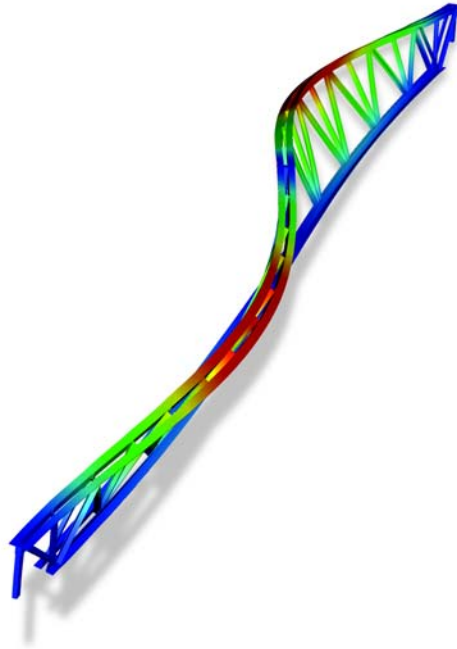




**LUND**  
UNIVERSITY



# FINITA ELEMENTANALYS AV EN BRANDUTSATT FACKVERKSBEAM I STÅL

ANDREAS HÄGG och ANDREAS LINDQVIST

Structural  
Mechanics

*Master's Dissertation*



*Department of Construction Sciences*  
Structural Mechanics

ISRN LUTVDG/TVSM--07/5147--SE (1-82)  
ISSN 0281-6679

# FINITA ELEMENTANALYS AV EN BRANDUTSATT FACKVERKSBAK I STÅL

Master's Dissertation by  
ANDREAS HÄGG och ANDREAS LINDQVIST

Supervisors:

Kent Persson, PhD,  
Div. of Structural Mechanics

Tommy Wågsäter,  
FSD AB

Wolfgang Dreyersuhr,  
EAB

Copyright © 2007 by Structural Mechanics, LTH, Sweden.  
Printed by KFS I Lund AB, Lund, Sweden, May, 2007.

For information, address:  
Division of Structural Mechanics, LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.  
Homepage: <http://www.byggmek.lth.se>



# Förord

Detta examensarbete är utfört under hösten 2006 till våren 2007 vid avdelningen för Byggnadsmekanik vid Lunds Tekniska Högskola, LTH. Examensarbetet är den avslutande delen på vår civilingenjörsutbildning i Väg och Vattenbyggnad vid LTH. Rapporten är gjord i samarbete med brandkonsultföretaget Fire Safety Design, FSD i Malmö och även EAB i Smålandsstenar som bl.a. tillverkar fackverksbalkar. Rapporten har skrivits och sammanställts vid LTH.

Vi vill i huvudsak ge ett stort tack till vår handledare Kent Persson vid avdelningen för Byggnadsmekanik som visat stöd och haft ett stort tålamod under hela arbetets gång. Vi vill även tacka Tommy Wågsäter vid FSD som kom med hela idén till examensarbetet och som ställt upp och hjälpt till när problem uppkommit.

Slutligen vill vi även tacka Wolfgang Dreyer-Suhr på EAB som gett oss ritningar och annan information om den balk som använts för beräkningarna i rapporten.

Lund, maj 2007

Andreas Hägg och Andreas Lindqvist



# Sammanfattning

Det har blivit allt vanligare med direkthandel i stora enplansvaruhus, där kunder plockar sina varor direkt från pallställ. Dessa pallställ går ofta från golv till tak och är lastade med varor ända upp till taket. I taket förekommer ofta fackverksbalkar i stål som bär upp stomsystemet. Vid en eventuell brand i ett pallställ kan det bli stor lokal flampåverkan med snabb upphettning i delar av fackverksbalkarna i stål. Tester utförda av SP visar att en brand i en chipshylla ger en temperatur på nästan 1000°C redan efter tre minuter och med en slutlig maxeffekt på 6 MW. Vid sådan lokal flampåverkan på fackverksbalken har inte brandgasventilationen någon effekt till följd av en snabb upphättning av balken. Vid lokal flampåverkan kan därför en kollaps inträffa långt innan de 30 minuter som lagstiftningen har som krav på den bärande stommen.

För att simulera ett fiktivt brandscenario undersöktes en fackverksbalk m.h.a. FE-programmet ABAQUS. Balken exponerades av en 8 meter bred flamma vid balkens stöd. Denna flamma skulle simulera en brand i ett stallage som brinner, för att 10 minuter senare sprida sig till nästa stallage längs med balken. Det medförde således tre stycken bränder i lika många stallage under sammanlagt 30 minuter. Balken analyserades för två olika brandkurvor där balkens temperatur uppgick till 950 respektive 650°C. Den första av dessa kurvor skulle motsvara branden i en chipshylla medan den andra motsvarade en mildare brand. Till modelleringen av fackverksbalken användes indata i form av temperaturberoende termiska och mekaniska materialparameterar. Balken utsattes för en last på 46 kPa enligt lastkombination 7 som gäller vid brand enligt Boverkets Konstruktionsregler samt en termisk last i form av en brandkurva.

