Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Funciones: una propuesta didáctica para 2 de ESO

Autor: Javier Miguel Pascual

Director: Julio Sancho Rocher

Junio de 2015

Índice

Prologo

En este Trabajo Fin de Master se aborda la introducción de las funciones en el segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Se trata de un tema que no siempre hemos visto tratado de forma adecuada en los libros de texto de este nivel y que tiene el suficiente interés e importancia como para merecer una reflexión y una nueva propuesta didáctica.

El trabajo se ha dividido en 7 partes. Al principio hay una introducción al objeto matemático y los contenidos que se dan de él. Después, en el siguiente apartado, se habla de los conocimientos previos necesarios para seguir la propuesta didáctica que aquí se plantea. En el siguiente apartado se trata la evolución histórica de este objeto y además se establecen los objetivos que se buscan con esta propuesta. A continuación se explica el campo de problemas, de técnicas y las tecnologías que se van a desarrollar a lo largo de la propuesta. Luego se secuencian esas actividades a lo largo del tiempo. Después se desarrollan la prueba de evaluación para esta propuesta, también se explican cuales son los criterios de evaluación. Por último hay unas pocas conclusiones que se extraen de la realización de este trabajo.

1 Introducción

Muchas veces la asignatura de matemáticas, a nivel de secundaria, se percibe como una asignatura complicada y en la que había que aprenderse una serie de fórmulas. Por eso, en este trabajo se va a intentar modificar esta percepción en el contenido disciplinar de *Funciones y Gráficas*.

El trabajo va a estar centrado en el segundo curso de educación secundaria obligatoria. Además para tratar de cambiar las ideas predeterminadas que tienen muchos alumnos, cuando se enfrentan a esta asignatura, se va a abordar de forma praxeológica. Es decir, se les propondrá a los alumnos una serie de problemas, de los cuáles surgirán las técnicas necesarias para resolverlos y finalmente deducirán, o se les explicarán, los razonamientos que justifican esas técnicas. De esta forma los alumnos pasan a ser agentes activos, y no pasivos, en la construcción de su propio conocimiento.

Para decidir los contenidos en los que basar esta propuesta se ha acudido a la orden del 9 de mayo de 2007 publicada en el boletín oficial aragonés, ya que en ella se encuentran los contenidos mínimos de enseñanza para cada curso y contenido. Los contenidos para 2º de la ESO de funciones y gráficas son (Orden del 9 de mayo de 2007, BOA, p. 8990, *Bloque 5. Funciones y gráficas*) :

- Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información. Coordenadas cartesianas. Representación de una tabla de valores en unos ejes de coordenadas cartesianas. Construcción de tablas de valores, tanto a partir de una descripción verbal como de una gráfica o de una expresión algebraica.
- Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos.
- Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Relaciones funcionales entre magnitudes directamente

proporcionales: expresión algebraica y representación gráfica de las funciones $y = k \cdot x$ e $y = mx + b$.

- Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.
- Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Estos contenidos sirven de base y punto de partida para elaborar el campo de problemas, que a su vez provocará que aparezcan las técnicas que se quieren enseñar. La aparición de estas técnicas hace que sea necesaria una justificación de las mismas, es decir, crean la necesidad de unas tecnologías.

Para completar la información obtenida en la orden ministerial y desarrollar mejor la unidad, se han consultado diferentes libros de matemáticas para 2º de la ESO, con el fin de ver como enfocan este bloque. Concretamente se han mirado dos libros, SM (2011) y Santillana (Avanza).

De la observación del índice se puede ver que hacen un enfoque completamente diferente de este bloque de contenidos. Por un lado SM le dedica dos unidades y abarca todos los puntos que marca la orden ministerial, excepto el de interpretación de gráficas como relación entre dos magnitudes. Por otro lado Santillana, sólo le dedica una unidad y no abarca todos los puntos, no habla nada de la relación entre magnitudes directa e inversamente proporcionales, ni de interpretación de gráficas como relación entre dos magnitudes.

Otra gran diferencia entre ambos es la forma de introducir el tema. Santillana lo hace contando una historia de Descartes de como llego a ser conocido en el mundo matemático. Mientras que SM lo hace explicando que es un climograma, muestran uno sobre el que hacen preguntas. Se puede decir que la forma de SM es introducir el tema mediante un problema inicial y la de Santillana es mediante una historia. Personalmente me parece más interesante la propuesta de SM ya que ayuda a modificar las concepciones iniciales que pudiera tener el alumno, además sirve para exponer lo que puede esperar el alumno del tema. Esta forma de presentar la asignatura es la misma por la que se ha optado en este trabajo, ya que como se ha explicado arriba es más útil que contar una historia relacionada con el tema a tratar.

Analizando los contenidos de cada libro, nos ha llamado la atención que no hay ningún campo de problemas en sí. Es decir, hay ejercicios, hay explicación de técnicas para resolver esos ejercicios (que en ambos libros se explican antes de proponer los ejercicios) y hay algunas tecnologías, en forma de definiciones, pero no hay ningún campo de problemas. Además en ambos libros se ignora completamente la interpretación de funciones como relación de dos variables. Lo que constituye uno de los conceptos principales que deben obtener los alumnos durante este curso.

Se comenzará analizando por separado las diferentes técnicas y tecnologías que, respecto a este tema, aparecen en cada uno de los dos libros. En el libro de SM se tienen las siguientes:

Técnicas.

- Representar puntos en un plano cartesiano.
- Pasar de una tabla de datos a una gráfica.
- Construir una tabla a partir de una fórmula.
- Como construir una gráfica mediante una fórmula o expresión algebraica.
- Saber cuando se cortan a los ejes cartesianos.
- Saber cuando una función es continua o discontinua.
- Distinguir entre funciones crecientes y decrecientes.
- Distinguir el crecimiento y decrecimiento en funciones afines.
- Interpretar las diferentes gráficas y funciones según el enunciado que se de. (Interpretación de situaciones reales)

Tecnologías.

- Explicación del plano cartesiano.
- Definición de lo que es una función.
- Explicación del dominio y recorrido de una función.
- Definición de función continua.

- Definición de funciones crecientes, decrecientes y constantes.
- Definición de máximos y mínimos.
- Definición de función de proporcionalidad directa.
- Definición de función lineal.
- Explicación de cuando dos funciones son paralelas.
- Definición de función de proporcionalidad inversa.

Mientras que en el de Santillana se tienen las siguientes:

Técnicas.

- Representar puntos en un plano cartesiano.
- Pasar de una tabla de datos a una gráfica.
- Como construir una gráfica mediante una fórmula o expresión algebraica.
- Saber cuando se cortan a los ejes cartesianos.
- Saber cuando una función es continua o discontinua.
- Distinguir entre funciones crecientes y decrecientes.

Tecnologías.

- Explicación del plano cartesiano.
- Definición de lo que es una función.
- Definición de funciones crecientes, decrecientes y constantes.
- Definición de máximos y mínimos.

Se puede ver que Santillana trata menos aspecto del tema de funciones que SM. Aunque la forma de trabajar las técnicas y tecnologías es la misma en ambos libros, mediante ejercicios.

Otro aspecto que se puede extraer del análisis de los libros, es que, aunque en contenidos hay diferencias en la forma de explicar y de desarrollar los contenidos no hay diferencias significativas. El efecto en los alumnos será parecido provocando, en mi opinión, que aunque haya mucho trabajo al realizar los ejercicios propuestos, no se desarrolle demasiada comprensión de lo que hacen, y que las tareas se realicen con frecuencia de forma mecánica. Esto provoca que, en los cursos siguientes, no se acuerden de casi nada de lo visto, y se tenga que empezar casi desde el principio. Además de que muchos alumnos estén perdidos desde casi el principio cuando se da este tema. Al obviar la interpretación de gráficas se elimina uno de los contenidos principales, ya que a partir de él las técnicas cobran más sentido, lo que haría que no fuesen olvidadas con tanta facilidad. Dado que dentro del esquema que siguen ambos libros, las técnicas y las tecnologías carecen de ningún significado se olvidan de forma rápida.

Tomando como referencia todos estos puntos analizados se puede empezar a desarrollar la unidad didáctica.

2 Conocimientos previos

Uno de los puntos importantes a tener en cuenta a la hora de crear una unidad didáctica es saber desde que nivel se debe empezar, ya que un nivel muy alto puede hacer que muchos alumnos no se enteren y se pierdan, y un nivel muy bajo que se aburran y no presten atención, por ser algo que ya conocen. Este nivel inicial se puede conocer a partir de tres cauces: primero lo que dice la legislación que deben haber aprendido de funciones y gráficas en el curso anterior, segundo mirando el libro que dieron los alumnos el curso anterior y tercero leyendo la memoria del departamento de matemáticas del curso anterior, donde estaría reflejado el nivel de conocimientos que se alcanzó durante el curso. Al ser una propuesta general, que no esta basada para ningún tipo de alumnos en especial, las dos últimas formas no se pueden usar para la realización de este trabajo.

Entonces lo que se hace es consultar la legislación vigente para ver que saben, supuestamente, los alumnos sobre este tema. Dentro de todos los conocimientos que deben tener se analizaran cuales son los fundamentales para que los alumnos puedan seguir esta propuesta. Para asegurarnos de que los alumnos poseen esos conocimientos se ha programado una sesión 0 en la que se tratarán todos los aspectos considerados como fundamentales.

Para conocer los contenidos que marca la ley se consulta, otra vez, la orden del 9 de mayo de 2007 para el primer curso de ESO. Que para este bloque de contenidos dice (Orden del 9 de mayo de 2007, BOA, p. 8988, *Bloque 5. Funciones y gráficas*):

- Interpretación y construcción de tablas de valores para obtener información sobre fenómenos naturales y cotidianos.
- Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas.
- Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información.
- Interpretación de la información incluida en una gráfica y relación con el fenómeno que representa. Construcción de tablas de valores a partir de gráficas de funciones.
- Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del

análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.

- Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas. Descripción de la dependencia entre variables: verbal, tablas y gráficas. Variable dependiente e independiente.
- Interpretación puntual y global de informaciones presentadas en una tabla o representadas en una gráfica. Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación.

Como nos interesa la forma en la que los alumnos tuvieron que demostrar estos conocimientos, para saber de que forma fueron evaluados se analizan los criterios de evaluación que marca la orden ministerial. De estos criterios el relacionado con funciones de forma directa es (Orden del 9 de mayo de 2007, BOA, p. 8989, *Criterios de evaluación*):

- Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas de trazo continuo, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.

Analizando ambos textos se llega a la conclusión de que en este curso se pretende dar una idea general de lo que son las funciones. En especial quieren que interpreten tablas y gráficos y sepan pasar de una a otra.

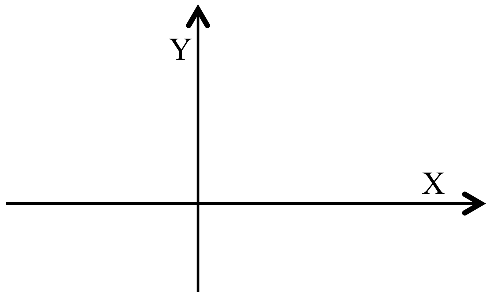
Para esta unidad considero necesario que los alumnos sepan:

- Que es el plano cartesiano.
- Colocar puntos en el plano.
- Saber expresar las coordenadas de un punto.
- Interpretar tablas de valores y gráficos.

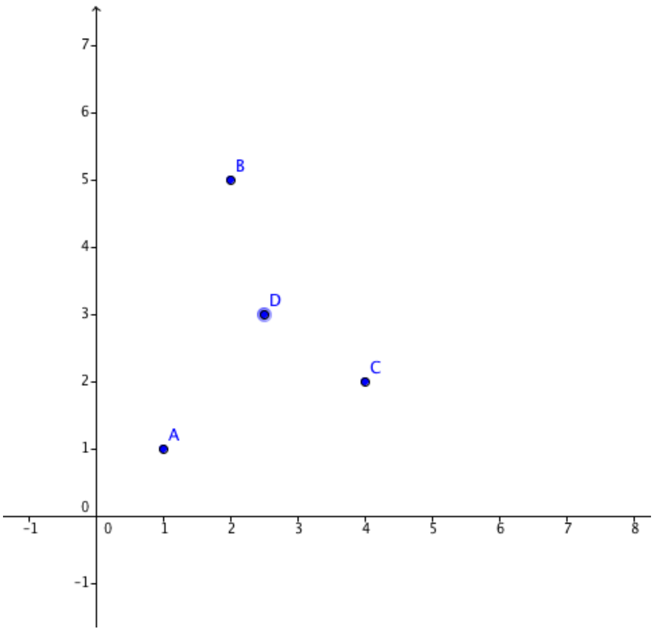
La sesión inicial, dónde se trabajarán esos conocimientos, va a constar de dos partes diferenciadas. Una primera parte donde los alumnos tendrán que hacer un pequeño cuestionario. Con él se busca descubrir cuáles son los conocimientos reales de los alumnos. La segunda parte estará destinada a corregir estos ejercicios, para así explicarles todos los conceptos que se les han preguntado en la prueba. Al final de la clase se les entregaría una hoja con más ejercicios de repaso, parecidos a los preguntados. Además, como complemento, se daría una hoja resumen donde aparecería un esquema de qué es el plano coordenado, qué son las coordenadas, cómo interpretar una tabla, etc.

La prueba planteada en esta sesión 0 sería la siguiente:

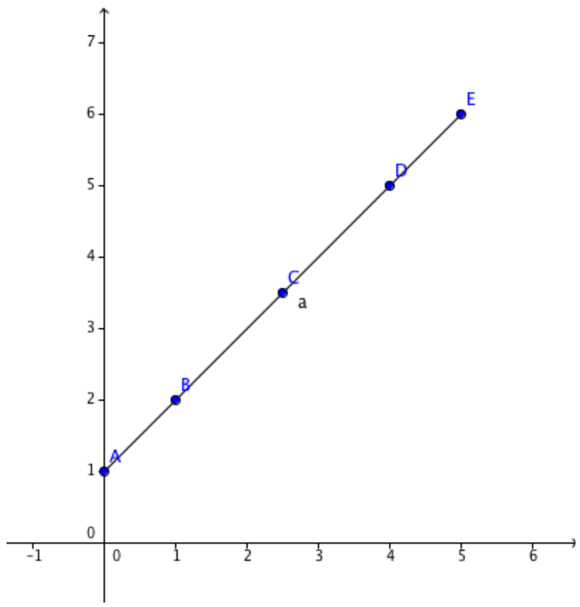
1. Coloca en el plano los siguientes punto: A(2,4), B(1,2), C(0,3) y D(1/2,2)



2. Escribe las coordenadas de los siguientes puntos.

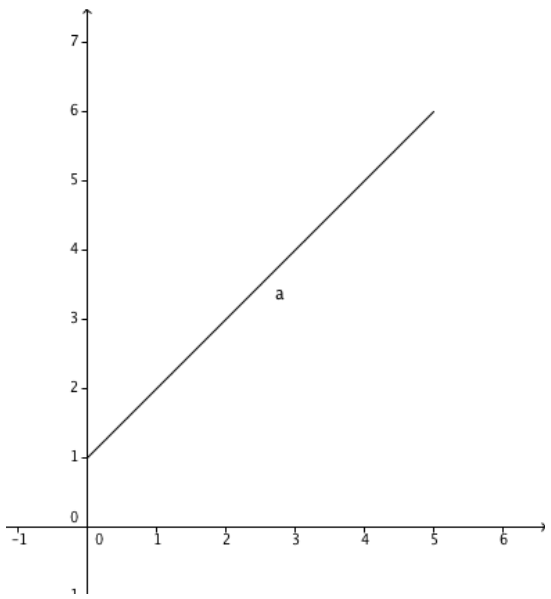


3. Observando la función que se da, escribe a que punto corresponde cada una de las coordenadas.



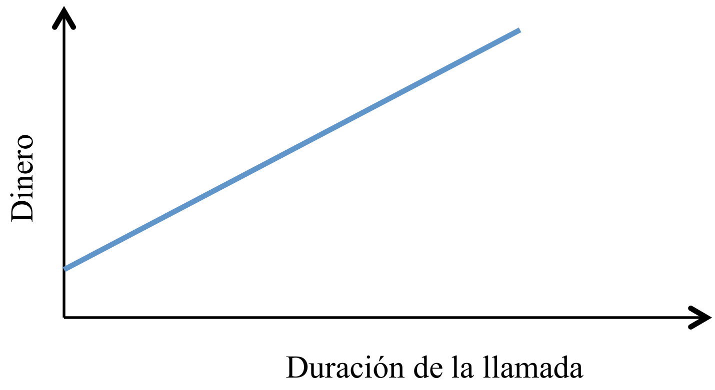
Punto	x	y
	0	1
	1	2
	5/2	7/2
	4	5
	5	6

4. Completa la tabla, cuyos puntos están en la gráfica adjunta.



x	y
0	1
1/2	
	1,5
3	
	5,4

5. Explica con tus palabras la siguiente función que relaciona la duración de una llamada con el dinero que cuesta. ¿Hay alguna relación entre ambas?, ¿cómo es esa relación?



