, pero en cambio G actúa como simetría.

Para continuar trasladando la teoría de espacios recubridores a orbifolds, debemos probar que también se respetan las propiedades de levantamiento. Concretamente, el teorema siguiente prueba el levantamiento de caminos en orbifold como en el caso de variedades, descrito en la Proposición 1.21.

Teorema 2.20. *Sea \mathcal{O} un orbifold y (\mathcal{T}, p) una cubierta orbifold de \mathcal{O} . Dados $\hat{x} \in X_{\mathcal{T}}$, $x = p(\hat{x})$, $I = [a, b]$, entonces $\forall \alpha : I \rightarrow \mathcal{O}$ camino tal que $\alpha(a) = x$, existe un único camino orbifold $\hat{\alpha} : I \rightarrow \mathcal{T}$ tal que $\hat{\alpha}(a) = \hat{x}$ y $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$.*

$$\begin{array}{ccc}
 & X_{\mathcal{T}} & \\
 \hat{\alpha} \nearrow & & \downarrow p \\
 I & \xrightarrow{\alpha} & X_{\mathcal{O}}
 \end{array}$$

Demostración. Como en el caso levantamiento de caminos en cubiertas, podemos encontrar una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que el intervalo cerrado de camino $\alpha([t_{i-1}, t_i])$ está contenido en un entorno elemental orbifold, $1 \leq i \leq n$. Se procede por inducción sobre n .

Si $n = 1$, por la definición de cubierta orbifold, tenemos una carta orbifold $(\tilde{U}, G, \sigma, U)$ sobre U , entorno elemental orbifold, tal que $\alpha(I) \subset U$. Sabemos que $p^{-1}(U) = \coprod_i V_i$, de manera que hay cartas $(\tilde{V}_i, G_i, \tau_i, V_i)$ para las que se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{V}_i & \xrightarrow{\cong} & \tilde{U} \\
 \tau_i \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 \tilde{V}_i/G_i = V_i & \xrightarrow{p} & U = \tilde{U}/G
 \end{array}$$

Fijemos el único abierto V_k que contiene a \hat{x} . Es claro que podemos levantar α al orbifold \mathcal{T} , usando este diagrama. En efecto, α es un camino orbifold, en particular una aplicación

orbifold, es decir, α tiene determinada su elevaci3n sobre \tilde{U} , $\tilde{\alpha}$. Esta elevaci3n pasa a \tilde{V}_k por el homeomorfismo; con la proyecci3n τ_k se define el levantamiento de α a \mathcal{T} como camino orbifold.

Por inducci3n se sigue el resultado igual que en el caso de cubiertas. \square

Lema 2.21. *Sea \mathcal{O} un orbifold y (\mathcal{T}, p) una cubierta orbifold de \mathcal{O} . Sean $\alpha_0, \alpha_1 : I \rightarrow \mathcal{O}$ dos caminos-orbifold hom3topos, $H : \alpha_0 \sim \alpha_1$ y $p(\hat{x}_0) = x_0 = \alpha_0(0)$. Entonces existe una 3nica aplicaci3n orbifold \hat{H} tal que $p \circ \hat{H} = H$ y $\hat{H}(0, 0) = \hat{x}_0$.*

Demostraci3n. Para probar la propiedad de levantamiento de homotop3as, se utilizan razonamientos similares al desarrollado en la anterior demostraci3n. Siendo H una aplicaci3n orbifold que va de $I \times I$ a \mathcal{O} , podemos encontrar dos particiones $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ tal que H aplique cada rect3ngulo $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ a un entorno elemental orbifold de \mathcal{O} donde se cumple el resultado. Se procede por inducci3n sobre n y m . \square

Lema 2.22. *Las cubiertas orbifold env3an puntos singulares a puntos singulares.*

$$p(\Sigma_{\mathcal{T}}) \subseteq \Sigma_{\mathcal{O}}$$

Demostraci3n. Sea $x \in \mathcal{T}$, $p(x) = y \in \mathcal{O}$ y tomamos una carta centrada en x . Si $x \in \Sigma_{\mathcal{T}}$, el grupo G_x que act3a sobre esa carta es no trivial. Por tanto, el cardinal de la carta ser3 a , siendo $|G_x| = a$.

Por otro lado, por ser p cubierta, tenemos un homeomorfismo entre los espacios en \mathbb{R}^n . As3 pues, tenemos el siguiente diagrama donde se reflejan en rojo las cardinalidades de las operaciones:

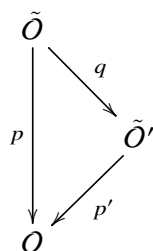
$$\begin{array}{ccc} \tilde{V}_x & \xrightarrow[\text{1}]{\text{hom}} & \tilde{U} \\ \tau_x \downarrow \text{a} & & \downarrow \text{b} \sigma \\ \tilde{V}_x/G_x = V_x & \xrightarrow[\text{p}]{\text{p}_0} & U = \tilde{U}/G \end{array}$$

La cardinalidad la podemos leer de dos maneras: $p \circ \tau_x = \sigma \circ \text{hom}$, es decir, $p_0 + a = b + 1$, donde $a, b, p_0 > 1$. Por tanto, $b = |G_y| \geq a \implies |G_y| \neq \{1\}$. Luego $y \in \Sigma_{\mathcal{O}}$. \square

De hecho, para todos las aplicaciones orbifold, ya que como hemos comentado anteriormente, los puntos singulares van a puntos singulares, luego todos los elementos del grupo G_i deben estar en el grupo G , $G_i \subseteq G$.

Por esta raz3n, los espacios recubridores de un orbifold se consiguen tomando los subgrupos de los grupos que conforman su atlas. As3 pues, si para una cierta carta $(\tilde{U}, G, \sigma, U)$ encontramos un subgrupo H del grupo G podemos construir una cubierta orbifold $\tilde{\mathcal{O}}$. Si podemos repetir el proceso, es decir, si podemos encontrar un subgrupo J de H (que ser3 a su vez subgrupo de G), habremos encontrado una cubierta orbifold $\tilde{\mathcal{O}}$ "mayor" que la primera, ya que recubre a la cubierta orbifold $\tilde{\mathcal{O}}$. De esta manera podemos definir el concepto de *cubierta orbifold universal*.

Definici3n 2.23. Una *cubierta orbifold universal* de un orbifold \mathcal{O} es una cubierta orbifold $(\tilde{\mathcal{O}}, p)$ tal que si existe otra cubierta orbifold $(\tilde{\mathcal{O}}', p')$, se tiene que $(\tilde{\mathcal{O}}, q)$ es una cubierta orbifold para $\tilde{\mathcal{O}}'$, siendo q la aplicaci3n recubridora.



De esta manera definido, se puede probar que todo orbifold admite una cubierta orbifold universal:

Proposición 2.24. *Todo orbifold tiene una cubierta orbifold universal.*

La demostración de este resultado es tediosa y sigue las líneas de su resultado análogo en variedades; los detalles están en el libro de W. Thurston [17, p. 305].

Observación 2.25. Como hemos comentado anteriormente, los espacios recubridores en esencia son aplicaciones cocientes. En el caso particular de la Proposición 2.8, el propio *manifold* M podemos interpretarlo como una cubierta orbifold del orbifold M/Γ , de hecho como una cubierta orbifold universal. En efecto, la variedad M se puede entender como un orbifold donde actúa el grupo trivial, que no tiene más subgrupos, luego es la mayor cubierta orbifold que podemos encontrar.

Para estos espacios, las propiedades de los espacios recubridores indican que el grupo fundamental del espacio M es el grupo Γ y que este grupo coincide exactamente con el grupo de transformaciones recubridoras (o *deck transformations*). Queremos generalizar esta idea para cualquier orbifold, no solo los provenientes de una variedad.

Capítulo 3

Grupos fundamentales orbifold: Teorema de Seifert - Van Kampen y cubiertas orbifold

En este capítulo reside el verdadero interés teórico de este trabajo. Vamos a desarrollar el concepto de grupos fundamentales para los espacios orbifold y los calcularemos para ciertos ejemplos, utilizando para ello el *Teorema de Seifert - Van Kampen* y los espacios recubridores. Autores como Haefliger y Quach [2, 9] ya estudiaron el grupo fundamental orbifold a partir de lazos orbifold, en lugar de interpretarlo como grupo de automorfismos de la cubierta universal.

3.1. Primeros ejemplos

Considerando la Definición 2.17 de grupo fundamental orbifold presentada en el capítulo anterior, vamos a presentar unos primeros ejemplos como implicación directa de esta definición.

Ejemplo 3.1. Trasladando la definición de manera natural, es claro que para cualquier variedad \mathcal{M} , el grupo fundamental orbifold coincide con el grupo fundamental normal.

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{M}) = \pi_1(\mathcal{M})$$

Por ejemplo, el espacio \mathbb{R}^n es una variedad de dimensión n . En este espacio todos los lazos son triviales, es decir, su grupo fundamental está formado por el elemento neutro: $\pi_1^{orb}(\mathbb{R}^n, p) = \{1\}$, con p un punto de \mathbb{R}^n . Coincide con el grupo fundamental ya estudiado.

Ejemplo 3.2 (Grupo simetrías). Retomando una vez más el ejemplo del plano complejo \mathbb{C} donde actúa el grupo G de las simetrías respecto al eje X , $C = \mathbb{C}/G$. En este orbifold tenemos que los lazos α tal que $\alpha(t) \notin \Sigma_C$ para todo $t \in I$, son triviales. En cambio, los lazos β tal que $\beta(t) \in \Sigma_C$ para algún $t \in I$, se pueden elevar como caminos abiertos, es decir, los lazos β son caminos Alicia.

Estos caminos no son triviales, pero recorrer dos veces el camino Alicia da lugar a un lazo en el orbifold recorrido dos veces (sigue siendo un lazo) y su elevación también es un lazo, de hecho trivial. Para entender esto debemos fijarnos en la Figura 2.8 donde el lazo se eleva en un camino Alicia, pero si lo ejecutamos dos veces conseguimos el lazo. Es decir, debemos “atravesar” dos veces la línea de puntos singulares.

Así pues, los lazos posibles en este orbifold son los lazos α , equivalentes al lazo trivial, y el lazo β , cuyo cuadrado es el lazo trivial. Luego el grupo fundamental orbifold queda:

$$\pi_1^{orb}(C, x_0) = \langle \alpha, \beta : \alpha = \beta^2 = 1 \rangle = \langle \beta : \beta^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2$$

En general, podemos intuir que cuando nos encontremos ante un espacio sobre el que actúa el grupo de las simetrías, su grupo fundamental orbifold estará determinado por el camino Alicia de manera que el cuadrado de este camino es un lazo trivial, además de las características propias del espacio. Debemos desarrollar una teoría que sustente y justifique este razonamiento.

Ejemplo 3.3 (Grupo rotaciones). Consideremos ahora el Ejemplo 2.10 donde el grupo G de las rotaciones de 3 elementos está actuando sobre el espacio topológico \mathbb{S}^2 . Tomando las coordenadas polares, la traslación comprende un giro de ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$$G = \{1, 2, 3\} = \{1, \theta, \theta^2\} = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

El orbifold \mathcal{S} resultante es una esfera cuyos polos p y q son puntos singulares de orden 3. Calculemos ahora el grupo fundamental orbifold de este espacio, tomando los lazos posibles basados en un punto x_0 no singular.

Los lazos que no rodean a ningún polo (o que rodean a los dos una vez) son claramente lazos triviales. Los lazos que rodean una vez al polo p (luego también a q) son homotópicamente equivalentes a los lazos α tal que $\alpha(t) = p$ para algún $t \in I$. Este lazo se eleva como camino por la acción del grupo. De esta manera, aunque en el orbifold tengamos un lazo ($\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$), la elevación queda determinada por el ángulo de rotación, luego debemos realizar 3 veces el lazo para que resulte un lazo trivial.

$$\tilde{\alpha}(0) = x_0, \quad \tilde{\alpha}(1) = x_0 \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad x_0 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} x_0 \cdot \theta \xrightarrow{\tilde{\alpha}} x_0 \cdot \theta^2 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} x_0$$

Así pues, el grupo fundamental orbifold de \mathcal{S} está determinado por el lazo α .

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, x_0) = \langle \alpha : \alpha^3 = 1 \rangle$$

Como en el ejemplo anterior, podemos intuir una generalización de este caso: cuando nos encontremos ante un punto singular debido a una acción de un grupo de rotación, el orden del punto determinará el grado del lazo que rodee al punto. Es necesario argumentar estas ideas con fundamentos algebraicos para poder utilizar estas herramientas cuando sea posible y agilizar los cálculos de los grupos fundamentales.

3.2. Propiedades principales

Como ya anticipamos en el capítulo anterior, podemos llegar a deducir la definición de grupo fundamental orbifold también a partir de los espacios recubridores. De hecho, la manera más usual de definirlo es ésta (ver [16]).

De manera análoga al caso de variedades, existe una relación directa entre el grupo fundamental de un espacio orbifold y *el grupo de transformaciones recubridoras*.

Definición 3.4. Sea $p : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{O}$ una cubierta orbifold. Llamamos *transformación recubridora* (o *deck transformation*) a un homeomorfismo orbifold $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ tal que $p \circ \phi = p$. Se denota $G_p(\mathcal{T})$ el conjunto de transformaciones recubridoras de \mathcal{T} respecto de p . Este conjunto forma un grupo con la composición de aplicaciones orbifold.

Observación 3.5. Para cada preimagen $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in X_{\mathcal{T}}$ del punto $x \in X_{\mathcal{O}}$, existe una transformación recubridora que lleva \tilde{x}_1 a \tilde{x}_2 . Por tanto, este grupo $G_p(\mathcal{T})$ se puede pensar como un grupo de permutaciones sobre cada fibra. La demostración es similar al caso estándar.

Proposición 3.6 (Grupo Fundamental Orbifold). *El grupo fundamental orbifold $\pi_1(\mathcal{O}, x_0)$ es el grupo de transformaciones recubridoras de la cubierta universal $\tilde{\mathcal{O}}$.*

Corolario 3.7. *Sea \mathcal{O} un orbifold construido a partir de una variedad simplemente conexa \mathcal{M} donde actúa globalmente un grupo H propiamente discontinuo, $\mathcal{O} = \mathcal{M}/H$. Entonces, el grupo fundamental orbifold de \mathcal{O} , coincide con el grupo H .*

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{O}) = H$$

3.3. Elementos para el c3lculo de grupos fundamentales orbifold

Una vez presentadas todas las propiedades algebraicas y topol3gicas de los grupos fundamentales orbifold y justificada la necesidad de desarrollar herramientas eficaces para el c3lculo 3stos, trataremos de elaborar dichas herramientas.