En bucklingsanalys genomfördes på balken för att kontrollera dess benägenhet att vippa. Det visades att en balk av detta slag är mycket instabil och måste stabiliseras utmed hela sin längd för att inte vippa till följd av kollaps.

Deformationerna hos strukturen beror på temperaturfältets fördelning som funktion av tiden men temperaturen beror inte på deformationerna. På grund av det genomfördes först en transient värmeanalys på balken där utdatan i form av temperaturen som funktion av tiden i nodpunkterna användes som indata till deformationsanalysen som beräknade spänningar och töjningar i balken under hela brandförloppet.

För en balk som ej stabiliserades skedde buckling till följd av en direkt kollaps redan vid 0.33 gånger den pålagda lasten. Om däremot balken var fullt stabiliserad utmed hela sin längd skedde inte buckling förrän lasten uppgick till 7 gånger den pålagda lasten. En balk som exponerades av en kraftig brand klarade inte av att behålla sin lastbärande förmåga utan kollapsade plötsligt redan efter 3 minuter vid en temperatur av 560°C. För att förhindra kollaps krävdes det att hela balken brandskyddsmålades. Om däremot brandkurvan var något mildare gick det att påvisa att endast de mest belastade strukturdelarna var nödvändiga att brandskydda.

**Nyckelord:** Fackverksbalk, FEM, finita elementanalys, brand, lokal flamma, pallställ, samlingslokal



# Abstract

Recently, large single-storey department stores have become commonplace where the customers find their goods in pallet racks that stretch from the floor to the ceiling. The roof in those buildings often consist of a construction of steel framework beams. At a fire that may arise in one of the pallet racks, the framework construction may be exposed to a local flame which would lead to a large temperature gradient in the construction.

Experiments performed by the Statens Provinigsanstalt, SP, have shown that a fire in a shelf containing bags of potatoe chips can reach a temperature of 1000°C after three minutes and with a maximum power of 6 MW. In such a situation, the firegas ventilation has no effect and is unable to prevent a large temperature gradient in the steel framework construction at the ceiling. As a result, there is a high risk of collapse of a steel framework beam within 30 minutes, which is the time recommended by the legislation for framework constructions in single-storey meeting places.

To simulate a fire scenario, a framework beam was analyzed with the FE-program ABAQUS. The beam was exposed to an 8 m large fire flame at the support of the beam. The flame was supposed to simulate a fire in a pallet rack. The fire spread to the next pallet rack 10 minutes later. This led to three subsequent fires in three pallet racks during a total time of 30 minutes. The beam was analyzed for two different maximum temperatures, 950 and 650°C. The higher temperature represents an intense fire in a shelf containing bags of chips and the lower temperature represents a milder fire scenario. For modelling of the framework beam, data from temperature dependent thermal and mechanical material parameters were used.

A buckling analysis was carried out to find the buckling load on the structure. The results showed that this beam is very unstable and has to be stabilized to avoid buckling.

The deformation field depends on the temperature field in the structure, but the temperature field can be found without knowledge of the deformations. Therefore, a transient uncoupled heat analysis was first conducted followed by a deformation analysis. The nodal temperatures as a function of time from the heat analysis was read into the stress analysis as a predefined field.

For a non stabilized beam instant buckling occurred already for 0.33 times the applied load at room temperature. A stabilized beam that was exposed to the intense fire collapsed already after 3 minutes at a temperature of 560°C. To prevent collapse, the structure must be fire protected with a protective paint. When the beam was exposed to the milder fire scenario, it was possible to use intumescent paint on the most stressed structural parts only.

# Innehåll

<b>Förord</b>	<b>i</b>
<b>Sammanfattning</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduktion</b>	<b>1</b>
1.1 Inledning . . . . .	1
1.2 Bakgrund . . . . .	1
1.3 Syfte . . . . .	2
1.4 Avgränsningar . . . . .	2
<b>2 Material och FE teori</b>	<b>3</b>
2.1 Generellt om stål . . . . .	3
2.1.1 Lastpåverkan på stål, elasticitet och plasticitet . . . . .	3
2.1.2 Egenskaper under brandpåverkan . . . . .	4
2.2 Materialmodeller för värmeledning . . . . .	7
2.2.1 Konduktivitet . . . . .	7
2.2.2 Specifik värmekapacitet . . . . .	8
2.2.3 Transient värmeledning . . . . .	9
2.2.4 Tidsintegration . . . . .	13
2.3 Materialmodeller för deformationsanalys . . . . .	14
2.3.1 Balansekvationen . . . . .	14
2.3.2 FE-formulering av balansekvationen . . . . .	17
2.3.3 Linjär elasticitet . . . . .	19
2.3.4 Längdutvidgning . . . . .	21
2.3.5 Plasticitet . . . . .	23
2.3.6 Krypning . . . . .	25
2.4 Lösning av statisk olinjär analys . . . . .	26
2.4.1 Dämpningskoefficient . . . . .	27
2.5 Bucklingsanalys . . . . .	29
<b>3 Modellering i ABAQUS</b>	<b>31</b>
3.1 Analys av enkel balkmodell . . . . .	31
3.1.1 Materialparametrar . . . . .	32