Cuando los alumnos vean esta prueba es posible que no sepan cómo empezarla ya que tendrán los conocimientos de funciones olvidados. Por eso, al ser una prueba para evaluar sus conocimientos iniciales se les darán más pistas, cuando se les vea atascados, que si fuese una prueba evaluable.

Para hacer la prueba se dejará un tiempo suficiente como para permitir la correcta corrección de los ejercicios durante la clase. Esta corrección se procurará que sea una puesta en común de lo que han ido escribiendo los alumnos en los diferentes ejercicios. En este aspecto se intentará reducir la aportación del profesor a simplemente precisar algún término o recordar algún aspecto.

Para acabar, durante los últimos minutos, se hará un repaso de todo lo visto en los ejercicios y se entregará la hoja de ejercicios de repaso que se ha comentado antes. Además los cuestionarios se recogerán para analizarlos y corregirlos fuera del horario de clase. Con ello se busca saber cuál es el nivel de cada alumno y saber como de interiorizados están estos conceptos.

El objetivo de todos los pasos seguidos es asegurarnos de que todos los alumnos tengan los conocimientos necesarios, para seguir el proceso de enseñanza de la unidad sin dificultades iniciales.

3 Desarrollo del objeto matemático

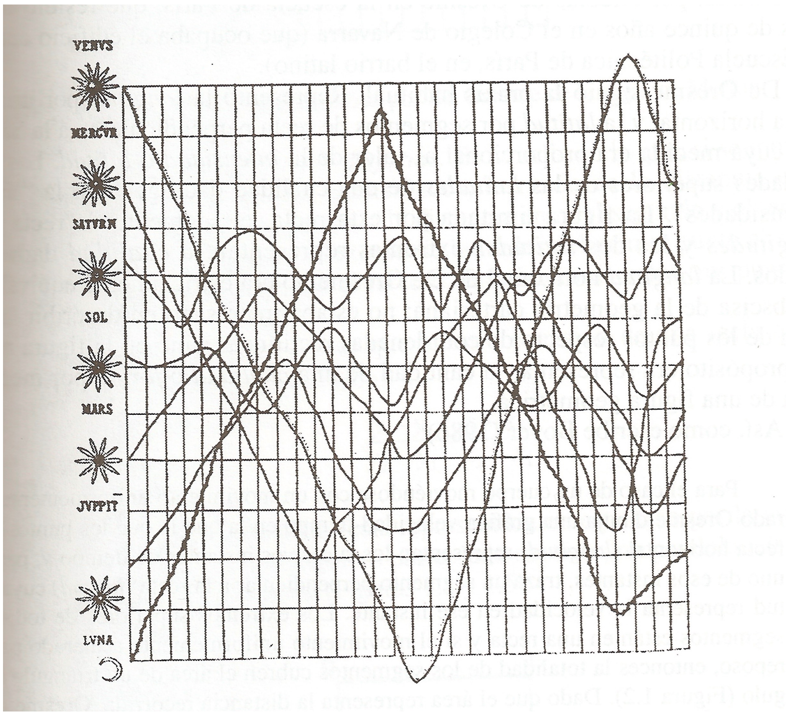
Las funciones no son un concepto actual, ni reducido al mundo de las matemáticas, sino que es un concepto que se usa en muchas ciencias. Por ejemplo economistas, ingenieros, medios de comunicación, etc. utilizan constantemente gráficos de funciones para expresar ideas y para analizar la relación entre distintas magnitudes.

Con la llegada de las calculadoras gráficas y los ordenadores cualquiera puede dibujar una función tenga esta la ecuación que tenga. Por eso, cobra aún más importancia el estudio de las funciones, especialmente el saber interpretarlas y analizarlas.

Antes de hablar con mayor profundidad del objetivo de esta propuesta, de su razón de ser, se va contextualizar el desarrollo histórico de este concepto y el como ha ido evolucionando hasta llegar a ser el objeto matemático que conocemos hoy en día.

El primer lugar donde aparece una mención a este concepto es en Babilonia en el 5000 a. C. Hay constancia de que los babilonios utilizaban tablas de funciones para la compilación de las efemérides del Sol, la Luna y los planetas. Años más tarde en Grecia, Apolonio en su libro *Cónicas* utilizaba métodos muy parecidos al planteamiento analítico moderno. Por ejemplo, utiliza un diámetro y una tangente en un extremo (de una cónica) cómo sistema de coordenadas de referencia, algo similar a los ejes de coordenadas actuales.

Aún con todas estas semejanzas o parecidos con el objeto matemático, durante la antigüedad no se desarrollo la noción de semejanza ni de función. Hubo que esperar hasta el siglo XIV para que las primeras ideas de función aparecieran en las escuelas de Oxford y París. En Oxford desarrollaron un método donde relacionaban la *intensidad* o *latitud* de una "forma" (velocidad, calor, etc.) con la *extensión* o *longitud* de otra "forma" (tiempo, longitud, etc.). En la siguiente imagen se puede ver un ejemplo de este método para relacionar dos variables, en la primera gráfica funcional conocida.



Este método fue utilizado más adelante por Nicolas de Oresmes, de la escuela de París. Él utilizó este método para representar la cantidad de una *cualidad* o *forma* por medio del área de una figura geométrica. También estableció una clasificación de las principales especies de cualidades lineales (Eduardo Lacasta, 1998):

- *Cualidad uniforme: latitud constante y línea de intensidades paralela a la línea de longitudes. La figura correspondiente es un rectángulo.*
- *Cualidad uniformemente disforme: es aquella en la que, si se toman tres puntos de la línea de intensidades, la razón de la distancia entre el primer punto y el segundo, a la distancia entre el segundo y el tercero es igual a la razón entre el exceso de latitudes del primer punto al segundo y el exceso del segundo al tercero. El primero de estos tres puntos es el de mayor intensidad. Esto en realidad es la expresión de la recta que pasa por dos puntos,* $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.
- *Cualidad disformemente disforme: a esta categoría pertenecen el resto de los casos; es la más amplia y puede ser descrita negativamente. Las que no pertenecen ni a las uniformes, ni a las uniformemente disformes.*

Es en el siglo XVII donde se desarrolla completamente la noción de función gracias a los científicos Fermat y Descartes. Quienes de forma independiente desarrollaron el método analítico de análisis de funciones. Ambos se basan, en que las ecuaciones indeterminadas de dos incógnitas $f\ (x, y) = 0$, se corresponden con lugares geométricos. Esto lo expresan, por un lado Descartes en su libro *Geometría* y Fermat en su libro *Introducción a los lugares planos y sólidos*. Uno de los hechos más reseñables, es que Descartes empieza a utilizar el álgebra para resolver los problemas de geometría. También clasificó los distintos problemas que habían en función del grado de la ecuación resultante (grado uno recta, grado dos círculos, etc.). Este hecho, el de relacionar expresiones algebraicas con objetos geométricos, tuvo una gran importancia y su utilización pronto se empezó a generalizar, a otros campos de las matemáticas, como por ejemplo al cálculo infinitesimal.

A partir de este punto, el estudio de funciones se convierte en una pieza angular de las matemáticas. Grandes científicos cómo Newton y Leibniz, a finales del siglo XVII, desarrollan el cálculo infinitesimal e integral en las funciones, desarrollando ideas que han llegado hasta nuestros días. Hay que decir, que hasta este momento, aún no trabajaban con el concepto de función tal y cómo se conoce ahora, sino que aplicaban estas herramientas al estudio de expresiones analíticas.

Para encontrar el uso de la palabra función por primera vez, hay que esperar a 1698, en un articulo de Jean Bernouilli sobre soluciones a problemas de isoperímetros, donde define el concepto de la siguiente forma (Eduardo Lacasta, 1998) :

"Se llama función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera de esta magnitud variable y de constantes".

Es un significado muy próximo al que se le da actualmente. Unos años más tarde Euler completo la definición de Bernouilli, sustituyendo la palabra *cantidad* por *expresión analítica.* Finalmente es el matemático Lagrange quien en su libro *Teoría de las funciones analíticas* termina de dar una definición completa de lo que se entendía por función a principios del XVIII (Eduardo Lacasta, 1998):

"Designamos, en general, por la característica f o F, colocada delante de una variable, toda función de esta variable y que varía con ella siguiendo una ley dada. Así fx o Fx designarán una función de la variable x; pero cuando se quiera designar

una función de una cantidad compuesta de esta variable , como, x^2, $a + bx$, etc., se encerrará esta cantidad entre dos paréntesis. Así fx designará una función de x, $f(x^2)$, $f(a + bx)$, etc., designarán funciones de x^2, $a + bx$, etc.

Para señalar una función de dos variables independientes como x, y escribiremos f(x,y) y así sucesivamente."

Durante los años siguientes, los matemáticos más importantes fueron variando las definiciones de este objeto, según los fallos que detectaban en las definiciones para intentar definir perfectamente el objeto matemático. De estas definiciones, una de las más importantes fue la que dio Dirichlet, en el siglo XIX, en su libro *Sobre la representación de funciones cualesquiera por series de senos y cosenos*, (Eduardo Lacasta, 1998):

"Designamos por a y b dos valores fijos y por x una magnitud variable comprendida entre a y b. Si a todo x corresponde un valor finito y = f(x) que varía de forma continua cuando x varía también de forma continua desde a hasta b diremos que y es una función continua para este intervalo. Aquí no es del todo necesario que y se exprese en función de x según una misma ley en todo el intervalo; ni es incluso necesario prever una expresión algebraica explícita entre x e y. Desde un punto de vista geométrico, es decir, considerando x e y como abscisa y ordenada de un punto y en el que a cada valor de x del intervalo considerado corresponde un valor y uno sólo de y, la continuidad de una función está en correspondencia con el hecho de que la curva sea de un solo trazado. Esta definición no prescribe de manera alguna una propiedad cualquiera común para las diferentes partes de la curva y pueden representar diferentes conexiones de manera totalmente arbitraria o incluso imaginar una curva simple trazada gráficamente sin ningún condicionamiento previo. Resulta de esto que una tal función no estará definida en todo el intervalo más que si cada una de sus partes está dada ya gráficamente, ya matemáticamente. Por el contrario, si no está definida más que en una parte del intervalo, entonces es libre de tomar o no tomar cualquier valor arbitrario en la parte restante del intervalo."

Finalmente la definición utilizada hoy en día, a un nivel de estudios superiores, es la dada por el grupo Bourbaki, donde definen la función mediante la teoría de conjuntos y estructuras algebraicas (Eduardo Lacasta, 1998):

"Sean E y F dos conjuntos que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional, si para todo $x \in E$*, existe un único* $y \in F$ *que esta relacionado con x en la relación dada.*

Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia con cada elemento $x \in E$ *el elemento* $y \in F$ *que está relacionado con x en la relación dado; llamamos a y valor de la función para el elemento x, y decimos que la función está determinada por la relación funcional dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan las mismas funciones."*

Claramente, esta no es la definición que se da en los libros escolares, donde se considera la función como una aplicación $f: D \rightarrow R$. Es decir, que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

En resumen, se puede ver que el origen de este objeto matemático se encuentra en estudiar la forma de poder relacionar dos magnitudes (x e y), para después analizar esas relaciones que surgen entre las ambas de forma analítica.

El objetivo de esta propuesta, lo que se podría llamar su razón de ser, va a estar muy cercano a esta razón histórica, aunque sin ser tan ambiciosos. Es decir, se busca que los alumnos comprendan, que una función es una relación entre dos magnitudes. Por tanto, se quiere que ellos interioricen este concepto de relación, a partir del cuál según lo que le ocurra a la función la relación variará de una forma u otra. Este es el objetivo ya que se considera que es el aspectos más importantes de cuando se empiezan a estudiar funciones. Hay que recordar que el nacimiento de las funciones se encuentra precisamente en esa búsqueda de relacionar dos magnitudes de forma visual. Por ello se cree que en esta primera toma de contacto con las funciones, es importante que los alumnos salgan con esta idea clara, de la utilidad de las funciones para relacionar dos magnitudes.

4 Propuesta de enseñanza

A lo largo de este apartado se va a desarrollar toda la propuesta que propongo. Es decir, se hablará del problema inicial; del campo de problemas que se utilizará; de las técnicas que se quieren trabajar y cómo; de las tecnologías que se consideran importantes para los alumnos y de la metodología que se empleará para implementar en el aula todos estos aspectos.

4.1 Problema inicial

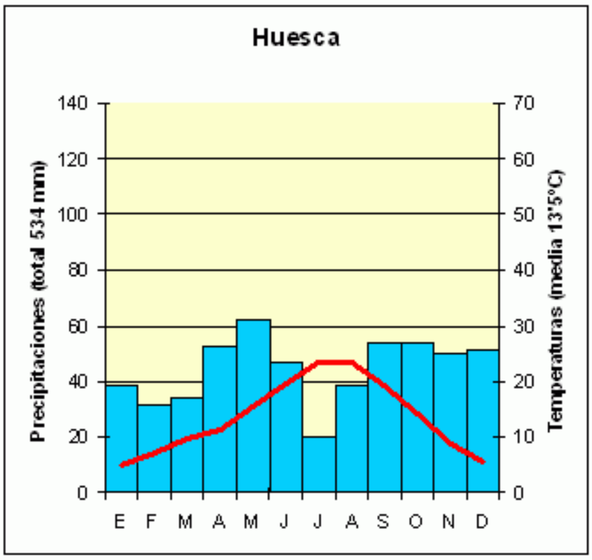
Se denomina problema inicial a aquel problema con el que se va a empezar la unidad. El objetivo de este tipo de problemas es que el alumnos descubran por primera vez el objeto matemático que estudiaran durante esa sesión. Paralelamente, también se busca que sirva para crear interés por el propio objeto y que vean la utilidad del mismo.

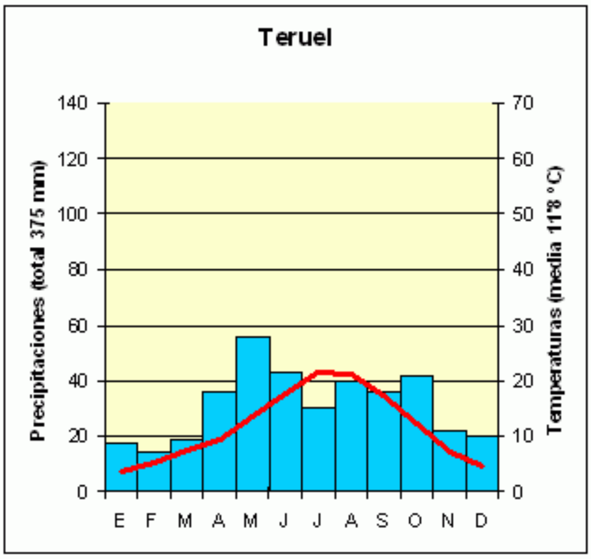
Para esta propuesta se ha pensado en dos problemas iniciales, que se darían en la misma sesión. El motivo por el que son dos los problemas escogidos es que aunque ambos muestran la variación de magnitudes a lo largo del tiempo, lo hacen de forma distinta uno mediante magnitudes discretas y el otro mediante magnitudes continuas.