3.3.1. Cubiertas orbifold

Al realizar la cubierta de un orbifold, intentaremos eliminar la acci3n de un grupo de manera que obtengamos un espacio simplificado. Es decir, trataremos que desde el espacio recubridor obtengamos el orbifold inicial mediante la acci3n de un grupo. Por ello, no siempre va a ser 3til calcular la cubierta universal, simplemente intentaremos encontrar una cubierta apropiada. Estudiaremos por tanto, la relaci3n entre el grupo fundamental orbifold de un espacio y su cubierta (universal o no). Para ello debemos definir el t3rmino *orbifold cociente*.

Definici3n 3.8. Sea C un orbifold y sea G un grupo que actúa sobre C de manera propiamente discontinua. Se define \mathcal{D} *el orbifold cociente* como el espacio formado por las clases de equivalencia de los puntos de C relacionados por alg3n elemento de G . Es decir, siendo las clases de equivalencia $[c] = \{c' \in C \mid c'g = c, \text{ para alg3n } g \in G\}$, el orbifold cociente queda definido:

$$\mathcal{D} = \{[c] \mid c \in C\}$$

La manera de aplicar las cubiertas orbifold al c3lculo del grupo fundamental orbifold es la siguiente: conociendo el grupo fundamental orbifold de la cubierta y la presentaci3n del grupo que actúa, podremos calcular el grupo de nuestro espacio. A continuaci3n presentamos el resultado generalizado, contenido en el 3rea del 3lgebra de grupos.

Proposici3n 3.9. *Consideramos una sucesi3n exacta corta de grupos tal que:*

$$1 \rightarrow K \xrightarrow{m_1} G \xrightarrow{m_2} H \rightarrow 1$$

Supongamos que conocemos:

- *Las presentaciones de los grupos K y H :*

$$K = \langle k_1, \dots, k_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle \quad H = \langle h_1, \dots, h_r \mid s_1, \dots, s_s \rangle$$

- *El levantamiento de los generadores de H en G : $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r$.*
- *Las relaciones de H en t3rminos de los generadores de K .*

Entonces podremos calcular una presentaci3n del grupo G

$$G = \langle k_1, \dots, k_n, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r \mid r_1, \dots, r_m, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_s, \tilde{u}_{ij} \rangle$$

donde \tilde{s}_t son las relaciones s_t expresadas por los generadores de H en G , y \tilde{u}_{ij} una palabra derivada de la conjugaci3n de los generadores k 's y \tilde{h} 's.

Demostración. Veamos en primer lugar, qué generadores necesitamos. Tomamos un elemento general g del grupo G y probemos que se puede expresar con los generadores de K y los levantamientos de los generadores de H .

Sea $g \in G \Rightarrow m_2(g) \in H$, luego podemos expresarlo mediante una palabra en H : $m_2(g) = w(h_1, \dots, h_r)$. Tomando el levantamiento de esta palabra tenemos lo siguiente:

$$m_2(w(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r)) = w(h_1, \dots, h_r) = m_2(g) \Rightarrow m_2(gw(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r)^{-1}) = 1$$

Es decir, que el producto de g por el inverso de la palabra w en G están en el núcleo de m_2 , en K . Así pues, podemos expresarlo con una palabra de K :

$$gw(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r)^{-1} = v(k_1, \dots, k_n) \Rightarrow g = v(k_1, \dots, k_n)w(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r)$$

Luego, los generadores del grupo G son la unión de los de K y los levantamientos de los de H .

En cuanto a las relaciones, veamos lo que ocurre con las relaciones del grupo H . Estas relaciones s_i serán palabras sobre los generadores h_i , que en el grupo H son triviales. Es decir, que estas palabras expresadas en G serán palabras en función de \tilde{h}_i , $s_i(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r)$, de manera que su imagen por m_2 son triviales en H .

$$m_2(s_i(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r)) = s_i(h_1, \dots, h_r) = 1$$

Luego, si su imagen es trivial, estas palabras pertenecen al núcleo: $s_i(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r) \in K$. Por tanto, se pueden expresar en función de los generadores de K

$$s_i(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r) = t_i(k_1, \dots, k_n)$$

Y podemos encontrar su palabra inversa. Así pues, la relación en G queda:

$$\underbrace{s_i(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r)t_i^{-1}(k_1, \dots, k_n)}_{\tilde{s}_i} = 1$$

Por otro lado, tenemos que las relaciones de K son claramente también relaciones de G por ser subgrupo. Además, $K \triangleleft G$ luego un elemento de K conjugado por uno de G , será una palabra en K , es decir:

$$k_i^{\tilde{h}_j} = u_{ij}(k_1, \dots, k_n) \Rightarrow \underbrace{u_{ij}(k_1, \dots, k_n)(k_i^{\tilde{h}_j})^{-1}}_{\tilde{u}_{ij}} = 1$$

Así pues, tenemos que la presentación del grupo G es:

$$G = \langle k_1, \dots, k_n, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_r : r_1, \dots, r_m, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_s, \tilde{u}_{ij} \rangle$$

Solo queda probar si es necesario añadir alguna relación más.

Tomamos una relación general $T(\tilde{h}, k) = 1$, que por la relación \tilde{u}_{ij} podemos reordenarla y tomar de forma general $T_1(\tilde{h})T_2(k)$.

Mediante el morfismo m_2 tenemos que $1 = m_2(1) = m_2(T_1(\tilde{h})T_2(k)) = m_2(T_1(\tilde{h})) = T_1(h)$. Así pues, la palabra T_1 en H será producto y conjugación de sus relaciones. Tomando la elevación de este razonamiento tenemos que la palabra $T_1(\tilde{h})$ estará formada por elementos de la forma: $\tilde{h}^{-1}s(\tilde{h})\tilde{h}$.

Operando con las relaciones que sabemos que están en G , concretamente mediante las relaciones \tilde{s}_i y \tilde{u}_{ij} tenemos el siguiente razonamiento:

$$T_1(\tilde{h}) = \prod \tilde{h}^{-1}s(\tilde{h})\tilde{h} = \prod \tilde{h}^{-1}t(k)\tilde{h} = \prod \tilde{h}^{-1}\tilde{h}t'(k) = \prod t'(k)$$

Así pues, obtenemos que $1 = T_1(\tilde{h})T_2(k) = t'(k)T_2(k)$. Es decir, una palabra dependiendo de los generadores k , por tanto esta palabra será consecuencia del producto de relaciones del grupo K , r_j . Luego ya tenemos todas las relaciones necesarias para definir G . \square

El resultado anterior traducido a nuestro estudio queda recogido la proposici3n siguiente.

Proposici3n 3.10. *Sea \mathcal{C} un orbifold y sea H un grupo que actúa sobre \mathcal{C} de manera propiamente discontinua. Sea \mathcal{D} el orbifold cociente y $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ la cubierta orbifold definida por el cociente. Sea $p \in \mathcal{D}$ un punto liso y sea $q \in \psi^{-1}(p)$. Entonces,*

$$\text{Im} \left(\psi_* : \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{C}; q) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{D}; p) \right)$$

es un subgrupo normal de $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{D}; p)$ y su cociente es isomorfo a H que se identifica con $\psi^{-1}(p)$ mediante $g \equiv g \cdot p$. Es m3s, $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{D}; p)$ se identifica con las clases de homotopía de caminos orbifold que empiezan en q y terminan en un punto de $\psi^{-1}(p)$.

Demostraci3n. La primera parte de la proposici3n queda demostrada por la Proposici3n 3.9, siendo $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{C}; q)$, $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{D}; p)$ y H como K , G , y H respectivamente.

En la segunda parte hace referencia a la interpretaci3n del grupo fundamental orbifold del orbifold cociente. Los caminos de \mathcal{C} que comienzan en q y terminan en la fibra de $\psi^{-1}(p)$, se envían a lazos en \mathcal{D} , y la homotopía de estos caminos en la cubierta se trasladarán a homotopías de lazos en el orbifold cociente. Por tanto, es claro que $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{D}; p)$ se identificarán con las clases de homotopía de caminos orbifold que empiezan en q y terminan en un punto de $\psi^{-1}(p)$.

Cuando realizamos el producto de dos lazos en el orbifold cociente, se trasladarán al producto de caminos sobre la cubierta. Este producto se realizar3 conectando el punto final del primer camino con el inicial del segundo. Esta conexi3n se realizar3 mediante la acci3n del grupo G , ya que los puntos iniciales y finales en el cociente ser3n el mismo pero en la cubierta estar3n trasladados por elementos del grupo. \square

Observar que la proposici3n anterior indica que el producto de caminos lo haremos usando la acci3n de H , el punto base lo movemos con la acci3n del grupo.

Ejemplo 3.11 (Grupo simetrías). La generalizaci3n de este ejemplo mediante el razonamiento de cubiertas, corrobora la idea intuitiva planteada en el Ejemplo 3.2. Sea \mathcal{O} un orbifold, $U \subset \mathcal{O}$ un abierto donde actúa el grupo G de las simetrías. Sobre nuestro orbifold pueden estar actuando diferentes grupos de manera que cuando construimos el orbifold \mathcal{C} eliminando la acci3n de G , obtenemos una cubierta de \mathcal{O} pero no universal.

La Proposici3n 3.10 nos dice que el grupo fundamental orbifold de nuestro espacio estar3 determinado por las clases de homotopía que comienzan en un punto p y terminan en un punto de su fibra por la acci3n de G , en su punto espejo $g \cdot p$, es decir, las clases de homotopía del camino Alicia.

De esta manera, mediante el estudio de la homotopía del camino Alicia, podemos calcular el grupo fundamental orbifold de nuestro espacio conociendo el grupo de la cubierta generada eliminando la acci3n de la simetría.

3.3.2. Teorema de Seifert - Van Kampen

El *Teorema de Seifert-Van Kampen* es una potente herramienta de c3lculo de grupos fundamentales en el caso de variedades, ya que permite dividir el estudio del grupo de un espacio en el estudio de grupos fundamentales de subespacios y su intersecci3n. Por ello, antes de proponer este teorema para los espacios orbifold, debemos introducir la siguiente definici3n.

Definici3n 3.12. Llamamos *suborbifold* \mathcal{S} de un orbifold \mathcal{O} cuyo espacio topol3gico es un subespacio $X_{\mathcal{S}} \subset X_{\mathcal{O}}$. Definimos de manera natural la *inclusion* como una aplicaci3n orbifold que identifica los elementos de \mathcal{S} en un espacio mayor que los contiene \mathcal{O} , $i : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}$.

El enunciado del teorema de Seifert-Van Kampen para espacios orbifold es paralelo al enunciado en el caso de variedades, debido a que tanto la definici3n de grupo fundamental y de suborbifold son extensiones de las definiciones en variedades.

Teorema 3.13 (Seifert-Van Kampen). *Sea \mathcal{O} un orbifold, donde $X_{\mathcal{O}}$ un espacio topológico conexo por caminos. Sean \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 suborbifolds con $X_{\mathcal{S}_1}, X_{\mathcal{S}_2}$ abiertos conexos por caminos tales que $X_{\mathcal{O}} = X_{\mathcal{S}_1} \cup X_{\mathcal{S}_2}$ y $X_{\mathcal{S}_1} \cap X_{\mathcal{S}_2} \neq \emptyset$ es conexo por caminos. Sea $x_0 \in X_{\mathcal{S}_1} \cap X_{\mathcal{S}_2}$ y conocidas las presentaciones*

$$\pi_1(\mathcal{S}_1, x_0) = \langle G_1 : R_1 \rangle$$

$$\pi_1(\mathcal{S}_2, x_0) = \langle G_2 : R_2 \rangle$$

$$\pi_1(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x_0) = \langle G : R \rangle$$

Entonces, la presentación del grupo fundamental de \mathcal{O} basado en x_0 es:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(\mathcal{S}_1, x_0) = \langle G_1 : R_1 \rangle & \\ & \nearrow & \searrow \\ \pi_1(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x_0) = \langle G : R \rangle & & \pi_1(\mathcal{O}, x_0) = \langle G_1 \cup G_2 : R_G \cup R_1 \cup R_2 \rangle \\ & \searrow & \nearrow \\ & \pi_1(\mathcal{S}_2, x_0) = \langle G_2 : R_2 \rangle & \end{array}$$

El conjunto de relaciones R_G está formado por los elementos de la forma $r_G = g_{G_1} g_{G_2}^{-1}$, siendo g_{G_i} el elemento $g \in G$ representado por los generadores de G_i .

Observación 3.14. Notar que el teorema es una extensión del caso de variedades: si tomamos como orbifold \mathcal{O} una variedad, obtenemos el enunciado del teorema presentado en el Capítulo 1.

Corolario 3.15. *Considerando las condiciones del teorema anterior, si además $X_{\mathcal{S}_2}$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(\mathcal{O}, x_0) = \pi_1(\mathcal{S}_1, x_0)$.*

En el capítulo siguiente utilizaremos estos resultados para el cálculo de grupos fundamentales orbifold de dimensión 2.

Ejemplo 3.16. Aplicaremos el teorema de Seifert-Van Kampen al Ejemplo 3.3. Tomamos los siguientes suborbifolds: como suborbifold \mathcal{S}_1 la superficie comprendida entre un paralelo inferior al ecuador hasta el polo norte, como \mathcal{S}_2 análogo para el polo sur y $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ la franja intersección de ambos subespacios (ver Figura 3.1).

La zona roja es homeomorfa a un disco con un punto singular de rotación de orden 3. Por tanto, el grupo fundamental orbifold de este subespacio es: $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1, x_0) = \langle \alpha : \alpha^3 = 1 \rangle$.

De manera análoga tenemos la zona azul: $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_2, x_0) = \langle \beta : \beta^3 = 1 \rangle$.

La intersección es homeomorfa a una circunferencia: $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x_0) = \langle \gamma : - \rangle$.

Por el teorema de Seifert-Van Kampen obtenemos que el grupo fundamental orbifold de nuestro espacio es el siguiente:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_3, x_0) = \langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1, \gamma = \beta \rangle \Rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_3, x_0) = \langle \alpha : \alpha^3 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_3$$

El volumen de cuentas y razonamiento se simplifica de manera notable aplicando el teorema de Seifert-Van Kampen.