3.1.2	Randvillkor . . . . .	34
3.1.3	Laster . . . . .	34
3.1.4	Elementtyp . . . . .	34
3.1.5	Resultat . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Analyserade strukturer</b>	<b>37</b>
4.1	Fackverksbalk . . . . .	37
4.1.1	Geometri . . . . .	38
4.1.2	Lastfall . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Finita elementanalyser</b>	<b>41</b>
5.1	Introduktion . . . . .	41
5.2	Elementindelning . . . . .	42
5.3	Bucklingsanalys . . . . .	43
5.3.1	Randvillkor . . . . .	43
5.4	Transient värmeanalys . . . . .	44
5.4.1	Randvillkor . . . . .	44
5.5	Deformationsanalys . . . . .	46
5.5.1	Randvillkor . . . . .	46
5.5.2	Laster . . . . .	46
5.6	Lösningsmetod . . . . .	46
5.7	Analyserade brand- och lastfall . . . . .	47
5.8	Resultat från bucklingsanalysen . . . . .	48
5.9	Resultat från värme- deformationsanalysen . . . . .	50
5.9.1	Stabilisator . . . . .	50
5.9.2	Olika brand och lastfall . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Slutsats och diskussion</b>	<b>63</b>
6.1	Sammanfattning . . . . .	63
6.2	Slutsater . . . . .	63
6.3	Förslag till vidare arbete . . . . .	64
	<b>Referenser</b>	<b>67</b>
	<b>Bilagor</b>	<b>69</b>
	<b>A Indata till ABAQUS</b>	<b>71</b>
	<b>B Fackverksritning</b>	<b>77</b>
	<b>C Spännings- töjningssamband</b>	<b>79</b>

# Kapitel 1

## Introduktion

### 1.1 Inledning

Examensarbetet avser att med finita elementmetoden analysera deformationer och risken för kollaps i en takkonstruktion med fackverksbalkar i stål utsatta för en häftig lokal brand. Arbetet skall utveckla en FE-metodik i ABAQUS för att analysera stålbalkar utsatta för värme enligt en temperaturkurva där speciellt materialets egenskaper som styvhet, plastiska egenskaper och värmeledningsparametrar skall uttryckas som funktion av temperaturen. För att simulera korrekt värmespridning i stålet krävs att värmeflödesproblemet löses före deformationsproblemet. Metodiken utvecklas och testas för en enkel geometri för att sedan utnyttjas för en hel takbalk. Arbetet görs tillsammans med Fire Safety Design som har kommit med iden till rapporten och kommer att fungera som handledare under rapportens gång. Även företaget EAB är inblandade och bidrar med ritningar på den brandpåverkade fackverksbalken.

### 1.2 Bakgrund

Det har blivit allt vanligare med direkthandel i stora enplansvaruhus där kunderna plockar varorna direkt från pallställ. Pallställen är ofta höga och varor placeras ända upp till taket. Vid händelse av brand i ett sådant pallställ kan det bli stor lokal flampåverkan med snabb upphettning i delar av fackverksbalkarna i stål. Vid sådan lokal flampåverkan på takkonstruktionen har inte brandgasventilationen någon effekt. Tester utförda av SP, Statens Provningsanstalt, påvisar vid en brand i en hylla med chips att temperaturen i taket är cirka 1000°C redan efter 3 minuter och med en slutlig maxeffekt på 6 MW. Temperaturen i delar av takkonstruktionen kan erhålla temperaturer över 900°C, vilket innebär att det endast är en liten del kvar av den ursprungliga bärförmågan i en stålkonstruktion. Detta innebär med största sannolikhet att de direkt flampåverkade takdelarna kommer att kollapsa till följd av den kraftiga temperaturökningen. Omfattningen av den primära skadan till följd av brand beror bla på dimensionerande brandförlopp från lokal flampåverkan, den

konstruktiva utformningen av stommen och lastutnyttjandegraden i bärande delar samt även om någon form av brandskydd existerar. Enligt Boverket [1] ska samlingslokaler, med ett våningsplan och som är avsedda för fler än 150 personer eller har större nettoarea än  $120 \text{ m}^2$ , utföras i brandklass 2. Är det då acceptabelt att delar av den bärande takkonstruktionen kollapsar under inverkan av lokal flampåverkan i lokaler där lagstiftningen generellt sätter ett 30 minuters krav på den bärande stommen? Kunskap om den bärande stommens beteende vid brand och verktyg för att analytiskt verifiera händelseförlopp är väsentliga för att säkerhetsställa om en kollaps sker och i vilken omfattning.