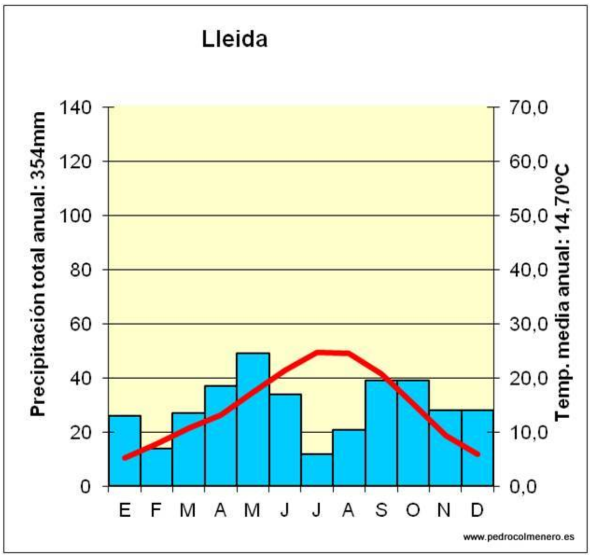
El enunciado de estos dos problemas serían:

1. *Juan esta observando unas gráficas donde se muestra la temperatura y la cantidad de lluvia que cae en las ciudades de Huesca, Teruel y Lleida. En estas gráficas se muestra la temperatura media de la ciudad en cada mes del año y las lluvias que han caído en cada mes. Gracias a ellas ha podido decidir a que ciudad se va a ir en los meses de verano, durante semana santa y en navidades. Para saber cual es su destino elegido nos da las siguientes pistas:*

    - *En verano me gusta ir a lugares donde haga fresco.*
    - *Para semana santa iré al lugar más caluroso.*
    - *En invierno me gusta ver llover.*
    - *No voy a repetir ciudad.*





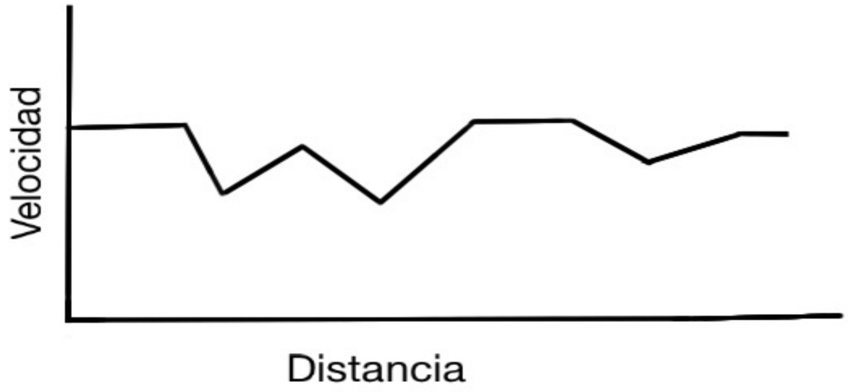


Con estas pistas y observando los gráficos,

¿A que ciudad ha ido Juan en cada época?

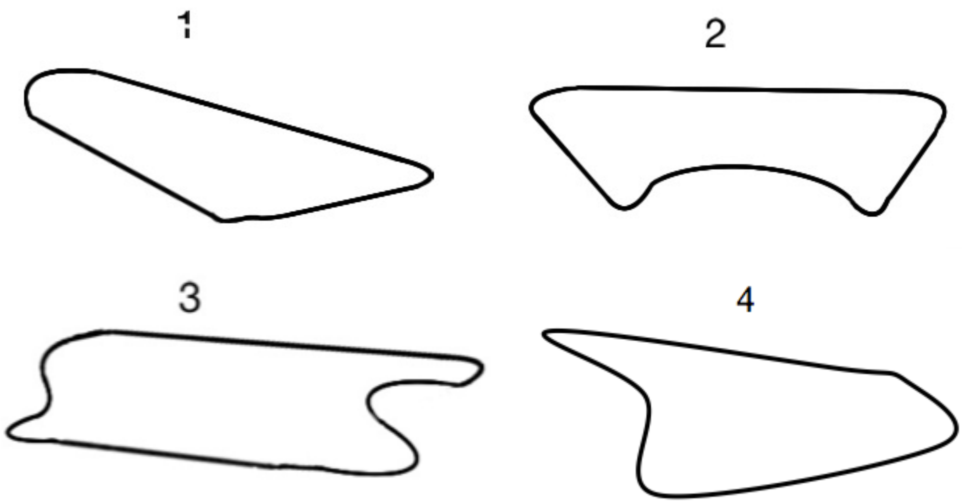
Si combinases las tres ciudades de forma que tuvieses la primavera de Lleida, el verano de Teruel y el otoño e invierno de Huesca. ¿Cómo sería el climograma de esa ciudad?

2. *A las afueras de la ciudad de Toulouse quieren construir un circuito de carreras. Para hacerlo se quieren fijar en el circuito de Valent en París. De este circuito les han pasado la siguiente gráfica de velocidad de un coche en una vuelta.*



Observando esta gráfica podrías decir, ¿cuantas curvas tiene el circuito?, ¿Cuál es la curva más cerrada?, ¿Cuál es la recta más larga?

El circuito quieren que sea muy parecido pero con una curva más y sin que haya curvas cerradas. Así los arquitectos que se van a encargar de construirlo les presentan estos tres diseños.



¿Con cuál de los tres se van a quedar? ¿Por qué?

Cómo se pueden ver los problemas están pensados para que con pocos conocimientos de funciones se puedan realizar. En ambos casos los alumnos pueden observan como se relacionan distintas variables, temperatura con respecto al paso de los meses, la cantidad de lluvia en cada mes, la velocidad con respecto al punto del circuito donde te encuentres.

Centrándonos en el primer problema, los alumnos no necesitarán mucha ayuda para interpretar lo que dice el enunciando, pero podrían tener problemas a la hora de pensar para llegar a responder la primera pregunta. Para ayudarles se les harán preguntas del tipo, ¿En qué ciudad hace más calor?, ¿En cuál llueve más?, etc. Con respecto a la segunda pregunta simplemente se busca que sepan combinar las variables discretas de la forma que se les indica. Pueden tener problemas en los meses de cambios de estaciones, ya que en ellos se combinan dos estaciones, para solucionar esto se les propondrá que relacionen las lluvias y temperaturas de las ciudades en cuestión, en esos meses.

El segundo problema, puede crear más problemas en los alumnos a la hora de interpretar lo que dice la gráfica. Para ayudarles, se puede recurrir a hacerles ver lo que significa que disminuya la velocidad, que aumente, etc. Si se consigue que entiendan esto, para resolver la segunda parte se les pedirá que dibujen el gráfico de cada uno de los circuitos que se dan. Así podrán ver cuál es el circuito que cumple todas las condiciones pedidas.

4.2 Campo de problemas, de técnicas y tecnologías

En este apartado se va a dar una descripción detallada del campo de problemas, de las técnicas y de las tecnologías que configuran la propuesta didáctica. Esta organizado de forma que detrás de cada problema se muestra la técnica que nace de él y detrás de las técnicas las tecnologías necesarias para justificarlas, si es necesario.

Cada problema del campo de problemas se imparte al principio de cada apartado y gracias a ellos se pretende que los alumnos vayan descubriendo las diferentes características del temario. Como se ha dicho al principio, toda esta propuesta esta pensada para que sea praxeológica. Por tanto el campo de problemas va a tener una gran importancia. Lo que aquí se va a mostrar son ejemplos de los tipos de problemas que se quieren proponer. Dentro de cada tipo de problemas, se podrían hacer más variantes. Pero se ha considerado más interesante describir los tipos de problemas, explicando lo que se quiere conseguir con cada uno de ellos, qué no hacer una lista de problemas más larga sin especificar lo que se quiere logar con cada uno de ellos.

Las técnicas están pensadas para que complementen a lo visto durante la realización de los problemas. Cuando por ejemplo surja la interpretación de puntos en el plano, después se trabajaran ejercicios donde tengan que usar lo aprendido en ese problema. Con esto se busca que los alumnos vayan interiorizando estos conceptos.

A la hora de llevar a cabo las justificaciones de las técnicas se van a intentar dos cosas. Por un lado reducir al mínimo que estas justificaciones sean algo simplemente expuesto o explicado por el profesor sin que los alumnos participen. Por otro lado que sea la finalización a la que conducen los ejercicios propuestos. Estos dos elementos no se van a conseguir siempre pero en la medida de lo posible serán deseables.

Las tecnologías que se quieren tratar son:

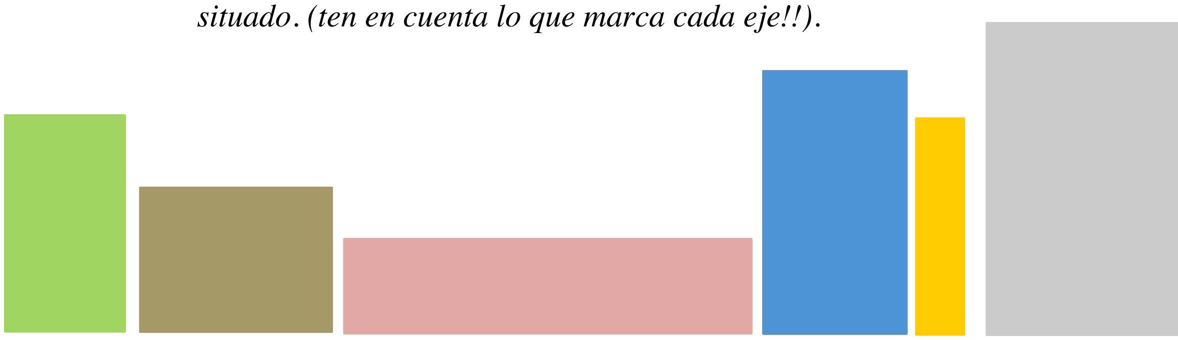
- Definición de lo que es una función.
- Definición de función continua (o discontinua);
- Definición de función creciente (o decreciente).
- Definición de los máximos (o mínimos) de una función.
- Definición de funciones lineales y afines.
- Definición función de proporcionalidad inversa.

La propuesta de problemas, técnicas y tecnologías es:

1. Problemas sobre la interpretación de puntos en el plano.

La idea de este tipo de problemas no es que aprendan a situar puntos en el plano con sus coordenadas, algo que ya saben de cursos anteriores, sino que sea sin coordenadas y de forma aproximada. Se busca que sea de forma aproximada, para que vayan entendiendo la relación que existe entre magnitudes, más que saber situar un punto mediante sus coordenadas. En resumen, se quiere que se fijen en lo que indica cada eje y el cambio de significado de los puntos cuando se mueven en ese plano. Dentro de este tipo de problemas se tendrían los siguientes ejemplos:

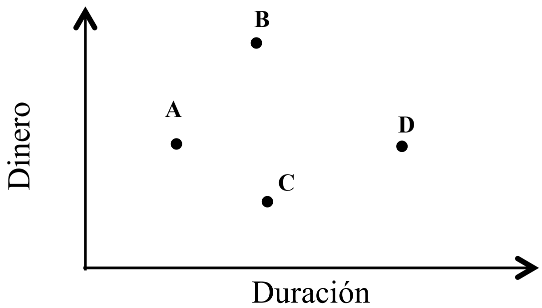
a) A continuación, se dan imágenes de distintos edificios. Coloca cada uno (como si fuese un punto), en la zona de la gráfica que creas que va situado. (ten en cuenta lo que marca cada eje!!).



Contesta a las siguientes preguntas:

- *¿Por qué los has colocado así? ¿Cambiaría algo si se cmbian los ejes, y donde poner la anchura pusiese la altura y viceversa?*
- *¿Cómo sería un edificio cuyo punto estuviese en la recta de la anchura? ¿y si esta en la recta de la altura?*

b) En el siguiente gráfico se puede ver lo que han pagado cuatro personas por realizar sus llamadas telefónicas. Se sabe que dos eran llamadas internacionales y dos llamadas locales, ¿Sabrías decía cual es cual?



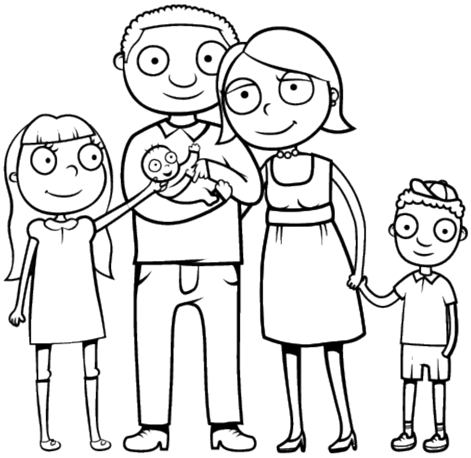
Si quisieras hacer una llamada internacional de una duración igual que la de D, ¿Cuánto costaría? Dibújalo.

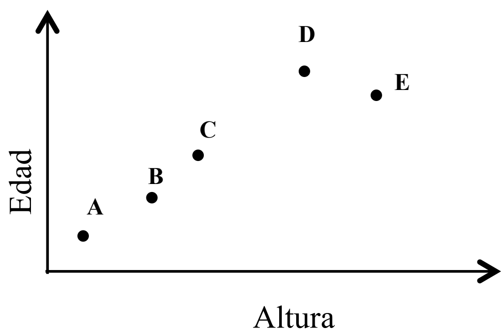
Las técnicas que surgen de este tipo de problemas son:

<u>Técnicas de interpretación de puntos en el plano</u>

Con esta técnica se busca que trabajen la comprensión e interpretación de lo que significa la colocación de los puntos en un plano coordenado. En estos ejercicios no se les pide que sitúen puntos según coordenadas, ya que se considera que eso es algo que ya deberían saber y que además tiene poco interés educacional para los alumnos. Se les va a pedir cosas más relacionadas con interpretar puntos sin coordenadas dadas.

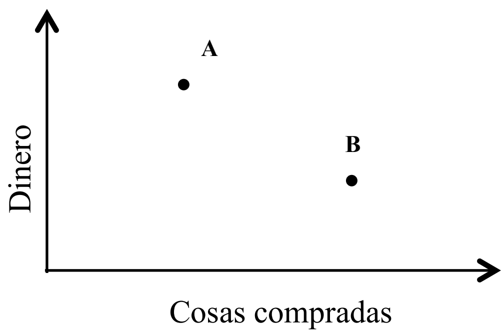
a) Dado el dibujo de la siguiente familia. Relaciona a cada uno con uno de los puntos que se dan en la gráfica.





Según el gráfico, ¿Quién es mayor, la madre o el padre?

b) *María y Teresa van a hacer la compra. Se sabe que a María le gusta comprar muchas cosas, pero siempre se va a por las ofertas, así que no le sale muy caro. Mientras qué Teresa, prefiere comprar pocas cosas pero de alta calidad todas, así que al final le sale muy caro. Identifica a María y Teresa en el siguiente gráfico.*



Si cambiásemos los ejes, es decir, el de dinero por el de cosas compradas, ¿Cambiaría algo?