Ejemplo 3.17. Este ejemplo es uno de los más utilizados en el estudio de acción de grupos sobre variedades. Mediante el estudio del grupo fundamental por Seifert-Van Kampen, veremos de manera clara la diferencia entre estos dos orbifolds (ver Figura 3.2).

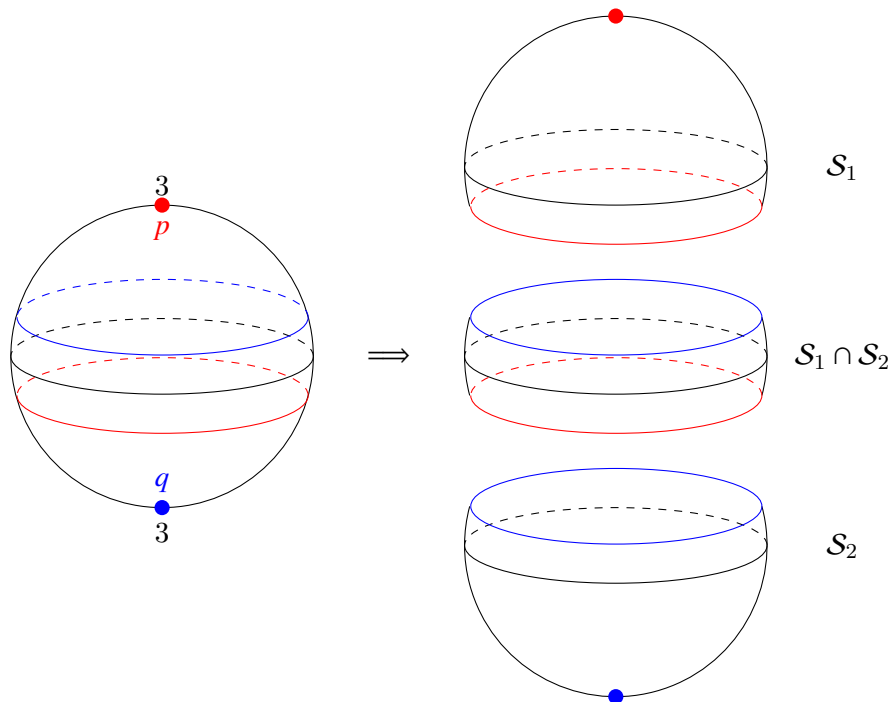


Figura 3.1: La esfera \mathbb{S}^2 actuando el grupo de rotación \mathbb{Z}_3 .

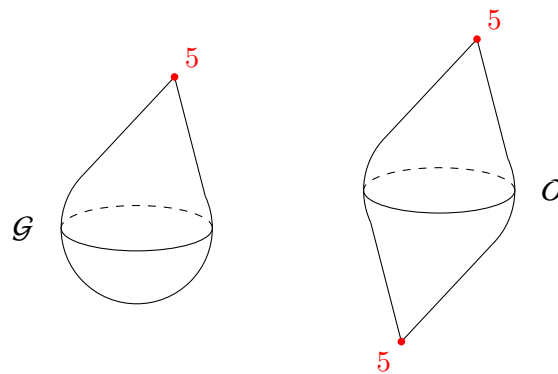


Figura 3.2: Orbifolds generados por una esfera y un punto de rotación y por dos.

El orbifold \mathcal{O} tiene dos puntos de rotación de orden 5. Realizando un razonamiento como en el Ejemplo 3.16, obtenemos claramente que el grupo fundamental orbifold del espacio \mathcal{O} es el siguiente:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}, x_1) = \langle \lambda : \lambda^5 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_5$$

En cambio, el orbifold \mathcal{G} consta de un solo punto singular, un punto de rotación de orden 5. Procederemos por Seifert-Van Kampen.

Tomamos como primer suborbifold la parte superior de la “gota”. Este espacio es homeomorfo a un disco con un punto interior singular de orden 5, luego su grupo fundamental es el grupo cíclico de 5 elementos: $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1, x_2) = \langle \alpha : \alpha^5 = 1 \rangle$. El subespacio \mathcal{S}_2 es homeomorfo a un disco, luego su grupo fundamental es trivial. Con respecto a la intersección, obtenemos una circunferencia, luego: $\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x_2) = \langle \gamma : - \rangle$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1, x_2) = \langle \alpha : \alpha^5 = 1 \rangle & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x_2) = \langle \gamma : - \rangle & & \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{G}, x_2) = ? \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_2, x_2) = \langle - : - \rangle &
 \end{array}$$

Por tanto, aplicando el teorema obtenemos que el grupo fundamental de \mathcal{G} es el grupo trivial.

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{G}, x_2) = \langle \alpha : \alpha^5 = 1, \alpha = 1 \rangle = \langle - : - \rangle$$

Capítulo 4

Cálculo de grupos fundamentales orbifold en dimensión baja

A lo largo de este capítulo se utilizará toda la teoría descrita en los tres primeros capítulos para estudiar casos particulares de orbifolds, sus características principales y calcular su grupo fundamental. En primer lugar, mostraremos una generalización de este estudio diferenciando entre los distintos tipos de entornos locales que nos podemos encontrar. Posteriormente, realizaremos ejemplos del cálculo de grupos fundamentales orbifold. La elección de estos ejemplos que se van a trabajar se debe a la intención de englobar las principales superficies de dimensión 2 de manera que este cálculo sea fácilmente trasladable a otros casos más complejos. Además, contemplaremos todos los puntos singulares posibles y cómo estudiar localmente las equivalencias homotópicas para poder finalmente describir un teorema que marque la línea a seguir para calcular el grupo fundamental de cualquier orbifold.

4.1. Generalización de los espacios orbifold

Para comprender las características de un espacio orbifold, debemos estudiar sus propiedades locales, de qué manera actúan los grupos sobre los puntos singulares. En este apartado mostraremos una generalización de todos los casos posibles y la manera de estudiarlos para conseguir el grupo fundamental orbifold.

Partimos de una variedad M de dimensión 2 con borde, que puede ser orientable o no orientable. Sobre ella van a actuar grupos algebraicos generando puntos singulares. En el interior de esta variedad podemos encontrar puntos donde actúe el grupo de las rotaciones, mientras que en el borde puede haber puntos sobre los que actúan grupos de simetrías y diédricos.

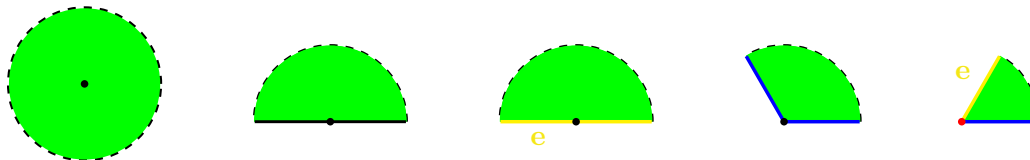


Figura 4.1: Entornos posibles de los puntos en un orbifold.

La Figura 4.1 representa los entornos de todos los posibles puntos que nos podemos encontrar en un espacio orbifold. De izquierda a derecha: punto liso (no singular) interno, punto liso borde, punto espejo, punto rotación y punto diédrico. En los dos primeros, el estudio de los entornos y de la homotopía existente se deriva del estudio en variedades. Vamos a ocuparnos de los otros tres casos por separado.

Punto espejo: cuando realicemos el estudio de estos entornos, recurriremos con frecuencia a la cubierta doble, eliminando la acción del grupo \mathbb{Z}_2 , de manera que este entorno quedará

duplicado y el estudio lo derivaremos al espacio recubridor. El estudio de la homotopía de lazos entre la cubierta y nuestro orbifold vendrá determinado por el camino Alicia. Considerando un entorno como el representado en la Figura 4.1 para los puntos espejo, el grupo fundamental de éste estará determinado por el camino Alicia:

$$\pi_1^{\text{orb}}(U_e) = \langle \alpha : \alpha^2 = 1 \rangle$$

Punto de rotación: Al igual que en el Ejemplo 3.16, cuando nos encontremos con un punto p de rotación interno, debemos tomar un entorno suyo donde el único punto orbifold sea p . En este entorno U_p , el grupo fundamental orbifold vendrá determinado por el orden de rotación n , tal que

$$\pi_1^{\text{orb}}(U_p) = \langle \gamma : \gamma^n = 1 \rangle$$

siendo α es el lazo del orbifold que rodea al punto p . Para continuar el estudio con el resto del espacio orbifold aplicaremos Seifert-Van Kampen.

Punto diédrico: la estrategia que seguiremos aquí será una combinación de los dos puntos anteriores. Los generadores son los de los dos grupos anteriores, mientras que las relaciones se cumplen las mismas además de la relación existente entre ambos generadores.

$$\pi_1^{\text{orb}}(U_d) = \langle \gamma, \alpha : \gamma^n = 1, \alpha^2 = 1, \alpha\gamma\alpha = \gamma^{-1} \rangle$$

Una explicación detallada se verá en la sección 4.2.3.

Realizaremos un ejemplo extenso de este caso en el apartado siguiente.

4.2. Ejemplos del cálculo del grupo fundamental orbifold

Proponemos diferentes ejemplos para ilustrar el cálculo del grupo fundamental orbifold mediante la teoría y las herramientas expuestas a lo largo del trabajo. Se presentan primero espacios concretos y sencillos de diferentes tipos de variedades sobre las que actúan ciertos grupos para ilustrar detalladamente de qué manera trabajamos el cálculo de grupos fundamentales. La complejidad de los ejemplos incrementará a medida que tomamos generalizaciones de superficies. Finalmente, se presentará un estudio de los diferentes componentes de borde de un orbifold.

4.2.1. Superficie de género 2 con un punto singular

Consideramos una superficie cerrada orientable de género 2 con un punto singular de orden 3. Esta situación puede ser aplicada a cualquier superficie orientable donde localmente actúe el grupo de las rotaciones de cualquier orden. Describamos la situación.

Este orbifold \mathcal{T} está formado por la suma conexa de dos toros \mathbb{T}^2 en el que un grupo está actuando de manera local sobre un punto p . Es decir, fuera de este punto, ningún grupo actúa, es una variedad. El grupo que actúa en p es un grupo de tres elementos, luego el orden del punto es 3.

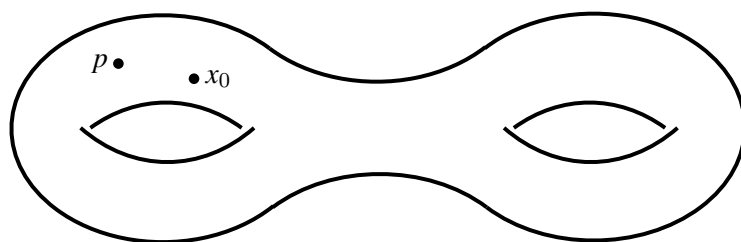


Figura 4.2: Superficie de género 2 con un punto singular de orden 3.

Para realizar el cálculo del grupo fundamental orbifold de \mathcal{T} utilizaremos el teorema de Seifert-Van Kampen. En primer lugar, dividimos \mathcal{T} en dos suborbifolds $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ de manera que cumplan las condiciones del teorema. Tomamos como $X_{\mathcal{T}_1}$ todo el orbifold excepto un entorno cerrado C del punto p homeomorfo a un disco, y como $X_{\mathcal{T}_2}$ una región abierta que contenga este entorno C de p y el punto base x_0 , que lo supondremos en el borde de C (ver Figura 4.3).



Figura 4.3: El suborbifold \mathcal{T}_1 coloreado de verde y el \mathcal{T}_2 de azul.

Estudiemos en primer lugar el suborbifold \mathcal{T}_1 . En esencia, esta superficie es una variedad ya que hemos eliminado el único punto donde actúa un grupo. La superficie ante la que nos encontramos es una superficie orientable de género 2 en la que se ha quitado un disco. El grupo fundamental de esta superficie está generado por los dos lazos basados en x_0 que rodean los agujeros β_1, β_2 (coloreados en naranja en la Figura 4.4), los dos lazos perpendiculares a estos α_1, α_2 (en morado) y un último lazo u que rodee el entorno C (lazo amarillo).

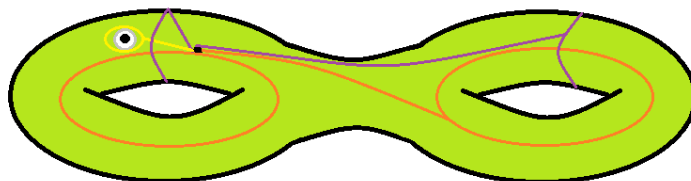


Figura 4.4: Generadores del suborbifold \mathcal{T}_1

Para ilustrar los generadores y las relaciones que componen el grupo fundamental, dibujamos la representación poligonal de la superficie en la Figura 4.5.

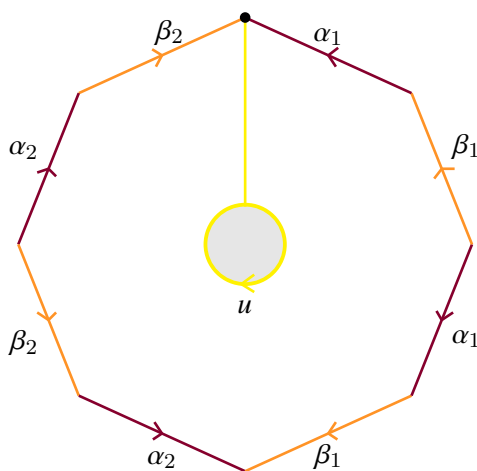


Figura 4.5: Representación poligonal del espacio \mathcal{T}_1 .

Los lados con el mismo nombre se identifican en el sentido indicado en la figura. Esta representación permite fácilmente la relación existente entre los generadores: recorrer el lazo u

equivale a recorrer todos los demás generadores en el sentido correspondiente.

$$u = \alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\alpha_2\beta_2$$

De esta manera, el grupo fundamental de este espacio queda:

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{T}_1, x_0) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, u : [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] = u \rangle$$

donde $[\alpha_1, \beta_1] = \alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1$ (conmutador de α_1 con β_1). Notar que el grupo es libre ya que el generador u se puede representar por un producto de todos los demás.

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{T}_1, x_0) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 : - \rangle$$

Mantendremos la presentación con cinco generadores porque nos interesa para posteriores cálculos.