### 1.3 Syfte

Det huvudsakliga syftet med rapporten är att undersöka hur en fackverksbalk påverkas och deformeras vid händelse av brand. Tre frågeställningar kommer att undersökas i rapporten:

- Undersöka en enkel balkmodell för att utveckla en beräkningsmetodik
- Undersöka en fackverksbalk under exponering av ett antal olika brandscenarion
- Förslag till strukturella förbättringar av fackverksbalken

### 1.4 Avgränsningar

Arbetet innefattar ej analys av hur flera samverkande fackverksbalkar beter sig under ett brandförlopp. Eftersom omfattningen av arbetet skulle bli alltför stor. Därför analyseras endast en fackverksbalk som stabiliseras i form av föreskriva förskjutningar. Fackverksbalken som analyseras består av vanligt S355 konstruktionsstål och är 24 meter lång.

# Kapitel 2

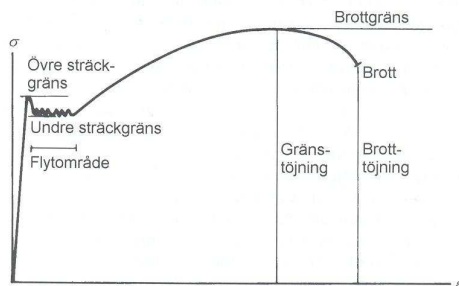
## Material och FE teori

### 2.1 Generellt om stål

I detta kapitel beskrivs hur stål påverkas av en last. Stål under lastpåverkan karakteriseras bäst med arbetskurvan som visar hur stålet deformeras. Vid ökad ståltemperatur kommer denna kurva att förändras och stålet klarar mindre last. Ett exempel är då stålets temperatur når  $400^{\circ}\text{C}$  och dess bärförmåga endast ligger på ca. 70 % av dess ursprungliga bärförmåga. Dessa skillnader i bärförmåga kan man se i arbetskurvan.

#### 2.1.1 Lastpåverkan på stål, elasticitet och plasticitet

Ståls egenskaper under drag karakteriseras bäst av arbetskurvan eller spänning-töjningskurvan, se figur 2.1.



Figur 2.1: Samband mellan spänning och töjning [4]

För S355 är kurvan rätlinjig och följer Hooke's lag upp till den övre sträckgränsen som ligger på 355 MPa, detta värde gäller vid rumstemperatur  $20^{\circ}\text{C}$ , därefter börjar materialet att plasticeras. Vid ökning av spänningen över sträckgränsen uppnås så småningom brottgränsen som motsvaras av kurvans högsta punkt. Denna spänning

är den högsta spänning som materialet klarar av. Stålets deformationer hänger samman med hur atomerna förskjuts i förhållande till varandra. Om stålet helt återfår sin naturliga form efter lastborttagning sägs dessa deformationer vara helt elastiska [4]. Dessa deformationer är i allmänhet helt proportionella mot lastens storlek. Detta gör att  $\sigma$ - $\epsilon$ -kurvan blir rätlinjig för elastiska deformationer. Stålets beteende i detta område beskrivs av sambandet

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2.1)$$

där  $E$  är stålets elasticitetsmodul som kan sättas till 210 GPa [4]. Efter att kurvan i det närmaste varit helt rätlinjig under de elastiska spänningarna övergår kurvan till att bli helt horisontell. Deformationen ökar kraftigt vid ungefär konstant spänning, flytning i stålet har uppnåtts. Motsvarande spänning för vilken flytning uppnås kallas för flytspänning. Vid belastning över de elastiska spänningarna uppstår glidningar i stålet som inte återgår vid avlastning. Dessa deformationer kallas för plastiska deformationer. Då spänningen blir så hög att de plastiska deformationerna uppstår innebär detta att stålets elasticitetsgräns uppnåtts, alternativt proportionalitetsgränsen [4]. För kristallina material som t.ex. stål sker detta genom dislokationsvandringar [6].