2. Problemas sobre la interpretación de la descripción escrita de una relación entre magnitudes.

La idea de este tipo de problemas, es que lo alumnos, aprendan a descifrar un una relación entre magnitudes escrita y trasladarla al plano cartesiano. Es decir, que sean capaces de dándoles unos ejes y una serie de relaciones, de construir de forma aproximada un grafico que cumpla las condiciones especificadas. Con esto se espera, que sigan descubriendo cómo se relacionan dos magnitudes, no solo de manera puntual sino lineal. También se busca que identifiquen la función que más se asemeje a la relación dada.

a) *Dibuja de forma aproximada unas gráficas que describan las siguientes situaciones, ten en cuenta la variables que mides en cada eje:*

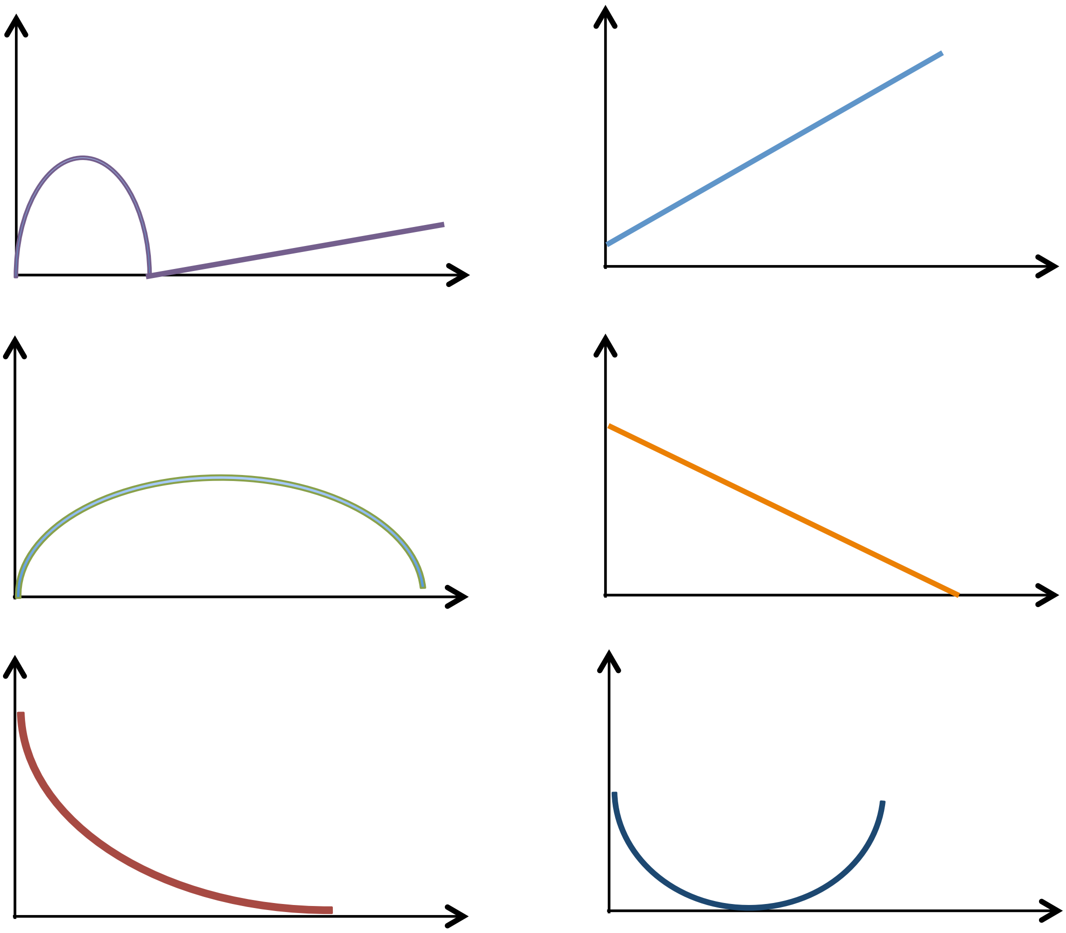
- *Para ir a casa de mi abuela tengo que subir una colina, después caminar 100 metros y a mitad de la bajada de la colina esta su* *portal. (Pista ejes: altura, distancia)*

- *El movimiento de una bala de cañón (Pista ejes: altura, distancia).*
- *La variación de velocidad de esa misma bala (Pista ejes: velocidad, distancia).*
- *El numero de personas que viajan en un tren. Este tren tiene 4 paradas y puede llevar 180 personas. En la primera se bajan 14 y suben 3; en la segunda se bajan 30; en la tercera se bajan 20 y suben 2; la última parada es el final del trayecto (Pista ejes: pasajeros, paradas).*
- *El insecto cóccido algodonoso australiano fue introducido accidentalmente en América en 1868 y aumentó en número hasta que pareció que iba a destruir los huertos de cítricos californianos. Su predador natural, una mariquita, fue introducida artificialmente en 1889 y esto redujo rápidamente la población del insecto cóccido. Posteriormente se utilizó DDT para intentar reducirla aún más. Sin embargo, el resultado fue que aumentó su número ya que la mariquita era mucho más sensible al DDT que el insecto cóccido, y éste se convirtió de nuevo en un serio problema (Pista ejes: población insectos, tiempo; población mariquitas, tiempo).*

b) Escoge la gráfica que más se asemeje a la situación descrita:

- *Cuando más estudio es al principio de la mañana y al final de la tarde no estudio nada.*
- *Al principio y al final del libro leí muy rápido pero a mitad baje mucho la velocidad de lectura.*
- *Cuanta más gente colabore antes acabaremos las tareas*

- *Cuando salgo a correr empiezo lento y poco a poco voy aumentando la velocidad hasta acabar a sprint*.

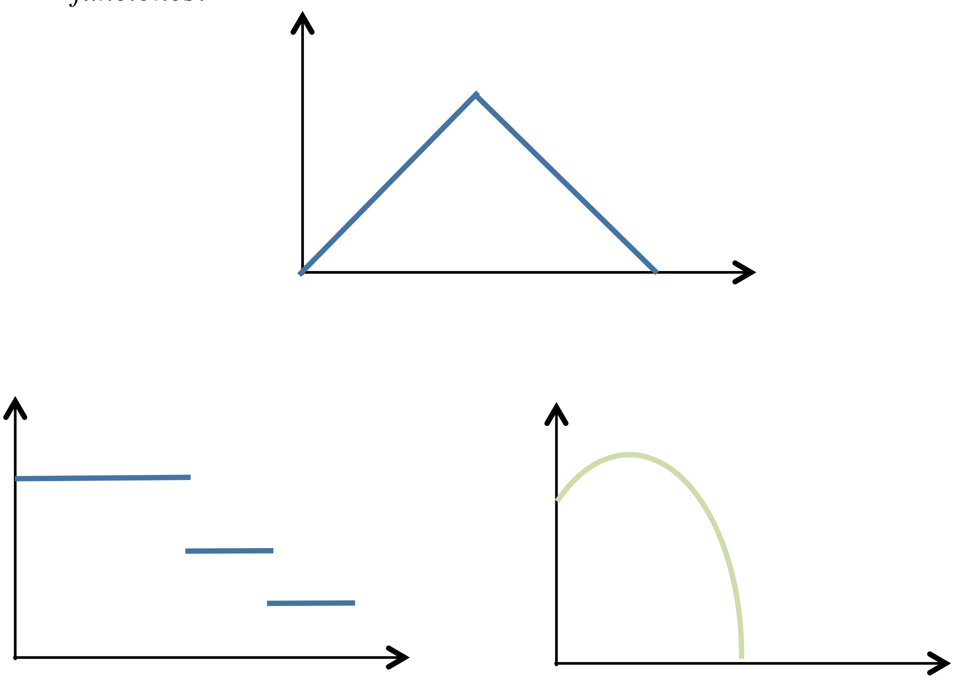


Las técnicas que surgen de estos problemas son:

Técnicas de interpretación de gráficas

Con estos ejercicios se busca que los alumnos trabajen para ver e interpretar las gráficas en su conjunto. Se les dan gráficas de funciones y se les pide que piensen en un enunciado que las explique. También se les dan enunciados y partes de la función dibujados y se les pide que lo completen.

a) *Explica lo que creas que pueden significar cada uno de las siguiente funciones.*



b) A continuación se da una gráfica de un hombre que subió el Everest en tres días, es decir, subía un tramo, descansaba la noche (siempre sube lo mismo y descansa las mismas horas). Completa la gráfica y di lo que significa cada eje.

3. <u>Problemas sobre la construcción de gráficas a partir de puntos en una tabla.</u>

Con este tipo de problemas se quiere que empiecen a utilizar valores concretos para dibujar las gráficas. Por ello, se introducen tablas de valores para que se apoyen en ellas a la hora de construir las gráficas. En estos problemas se les da una tabla de valores, después se les pide que dibujen la función y se les hacen preguntas para que reflexionen sobre lo que han hecho.

a) La siguiente tabla representa el porcentaje de carga de un móvil en función del tiempo. Dibújala sin poner los puntos.

Tiempo (min.)	Porcentaje cargado (%)
0	0
20	30
40	50
60	70
80	80
100	85
120	90
140	95
160	100

Si el tiempo que dura encendido es el mismo desde el 100% hasta el 50%, que el que dura encendido desde el 50% hasta el 0%. ¿Cuánto tiempo costaría cargar el móvil hasta el 50% y hasta el 100%?, ¿cuánto tiempo cuesta cargar dos veces el móvil hasta el 50%?. Teniendo la respuestas a las preguntas anteriores, ¿que es mejor cargar el móvil al 100% o dos veces al 50%?

En mayo salió a la venta un cargador que carga todos los porcentajes a la misma velocidad. Si se sabe que esa velocidad es a la que el cargador que se usaba cargaba el primer 30%. Completa la nueva tabla y redibuja la nueva función de carga. Vuelve a contestar a la pregunta que se te hacía en el apartado anterior.

b) *A continuación se da la temperatura de una sopa enfriándose. Dibújala sin poner los puntos.*

Tiempo (min.)	Temperatura (ºC)
0	90
5	73
10	61
15	51
20	43
25	39
30	36
35	34
40	33

¿En qué momento crees que podrías empezar a comer?¿Por qué?

Si soplases, ¿Se enfriaría antes o daría igual?

c) *Esta es la variación de la temperatura con la altura. Dibújala sin poner los puntos.*

Altura (m)	Temperatura (ºC)	Altura (m)	Temperatura (ºC)
0	15	3600	-8,4
400	12,4	4000	-11
800	9,8	4400	-13,6
1200	7,2	4800	-16,2
1600	4,6	5200	-18,8
2000	2	5600	-21,4
2400	-0,6	6000	-24
2800	-3,2	6400	-26,6
3200	-5,8	6800	-29,2

Si Zaragoza esta a 200 metros de altitud, ¿A qué temperatura está?

Como sería la nueva tabla de variación de temperatura con la altura, si ahora la temperatura a 0 metros es de 20 grados pero se sabe que varía de la misma forma que la anterior.

d) *Esta es la tabla de datos que indica la relación entre dos magnitudes. Dibújala sin poner los puntos.*

x	y
0	0
2	2
3	3
7/2	7/2
5	5
6	6
13/2	13/2
8	8

A la vista de la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

¿Qué tipo de magnitudes pueden representar "x" e "y"?

¿Sabrías decir cuanto valdría "y" si añadimos un valor de x = 9?

¿Podrías expresar una formula algebraica que diese todos los posibles valores de esta tabla?

Las técnicas que surgen son:

Técnicas para dibujar gráficas a partir de tablas

Estos ejercicios buscan que los alumnos profundicen en ser capaces de dibujar funciones a partir de valores. Aquí al igual que en los problemas se recupera el uso de las coordenadas. También les empieza a aparecer el concepto de función como aplicación, es decir, que a cada valor de "x" le corresponde un valor de "y". El objetivo de esta serie de ejercicios es que sean capaces de construir las funciones pero también que sean capaces de construir las tablas de valores.

a) *Dada la siguiente tabla, dibuja la función.*

*Si resulta que la "y" es el área del cuadrado de lado x (y = x*x), completa la tabla. Dibuja los nuevos puntos.*

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	
9/2	
6	

b) *Sabiendo que la y es 3 unidades mayor que x, para cualquier valor que tome x. Crea una tabla de valores y dibújala.*

x	y

c) *Un paracaidista se lanza desde 1000 metros de altura, se sabe que desciende 5 metros cada segundo. Completa la siguiente tabla y dibuja la gráfica de descenso.*

Altura	Tiempo(minutos)
1000	
800	
500	
250	
100	
50	
0	

Después de estos tres problemas y sus técnicas surge la necesidad de explicar lo que es una función. Por tanto es en este punto donde aparece la primera tecnología a explicar:

Definición de función.

Se va a definir a una función como una relación o aplicación, es decir, que para cada valor de una variable se corresponde un valor de la otra variable. La definición que se va a dar es:

"La función es una relación entre dos magnitudes, de forma que para cada valor de la variable independiente (x), le corresponde un único valor de la variable dependiente (y)".

Esta explicación la dará el profesor. Para que los alumnos vean que corresponde a algo que en realidad ya sabían pero que no habían institucionalizado, se complementará con ejemplos de las técnicas 2 y 3. Allí, se puede ver por un lado como, para cada valor de "x" corresponde un valor de "y" tanto gráficamente como numéricamente en la tabla de valores.

4. Problemas sobre la interpretación y creación de gráficas dentro de un contexto.

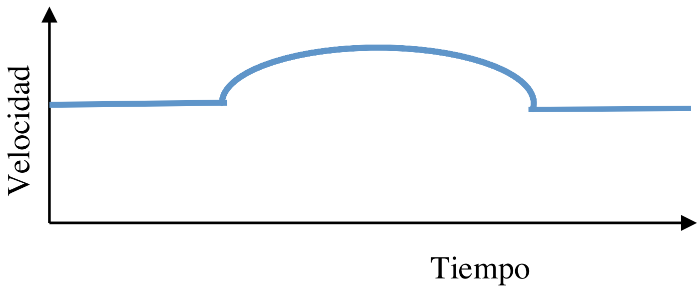
Con este tipo de problemas se quieren introducir diferentes características de las funciones, cómo el crecimiento, la continuidad, etc. Por tanto se buscan gráficas y situaciones donde se pongan de manifiesto. Es decir, a los alumnos se les proporciona una gráfica y un enunciado y después se les hacen diferentes preguntas que tendrán que contestar. Las preguntas están pensadas para que reflexionen sobre lo que ven y sobre las características principales de las funciones. También en vez de darles las graficas, se les da simplemente un enunciado dentro de un contexto y se les pide que dibujen la función.

a) *Mira atentamente las siguientes graficas y enunciados. Contesta a las preguntas que se hacen para cada apartado.*[1]

- *Mirando la siguiente gráfica de la velocidad que lleva un coche viajando, ¿Qué situación puede estar representando? ¿En que momento*

[1] Este sería el encabezado de la lista de enunciados. En este caso se han seleccionado unos pocos enunciados donde se ponga de manifiesto alguna característica.

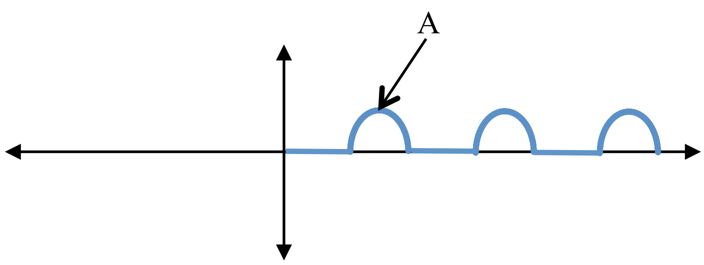
gana velocidad? ¿En cuál pierde? ¿Por qué?



Si se sabe que en al poco de esta situación el coche se paró en un área de servicio. ¿Cómo dibujarías esta situación? Continua la gráfica anterior.

- *Decorando la mesa del director se encuentra el siguiente péndulo:*

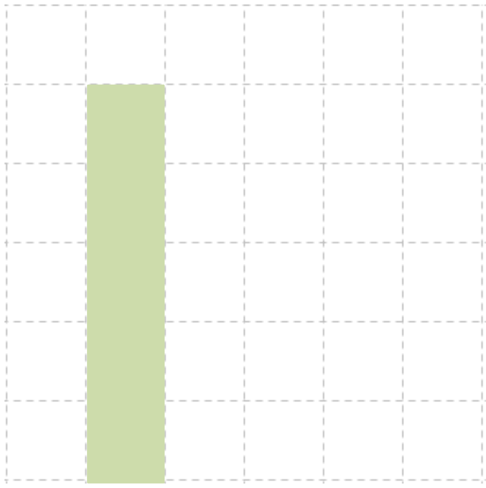
Sabemos que el movimiento de la última bola, la que está más a la izquierda, es como muestra la siguiente gráfica:



¿Qué crees que significa cada eje?, ¿te crees la gráfica?, ¿qué significa el punto A señalado?