El suborbifold \mathcal{T}_2 está compuesto por una superficie homeomorfa a un disco de \mathbb{R}^2 que contiene un punto singular de orden 3. Con un razonamiento similar al que hemos utilizado en el Ejemplo 3.16, deducimos que el único lazo no trivial y, por tanto, único generador del espacio, es el lazo v que rodea al punto p . De hecho, si recorremos tres veces este lazo, obtenemos un lazo trivial, ya que rodea a un punto de orden 3. Por tanto, el grupo fundamental orbifold de este espacio es:

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{T}_2, x_0) = \langle v : v^3 = 1 \rangle$$

El último espacio que nos queda por estudiar es la intersección de \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 . Este espacio es homeomorfo a un disco de dimensión 2 al que se le ha quitado un disco cerrado en su interior, es decir, este espacio es \mathbb{S}^1 que tan solo tiene un generador s . Luego tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1^{orb}(\mathcal{T}_1, x_0) = \langle \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, u : [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] = u \rangle & \\ \nearrow & & \searrow \\ \pi_1^{orb}(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2, x_0) = \langle s : - \rangle & & \pi_1^{orb}(\mathcal{T}, x_0) = ? \\ \searrow & & \nearrow \\ & \pi_1^{orb}(\mathcal{T}_2, x_0) = \langle v : v^3 = 1 \rangle & \end{array}$$

Aplicando el teorema de Seifert-Van Kampen tenemos que los generadores de nuestro orbifold \mathcal{T} son todos los generadores de ambos suborbifolds:

$$G = \{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, u, v\}$$

El conjunto de relaciones de este grupo se compone de la unión de las relaciones de \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 y de los generadores de la intersección representados por los generadores de ambos suborbifolds. El generador s visto como combinación de los generadores de \mathcal{T}_1 es equivalente a u . Respecto al segundo suborbifold, $s = v$. Por tanto, el generador del espacio intersección queda como relación $s \rightarrow uv^{-1}$.

$$R = \{v^3 = 1, uv^{-1} = 1\}$$

Simplificando generadores y relaciones, el grupo fundamental orbifold de nuestro espacio es el siguiente:

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{T}, x_0) = \langle \beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, v : v^3 = 1, [\beta_1, \beta_2][\alpha_1, \alpha_2] = v \rangle$$

4.2.2. Grupo rotaciones

Un ejemplo de orbifold donde el grupo que actúa es el de las rotaciones es el Ejemplo 2.10. En ese caso, el orbifold \mathcal{C} constaba de la esfera sobre la que actúa el grupo de rotación de ángulo $\frac{2\pi}{3}$. El espacio que resulta es otra esfera con dos puntos singulares de orden 3, uno en cada polo. En este apartado consideraremos el caso general en el que el orbifold \mathcal{C} lo forma una esfera sobre la que actúan localmente dos grupos de rotaciones G_p y G_q sobre los puntos p y q , de ángulo $\frac{2\pi}{n}$ y $\frac{2\pi}{m}$ respectivamente ($n, m > 0$). El resultado es una esfera con dos puntos singulares de órdenes n y m .

Procediendo por Seifert-Van Kampen como se hizo en el Ejemplo 3.16 (ver Figura 4.6).

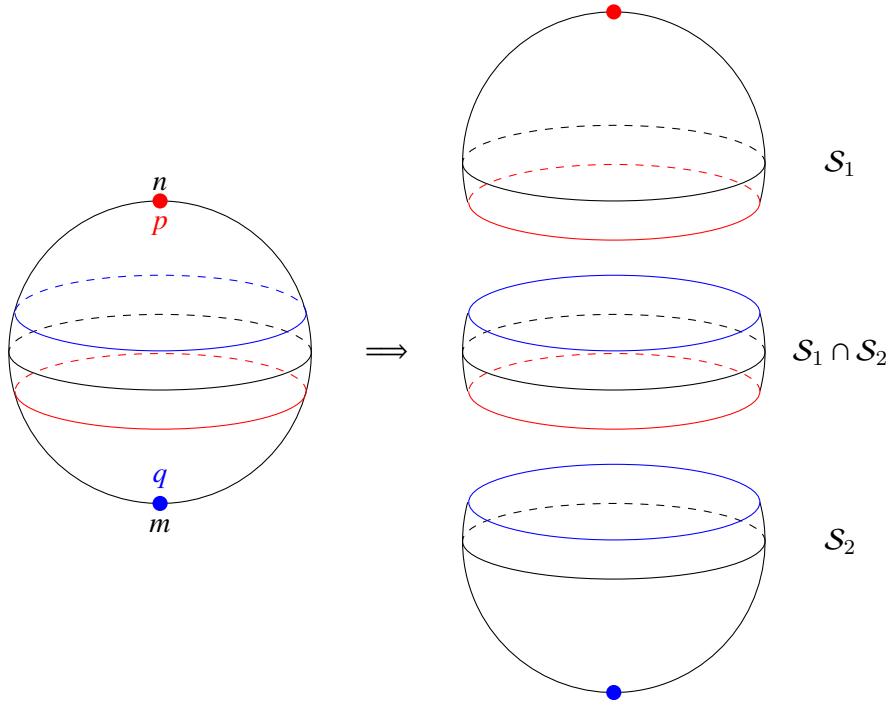


Figura 4.6: La esfera \mathbb{S}^2 actuando dos grupos de rotaciones, \mathbb{Z}_n y \mathbb{Z}_m .

Tomamos el punto base en la intersección, $x_0 \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Tanto el primer suborbifold como el segundo son homotópicamente equivalentes al disco de dimensión 2 con un punto singular de orden n y m respectivamente. Este espacio ya sabemos que tiene como grupo fundamental orbifold el grupo generado por un elemento, el lazo que rodea al punto p (q), de manera que recorrer n (m) veces este lazo es trivial.

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1, x_0) = \langle g_1 : g_1^n = 1 \rangle$$

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_2, x_0) = \langle g_2 : g_2^m = 1 \rangle$$

El espacio intersección es homotópicamente equivalente a una circunferencia \mathbb{S}^1 , luego su grupo fundamental es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x_0) = \langle g_3 : - \rangle$$

Aplicando el teorema de Seifert-Van Kampen, nos queda que el grupo fundamental del orbifold de \mathcal{C} es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{C}, x_0) = \langle g_1, g_2 : g_1 g_2^{-1} = 1, g_1^n = 1, g_2^m = 1 \rangle = \langle g_1 : g_1^n = 1, g_1^m = 1 \rangle$$

Esto significa que recorrer n veces g_1 y recorrer m veces es trivial. Luego existe un divisor d de ambos números de manera que $g_1^d = 1$. Si d no fuera el máximo divisor de n y m , existiría

un número d' no divisor de n y m tal que $g_1^{d'} = 1$ y el máximo común divisor de d', n, m fuera d . Luego la expresión $g_1^{d'} = 1$ debería aparecer como relación. Contradicción. Así pues, ambas relaciones implican que $g_1^d = 1$, siendo d el máximo común divisor de n y m .

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{C}, x_0) = \langle g_1 : g_1^d = 1 \rangle = \mathbb{Z}_d$$

4.2.3. Grupo diédrico

Mostraremos en este apartado un ejemplo de un orbifold en el que actúa un grupo diédrico. Consideramos que este grupo D actúa globalmente sobre el disco de dimensión 2. Tomaremos el grupo diédrico formado por la simetría respecto al eje vertical y la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$ ($n > 1, n \in \mathbb{Z}$). En el caso $n = 2$, se tiene que el grupo de rotaciones es de ángulo π , luego el orden del grupo es 4 (ver Figura 4.7).

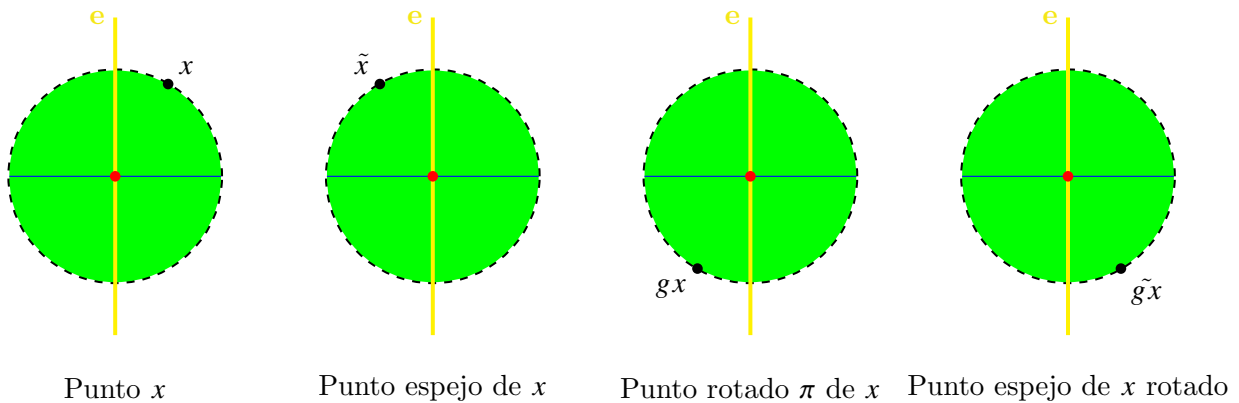


Figura 4.7: El disco \mathbb{D}^2 sobre el que actúa el grupo diédrico de orden 4.

El resultado es un sector del disco de ángulo $\frac{2\pi}{2n}$, ya que debido a la rotación el disco queda reducido a $\frac{2\pi}{n}$ y la simetría divide este ángulo a la mitad (Figura 4.8). Este será nuestro orbifold \mathcal{F} .

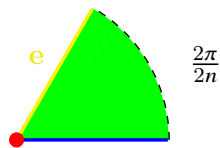


Figura 4.8: El sector del disco \mathcal{F} que representa a todo el disco es la coloreada en verde.

El conjunto de los puntos singulares de este orbifold está formado por los puntos coloreados de amarillo que son puntos espejo (puntos de orden 2), los azules que corresponden a la rotación (orden n) y el punto diédrico coloreado en rojo.

Vamos a crear una cubierta donde se elimine la acción del grupo de la simetría. De esta manera obtenemos:

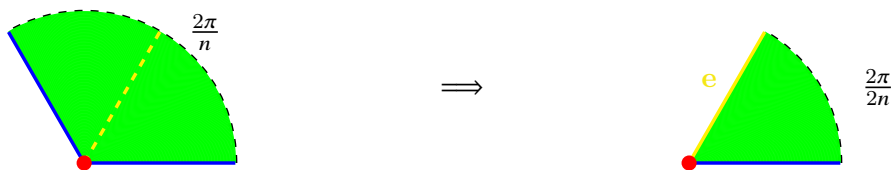


Figura 4.9: La cubierta \mathcal{C} del sector del disco \mathcal{F} .

Estudiamos el orbifold \mathcal{C} . Este espacio lo podemos entender como un disco donde actúa un grupo de rotación de orden n , luego se puede representar (pegando los dos lados azules de la Figura 4.9) como un disco con un punto singular en el centro (el punto diédrico en \mathcal{F}) de orden n .

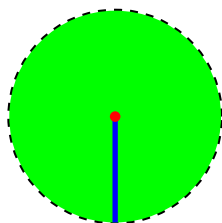


Figura 4.10: El orbifold \mathcal{C} es un disco con un punto singular de rotación de orden n .

Por tanto, el grupo fundamental de la cubierta orbifold queda:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{C}) = \langle \gamma : \gamma^n = 1 \rangle$$

Para calcular ahora el grupo fundamental de nuestro orbifold \mathcal{F} seguiremos el razonamiento teórico partiendo del grupo fundamental de la cubierta.

Al realizar la cubierta, hemos eliminado la acción del grupo de las simetrías, es decir, el grupo determinado por el camino Alicia α en la cubierta de manera que la imagen en el orbifold $\tilde{\alpha}$ es un lazo cuyo cuadrado es trivial: $\tilde{\alpha}^2 = 1$.

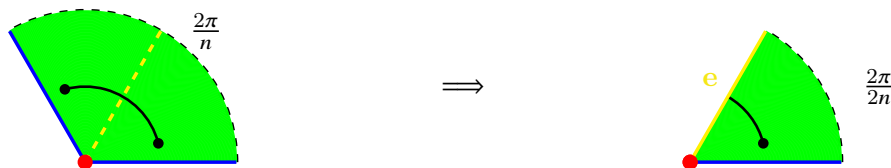


Figura 4.11: El camino Alicia determina la cubierta.

Por último, la conjugación del elemento de traslación por $\tilde{\alpha}$ resulta que vuelve a quedar la traslación γ . Es decir, desde un punto A , realizar el camino hasta su punto simétrico \tilde{A} , después la traslación $\gamma(\tilde{A}) = \tilde{B}$ y realizar la simetría otra vez llega al punto B , luego equivale a realizar una vez la traslación: $\tilde{\alpha}\gamma\tilde{\alpha} = \gamma$ (ver Figura 4.12).



Figura 4.12: El camino del punto A a B equivale a la traslación γ .

Finalmente, el grupo fundamental orbifold de nuestro espacio \mathcal{F} resulta el grupo diédrico de $2n$ elementos.

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{F}) = \langle \gamma, \tilde{\alpha} : \gamma^n = 1, \tilde{\alpha}^2 = 1, \tilde{\alpha}\gamma\tilde{\alpha} = \gamma^{-1} \rangle$$

4.2.4. Banda de Möbius actuando \mathbb{Z}_2

Este ejemplo que vamos a trabajar consta de una superficie no orientable: la banda de Möbius, \mathcal{M} . Sobre este espacio actúa globalmente el grupo de las simetrías \mathbb{Z}_2 respecto al eje longitudinal. De esta manera, observando la Figura 4.13 vemos que el camino que comienza en un lado del diagrama y continúa en el otro. Y además, gracias a la simetría también continúa en el mismo lado.

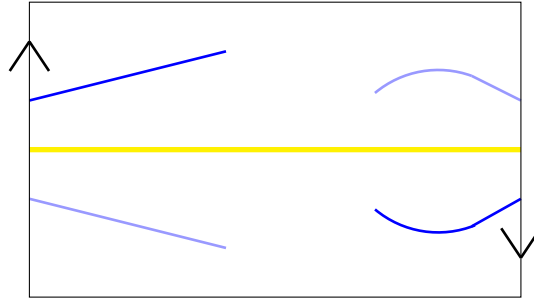


Figura 4.13: Diagrama de la banda de Möbius sobre la que actúa el grupo \mathbb{Z}_2 .