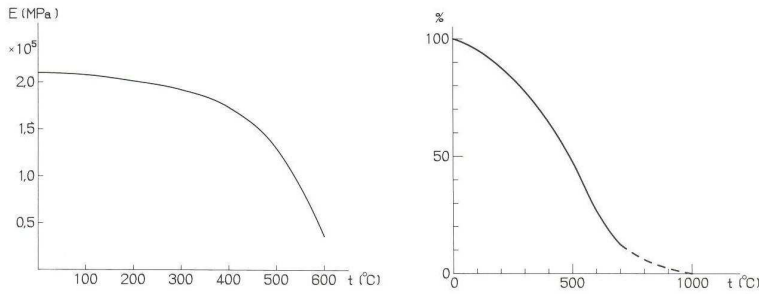
### 2.1.2 Egenskaper under brandpåverkan

Olika lokaler innebär också olika sorters brandförlopp. För industribyggnader eller liknande innebär detta stora lokaler med stor volym. I dessa lokaler finns också många gånger pallställ med varor lastade upp till taket. Brandbelastningen kan variera mellan olika verksamheter men den kan bli hög i de byggnader där det finns brännbart material. Stålstommar ger ofta en förvarning om kollaps p.g.a. dess deformationer under brandpåverkan. Brandbelastningen kan lokalt bli större på stommen där det finns en ansamling av brännbart material. Detta kan generera en högre temperatur på stommen än vad som gäller för den övriga branden [5].

Brandspridning sker genom värmestrålning, värmeledning eller konvektion. Dessa tre fallen kan även samverka. För en brandpåverkad fackverksbalk i en industribyggnad sker brandspridningen främst genom värmestrålning och konvektion. Då värmestrålningen är så hög att det utsatta materialet uppnår sin antändningstemperatur sker en antändning. Detta kan gälla då det brinner på ett pallställ och inträffar då ett närliggande pallställ antänds p.g.a. värmestrålning. Konvektion sker genom strömning av brinnande eller heta oförbrända gaser. Ståls hållfasthet och elasticitetsmodul avtar vid ökande temperatur. Vid temperaturer över 400°C börjar bärförmågan att reduceras kraftigt. Bärförmågan avtar sedan successivt med ökande temperatur, se figur 2.2.

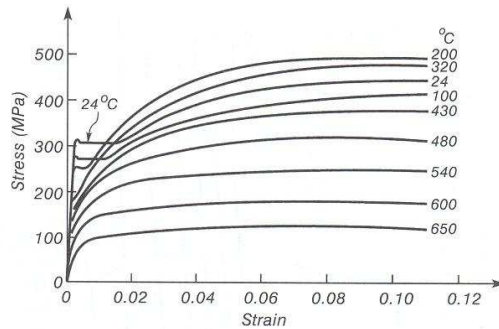
Vid 400°C har elasticitetsmodulen reducerats till ca. 80 %. Den avtar sedan snabbare med ökad temperatur. För konstruktionsstål utsatta för högre temperaturer





Figur 2.2: Samband mellan elasticitetsmodul och temperatur samt mellan stålets utnyttjande och dess temperatur [5]

existerar inte någon egentlig sträckgräns. En fiktiv sträckgräns bestäms därför på en högsta kvarstående töjning, ofta 0.2 %. Vid höga temperaturer får  $\sigma$ - $\varepsilon$ -kurvan ett mjukt och avrundat förlopp. Ett brott kommer därför att bli segt och inte sprött för brandutsatta konstruktioner [5]. Vid temperaturer över 200°C börjar flytgränsen och dess tillhörande flytspänning att bli mindre signifikant, se figur 2.3 [4]. Stålets

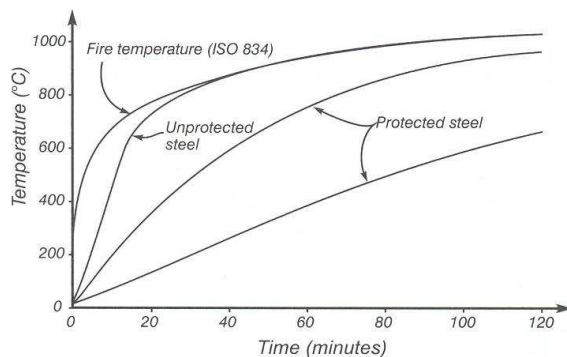


Figur 2.3: Samband mellan spänning och töjning för olika temperaturer [3]

hårdnande inträffar efter elasticitetsgränsen. Här ökar flytspänningen med ökande plastiska töjningar. Exempel på ståls hårdnande ses i figur 2.3. Vid ökande temperatur blir hårdnandet mindre synligt eftersom  $\sigma$ - $\varepsilon$ -kurvan då planar ut.