Sí el péndulo repite el movimiento cada 30 segundos, ¿Cuanto tiempo tarda en llegar a la posición más alta?

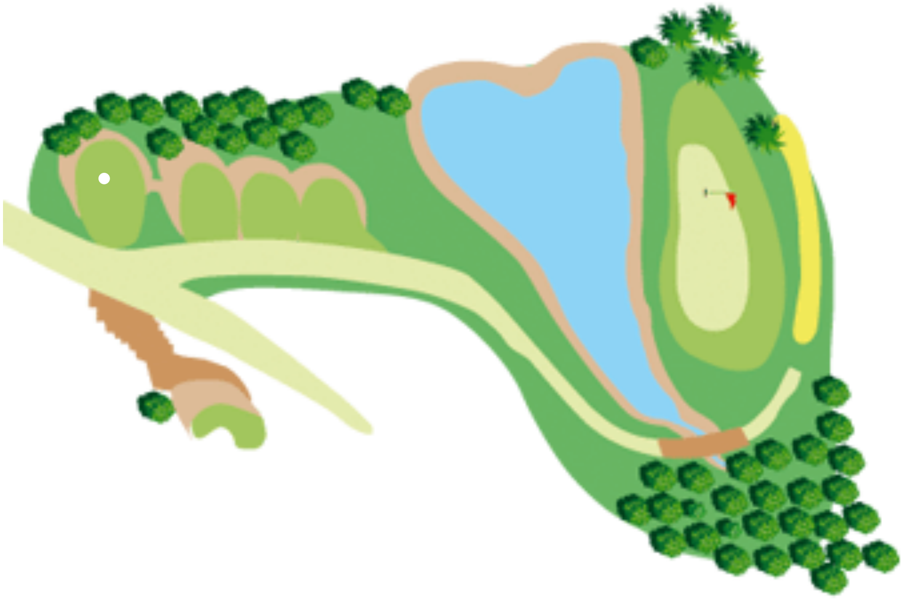
b) *Dada la siguiente cuadrícula dónde esta dibujo un rectángulo de base 1 y altura 5. Dibuja todos los rectángulos con ese mismo perímetro, hasta llegar al de base 5 y altura 1. Dibuja una función que represente el área de las figuras en función de su base. ¿El rectángulo de base 1,2 y altura 4,8 formará parte de la función? y ¿el de base 4,5 y altura 1,5?*



¿Cuál es el rectángulo que tiene el área máxima?, ¿Cuál tiene el área mínima?

c) *Una compañía ha sacado una oferta por la que cobra 5 céntimos por minuto. Hables 10 segundos o 59 cobra los 5 céntimos y en cuanto pasas del minuto (60 segundos o más) va subiendo en la misma proporción, 5 céntimos más cada minuto. Si lo que cobraban antes era 18 céntimos de establecimiento de llamada y después a 3 céntimos el minuto, en este caso facturando por segundo. Dibuja ambas gráficas. ¿Qué diferencias aprecias entre ambas funciones?, ¿Es realmente una oferta o a partir de algún punto sale peor que la tarifa anterior?*

d) *Se ha organizado un torneo de golf, donde quieren exhibir un cuadro que represente el movimiento de la pelota cuando es golpeada por el golfista. Representa este dibujo que muestre el movimiento de la bola*



Suponiendo que has lanzado en el hoyo de la imagen y que haces hoyo en uno. ¿En que punto alcanzas la altura máxima?

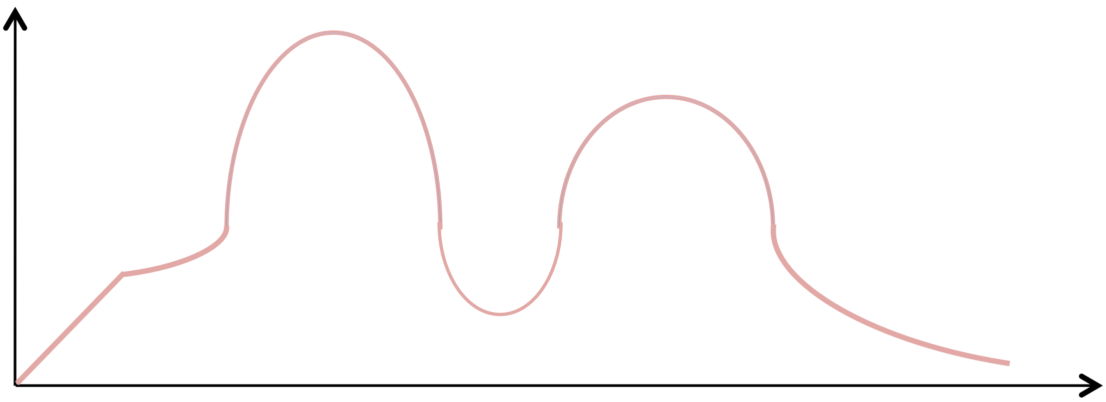
Si ahora te pidiesen que en vez el movimiento de la pelota, dibujases la velocidad de la pelota con respecto al tiempo. ¿Sería el mismo dibujo?

Las técnicas que surgen son:

Técnicas para identificar las características principales de una función

Con estas técnicas lo que se busca es que los alumnos trabajen en las características principales de las funciones, monotonía, extremos y continuidad. Ahora se va a trabajar con funciones más descontextualizadas, donde directamente se ponga de manifiesto aquello en lo que se quiere que se fije el alumno.

a) *A continuación se da el dibujo de una montaña rusa. ¿Cuántas subidas tiene?, ¿Cuáles son los máximos que alcanza? y ¿los mínimos?*



b) *Un coche va acelerando por la carretera hasta alcanzar su máximo de velocidad. Inmediatamente después reduce la velocidad hasta parar en un área de descanso. Dibuja una función que represente esta situación. ¿Qué significa que alcance un máximo de velocidad?*

c) *Sabiendo lo que es una función continua y discontinua. Di si las siguientes situaciones, si las representásemos como una función serían funciones continuas o discontinuas.*

- *Mi abuela me da cada minuto una moneda de un euro.*
- *Llenar la botella de agua*
- *El dinero que tengo que pagar por aparcar el coche en un parking, si me cobran 20 céntimos a la hora.*
- *Nivel de batería cargado en un portátil.*

Tras este tipo de problemas y técnicas surge la necesidad de justificarlas, por ello aparecería una nueva tecnología:

<u>Definición de función continua/ Definición de función creciente/ Definición de los máximos.</u>

Estos tres conceptos se van a dar juntos ya que nacen de la misma técnica y creo que es más interesante que los alumnos los vean juntos y no por separado.

En este caso se busca que sean los alumnos los que institucionalicen y definan estos conceptos. Ya que no se busca rigor matemático, sino que entiendan y comprendan los conceptos. Por eso, se considera más útil, que sean los propios alumnos a partir de los ejercicios y problemas que han hecho sobre estos temas, los que creen sus propias definiciones.

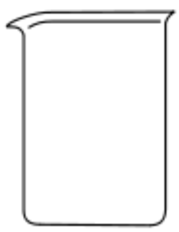
Se puede llevar a cabo esta tarea de dos formas:

- La primera manera, sería pedir a todos los alumnos que escriban su definición de función continua, creciente, … Después se les iría pidiendo que leyesen esas definiciones y con ayuda del profesor se irían mejorando y puliendo hasta llegar a una buena definición.
- La segunda forma sería hacerlo directamente entre todos. Es decir, ir preguntando a los alumnos en voz alta y entre todos construir las definiciones buscadas.

5. Problemas sobre el crecimiento y decrecimiento lineal.

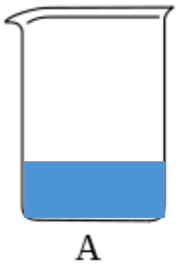
Con estos problemas se quiere que empiecen a interactuar con las funciones de proporcionalidad directa. Aunque durante los problemas anteriores ya les han aparecido, ahora se busca que se centren en los gradientes, diferentes pendientes para crecer o decrecer, etc. La idea es que este primer contacto sea mediante recipientes que se van llenado y vaciando de agua, para que así vean ejemplificados estos cambios de pendiente.

a) *Dado el siguiente recipiente, ¿Serías capaz de dibujar la gráfica de una función que represente como se va a llenar en función del tiempo?*

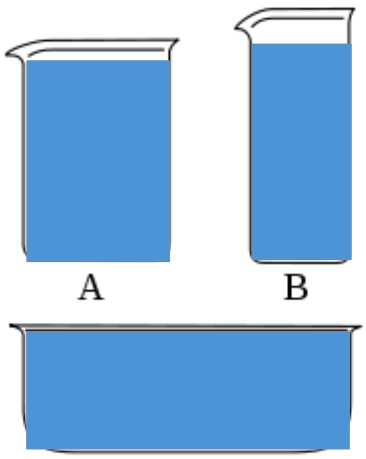


A

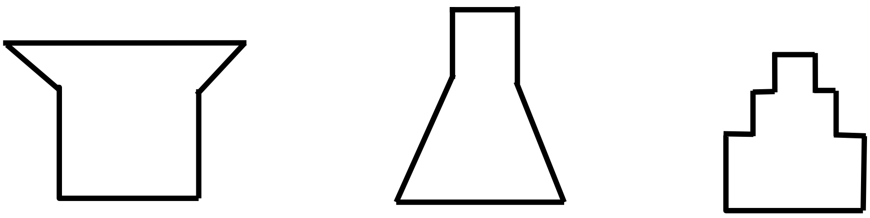
Si ahora el recipiente empieza con un poco de agua, ¿La gráfica será igual?, ¿Cómo serán las dos funciones, está y la anterior?



Junto con el recipiente anterior, ahora se tienen tres llenos de agua (supón que todas tiran la misma cantidad de agua en el mismo tiempo). Dibuja la gráfica de vaciado, ¿Será igual para los tres?



b) *Dibuja la grafica de llenado y de vaciado de los recipientes que se muestran.*



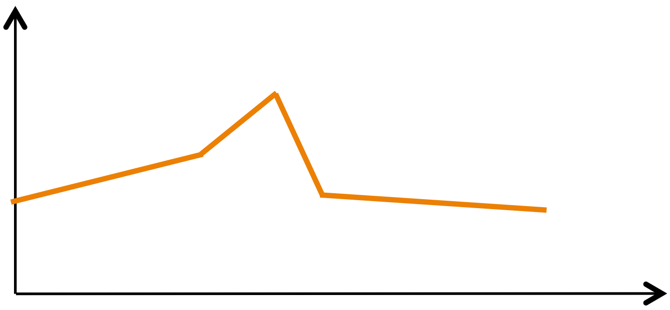
Las técnicas que surgen son:

Técnicas para identificar los cambios de gradiente.

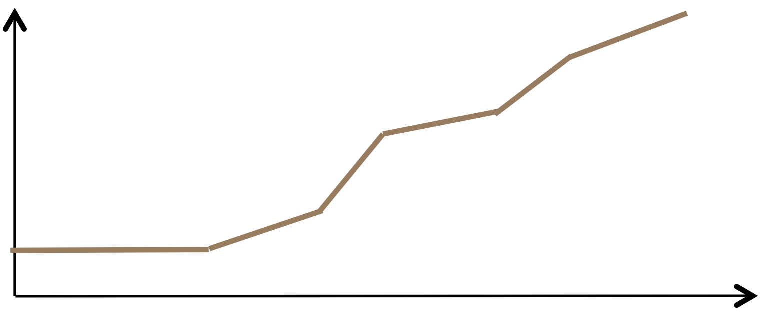
Con estas técnicas lo que se busca es que los alumnos trabajen en los cambios de gradiente. Para ello, se les pondrán funciones donde se produzcan estas variaciones y ellos tendrán que explicarlas y se propondrán situaciones donde ellos tendrán que dibujar la función.

a) *En los contextos que se describen en los enunciados trata de interpretar las gráficas que les acompañan:*

- *Se saca la siguiente grafica de un coche por la autopista. ¿Qué crees que significan esos cambios de pendiente?*



- *A un ciclista le dan el perfil (altura frente distancia horizontal) de la parte final de la etapa. ¿Qué parte es el llano?, ¿La montaña tiene unas zonas más duras que otras?*



b) *Dibuja las gráficas siguiendo las instrucciones que se dan en los siguientes enunciados:*

- *Una persona sale a hacer ejercicio. Al principio va andando (un rato), luego empieza a acelerar hasta alcanzar una cierta velocidad (que* *mantiene otro rato) y para acabar hace un sprint (durante el sprint cada instante que pasa va algo más rápido) que acaba frenando en seco. Dibuja la gráfica que relacione la velocidad de esta persona con el tiempo.*

- *Francisco quiere llenar su piscina. Para ello coge la manguera y empieza a echar agua, al poco se estropea así que empieza a llenarla con cubos de agua que le va pasando su hijo. Al rato se va cuenta que hay un agujero y que están perdiendo agua poco a poco. Tras arreglar ese agujero consigue arreglar también la manguera y acaba de llenar la piscina. Dibuja una gráfica que muestre la cantidad de agua que hay en la piscina con respecto al tiempo.*

6. Problemas sobre la construcción de funciones lineales a partir de tablas.

Con este tipo de problemas se busca un conocimiento más formal de la funciones de proporcionalidad directa. Es decir, se quiere que a partir de la tabla que se les da, sean capaces de ir extrayendo todas las características principales. También se busca que sean capaces de sacar la relación que existe entre los números de una misma tabla.

a) *A continuación se dan unas tablas de valores. Dibuja ambas funciones:*

x	y
2	4
5/2	5
6	12
13/2	13

x	y
2	1
5/2	5/4
6	3
13/2	13/4

¿Cuánto valdría la y para un x = 7 en cada caso? y ¿Para x = a?

¿Pasa por los puntos x = 0 e y = 0 alguna de las dos funciones?

Dibuja una recta paralela a cada una de las funciones anteriores. ¿Serías capaz de sacar una tabla de valores de esas dos nuevas funciones?

b) *Dada la siguiente tabla, contesta a las preguntas.*

x	y
3	-6
4	-8
5	-10
b	2b

El valor de y para cuando x = b, ¿es correcto?, si no lo es, escribe el valor correcto.

Dibuja la función en un papel cuadriculado. Si coges y mueves la función dos cuadrados hacia arriba, ¿cuál es la nueva tabla de valores resultante?, ¿cuánto vale ahora para x = b?

Si en vez de 2 lo subimos 10 hacia arriba, ¿ halla la nueva tabla?

¿Las nuevas rectas que has dibujado son paralelas?

Las técnicas que surgen son:

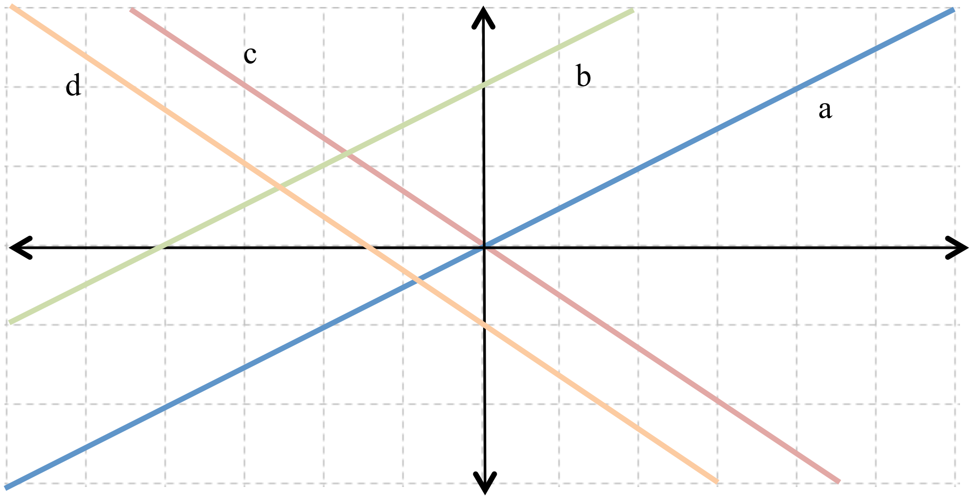
<u>Técnicas para trabajar las funciones de proporcionalidad directa.</u>

Estos ejercicios están pensados para terminar de formalizar las funciones de proporcionalidad directa. El objetivo principal con estos ejercicios es que terminen de comprender este tipo de funciones. Para ello, se introducen las ecuaciones algebraicas que rigen estas funciones. También se quiere que se queden con los conceptos de pendiente y de rectas paralelas.

a) *Se quiere construir una recta que pase por el origen de coordenadas y por el punto (4, 16). Dibuja esa función y da una tabla de valores para* $x = {}^{1}/_{2}, x = 2, x = {}^{9}/_{4}$. *¿Serías capaz de deducir la ecuación de esta función?*

b) *De forma general una función lineal se escribe* $y = mx$, *¿sabrías decir para qué valores de m la función va a crecer y para cuáles va a decrecer? (pista: prueba dando valores), ¿qué ocurre si* $m = 0$*?*

c) Se tienen las siguiente gráficas de funciones y ecuaciones. Relaciona cada función con su correspondiente ecuación.



$$y = \frac{1}{2}x; \qquad y = \frac{1}{2}x + 2; \qquad y = \frac{-2}{3}x; \qquad y = \frac{-2}{3}x - 1$$

¿Qué tienen en común las funciones a y b? ¿y las funciones c y d?