Por tanto, el espacio \mathcal{N} resultante es un cilindro cuya circunferencia inferior la constituyen puntos espejo (ver Figura 4.14).



Figura 4.14: El orbifold \mathcal{N} es un cilindro.

Para proceder al cálculo de su grupo fundamental, como ya hemos hecho en varios ejemplos, tomamos como la cubierta eliminando el efecto de la simetría, luego obtenemos la variedad cilindro.

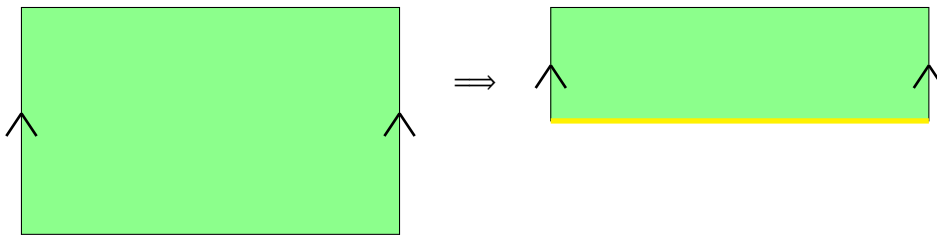


Figura 4.15: La cubierta del orbifold \mathcal{N} es un cilindro C sin puntos singulares.

La variedad cilindro es homotópicamente equivalente a una circunferencia, luego su grupo fundamental es \mathbb{Z} .

$$\pi_1^{orb}(C, x_0) = \langle \gamma : - \rangle = \mathbb{Z}$$

A través del razonamiento mediante cubiertas orbifold, debemos conocer el grupo que actúa sobre la cubierta (el grupo de las simetrías) y la conjugación de su generador con γ .

El grupo de las simetrías viene determinado por el camino Alicia $\alpha: \mathbb{Z}_2 = \langle \alpha : \alpha^2 = 1 \rangle$.

Estudiemos ahora qué significa el camino conjugado: $\alpha\gamma\alpha$. En la cubierta, la composición de estos 3 caminos implica comenzar en un punto p , cruzar al lado simétrico, realizar el lazo γ y volver al punto de inicio. Es decir, trasladar el lazo γ al lado simétrico, lo que equivale a realizar γ .

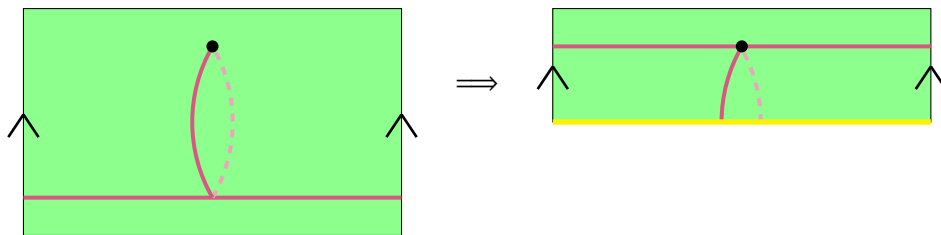


Figura 4.16: La conjugaci3n de los caminos en la cubierta.

Por tanto, el grupo fundamental de nuestro orbifold \mathcal{N} queda como sigue:

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{N}, x_0) = \langle \gamma, \alpha : \alpha^2 = 1, \alpha\gamma\alpha = \gamma \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$$

Observaci3n 4.1. Hemos visto que el espacio subyacente al orbifold obtenido a partir de la banda de M3bius por la acci3n de la simetría a lo largo de la circunferencia central es un cilindro. Al tomar la cubierta doble de este orbifold obtenida mediante dos copias no hemos recuperado la banda de M3bius sino un cilindro, mediante el cual hemos podido calcular el grupo fundamental orbifold. Gracias a este c3lculo podemos ver que este orbifold posee tres cubiertas dobles; la tercera es una cubierta doble del espacio subyacente donde se mantiene la singularidad espejo.

4.2.5. Representaciones poligonales de orbifolds

Con el objetivo de generalizar la presentaci3n de un orbifold, construimos polígonos de manera que se alternen *aristas espejo* con *v3rtices diédricos*, es decir, los lados de este polígono representan una superficie donde est3 actuando el grupo de las simetrías y sobre los v3rtices, el diédrico. Con estas construcciones conseguimos generalizar cualquier situaci3n posible donde actúen diferentes grupos diédricos combinados con las simetrías.

El ejemplo m3s sencillo que podemos encontrar es el orbifold \mathcal{S} , formado por el polígono de dimensi3n 1 con dos aristas:



Figura 4.17: Segmento \mathcal{S} cuyos extremos son dos puntos espejo.

Mediante el razonamiento de cubiertas, construimos la cubierta \mathcal{C} que es una circunferencia generada por el lazo β .

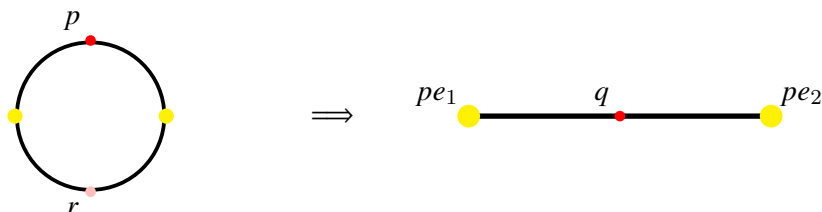


Figura 4.18: La cubierta \mathcal{C} del orbifold \mathcal{S} .

Ilustrando el razonamiento con la Figura 4.18, el lazo β sobre la cubierta comienza y finaliza en el punto rojo p dando una vuelta completa a la circunferencia (tomamos sentido antihorario). Definimos el camino Alicia α como el camino que comienza en el punto rojo p y finaliza en el rosa r , recorriendo una semicircunferencia (tambi3n en sentido antihorario). Este camino sobre nuestro orbifold \mathcal{S} supone un lazo con inicio y final en el punto rojo que recorre la mitad del segmento llegando hasta el punto espejo 1, pe_1 .

Estudiando el camino conjugado entre estos dos lazos obtenemos, $\alpha\beta\alpha$, tenemos un camino que comienza en el punto p , continúa de manera antihoraria hasta el punto r (lazo α), recorre la circunferencia completa en sentido horario debido a la acción del grupo de la simetría y de la misma manera vuelve hasta el punto p . Este camino es homotópicamente equivalente a realizar una vuelta en sentido horario, es decir, β^{-1} .

Así pues, el grupo fundamental de nuestro orbifold queda como sigue:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, q) = \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = 1, \alpha\beta\alpha = \beta^{-1} \rangle$$

Haciendo un cambio de generadores, $\gamma = \beta\alpha$:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}, q) = \langle \alpha, \gamma : \alpha^2 = 1, \gamma^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$$

El primer ejemplo que podemos dar en dimensión 2, consiste en considerar el polígono de dos lados y dos vértices, es decir, la circunferencia espejo con dos puntos diédricos, como vemos en la Figura 4.19.

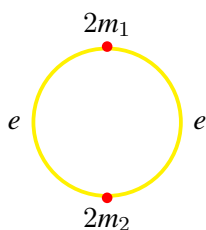


Figura 4.19: Polígono de dos lados con dos vértices espejo.

Realizando la cubierta de este orbifold \mathcal{P}_2 obtenemos una esfera \mathcal{C} con dos puntos de rotación.

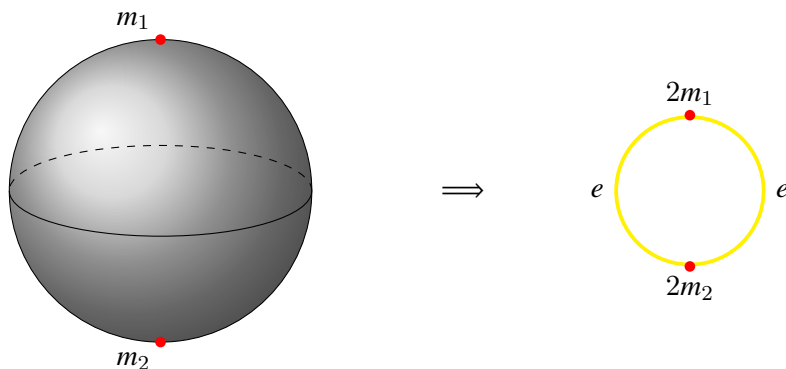


Figura 4.20: La cubierta \mathcal{C} del orbifold \mathcal{P}_2 .

Calculando el grupo fundamental de la cubierta, por el procedimiento descrito en el Ejemplo 4.2.2 se obtiene:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{C}, x_0) = \langle g_1, g_2 : g_1 g_2^{-1} = 1, g_1^{m_1} = 1, g_2^{m_2} = 1 \rangle$$

siendo g_1 y g_2 los lazos basados en x_0 que rodean los puntos singulares de orden m_1 y m_2 respectivamente. De la relación $g_1 g_2^{-1} = 1$ se deduce $g_1 = g_2$.

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{C}, x_0) = \langle g_1 : g_1^{m_1} = 1, g_1^{m_2} = 1 \rangle$$

Tomando ahora la conjugación de g_1 por elemento caracterizador de la aplicación recubridora, el camino Alicia, tenemos la relación:

$$\alpha g_1 \alpha = g_1^{-1}$$

Renombrando el camino αg_1 como γ , tenemos que la relaci3n anterior queda $\gamma^2 = 1$. Por tanto, el grupo fundamental de nuestro orbifold \mathcal{P}_2 es el siguiente:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{P}_2, x_0) = \langle \alpha, \gamma : \alpha^2 = 1, \gamma^2 = 1, (\alpha\gamma)^{m_1} = 1, (\alpha\gamma)^{m_2} = 1 \rangle$$

Notar que si tomamos el camino Alicia α como el camino que atraviesa la arista espejo izquierda, realizar el camino αg_1 es equivalente homot3picamente a realizar el camino Alicia por la arista derecha. Es decir, el camino Alicia en la arista derecha es el camino γ (ver Figura 4.21).

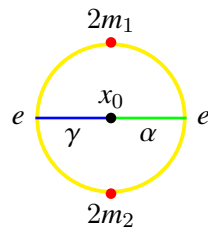


Figura 4.21: Caminos Alicia α y β a cada uno de las aristas espejo.

Generalicemos este resultado.

Teorema 4.2. Sea \mathcal{P}_n el orbifold formado por un pol3gono de n aristas espejo y n puntos di3dricos. Entonces el grupo fundamental orbifold de este espacio es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{P}_n, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n : \alpha_1^2 = 1, \dots, \alpha_n^2 = 1, (\alpha_i \alpha_j)^{w_{i,j}} = (\alpha_i \alpha_j)^{w_{j,i}} = 1, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \rangle$$

siendo $w_{i,j} = \text{mcm}(m_{i+1}, \dots, m_j)$, $i + 1, \dots, j \pmod n$.

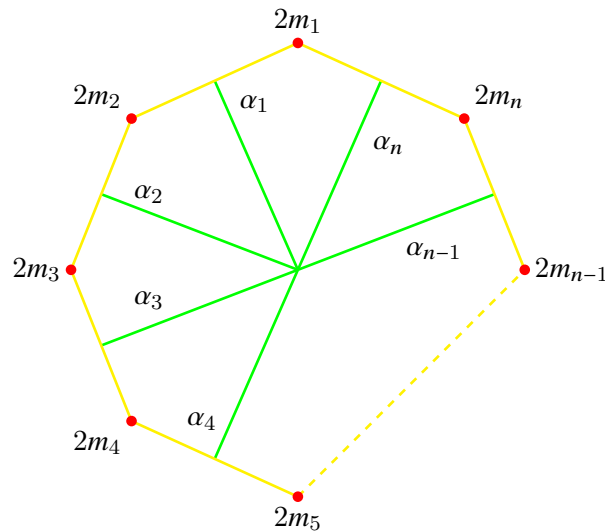


Figura 4.22: El orbifold \mathcal{P}_n y los n caminos Alicia.

Demostraci3n. Procedamos por inducci3n sobre el n3mero de aristas (o v3rtices).

Supongamos cierto el teorema para el caso del orbifold \mathcal{P}_r con r aristas. Probemos que es cierto para el orbifold \mathcal{P}_{r+1} . Para ello vamos a dividir el orbifold en dos subespacios de manera que uno contenga r puntos di3dricos y el otro tan solo uno (ver Figura 4.23).

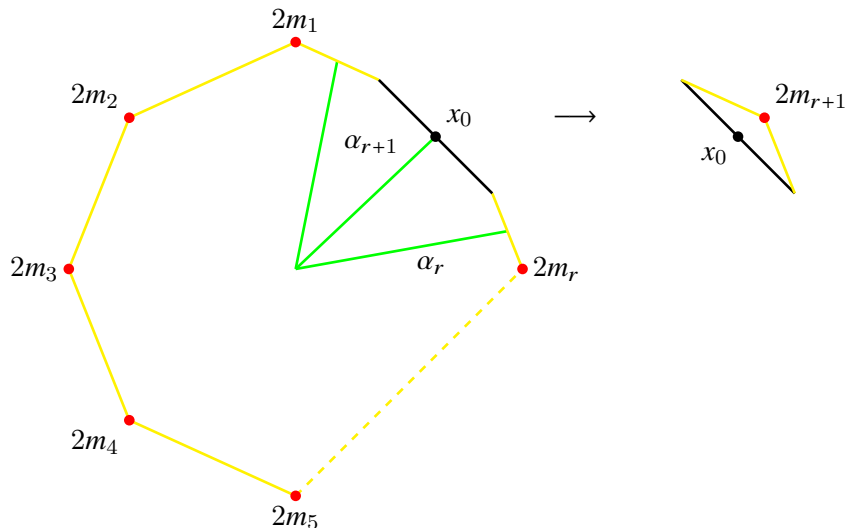


Figura 4.23: El orbifold \mathcal{P}_{r+1} lo dividimos en dos subespacios.