Oskyddat stål klarar sig dåligt vid brandbelastning. Detta beror främst på att stål har en högre värmekonduktivitet jämfört med t.ex. trä eller betong. En annan anledning till att stål klarar sig sämre är att stålbalkar och stålpelare ofta är tunnare än motsvarande för betong eller trä. Detta gör att de värms upp mycket snabbare och detta i kombinationen med dess höga värmekonduktivitet gör dem sårbara vid

brandbelastning. Figur 2.4 visar en jämförelse i temperatur för oskyddade och skyddade stålbalkar. Balkarna är utsatta för en standardbrand, ISO 834, som ses överst i figur 2.4. De två nedersta kurvorna visar balkar med 15 och 30 mm brandisolering. Den översta kurvan visar brandtemperaturen och den näst översta visar en helt oskyddad balk. Man ser att den oskyddade balkens temperatur ganska fort går mot standardbrandens temperatur medan de skyddade balkarna har en betydligt planare kurva.



Figur 2.4: Samband mellan oskyddat och skyddat stål utsatt för en standardbrand, ISO 834. Kurvan för standardbranden syns överst [3]

Ett exempel på hur stål deformeras vid en brand ses i figur 2.5. Observera att bilden inte visar fackverksbalkar.



Figur 2.5: Exempel på en stålbrand för oskyddat stål [3]

## 2.2 Materialmodeller för värmeledning

Vid analys av hur bärande konstruktioner påverkas vid brandförlopp måste först temperaturfältet i konstruktionen beräknas genom en transient värmeledningsanalys. Ett materials termiska egenskaper i form av värmeledning definieras av några olika materialegenskaper. Dessa är värmekonduktivitet, specifik värmekapacitet och materialets densitet. Med dessa kända storheter kan den transienta värmeledningen i ett material beräknas. Värdena hämtas i Eurocode 3 som bl.a. behandlar utformning av stålkonstruktioner utsatta för brand [7].

### 2.2.1 Konduktivitet

Värmekonduktiviteten beskriver ett materials förmåga att leda värme och har enheten W/mK. Värmekonduktiviteten varierar också med temperaturen och ses i figur 2.6.

För  $20^{\circ}\text{C} \leq T_s < 750^{\circ}\text{C}$  :

$$\lambda_s = 54 - 3.33 \cdot 10^{-2} \cdot T_s \quad [\text{W/mK}] \quad (2.2)$$

För  $800^{\circ}\text{C} \leq T_s < 1200^{\circ}\text{C}$  :

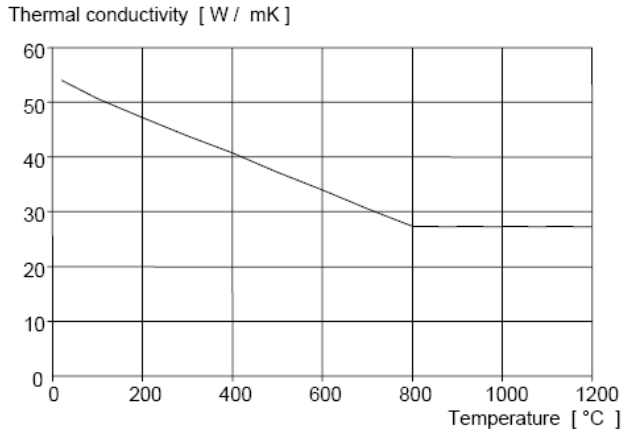
$$\lambda_s = 27.3 \quad [\text{W/mK}] \quad (2.3)$$

Där

$T_s$  är stålets temperatur [ $^{\circ}\text{C}$ ].

Vid enkla beräkningar kan man anta att värmekonduktiviteten är oberoende av stålets temperatur. Då gäller istället,

$$\lambda_s = 27.3 \quad [\text{W/mK}] \quad (2.4)$$



Figur 2.6: Ståls värmekonduktivitet som funktion av temperaturen [7]

### 2.2.2 Specifik värmekapacitet

Specifik värmekapacitet beskriver ett materials förmåga att lagra energi. Det beskriver hur mycket energi som krävs för att värma 1 kg av materialet 1 Kelvingrad, och har enheten är J/kgK. Stålets specifika värmekapacitet definieras nedan och ses i figur 2.7.

För  $20^{\circ}\text{C} \leq T_s < 600^{\circ}\text{C}$  :

$$c_s = 425 + 7.73 \cdot 10^{-1} \cdot T_s - 1.69 \cdot 10^{-3} \cdot T_s^2 + 2.22 \cdot 10^{-6} \cdot T_s^3 \quad [\text{J/kgK}] \quad (2.5)$$

För  $600^{\circ}\text{C} \leq T_s < 735^{\circ}\text{C}$  :

$$c_s = 666 + \frac{13002}{738 - T_s} \quad [\text{J/kgK}] \quad (2.6)$$

För  $735^{\circ}\text{C} \leq T_s < 900^{\circ}\text{C}$  :

$$c_s = 545 + \frac{17820}{T_s - 731} \quad [\text{J/kgK}] \quad (2.7)$$

För  $900^{\circ}\text{C} \leq T_s < 1200^{\circ}\text{C}$  :