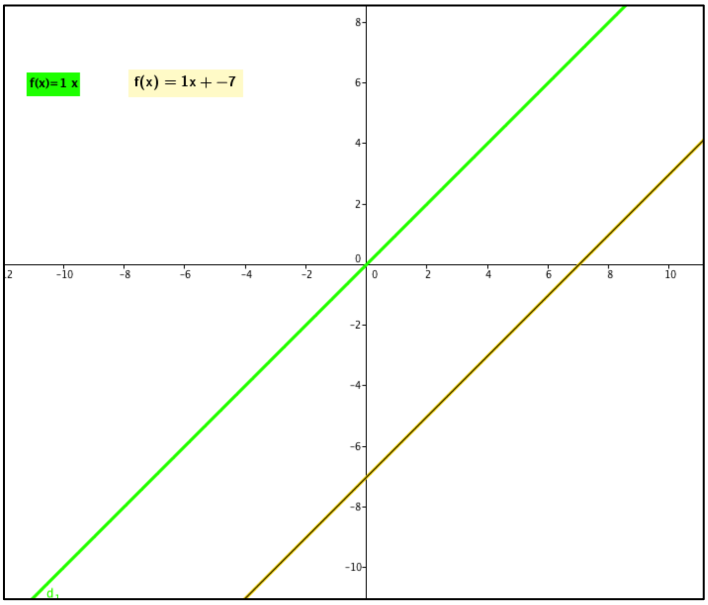
d) Las rectas $y = 3x$ *e* $y = 3x + 5$, *¿Se cruzan alguna vez?¿Se cruzaran con la recta* $y = 3x + 1000$*?*

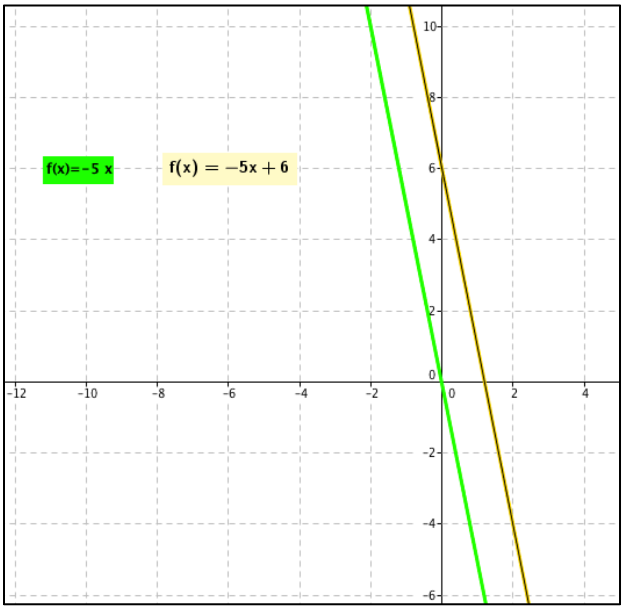
Tras este tipo de problemas y técnicas aparece una nueva tecnología:

Definición de función proporcionalidad directa.

Este concepto se quiere dar sin mucho formalismo, es decir, lo que se busca es que los alumnos entiendan que son estas funciones y cuales son sus características principales.

Por eso, se ha pensado que la mejor forma de ilustrar estos conceptos es mediante GeoGebra. En el programa se crearían dos funciones de proporcionalidad directa , y se iría mostrando cómo varían ambas funciones según varíe la pendiente o la ordenada en el origen. A continuación se muestran imágenes de cómo se quiere enseñar esto en GeoGebra. Cada uno de parámetros se introduce mediante un deslizador para permitir que exista una cierta interacción a la hora de enseñar el programa.





Con estas demostraciones, se espera que ya terminen de entender la importancia de la pendiente, tanto para el crecimiento cómo para saber si dos rectas son paralelas o no.

7. Problemas sobre la construcción de funciones de proporcionalidad inversa.

Con estos problemas se quiere introducir a los alumnos en las funciones de proporcionalidad inversa. El objetivo es que comprendan como se comportan este tipo de funciones de forma general. En este caso no se busca profundizar tanto como con las funciones de proporcionalidad directa ya que se considera que son más complejas para los alumnos. Sobre todo se les pondrán problemas que ya hayan visto en el bloque de contenidos de proporcionalidad, pidiéndoles en que este caso los resuelvan de forma gráfica.

a) Completa la siguiente tabla, sobre las horas que tardan varios pintores en pintar una casa.

Pintores	**Horas**
1	108
2	54
3	36
4	
5	
	12
	9
18	

Ahora dibújala. ¿Crees que alguna vez llegaran a tardar 0 horas?

b) Se tiene un rectángulo de área fija 36 m^2 (imagina que es el rectángulo mostrado en la figura que tienes a continuación), pero se pueden variar de tamaño cualquiera de los dos lados. Dibuja la función donde se vea esta variación de la base y la altura.

¿En esa función hay algún momento en el que la base y la altura sean iguales?, ¿Qué ocurre si la base es muy cercana a 0?, ¿Qué ocurre si ahora es la altura la que es muy cercana a 0?

Las técnicas que surgen son:

<u>Técnicas para trabajar las funciones de proporcionalidad inversa</u>

Con estos ejercicios se quiere que los alumnos terminen de comprender las funciones de proporcionalidad inversa. El objetivo es que reconozcan situaciones en las que se tienen que enfrentar a este tipo de funciones y comprenda como es su comportamiento.

a) *Dibuja una función que represente la ración de tarta (medida en fracción de tarta) que toca a cada persona, en función del nº de personas, sólo hay una tarta.*

b) *Que casos de los siguientes corresponden a una función de proporcionalidad inversa y cuáles a una de proporcionalidad directa. Dibuja una gráfica aproximada para cada uno de los casos.*

- *Dinero a repartir en función del número de personas*
- *Gasolina gastada en función de los km recorridos*
- *Variación de la altura de un triangulo, de área constante,*

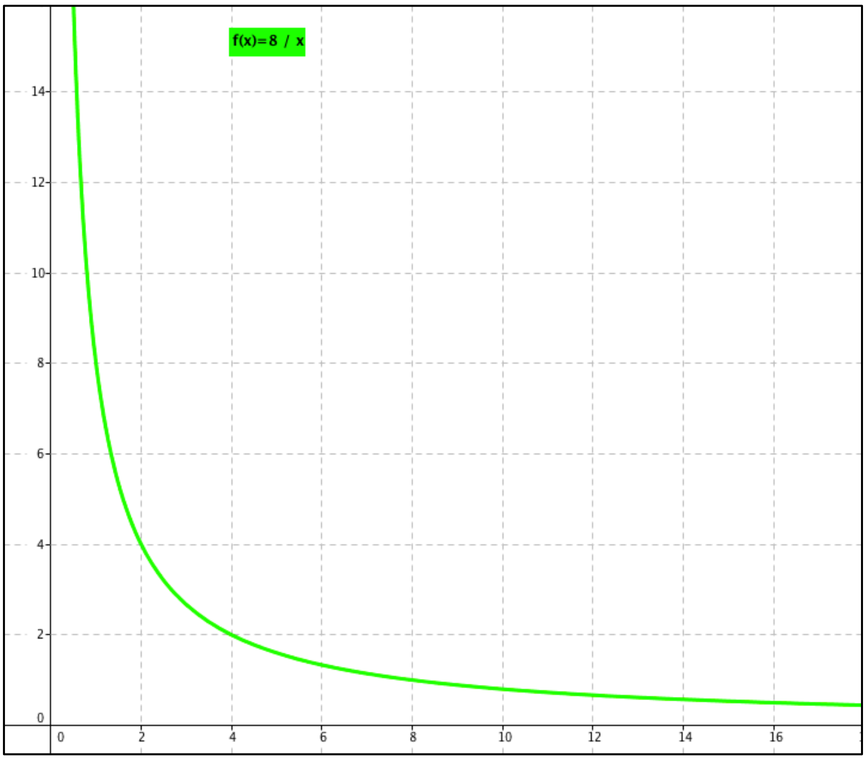
en función de la base.

- *Variación del área de un rectángulo en función de su base.*

De este tipo de problemas y sus técnicas nace la siguiente tecnología:

<u>Definición de función de proporcionalidad inversa.</u>

Lo que se busca es una comprensión general por parte del alumno. Es decir, dibujar con en el programa GeoGebra, al igual que en la tecnología anterior, una función de proporcionalidad inversa y explicarles las características principales de esta función en el primer cuadrante.



A partir de esta función se explicaría porque no se alcanzan nunca los valores de $x = 0$ y de $y = 0$. Para esto no se recurrirá a ninguna demostración formal, si no que se hará mediante la calculadora y la prueba y error (cada alumno necesitará tener una calculadora). Con ese material, se les pediría que probasen a dividir 8 entre 0. Cómo les saldría error, se les diría que dividiesen por algo muy cercano a 0, por ejemplo 0,01. Así se les iría diciendo que dividiesen por algo más pequeño y que dijesen a hacia que valor pensaban que nos acercábamos. A su vez, servirá para explicarles a los alumnos por qué no se puede dividir un número por cero.

Para la otra asíntota se les volverá a pedir que cojan la calculadora y vayan poniendo valores cada vez más grandes de “x”. La siguiente pregunta sería preguntarles por el valor hacia el que creen que se acerca la función cuanto más grande es “x”. Por último, se les pediría que se imaginasen que x es el número más grande posible, es decir, infinito y con ese valor cuanto creen que valdrá la y.

4.3 Metodología

En este apartado se va a explicar como se van a llevar a cabo las clases y las explicaciones de todos los apartados.

Lo primero es que se utilizarán agrupamientos flexibles de los alumnos, esto quiere decir, que se combinará el trabajo en grupos con el trabajo individual. Partiendo de esa base, se distinguirá entre las etapas de problemas, de ejercicios (técnicas) y de formalización de las técnicas (tecnologías).

Para la resolución de problema, se agruparán a los alumnos en grupos de 3 ó 4, dependiendo del número de alumnos totales en clase. Esta agrupación permitirá que haya intercambio de opinión entre los alumnos y que de forma cooperativa vayan hallando las soluciones a los problemas planteados. En esta fase, el profesor debe actuar como guía, es decir, ayudando a los grupos cuando vea que están atascados pero sin resolverles él el problema. También, si ve que hay dudas globales, o que pueden afectar a todos los grupos, en vez de ayudar uno a uno, podría ayudar a todos los grupos a la vez. Para resolver los problemas se usará una metodología de coloquio, es decir, se preguntará a un grupo cuáles son sus soluciones y a partir de esas soluciones se iría viendo si el resto de grupos están de acuerdo o no, en caso de no estar de acuerdo se analizaría el porque. El profesor irá trasladando a la pizarra las ideas que vayan sugiriendo los alumnos como solución al problema. También durante todo el proceso deberá estar atento a ver quienes trabajan, quienes no están haciendo nada, etc. Para tenerlo en cuenta para la evaluación.

A la hora de resolver los ejercicios, se hará trabajar a los alumnos de forma individual. Se hace esto porque de esta forma se puede observar que alumnos tienen más problemas con unas técnicas y así poder proporcionarles ayuda de acuerdo a sus necesidades, para que las terminen de dominar. Por esta razón, se considera que es más efectivo el trabajo individual en esta fase, ya que permite una observación individualizada de los alumnos. El profesor al igual que antes, debe servir de guía ayudando a aquellos alumnos que vea con mayores dificultades, pero sin resolverles todo el ejercicio él. Para resolver los ejercicios se hará de forma idéntica a cómo se resuelven los problemas, sólo que en este caso se preguntará de forma individual a un alumno y no a todos. Una vez ese alumno haya dado su solución, se preguntará si todos están de acuerdo o no. El profesor durante este proceso también observara el comportamiento y la actitud de los alumnos.

Cuando se introduzcan las tecnologías, habrá distintas formas de actuar, en función de la parte a explicar. Se usará una metodología expositiva cuando se introduzcan los conceptos de función, función lineal, etc ya que, debido a su complejidad es preferible que sea el profesor quien establezca la definición correcta. Para explicar las características de una función (continuidad, monotonía, etc.), se recurrirá más a una metodología tipo coloquio donde los alumnos hablen entre ellos y lleguen a descubrir lo que se les quiere enseñar.

5 Secuenciación didáctica

En este apartado se va a explicar como se van a organizar todos los contenidos expuestos durante todo el apartado anterior. Se considera que 12 sesiones son las óptimas para desarrollar esta unidad. En estas 12 sesiones se incluye la sesión de conocimientos previos y la prueba de evaluación de la unidad. Cabe destacar que las clases para las que se ha realizado esta secuenciación tienen una duración de 50 minutos.

A continuación se va a explicar sesión a sesión que es lo que se querría llevar a cabo en cada una de ellas. Primero muestro una tabla donde se puede ver la secuenciación de forma esquemática. Después se hace pequeña explicación sesión a sesión de lo que quiero hacer en cada una de ellas.

Nº de sesión	Actividad	Duración (min.)
1	Prueba de conocimientos previos	50
2	Problemas iniciales	50
3	Problema tipo 1	35
	Técnica 1	15
4	Problema tipo 2	35
	Técnica 2	15
5	Problema tipo 3	30
	Técnica 3	10
	Tecnología 1	10
6	Problema tipo 4	50
7	Técnica 4	35
	Tecnología 2	15
8	Problema tipo 5	15
	Técnica 5	15

	Problema tipo 6	20
9	Problema tipo 6	15
	Técnica 6	35
10	Tecnología 3	10
	Problema tipo 7	40
11	Técnica 7	20
	Tecnología 4	15
	Repaso de la unidad	15
12	Prueba escrita	50

Ahora se explicará más en detalle lo que se hace sesión a sesión.

SESIÓN 1

Esta sesión está pensada para que sea en la que los alumnos hagan y corrijan la prueba de conocimientos previos. Es decir, es la sesión en la que habrá un repaso de todos los conocimientos con los que vienen los alumnos.

SESIÓN 2

En esta sesión se quiere que los alumnos hagan los problemas iniciales. Para realizar estos problemas es de esperar que tarden toda la clase.

SESIÓN 3

Esta sesión se empezará haciendo los problemas del tipo 1. Se entregarán a los alumnos y dejará que de forma cooperativa todos los grupos los vayan resolviendo. Más o menos se espera que les cueste hacerlo unos 25 minutos. Después la corrección es de esperar que dure unos 10 minutos.

Una vez los acaben se les pedirá que vayan haciendo los ejercicios de la primera técnica. Se les dejará hasta el final de la clase, 15 minutos. Estos ejercicios los harán todos seguidos y cuando se vea que han acabado la mayoría de la clase se empezará a preguntar a los alumnos para corregirlos.