El subespacio \mathcal{S}_1 es el correspondiente al polígono \mathcal{P}_r con un agujero en la arista r . Por hipótesis de inducción, conocemos el grupo de \mathcal{P}_r . Ahora, con un agujero, el lazo que lo rodee no será trivial: $\alpha_r \alpha_{r+1} \neq 1$. Así pues, tenemos que el grupo fundamental de \mathcal{S}_1 es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{r+1} : \alpha_1^2 = 1, \dots, \alpha_{r+1}^2 = 1, (\alpha_{r+1} \alpha_j)^{w_{0,j}} = 1, (\alpha_i \alpha_j)^{w_{i,j}} = 1 \rangle$$

siendo $w_{i,j} = \text{mcm}(m_{i+1}, \dots, m_j)$ y en este caso los índices i, j toman valores $i \in \{1, \dots, r-1\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$, $i < j$.

El subespacio \mathcal{S}_2 se trata de un triángulo en el que una arista no es espejo. Pensando en la cubierta de este espacio, obtendríamos un disco con un punto de rotación en el interior de orden m_{r+1} . Así pues, el grupo fundamental de este espacio es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_2, x_0) = \langle \gamma_1, \gamma_2 : \gamma_1^2 = 1, \gamma_2^2 = 1, (\gamma_1 \gamma_2)^{m_{r+1}} = 1 \rangle$$

siendo γ_i cada uno de los caminos Alicia que comienzan en x_0 , atravesando cada una de las aristas espejo.

Para el espacio intersección, observar que es homotópicamente equivalente al ejemplo primero de polígono (ver Figura 4.17). Luego su grupo fundamental es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2, x_0) = \langle \lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1^2 = 1, \lambda_2^2 = 1 \rangle$$

Procediendo por el teorema de Seifert-Van Kampen, obtenemos que los generadores del grupo fundamental orbifold de nuestro espacio \mathcal{P}_{r+1} es el conjunto:

$$G = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}, \gamma_1, \gamma_2\}$$

El conjunto de las relaciones estará formado por las relaciones del grupo del primer subespacio, del segundo y los generadores del espacio intersección interpretado como generadores de los dos subespacios. Es decir, con respecto \mathcal{S}_1 , $\lambda_1 = \alpha_{r+1}$ y $\lambda_2 = \alpha_r$. Para el segundo subespacio, $\lambda_1 = \gamma_1$ y $\lambda_2 = \gamma_2$. Tenemos entonces el conjunto generado por:

$$R = \{\alpha_1^2 = 1, \dots, \alpha_{r+1}^2 = 1, (\alpha_{r+1} \alpha_j)^{w_{0,j}} = 1, (\alpha_i \alpha_j)^{w_{i,j}} = 1, \gamma_1^2 = 1, \gamma_2^2 = 1, (\gamma_1 \gamma_2)^{m_{r+1}} = 1, \alpha_{r+1} \gamma_1^{-1} = 1, \alpha_r \gamma_2^{-1} = 1\}$$

Este conjunto se puede simplificar: $\alpha_{r+1} = \gamma_1$, $\alpha_r = \gamma_2$.

$$R = \{\alpha_1^2 = 1, \dots, \alpha_{r+1}^2 = 1, (\alpha_{r+1} \alpha_j)^{w_{0,j}} = 1, (\alpha_i \alpha_j)^{w_{i,j}} = 1, (\alpha_{r+1} \alpha_r)^{m_{r+1}} = 1\}$$

Así pues, reescribiendo y agrupando propiedades, tenemos que:

$$R = \{\alpha_1^2 = 1, \dots, \alpha_{r+1}^2 = 1, (\alpha_i \alpha_j)^{w_{i,j}} = (\alpha_i \alpha_j)^{w_{j,i}} = 1\} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r+1\}$$

Por tanto, el grupo fundamental de nuestro orbifold queda:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{P}_{r+1}, x_0) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{r+1} : \alpha_1^2 = 1, \dots, \alpha_{r+1}^2 = 1, (\alpha_i \alpha_j)^{w_{i,j}} = (\alpha_i \alpha_j)^{w_{j,i}} = 1 \rangle$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, r+1\}$, siendo $w_{i,j} = \text{mcm}(m_{i+1}, \dots, m_j)$, $i+1, \dots, j \pmod{r+1}$. □

4.2.6. Corona circular: estudio de las componentes de borde

Encaminando el estudio a superficies de manera general, debemos advertir si la superficie que nos encontramos tiene borde o no. Además, en el caso de los orbifolds, podemos encontrarnos distintos tipos de borde: puntos borde no singular, puntos espejo y puntos diédricos.

Para el estudio local del borde de un orbifold, tomamos coronas circulares de manera que la circunferencia interior represente el borde a estudiar, rodeado de un entorno. Este enfoque permite poder aplicar Seifert-Van Kampen de manera natural cuando nos encontremos ante un orbifold con el borde de estas características. Iremos presentando todas las posibilidades mediante ejemplos, comenzando por casos sencillos para poder generalizar la situación posteriormente.

Ejemplo 4.3. (Borde no singular) El ejemplo trivial es la corona circular en la que la circunferencia interior es borde con puntos no singulares. Es decir, esta figura es homotópicamente equivalente a \mathbb{S}^1 , luego su grupo fundamental es $\pi_1(\mathcal{O}) = \langle \gamma : - \rangle = \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.4. (Borde espejo) El primer ejemplo orbifold lo encontramos considerando toda la circunferencia interior como puntos espejo (ver Figura 4.24), sin componentes de borde no singular.

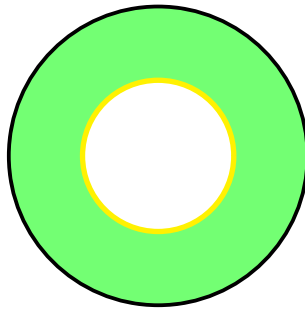


Figura 4.24: Corona circular: borde espejo.

El grupo fundamental orbifold está determinado por el lazo γ y por el camino Alicia α . Si construimos la cubierta doble eliminando la simetría, el espacio resultante es una corona circular, es decir, una superficie homeomorfa a una circunferencia \mathbb{S}^1 generada por γ . Para calcular el grupo de nuestro espacio \mathcal{O}_0 tendremos que ver como influye el camino Alicia α . Así pues, el grupo fundamental de este espacio es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}_0) = \langle \alpha, \gamma : \alpha^2 = 1, \alpha \gamma \alpha = \gamma \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$$

Cabe preguntarse cómo sería el caso de un borde combinado en el que una parte fuera espejo y otra borde no singular. Proponemos la situación inicial en la que el borde se contiene una componente espejo y otra borde no singular y después consideraremos un borde formado por n componentes de cada tipo.

Ejemplo 4.5. (Borde espejo y no singular) Consideramos un borde compuesto por una componente borde no singular y una espejo. Esta situación, ilustrada en la Figura 4.25, viene determinada por los dos caminos generadores del ejemplo anterior, pero la conjugación es diferente.

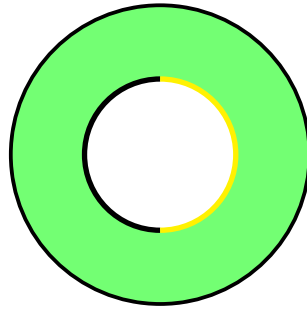


Figura 4.25: Corona circular: borde espejo+borde.

Para explicar de manera clara lo que sucede, recurrimos a elaborar la cubierta de este orbifold \mathcal{O}_1 . Para ello, vamos a reinterpretar la corona circular como un cilindro, en la que cada una de las circunferencias forman las circunferencias de las bases del cilindro (ver Figura 4.26).

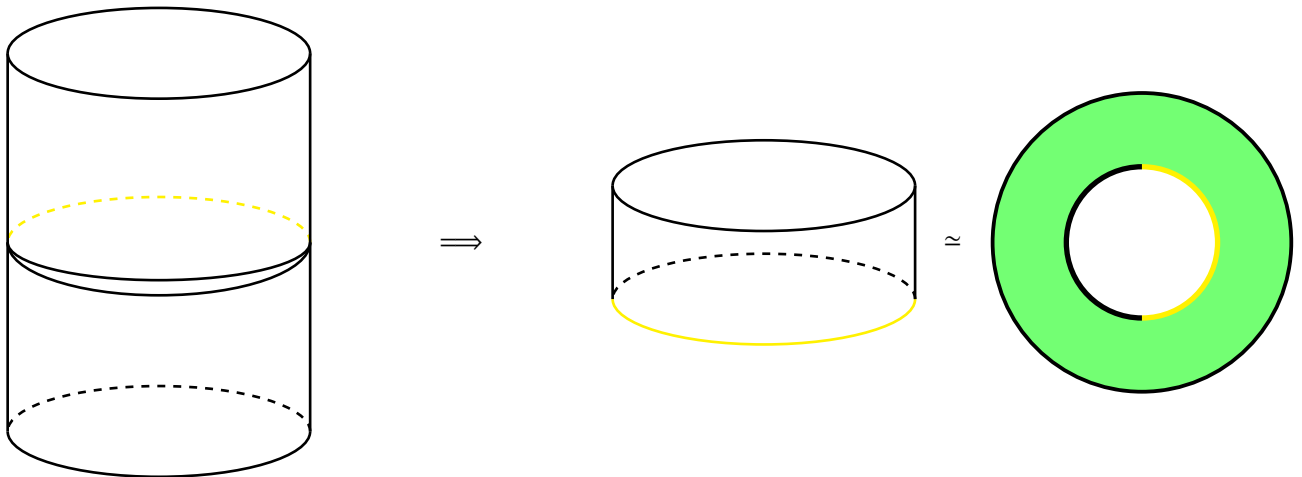


Figura 4.26: Corona circular \simeq cilindro, cubierta doble.

A realizar la cubierta, se genera un cilindro mediante el pegado por la arista espejo, en cambio la arista borde genera un agujero. Luego la superficie de la cubierta es homotópicamente equivalente a un disco con dos agujeros, es decir, a la unión de dos circunferencias \mathbb{S}^1 , luego su grupo fundamental será $\langle \gamma, s : - \rangle$, siendo γ el lazo generador del cilindro/corona circular y s el lazo que rodea el agujero interior del cilindro. La conjugación de estos dos elementos con respecto al camino Alicia que determina la aplicación recubridora, se da de la siguiente manera:

$$\alpha s \alpha = s^{-1}$$

$$\alpha \gamma \alpha = s \gamma$$

Por tanto, el grupo fundamental orbifold de \mathcal{O}_1 es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}_1) = \langle \alpha, \gamma, s : \alpha^2 = 1, \alpha s \alpha = s^{-1}, \alpha \gamma \alpha = s \gamma \rangle$$

Generalizar esta situación significa considerar la circunferencia interior como un borde compuesto por una sucesión de componentes borde no singular y espejo.

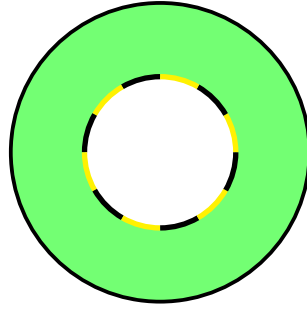


Figura 4.27: Corona circular con borde combinado.

Consideramos el orbifold \mathcal{O}_n en el que tenemos n componentes de borde no singular y n de borde espejo. Procediendo de manera análoga al caso anterior podemos concluir que el grupo fundamental de este espacio es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}_n) = \langle \alpha, \gamma, s_1, \dots, s_n : \alpha^2 = 1, \alpha s_i \alpha = s_i^{-1}, \alpha \gamma \alpha = s_1 \dots s_n \gamma \rangle \quad , \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Además de componentes de puntos espejo y puntos no singulares, en los bordes también podemos encontrarnos puntos diédricos. Estos puntos son puntos espejo sobre los que actúa, además, un grupo de rotaciones.

Ejemplo 4.6. (Borde espejo con puntos diédricos) El ejemplo más sencillo es el orbifold \mathcal{D}_1 formado por la corona circular donde la circunferencia interior es espejo y hay un punto de rotación.

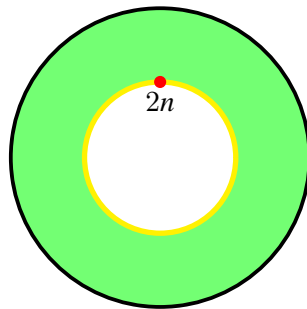


Figura 4.28: Corona circular: borde espejo con un punto diédrico.

Realizando la cubierta doble resulta una corona circular donde el punto diédrico se ha convertido en un punto de rotación de orden n . Por tanto, el grupo fundamental de la cubierta es:

$$\pi_1^{\text{orb}} = \langle \gamma, \beta : \beta^n = 1 \rangle$$

siendo γ el lazo generador de la corona circular y β el lazo que rodea al punto de rotación.

La conjugación con respecto al camino Alicia α se da de la siguiente manera:

$$\alpha \gamma \alpha = \beta \gamma$$

$$\alpha \beta \alpha = \beta^{-1}$$

Luego el grupo fundamental orbifold de \mathcal{D}_1 es:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{D}_1) = \langle \alpha, \gamma, \beta : \alpha^2 = 1, \beta^n = 1, \alpha \gamma \alpha = \beta \gamma, \alpha \beta \alpha = \beta^{-1} \rangle$$

Análogamente para el caso de dos puntos diédricos (Figura 4.29).

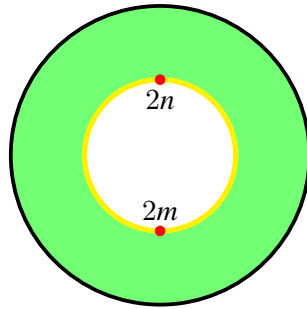


Figura 4.29: Corona circular con puntos espejo y dos puntos diédricos.

En esta figura tenemos un orbifold \mathcal{D}_2 de dimensión 2 que consta de una corona circular donde la circunferencia interna está formada por puntos espejo y dos puntos diédricos de orden $2n$ y $2m$. Realizando la cubierta C nos resultarán dos puntos de rotación de orden n y m .

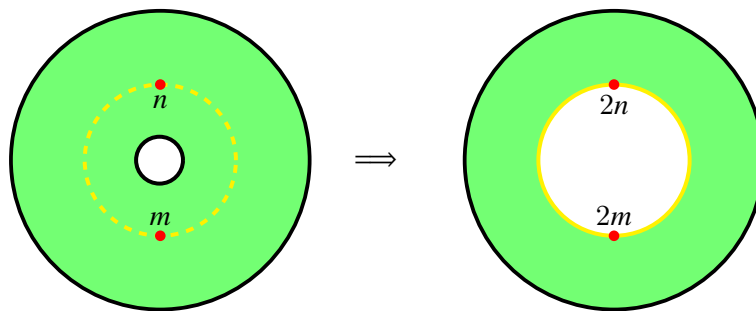


Figura 4.30: Cubierta de la corona circular con puntos espejo y dos puntos diédricos.