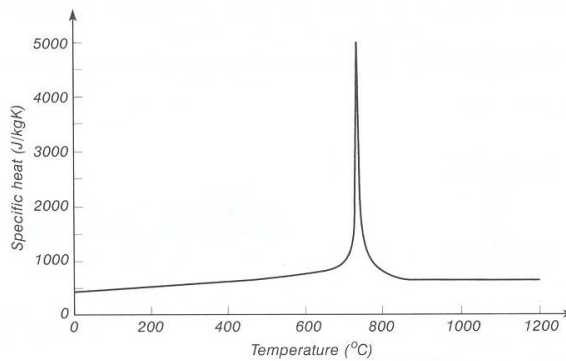
$$c_s = 650 \quad [\text{J/kgK}] \quad (2.8)$$

Där

$T_s$  är stålets temperatur [°C].

Vid enkla beräkningar antas den specifika värmekapaciteten vara oberoende av stålets temperatur. Då gäller

$$c_s = 600 \quad [\text{J/kgK}] \quad (2.9)$$



Figur 2.7: Specifika värmekapaciteten som funktion av temperaturen [7]

### 2.2.3 Transient värmeledning

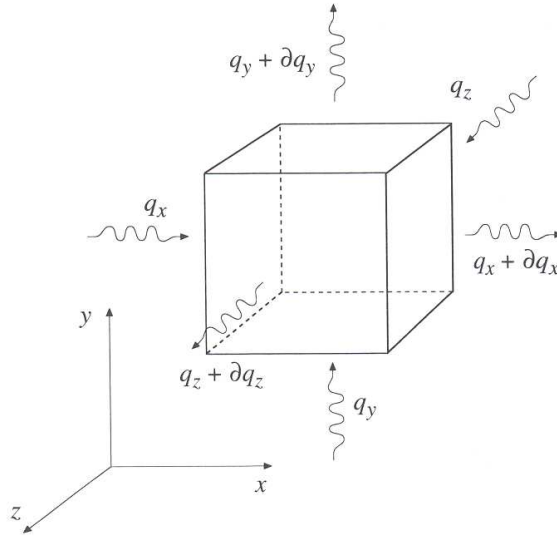
Med transient värmeflöde menas att temperaturen och flödet är en funktion av tiden i en fast punkt. Det till skillnad från stationärt värmeflöde som inte är en funktion av tiden [15]. Hastigheten med vilken temperaturen ökar i kroppen bestäms av materialparametrarna värmekapacitet  $c$ , värmekonduktiviteten  $k$  och temperaturgradienten  $\nabla\phi$ .

Värmeflödet beskrivs av flödesvektorn  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ . Vektorn har riktningen dit det flödar och dess längd beskriver flödet per tidsenhet som passerar en ytenhet vinkelrät riktningen av värmeflödet. Då det finns en temperaturskillnad finns det således också ett värmeflöde som beror på temperaturgradienten  $\nabla\phi$ . Fouriers lag säger att värmeflödet är proportionellt mot temperaturgradienten och skrivs enligt [15]

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla\phi \quad (2.10)$$

Minustecknet i ekvation 2.10 betyder att det flödar från varmt till kallt och  $\mathbf{D}$  är konduktivitetsmatrisen som beskriver materialets motstånd mot värmeflöde i olika riktningar.

Betrakta en oändligt liten del av en kropp  $dV$  enligt figur 2.8, som utsätts för en värmekälla  $Q$ . Om energibalansen för volymen  $dV$  ska vara uppfylld krävs det att



Figur 2.8: Värmeflöde genom ett volymelement [15]

tillförd värme är lika med den energi det tar att öka temperaturen plus den energi som flödat ur kroppen, allt per tidsenhet. Energibalansen blir då enligt [15]

$$Q \cdot dx dy dz = \rho c \dot{\phi} \cdot dx dy dz + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot dy dz + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \cdot dx dz + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \cdot dx dy \quad (2.11)$$

där  $\rho$  är densiteten av materialet. Genom att dela med  $dV = dx dy dz$  blir energibalansen

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} + Q = \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.12)$$

Ekvation 2.12 kan skrivas på ett mer kompakt sätt genom att införa divergensoperatorm  $\nabla^T$

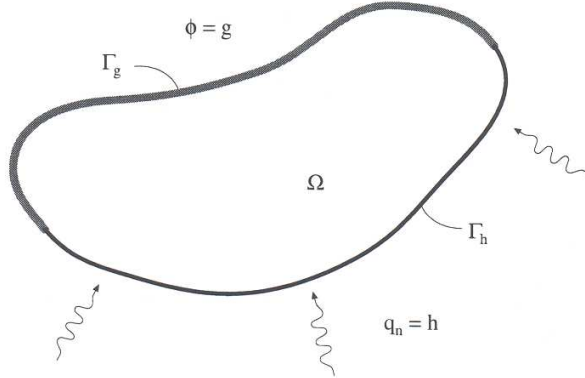
$$-\nabla^T \mathbf{q} + Q = \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.13)$$

Insättning av Fouriers lag (2.10) i balansekvationen (2.13) ger

$$\nabla^T \mathbf{D} \nabla \phi + Q = \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.14)$$

vilket är differentialekvationen för transient värmeledning [15].