SESIÓN 4

En esta sesión se quiere que los alumnos realicen los problemas del tipo 2. Al igual que en la sesión anterior se espera que les cueste unos 25 minutos hacer los problemas y 10 minutos corregirlos.

Después el resto de la clase se les pondrá de forma individual para que realicen los ejercicios de la segunda técnica. Se les dejara hacerlos y después se cogerán esos ejercicios para corregirlos más adelante y tenerlos en cuenta para la evaluación.

SESIÓN 5

Para esta sesión se va a repetir el esquema que se ha seguido en las dos anteriores.

Primero se les dejará realizar los problemas del tipo 3. Cómo ya habrán cogido experiencia a la hora de resolver problemas, por las tres sesiones anteriores, es de esperar que tarden menos tiempo. La duración que se prevé es de 20 minutos y para corregirlos se espera emplear 10 minutos.

Después se les dejará 10 minutos para realizar los ejercicios de la tercera técnica.

Para acabar la clase se les explicará la primera tecnología, la definición de función.

SESIÓN 6

Esta clase se va a dedicar a hacer los problemas del tipo 4. Se considera que los problemas son lo suficientemente complejos como para necesitar la hora entera.

SESIÓN 7

Aproximadamente la primera mitad de esta clase se va a dedicar a dejar que los alumnos hagan de forma individual los ejercicios de la cuarta técnica. Es de esperar que les cueste unos 35 minutos, entre hacer los ejercicios y corregirlos.

Después se introducirá la segunda tecnología, en la que se explican las características de las funciones. Como esto se va a hacer en forma de debate/coloquio, se prevé que estas definiciones se alargaran hasta el final de la clase.

SESIÓN 8

Los primeros 15 minutos de esta clase se van a dedicar a resolver los problemas de tipo 5.

Los siguientes 15 minutos se dejarán para que resuelvan los ejercicios de la técnica del tipo 5.

Los últimos 20 minutos de la clase se invertirán en que los alumnos empiecen los problemas de tipo 6, aunque no los acabarán en esta sesión

SESIÓN 9

Los primeros 15 minutos de la clase se dedicarán a que los alumnos acaben los problemas del tipo 6 y a corregirlos.

El resto de la clase se dejará para que los alumnos realicen los ejercicios de la sexta técnica. Calculo que en hacerlos tardarán 35 minutos, después se cogerán esos ejercicios para corregirlos más adelante y tenerlos en cuenta para la evaluación.

SESIÓN 10

El inicio de esta clase se dedicará a explicar la tercera tecnología, es decir, la de funciones lineales. Se emplearán 10 minutos para que los alumnos asimilen bien estos conceptos, así también hay tiempo para enseñarles bien los GeoGebras que se hayan realizado.

El resto de la clase se dejará para que resuelvan los problemas de tipo 7.

SESIÓN 11

Los primeros 20 minutos se emplearán en hacer los ejercicios de la séptima técnica.

Los siguientes 15 minutos de esta clase se dedicarán a explicar la cuarta tecnología, la definición de función de proporcionalidad inversa.

Una vez acabado esto, se dejará el resto de la clase para realizar un repaso de todo lo visto hasta este momento. También se usará ese tiempo para que los alumnos pregunten las dudas que les hayan podido quedar.

Por último se les comunicará la longitud y tipo de preguntas que se les preguntará en el examen y se les devolverán los ejercicios corregidos que se les había cogido, en la segunda y sexta técnica.

SESIÓN 12

Esta sesión estará dedicada a la evaluación de la unidad didáctica.

6 Evaluación

En este apartado se va a explicar como se evaluarán los contenidos dados a lo largo de todas las sesiones. Esta evaluación será la suma de los diferentes aspectos que se tienen en cuenta para evaluar los conocimientos adquiridos por los alumnos, en la unidad didáctica. En la tabla que se puede ver a continuación se explican los diferentes instrumento de evaluación, que se van a tener en cuenta, junto con los criterios de calificación.

Instrumentos de evaluación	Criterios de calificación
Observación en clase	15%
Ejercicios recogidos	20%
Prueba escrita	65%

Durante los siguientes apartados se explican con más detalle cada uno de los instrumentos de evaluación mencionados arriba.

6.1 Observación en clase

La observación se va a hacer mientras los alumnos estén en grupos, haciendo los problemas, o cuando estén de forma individual, haciendo los ejercicios. El objetivo de esta observación es vigilar a los alumnos que no estén trabajando o estén dando mal. Esta observación se realizará durante las clases, eso quiere decir que no hay tiempo para escribir todo lo que se observe. Por ello se ha decidido sólo hacer anotaciones de aquellos alumnos que estén teniendo una conducta disruptiva, penalizándoles en la nota de este apartado. A los alumnos que no se les anote nada, se supondrá que han tenido un buen comportamiento y han mostrado interés, y que por tanto tendrán toda la nota correspondiente a este apartado.

Para penalizar se ha considerado que cada anotación que se haga de un alumno le quitara un 2% de la nota total de este apartado. Si ese mismo alumno llegase hasta las cinco anotaciones le quitaría toda la nota, es decir, el 15% de la nota total.

6.2 Ejercicios recogidos

Como se explica en el apartado de secuenciación hay dos bloques de ejercicios que en vez de corregirse en clase, se corrigen aparte. El objetivo de corregirlos aparte es ver como trabajan de forma individual y si el trabajo en grupo en los problemas, les sirve para luego entender las técnicas. En la corrección de estos ejercicios no se primara que estén bien o mal, sino que se valorará el esfuerzo que haya hecho el alumno para resolverlos.

6.3 Prueba escrita

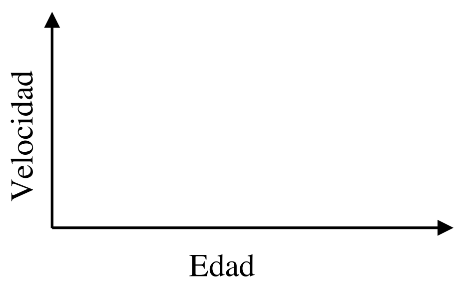
En la última sesión de la unidad se les hará una prueba escrita que constará de seis preguntas. Estas seis preguntas estarán relacionadas con la forma de trabajar que se ha llevado a lo largo del proyecto. Es decir, no serán simple ejercicios sino que se pedirá a los alumnos que piensen tal y como se les pedía en los problemas.

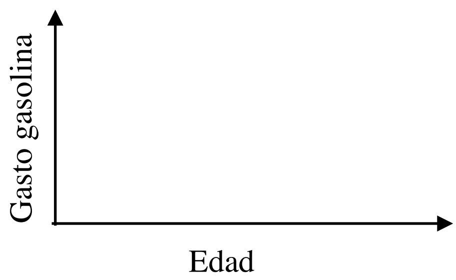
En los siguientes apartados se expone: la prueba que se les quiere plantear, los conocimientos que requiere cada pregunta, las respuestas que espero y los criterios de calificación.

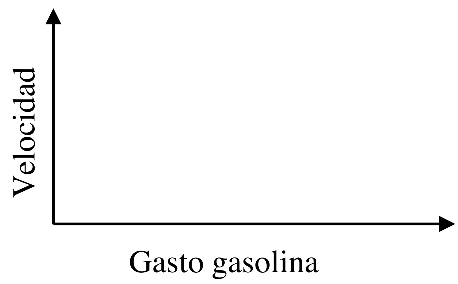
6.3.1 Prueba escrita

La prueba escrita que se quiere plantar sería la siguiente:

1. Se tienen dos coches, uno viejo y otro nuevo. Se sabe que el viejo va más lento pero consume menos gasolina que el nuevo. Coloca los dos coches en las siguientes gráficas.







¿Qué coche escogerías si no te importa cuando llegar pero no quieres para a repostar gasolina?

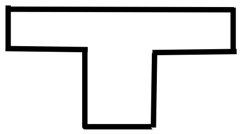
2. Se sabe que la velocidad del viento cambia con la altura, en lo que se conoce cómo cortante del viento. Si cada vez que subimos 10 metros la velocidad aumenta en 6 puntos y al llegar a los 100 metros ya no hay variación con la altura. Completa la siguiente tabla y dibuja la gráfica de la función resultante.

Velocidad (km/h)	Altura
5	0
	10
	40
	75
	100
	150
	200

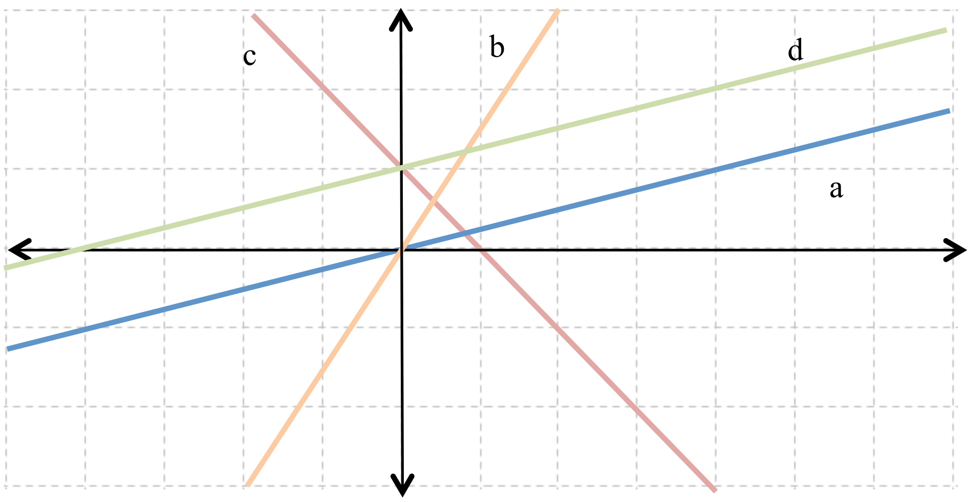
3. Un saltador de altura va a saltar 2,15 metros de altura. Si sobrepasa en 1 cm esa marca, dibuja la gráfica que represente el salto que hace, desde que empieza a correr hasta caer en la colchoneta. ¿Cuál es el máximo de altura que alcanza?, ¿En que zona esta ganando altura?

4. Un coche, para realizar un adelantamiento, primero acelera mucho para

coger velocidad. En el momento en el que se pone a la par del otro coche sigue acelerando pero en menor proporción que al principio. Dibuja la gráfica descrita del coche y la gráfica de llenado del recipiente. ¿Crees ambas gráficas son parecidas, es decir, primero crecen muy rápido y después crecen más despacio?



5. Dadas las siguientes funciones, contesta a las preguntas.



Halla una tabla de valores para las 4 funciones para $x = 0, x = {}^{1}/_{2}$, $x = 1, x = {}^{3}/_{2}$ y $x = 2$.

Encuentra las ecuación de las funciones “a” y “b”.

¿Cómo son las funciones “a” y “d”?, sabiendo eso halla la ecuación de “d”.

6. Dibuja una función que represente las horas que le cuesta a un coche hacer un viaje en función de su velocidad. Se sabe que a 70 km/h le cuesta 5 horas y que a 50 km/h les cuesta 7 horas. ¿Cuánto tiempo le

costaría si va a 0 km/h? ¿Podría hacer el viaje a 250 km/h?

6.3.2 Conocimientos evaluados

En este apartado se analiza en cada pregunta los conocimientos que evalúan cada una de ellas. Para no repetir enunciados sólo se pondrán los encabezados de cada pregunta.

Pregunta 1:

En esta pregunta se evalúa el campo de problemas de puntos en el plano, así como su técnica asociada, al pedirles que analicen esos puntos.

Pregunta 2:

Lo que se les pide a los alumnos en esta pregunta es que completen una tabla de valores y dibujen su función. Se evalúa el campo de problemas de construir gráficas a partir de tablas y su técnica asociada.

Pregunta 3:

En esta pregunta se les pide que creen una gráfica a partir de un enunciado, y que analicen esa gráfica para obtener alguna característica importante, como el máximo y la zona de crecimiento. Por tanto lo que se está evaluando es el campo de problemas de interpretar gráficas y crear gráficas dentro de un contexto y sus técnicas asociadas.

Pregunta 4:

Lo que se busca con esta pregunta es que sepan distinguir los cambios de gradiente dentro de las funciones. Esta pregunta evalúa el campo de problemas de crecimiento y decrecimiento lineal y su técnica asociada.

Pregunta 5:

En esta pregunta se quiere que sepan sacar una tabla de valores a partir de las gráficas dibujadas. A partir de esas tablas de valores se busca que sepan hallar la ecuación de las funciones de proporcionalidad directa. Por último se quiere que conozcan cuando dos rectas son paralelas y que a partir de ese conocimiento hallen la ecuación de la recta pedida. Por tanto lo que evalúa esta pregunta es el campo de problema de construcción de funciones de proporcionalidad lineal y sus técnicas y tecnologías asociadas.

Pregunta 6:

En este ejercicio se quiere que sepan reconocer que se trata de una función de proporcionalidad inversa. Lo que evalúa es el campo de problemas de construcción de funciones de proporcionalidad inversa y sus técnicas y tecnologías asociadas.

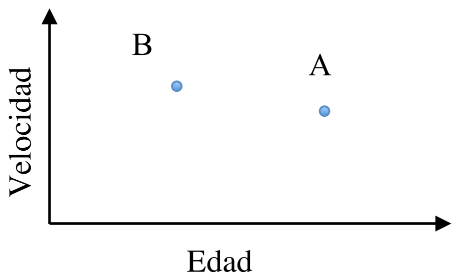
6.3.3 Respuestas esperadas

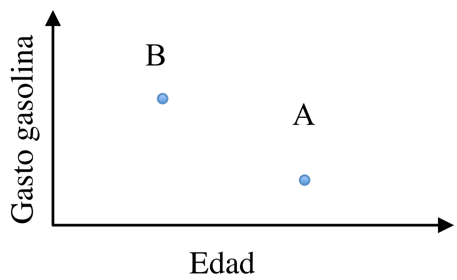
En este apartado se va a explicar cuales son las respuestas que se esperan en cada pregunta, tanto las correctas como las incorrectas.

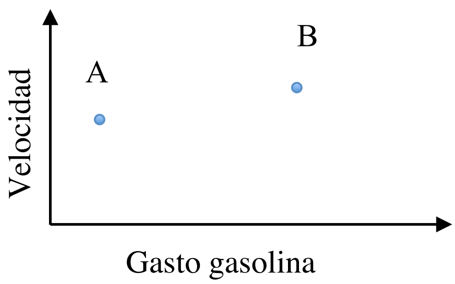
Pregunta 1:

Respuesta correcta:

La respuesta correcta será la que ponga los puntos de la siguiente forma:





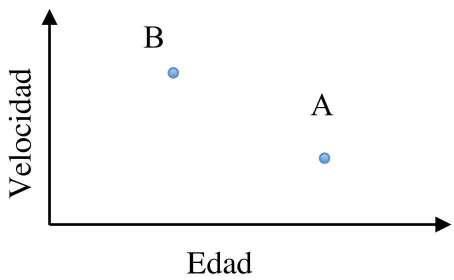


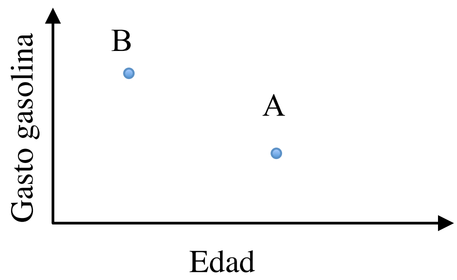
Dentro de esas posiciones serán correctas todas aquellas en las que no cambien las posiciones relativas de los puntos.

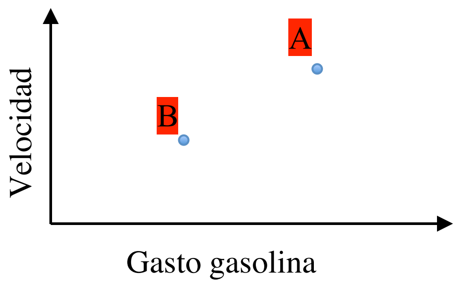
La respuesta correcta a la pregunta sería que escogerías el coche viejo, ya que es el que menos gasolina consume.