Centrándonos en el estudio de la cubierta, podemos observar que tenemos un orbifold formado por una corona circular con tan solo dos puntos singulares, concretamente, dos puntos de rotación de orden n y m . Procediendo por el teorema de Seifert-Van Kampen, de manera directa obtenemos que su grupo fundamental orbifold es:

$$\pi_1^{orb}(C, x_0) = \langle \gamma, \beta, \nu : \beta^m = 1, \nu^n = 1 \rangle$$

siendo β y ν los lazos que rodean a los puntos singulares de orden m y n respectivamente, y γ el lazo que recorre el borde exterior de la corona circular.

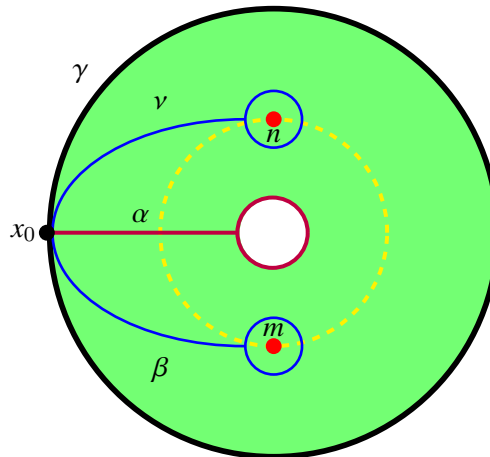


Figura 4.31: Caminos sobre la cubierta orbifold C .

Como en ejemplos anteriores, el cálculo del grupo fundamental de nuestro orbifold vendrá determinado por el camino Alicia α . Así pues, el sistema de generadores estará formado por los tres caminos anteriores y el camino Alicia:

$$\text{Generadores} = \{\gamma, \beta, \nu, \alpha\}$$

. Las relaciones las obtenemos de las relaciones anteriores, la relación de simetría del camino Alicia y las conjugaciones por este camino. Por tanto las relaciones son las siguientes:

$$\text{Relaciones} = \{\beta^m = 1, \nu^n = 1, \alpha^2 = 1, \alpha\gamma\alpha = \nu\beta\gamma, \alpha\beta\alpha = \beta^{-1}, \alpha\nu\alpha = \nu^{-1}\}$$

Luego el grupo fundamental orbifold de nuestro espacio \mathcal{D}_2 es:

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{D}_2, x_0) = \langle \gamma, \beta, \nu, \alpha : \beta^m = 1, \nu^n = 1, \alpha^2 = 1, \alpha\gamma\alpha = \nu\beta\gamma, \alpha\beta\alpha = \beta^{-1}, \alpha\nu\alpha = \nu^{-1} \rangle$$

La situación general del orbifold \mathcal{D}_r corona circular con borde interior espejo y varios puntos diédricos se ilustra en la Figura 4.32.

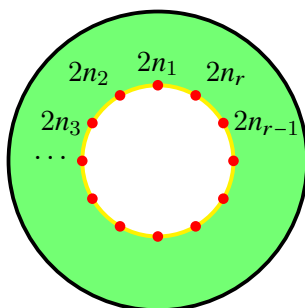


Figura 4.32: Corona circular: borde espejo con r puntos diédricos.

Por el razonamiento anterior, el grupo de este orbifold es:

$$\pi_1^{orb}(\mathcal{D}_r) = \langle \alpha, \gamma, \beta_1, \dots, \beta_r : \alpha^2 = 1, \beta_k^{n_k} = 1, \alpha\gamma\alpha = \beta_1 \dots \beta_r \gamma, \alpha\beta_k\alpha = \beta_k^{-1} \rangle \quad , \quad \forall 1 \leq k \leq r$$

Una vez ya presentados los diferentes tipos de borde que nos podemos encontrar, consideremos el caso más general. Cualquier componente de borde podrá tener partes espejo, espejo con puntos diédricos y puntos no singulares.

Ejemplo 4.7. (Borde espejo con puntos diédricos y no singular) En la Figura 4.33 se representa un orbifold corona circular cuyo borde interior está formado por 4 componentes espejo a, b, c y d (y 4 no singulares) y cada componente espejo contiene 3, 1, 0 y 2 puntos diédricos de órdenes a_1, a_2, a_3, b_1 y d_1, d_2 .

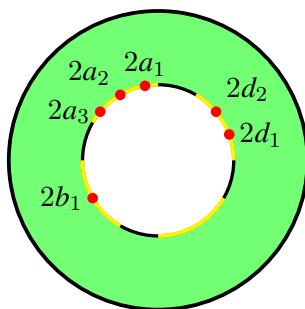


Figura 4.33: Modelo general de borde orbifold.

Escribimos a modo recordatorio el grupo fundamental orbifold de la corona circular con borde general combinado entre componentes n espejo y n no singulares y la del borde general espejo con r puntos diédricos:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}_n) = \langle \alpha, \gamma, s_1, \dots, s_n : \alpha^2 = 1, \alpha s_i \alpha = s_i^{-1}, \alpha \gamma \alpha = s_1 \dots s_n \gamma \rangle \quad , \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{D}_r) = \langle \alpha, \gamma, \beta_1, \dots, \beta_r : \alpha^2 = 1, \beta_k^{n_k} = 1, \alpha \beta_k \alpha = \beta_k^{-1}, \alpha \gamma \alpha = \beta_1 \dots \beta_r \gamma \rangle \quad , \quad \forall 1 \leq k \leq r$$

Para el orbifold general $\mathcal{M}_{n,r}$, el grupo fundamental orbifold dependerá del orden en el que se presenten los puntos diédricos y en qué componente espejo. Por ejemplo, para el caso concreto de la Figura 4.33, tenemos que su grupo fundamental estará generado por cada lazo que rodee a los seis puntos diédricos, a las cuatro componentes de borde no singular, al camino γ y el camino Alicia:

$$\text{Generadores} = \{ \alpha, \gamma, \quad s_1, \dots, s_4, \quad \beta_1, \dots, \beta_6 \}$$

En cuanto a las relaciones, las conjugaciones de cada uno de los generadores con el camino Alicia resultan la misma relación, excepto la conjugación $\alpha \gamma \alpha$. Las relaciones propias de cada generador (camino Alicia o los puntos diédricos) también son las mismas que anteriormente, el estudio es análogo.

$$\text{Relaciones} = \{ \alpha^2 = 1, \quad \beta_k^{n_k} = 1, \quad \alpha \beta_k \alpha = \beta_k^{-1}, \quad \alpha s_i \alpha = s_i^{-1}, \quad \alpha \gamma \alpha = \text{?} \}$$

donde $1 \leq k \leq 6, 1 \leq i \leq 4$ y las potencias $n_k = \{a_1, \dots, d_2\}$ para cada uno de los valores de k . Debemos concretar qué sucede para la conjugación del camino γ con α .

Notar que el lazo γ recorre la circunferencia exterior de la corona circular y realizar la conjugación $\alpha \gamma \alpha$ sobre la cubierta doble representa recorrer la circunferencia interior. En los casos anteriores la conjugación equivale a realizar todos los lazos que rodeaban a los puntos singulares o a las componentes de borde no singular, de manera que en la cubierta el camino γ se pudiera trasladar de la circunferencia exterior a la interior. Aprovechando este mismo razonamiento, debemos recorrer todos los lazos en el orden presentado. Considerando que el camino Alicia se sitúa, por ejemplo, atravesando la primera componente espejo entre la componente borde y el punto diédrico de orden $2a_1$ (ver Figura 4.33), la conjugación quedaría como sigue:

$$\alpha \gamma \alpha = \beta_1 \beta_2 \beta_3 s_1 \beta_4 s_2 s_3 \beta_5 \beta_6 s_4 \gamma$$

Por tanto, el grupo fundamental orbifold del caso general $\mathcal{M}_{n,r}$ es el siguiente:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{M}_{n,r}) = \langle \alpha, \quad \gamma, \quad s_1, \dots, s_n, \quad \beta_1, \dots, \beta_r : \\ \alpha^2 = 1, \quad \beta_k^{n_k} = 1, \quad \alpha \beta_k \alpha = \beta_k^{-1}, \quad \alpha s_i \alpha = s_i^{-1}, \quad \alpha \gamma \alpha = W \gamma \rangle$$

donde $1 \leq k \leq r, 1 \leq i \leq n$ y las potencias n_k son los órdenes de rotación de los k puntos diédricos. El camino W el producto de los generadores $s_1, \dots, s_n, \beta_1, \dots, \beta_r$ en el orden correcto.

4.3. Teorema general

Como hemos ido desarrollando durante todo el trabajo, el estudio de las equivalencias homotópicas en puntos singulares lo hemos realizado de manera local, considerando un entorno alrededor del punto o puntos a estudiar. De todo este análisis hemos obtenido la forma general para enfrentarnos a cualquier acción de grupos sobre variedades de dimensión 2 ó 3.

Así pues, una vez estudiados todos los entornos posibles de puntos singulares, podemos intentar ampliar el estudio a todo el espacio. En esta sección proponemos una idea para cálculo del grupo fundamental de cualquier orbifold.

Teorema 4.8 (Grupo Fundamental Orbifold). *Sea \mathcal{O} un orbifold de dimensi3n $n \leq 2$. Definimos los conjuntos de entornos abiertos de los diferentes puntos singulares.*

- *El conjunto \mathcal{U}_r de los entornos abiertos que contienen a cada uno de los puntos interiores de rotaci3n.*
- *El conjunto \mathcal{U}_e de los entornos abiertos que contienen a cada una de las componentes espejo, con o sin puntos di3dricos.*
- *El conjunto \mathcal{U}_{be} de los entornos abiertos que contienen a cada una de las componentes borde-espejo, con o sin puntos di3dricos.*

Sea \mathcal{U} el conjunto de todos los entornos abiertos de los diferentes puntos singulares, y suponemos que su cardinal es t .

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_r \cup \mathcal{U}_e \cup \mathcal{U}_{be} \quad |\mathcal{U}| = t$$

Gracias al teorema de clasificci3n de superficies cerradas, el orbifold \mathcal{O} estar3a compuesto por una superficie tipo F_g ($g \geq 0$) o N_k ($k > 0$) con n componentes de borde ($n \geq 0$) y t componentes singulares ($t > 0$).

Tomamos la variedad $\check{\mathcal{O}}$ resultante de eliminar las componentes singulares al orbifold.

$$\check{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$$

As3i pues, $\check{\mathcal{O}}$ ser3a una superficie $F_{g,n+t}$ o $N_{k,n+t}$.

Entonces, conociendo el grupo fundamental del espacio $\check{\mathcal{O}}$ y el grupo fundamental orbifold de cada una de las componentes singulares, podemos calcular el grupo del orbifold \mathcal{O} .

$$\boxed{\pi_1(\check{\mathcal{O}}), \pi_1^{\text{orb}}(U_s) \implies \pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O})} \quad \forall U_s \in \mathcal{U}$$

Demostraci3n. La idea principal para probar este teorema reside en aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen sobre cada entorno de puntos singulares. Cuando aplicamos este teorema, realizamos la divisi3n de dos subespacios con una intersecci3n no vac3a y conexa. El subespacio primero consideramos la variedad $\check{\mathcal{O}}$ y como segundo el entorno U_1 del punto o puntos singulares que vayamos a estudiar. Como intersecci3n quedar3a un espacio a un disco menos un punto interior, es decir, su grupo fundamental ser3a $\langle \rho : - \rangle$. Este lazo visto desde el grupo fundamental de $\check{\mathcal{O}}$ ser3a equivalente al generador σ que rodee el agujero que dejaba la ausencia del punto o los puntos singulares. Desde el segundo espacio, ρ ser3a equivalente al lazo que rodee al punto de rotaci3n o al camino γ en el caso de encontrarnos ante un punto singular borde. \square

As3i pues, de manera natural se puede aplicar el teorema de Seifer-Van Kampen y calcular de manera general el grupo fundamental orbifold de cualquier espacio. Hemos establecido una estrategia 3til y efectiva para dicho c3lculo.

4.3.1. Ejemplos representativos

Como la presentaci3n expl3cita de los grupos orbifold del Teorema 4.8 quedar3a excesivamente extensa, vamos a dar la presentaci3n en algunos ejemplos lo suficientemente significativos.

El primer ejemplo que consideramos consta de una superficie orientable sobre la que act3an diferentes grupos (ver Figura 4.34).

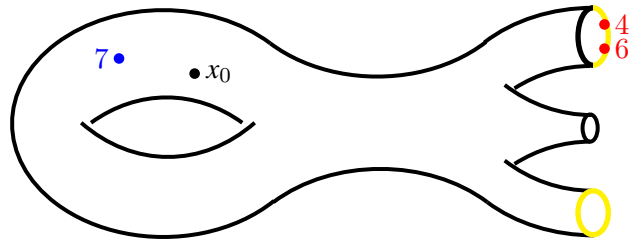


Figura 4.34: Ejemplo de orbifold general.

En esencia esta figura es un toro donde actúa un grupo de rotación de orden 7, tiene un agujero con componente de borde, una componente espejo y una mixta entre borde, espejo y diédrico. Seguiremos las instrucciones descritas en el teorema general.

El orbifold \check{O} resultante de eliminar los entornos de los puntos singulares (será por tanto una variedad), se ilustra en la siguiente figura.

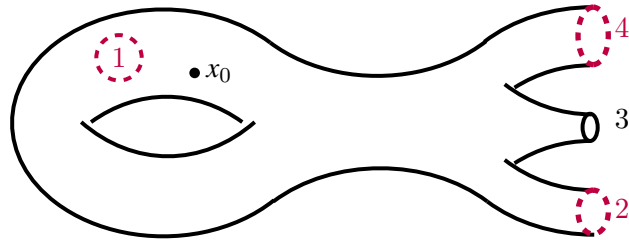


Figura 4.35: Ejemplo de orbifold general sin entornos singulares.

Esta variedad es homeomorfa a un toro \mathbb{T}^2 con 4 agujeros. Podemos entender sus generadores y relaciones por medio de su representación poligonal (ver Figura 4.36).