Respuesta incorrecta:

Es de esperar que si se confunden en alguno gráfico sea en el que relaciona la velocidad con el gasto de gasolina. Ya que es el único que no se da implícitamente en el enunciado.







Tras esta confusión es probable que su contestación a la pregunta fuese que escogerían el coche nuevo.

Pregunta 2:

Respuesta correcta:

La respuesta correcta será en la que sepan completar correctamente la tabla.

Velocidad (km/h)	Altura
5	0
11	10
17	40
23	75
29	100
29	150
29	200

A partir de la tabla de valores ya podrían dibujar la gráfica resultante que quedaría:

Respuestas incorrectas:

En este ejercicio puede haber confusión a la hora de completar la tabla, concretamente creo que pueden darse los dos tipos de errores siguientes:

Velocidad (km/h)	Altura
5	0
11	10
17	40
23	75
29	100
35	150
41	200

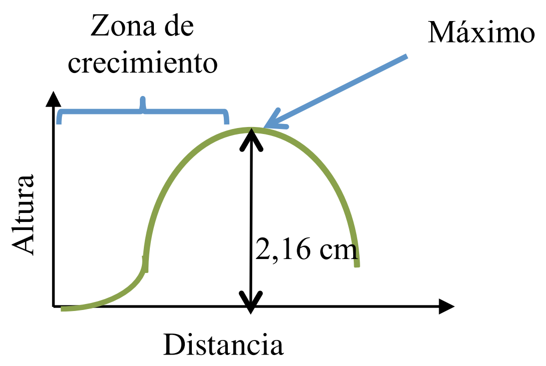
Velocidad (km/h)	Altura
5	0
6	10
12	40
18	75
24	100
24	150
24	200

Una vez tengan los puntos no se espera que haya problemas a la hora de construir la función a partir de la tabla.

Pregunta 3:

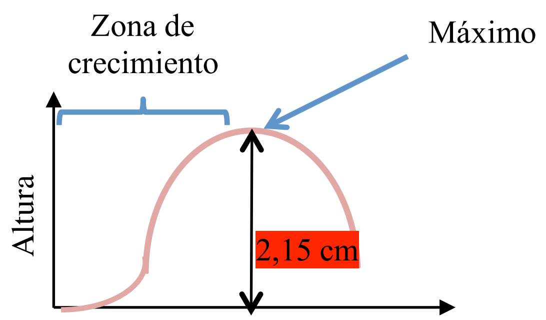
Respuesta correcta:

Espero que la respuesta correcta sea algo parecido al siguiente gráfico, aunque la distancia horizontal podrá variar en cada alumno, ya que no se especifica nada en el enunciado.



Respuesta incorrecta:

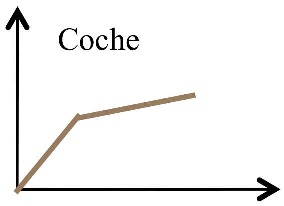
En esta pregunta espero que el fallo se encuentre en que no sumen el centímetro por el que el saltador supera la marca. Quedando lo siguiente:

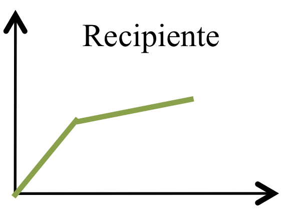


Pregunta 4:

Respuesta correcta:

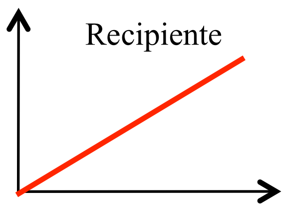
En esta pregunta espero que la respuesta correcta sea aquella donde pinten ambas situaciones con unos gradientes parecidos y gracias a ello, lleguen a la conclusión de que son dos situaciones parecidas.

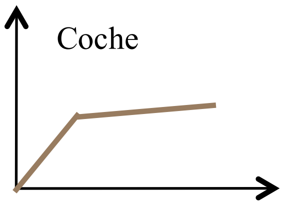


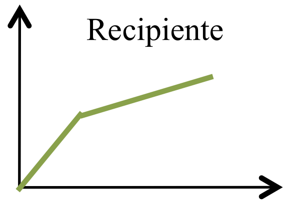


Respuesta incorrecta:

En esta pregunta pienso que los alumnos se pueden equivocar a la hora de establecer el gradiente del recipiente, pintándolo como una línea recta. También creo que aún haciendo ambos dibujos bien, pueden contestar mal a la pregunta porque dibujen algo distintos los gradientes y no lleguen a la conclusión de que son situaciones similares.







Pregunta 5:

Respuesta correcta:

Lo que espero es que completen la tabla de la siguiente forma.

a		b		c		d	
x	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**
0	0	0	0	0	1	0	1
1/2	1/8	1/2	3/4	1/2	1/2	1/2	9/8
1	1/4	1	3/2	1	0	1	5/4
3/2	3/8	3/2	9/4	3/2	-1/2	3/2	11/8
2	1/2	2	3	2	-1	2	3/2

Con la tabla de datos su siguiente paso será hallar las ecuaciones de las rectas a y b.

$$a: \quad y = \frac{1}{4}x\,, \qquad b: \; y = \frac{3}{2}x$$

Después se tienen que dar cuenta que la recta d es paralela a la recta a y que por tanto tendrán la misma pendiente. Con ese conocimiento ya pueden sacar que la ecuación de d será:

$$d: \quad y = \frac{1}{4}x + 1$$

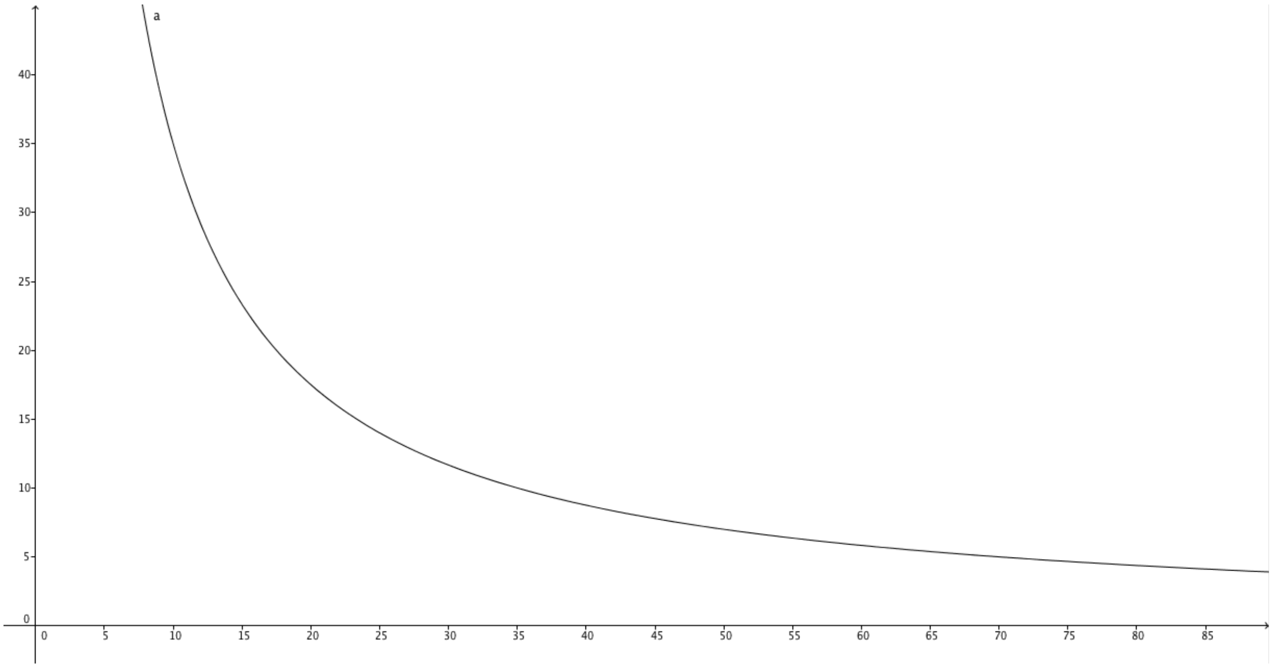
Respuesta incorrecta:

En esta pregunta espero que los fallos se encuentren a la hora de completar la tabla de valores, ya que no son valores exactos. Otro fallo que espero es que no sepan pasar de los valores de la tabla a las ecuaciones de la recta. El último fallo que considero es que no sepan las características de las rectas paralelas y por tanto no consigan obtener la respuesta a la última pregunta.

Pregunta 6:

Respuesta correcta:

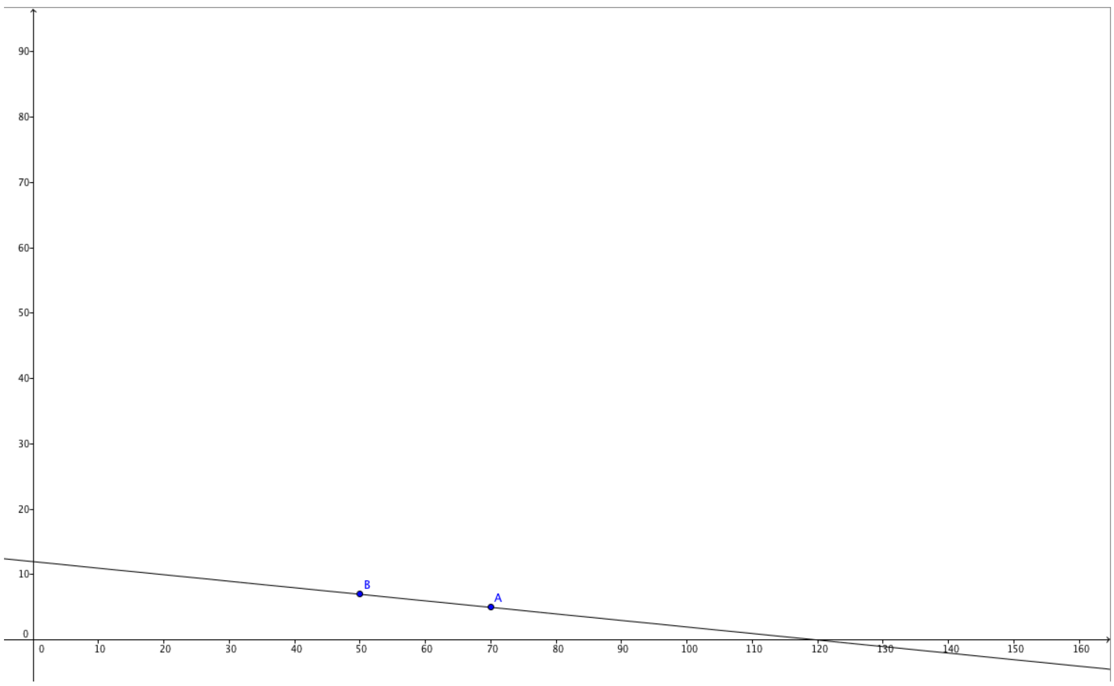
La respuesta que espero en este ejercicio es que a partir de los datos que se dan sean capaces de dibujar la gráfica. Basándose en esa gráfica espero que se acuerden o deduzcan que cuando la velocidad sea 0 nunca llegarán al destino. Para la segunda pregunta admito dos respuestas correctas, una sería que no se puede ir a 250 km/h por la carretera y la otra es hacer el cálculo para saber cuanto tiempo les costaría.



Si el coche pudiese ir a 250 km/h le costaría 1,4 horas completar el viaje.

Respuesta incorrecta:

En este ejercicio espero que el fallo se encuentre en que los alumnos no reconozcan que es una función de proporcionalidad inversa y en su lugar dibujen una función de proporcionalidad directa.



Si dibujan esta función les conducirá a respuestas sin sentido a las preguntas

6.3.4 Criterios de calificación.

En este apartado se van a explicar los criterios de calificación, para la prueba escrita. Se van a dividir pregunta a pregunta.

Pregunta 1:

- 20% de la nota por colocar bien los puntos en los dos primeros pares de ejes (velocidad-edad, consumo-edad).
- 20% de la nota por colocar bien los puntos en el tercer par de ejes.
- 60% por contestar bien a la pregunta.

Pregunta 2:

- 70% de la nota por rellenar correctamente la tabla. Si el fallo al rellenar la tabla es aritmético se le quitará hasta un 30%, del 70 %. Si el fallo al rellenar es de concepto se le quitará hasta un 100%, del 70% (por ejemplo: a los 10 metros pone una velocidad de 6 o si sigue aumentando la velocidad a partir de los 100 metros).
- 30% de la nota por hacer bien el dibujo. Si falla a la hora de dibujar una línea recta a partir de los 100 m, se le quitara hasta un 40%, del 30%.

Pregunta 3:

- 30% de la nota por dibujar una gráfica que represente un salto de altura.
- 60% de la nota por identificar claramente las características pedidas.
- 10% de la nota por expresar claramente que el atleta alcanza los 2,16 metros de altura.

Pregunta 4:

- 80% de la nota por saber identificar y dibujar los cambios de gradiente que se producen en ambas funciones.

- 20% de la nota por identificar que ambos cambios de gradiente son iguales.

Pregunta 5:

- 30% de la nota por completar correctamente la tabla. Por cada 5 fallos en la tabla se quitará hasta un 25%, del 30%.
- 35% de la nota por hallar las ecuaciones de las rectas “a” y “b”. Saber hallarlas será hasta un 60%, del 35%, y hacerlo correctamente un 40%, del 35%.
- 35% de la nota por hallar la ecuación de la recta “d”. Conocer que “d” es paralela a “a” y lo que eso implica, será hasta un 70%, del 35%, y hallarla correctamente un 30%, del 35%.

Pregunta 6:

- 60% de la nota por dibujar correctamente la función de proporcionalidad inversa.
- 40% de la nota por responder correctamente a las dos preguntas.
- Si en vez de dibujar una función de proporcionalidad inversa dibuja una función de proporcionalidad lineal, se le quitarás hasta el 100% de la nota.

7 Conclusiones

A la vista del trabajo se podría pensar que con esta propuesta didáctica, todos los alumnos comprenderían perfectamente lo que es una relación funcional. Pero no hay que olvidar, que este es un trabajo teórico que no ha sido probado en alumnos. Por tanto, no se puede saber hasta que punto mejora la concepción de los alumnos con respecto a otras propuestas didácticas. Esto quiere decir que si alguna vez esta propuesta fuese llevada a cabo, necesitaría pasar por una reestructuración para adaptarse mejor al contexto de cada clase. Por ejemplo, en una clase donde se viese que los alumnos no saben colocar puntos en el plano, habría que insistir en este tema. También se puede dar el caso de que los alumnos no trabajasen bien en grupos y hubiese que tenerlos separados durante toda la clase. Otro posible fallo es que los alumnos no estuviesen acostumbrados a ese trabajo en grupo y necesitasen de una mayor guía al principio.

Además en vistas de la nueva ley de educación, la LOMCE, que entrará en vigor en el curso 2016-2017 en 2º de la ESO, esta propuesta necesitaría una adaptación a ella, ya que esta encuadrada en la LOE, ley actual en 2º de la ESO.

8 Bibliografía

Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover.

Departamento de Educación y Deporte. (2007). *Curriculum de Educación Secundaria Obligatoria.* Comunidad de Aragón: Boletín Oficial de Aragón.

Ediciones educativas Santillana educación. (2012). *Matemáticas 1º ESO Avanza.* Madrid: Santillana.

Ediciones educativas Santillana educación. (2012). *Matemáticas 2º ESO Avanza.* Madrid: Santillana.

Eduardo Lacasta, J. R. (1998). *Las funnciones en los gráficos cartesianos.* Madrid: Sintesis.

Grupo Cero. (1983). *Análisis y estadística.* Valencia: Universidad de Valencia. Instituto de ciencias de educación.

Grupo Cero. (1995). *Matemáticas. Segundo ciclo ESO.* Valencia: Edelvives.

Grupo SM. (2011). *Matemáticas 2º ESO.* Madrid: SM.

Shell Centre for Mathematical Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* Universida de Nottingham: Ministerio de Educación y Ciencia.