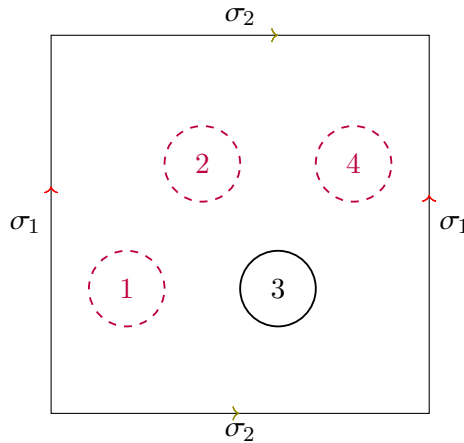


Figura 4.36: Toro con 4 agujeros, superficie $F_{1,4}$.

Por tanto, su grupo fundamental será:

$$\pi_1(\check{O}, x_0) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [\sigma_1, \sigma_2] = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \rangle$$

donde σ_1, σ_2 son los generadores del toro y el lazo γ_i rodea al agujero i , $1 \leq i \leq 4$.

Con respecto a cada uno de los abiertos que contienen a los puntos singulares, tenemos tres situaciones (ver Figura 4.37).

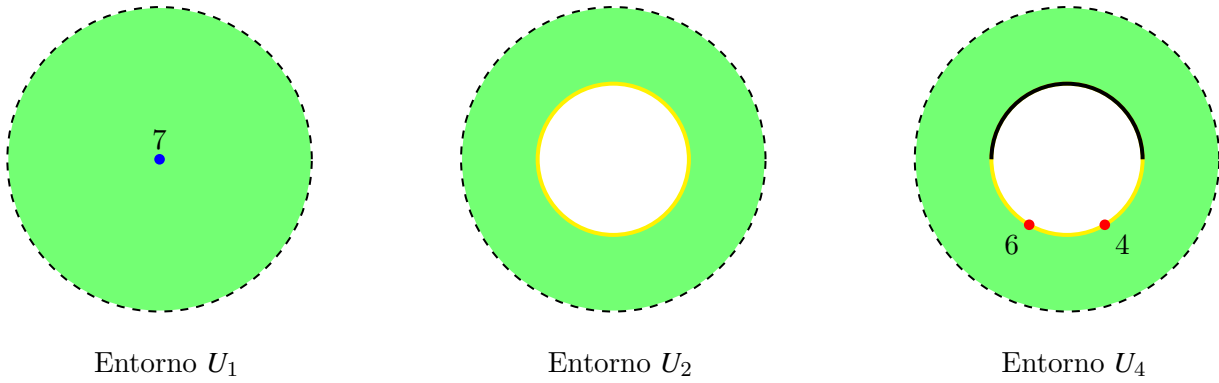


Figura 4.37: Entornos U_S de puntos singulares del orbifold \mathcal{O} .

Nos saltamos el entorno U_3 para asociarlo a la componente borde, de manera que la numeración coincida. Por el procedimiento expuesto en el apartado anterior, obtenemos los grupos fundamentales de estos entornos.

$$\begin{aligned} \pi_1^{\text{orb}}(U_1) &= \langle \hat{\gamma}_1 : \hat{\gamma}_1^7 = 1 \rangle \\ \pi_1^{\text{orb}}(U_2) &= \langle \hat{\gamma}_2, \alpha_2 : \alpha_2^2 = 1, \alpha_2 \hat{\gamma}_2 \alpha_2 = \hat{\gamma}_2 \rangle \\ \pi_1^{\text{orb}}(U_4) &= \langle \hat{\gamma}_4, \alpha_4, s, \beta_1, \beta_2 : \\ &\alpha_4^2 = 1, \beta_1^2 = 1, \beta_2^3 = 1, \alpha_4 \beta_1 \alpha_4 = \beta_1^{-1}, \alpha_4 \beta_2 \alpha_4 = \beta_2^{-1}, \alpha_4 s \alpha_4 = s^{-1}, \alpha_4 \hat{\gamma}_4 \alpha_4 = s \beta_1 \beta_2 \alpha_4 \hat{\gamma}_4 \rangle \end{aligned}$$

Solo queda el “pegado” de las superficies singulares, por Seifert-Van Kampen. Vamos a añadir cada una de las componentes consecutivamente. En primer lugar, calcularemos el orbifold $\check{\mathcal{O}} \cup U_1$. Notar que la intersección entre $\check{\mathcal{O}}$ y los entornos U_i es siempre un espacio homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1^{\text{orb}}(\check{\mathcal{O}}, x_0) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \pi_1^{\text{orb}}(\check{\mathcal{O}} \cap U_1, x_0) = \langle u_1 : - \rangle & & \pi_1^{\text{orb}}(\check{\mathcal{O}} \cup U_1, x_0) = ? \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \pi_1^{\text{orb}}(U_1, x_0) & \end{array}$$

La interpretación del lazo u_1 en los generadores de $\check{\mathcal{O}}$ es igual a γ_1 , y en U_1 es equivalente al lazo $\hat{\gamma}_1$, luego se tiene que en el orbifold $\check{\mathcal{O}} \cup U_1$, $\hat{\gamma}_1 = \gamma_1$. Por tanto, su grupo fundamental queda:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\check{\mathcal{O}} \cup U_1, x_0) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [\sigma_1, \sigma_2] = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \gamma_1^7 = 1 \rangle$$

Ahora vamos a calcular el orbifold resultante de “pegar” el entorno U_2 a este orbifold. De manera análoga al paso anterior, la relación que se obtiene de interpretar el lazo u_2 en los generadores de ambos orbifolds es $\hat{\gamma}_2 = \gamma_2$. Así pues, tenemos el siguiente grupo fundamental para el espacio unión entre U_2 y $\check{\mathcal{O}} \cup U_1$.

$$\begin{aligned} \pi_1^{\text{orb}}(\check{\mathcal{O}} \cup U_1 \cup U_2, x_0) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \alpha_2 & : [\sigma_1, \sigma_2] = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \\ & \gamma_1^7 = 1, \\ & \alpha_2^2 = 1, \alpha_2 \gamma_2 \alpha_2 = \gamma_2 \rangle \end{aligned}$$

Finalmente, con un procedimiento similar, tenemos para el abierto 4 la relación $\hat{\gamma}_4 = \gamma_4$. Así pues, utilizando de nuevo Seifert-Van Kampen, obtenemos el grupo fundamental orbifold de nuestro espacio \mathcal{O} , unión de la variedad $\check{\mathcal{O}}$ con los abiertos U_1 , U_2 y U_4 .

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}, x_0) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, s \quad : \quad \begin{aligned} [\sigma_1, \sigma_2] &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \\ \gamma_1^7 &= 1, \\ \alpha_2^2 &= 1, \alpha_2 \gamma_2 \alpha_2 = \gamma_2, \\ \alpha_4^2 &= 1, \beta_1^2 = 1, \beta_2^3 = 1, \\ \alpha_4 \beta_1 \alpha_4 &= \beta_1^{-1}, \alpha_4 \beta_2 \alpha_4 = \beta_2^{-1}, \\ \alpha_4 s \alpha_4 &= s^{-1}, \alpha_4 \gamma_4 \alpha_4 = s \beta_1 \beta_2 \alpha_4 \gamma_4 \end{aligned} \rangle$$

Esta presentación se puede reducir: de la relación $[\sigma_1, \sigma_2] = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ se puede eliminar el generador γ_3 de manera directa. Además, de la expresión $\alpha_4 \gamma_4 \alpha_4 = s \beta_1 \beta_2 \alpha_4 \gamma_4$ podríamos eliminar s , pero deberíamos sustituirla en otra relación y la presentación quedaría más tediosa. Optamos por eliminar solo el generador γ_3 .

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}, x_0) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, s \quad : \quad \begin{aligned} \gamma_1^7 &= 1, \\ \alpha_2^2 &= 1, \alpha_2 \gamma_2 \alpha_2 = \gamma_2, \\ \alpha_4^2 &= 1, \beta_1^2 = 1, \beta_2^3 = 1, \\ \alpha_4 \beta_1 \alpha_4 &= \beta_1^{-1}, \alpha_4 \beta_2 \alpha_4 = \beta_2^{-1}, \\ \alpha_4 s \alpha_4 &= s^{-1}, \alpha_4 \gamma_4 \alpha_4 = s \beta_1 \beta_2 \alpha_4 \gamma_4 \end{aligned} \rangle$$

Así pues, hemos obtenido el grupo fundamental de nuestro orbifold mediante las instrucciones indicadas en el teorema general.

Un caso particularmente interesante aparece al preguntarse qué pasaría si no tuviéramos componente propia de borde no singular. El orbifold que estamos considerando ahora equivale a “tapar” con un disco la componente 3 (ver Figura 4.35) de borde, como se representa en la siguiente figura.

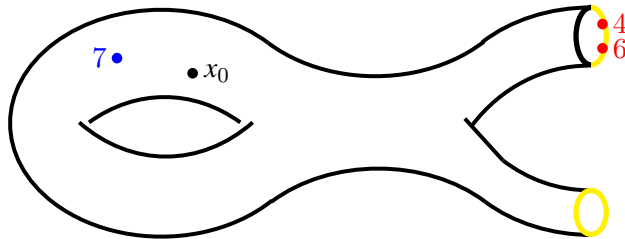


Figura 4.38: Ejemplo de orbifold general sin componente propia de borde no singular.

Realizando un estudio paralelo al realizado en la situación anterior, obtenemos la siguiente presentación del grupo fundamental orbifold:

$$\pi_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}, x_0) = \langle \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \alpha_2, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, s \quad : \quad \begin{aligned} [\sigma_1, \sigma_2] &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4, \\ \gamma_1^7 &= 1, \\ \alpha_2^2 &= 1, \alpha_2 \gamma_2 \alpha_2 = \gamma_2, \\ \alpha_4^2 &= 1, \beta_1^2 = 1, \beta_2^3 = 1, \\ \alpha_4 \beta_1 \alpha_4 &= \beta_1^{-1}, \alpha_4 \beta_2 \alpha_4 = \beta_2^{-1}, \\ \alpha_4 s \alpha_4 &= s^{-1}, \alpha_4 \gamma_4 \alpha_4 = s \beta_1 \beta_2 \alpha_4 \gamma_4 \end{aligned} \rangle$$

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de todo el estudio, se ha introducido al lector al área de la topología algebraica referida a los espacios orbifold con la intención de aportar herramientas con las que abordar el verdadero objetivo del trabajo: el cálculo de grupos fundamentales de orbifolds. Para ello, se ha trabajado desde los principios topológicos básicos establecidos y estudiados para el caso de variedades, traduciendo todos esos cimientos teóricos para el nuevo escenario.

Partiendo de las primeras proposiciones, hemos podido formalizar los principios topológicos para los orbifold, tratando siempre de considerar estos espacios como una extensión de las variedades. En particular, hemos podido enunciar importantes resultados de la teoría de espacios recubridores y el concepto de grupo fundamental para los espacios orbifold, que era nuestro objetivo a nivel teórico.

En referencia a la aplicación de esta formalización teórica de los espacios orbifold, debemos destacar una herramienta importante: el teorema de Seifert-Van Kampen. Gracias a la preparación de las bases teóricas, este teorema propuesto para variedades, lo hemos podido trasladar a los orbifolds de manera análoga. Esto ha facilitado desarrollar el cálculo del grupo fundamental de los orbifold, trabajando con varios ejemplos diversos. Este teorema nos permite conocer el grupo fundamental de un orbifold, pero las consecuencias de este hecho van mucho más allá, debido a que el grupo fundamental de un espacio proporciona mucha información sobre el espacio, sus principales propiedades y aplicaciones sobre éste. Además, aporta una herramienta más para el estudio de espacios topológicos: el álgebra. Permite reducir algunos problemas topológicos de los espacios a problemas puramente algebraicos.

Una característica de este trabajo es la multitud de ejemplos y dibujos que contiene. En ocasiones, aparecen situaciones excesivamente sencillas con el objetivo de clarificar e ilustrar el resultado que se está describiendo. Estas figuras ayudan a la argumentación matemática y motivan la dirección teórica del trabajo.

El teorema de Seifert-Van Kampen sobre orbifolds y la teoría de cubiertas han sido los dos instrumentos en el desarrollo del cálculo de grupos fundamentales orbifold, y por tanto, los principales sustentadores del teorema general de grupos fundamentales. Este resultado, presentado para dimensión 2, es fácilmente trasladable a espacios de dimensión 3.

Bibliografía

- [1] J. E. Borzellino and V. Brunsten, *The stratified structure of spaces of smooth orbifold mappings*, Communications in Contemporary Mathematics **15** (2013), no. 05, 1350018.
- [2] M.R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR 1744486
- [3] W. Chen, *On a notion of maps between orbifolds I: Function spaces*, Communications in Contemporary Mathematics **8** (2006), no. 05, 569–620.
- [4] ———, *On a notion of maps between orbifolds II: Homotopy and CW-complex*, Communications in Contemporary Mathematics **8** (2006), no. 06, 763–821.
- [5] J. I. Cogolludo, *Topología de superficies*, Universidad de Zaragoza.
- [6] L. Cornalba and M.S. Costa, *Time-dependent orbifolds and string cosmology*, Fortschritte der Physik: Progress of Physics **52** (2004), no. 2-3, 145–199.
- [7] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten, *Strings on orbifolds*, Nuclear Physics B **261** (1985), 678–686.
- [8] D. Gepner and A. Henriques, *Homotopy theory of orbispaces*, arXiv preprint math.AT/0701916 **62** (2007), 151–200.
- [9] A. Haefliger and Quach N.D., *Appendice: une présentation du groupe fondamental d'une orbifold*, no. 116, 1984, Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982), pp. 98–107. MR 755164
- [10] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1867354
- [11] M. Macho, *Topología algebraica*, Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea.
- [12] W. S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 127, Springer-Verlag, New York, 1991. MR 1095046
- [13] J. Porti, *An introduction to orbifolds*, Lorentz Center, 2009, Universitat Autònoma de Barcelona.
- [14] I. Satake, *On a generalization of the notion of manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 359–363. MR 0079769
- [15] ———, *The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds*, Journal of the Mathematical Society of Japan **9** (1957), no. 4, 464–492.
- [16] A. Snowden, *Introduction to Orbifold*, Seminar in Topology. Spring 2011. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare.

- [17] W. P. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, Princeton University Princeton, NJ, 1979.