För att lösa ekvation (2.14) krävs det randvillkor vilka består av antingen en känd temperatur eller ett känt flöde längs randen, en del  $\Gamma_h$  där flödet är föreskrivet och en del  $\Gamma_g$  där temperaturen är föreskriven, se figur 2.9.



Figur 2.9: Randen indelad i 2 delar [15]

Randvillkoren skrivs enligt [15]

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = h \quad \text{på } \Gamma_h \quad (2.15)$$

$$\phi = g \quad \text{på } \Gamma_g \quad (2.16)$$

En initial temperatur krävs också för att fullända randvillkoren och bör anges för alla punkter i  $\Omega$  vid tiden  $t = 0$ .

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) \quad i \quad \Omega \quad (2.17)$$

Ovanstående differentialekvation kallas för stark form. För att ställa upp FE formuleringen krävs att värmeekvationen skrivs i svag form. Detta fås genom att multiplicera (2.14) med en godtycklig tidsberoende funktion  $w = w(\mathbf{x})$ , den så kallade viktsfunktionen och sedan integrera över regionen  $\Omega$  [15].

$$\int_{\Omega} w \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{\Omega} w \nabla^T \mathbf{q} dV = \int_{\Omega} w Q dV \quad (2.18)$$

Den andra termen kan skrivas

$$\int_{\Omega} w \nabla^T \mathbf{q} dV = \int_{\Gamma} w \mathbf{q}^T \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} (\nabla w)^T \mathbf{q} dV \quad (2.19)$$

Om detta uttryck och randvillkoret (2.15) sätts in i ekvation (2.18) fås den svaga formen av balansekvationen som [15]

$$\int_{\Omega} w \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} - \int_{\Omega} (\nabla w)^T \mathbf{q} dV = - \int_{\Gamma_h} w h dS - \int_{\Gamma_g} w q_n dS + \int_{\Omega} w Q dV \quad (2.20)$$

där  $q_n$  är det okända flödet längs delen  $\Gamma_g$  på randen.

Från ekvation (2.20) kan nu den finita elementapproximationen ställas upp. Genom variabelseparation kan temperaturvariabeln  $\phi$  skrivas

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}(t) \quad (2.21)$$

där  $\mathbf{N}$  är en radmatris innehållande formfunktionerna och  $\mathbf{d}$  en kolonnmatris som innehåller de tidsberoende temperaturerna vid noderna. Finita element formuleringen av viktsfunktionen tar formen

$$w(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{c} \quad (2.22)$$

där  $\mathbf{c}$  är en vektor med konstanta värden. Insättning av (2.22) i ekvation (2.20) ger

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} dV - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T \mathbf{q} dV \right) = \\ \mathbf{c}^T \left( - \int_{\Gamma_h} \mathbf{N}^T h dS - \int_{\Gamma_g} \mathbf{N}^T q_n dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T Q dV \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

vilket håller för alla värden på  $\mathbf{c}$ . Högra delen av (2.23) är kraftvektorn

$$\mathbf{f} = - \int_{\Gamma_h} \mathbf{N}^T h dS - \int_{\Gamma_g} \mathbf{N}^T q_n dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T Q dV \quad (2.24)$$

Om notationen

$$\nabla \mathbf{N} = \mathbf{B}$$

används tar ekvation (2.23) formen

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} dV - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{q} dV = \mathbf{f} \quad (2.25)$$

vilket är finita element formen av balansekvationen [15].

Finita element approximation av tidsderivatan  $\partial \phi / \partial t$  ger

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \approx \mathbf{N}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}(t) \quad (2.26)$$

Ekvation (2.25) blir då

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} dV \right) \dot{\mathbf{d}}(t) - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{q} dV = \mathbf{f} \quad (2.27)$$



där den första termen är värmekapacitetsmatrisen

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho c \mathbf{N} dV \quad (2.28)$$

Finita elementapproximationen av värmeflödet  $\mathbf{q}$  blir efter insättning av (2.21) i den konstitutiva lagen (2.10)

$$\mathbf{q} \approx -\mathbf{D}\nabla(\mathbf{N}\mathbf{d}) \equiv -\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.29)$$

Ekvationerna kan nu skrivas som

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV \mathbf{d}(t) = \mathbf{f} \quad (2.30)$$

där den andra termen

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV \quad (2.31)$$

vilket är konduktivitetmatrisen. Till sist kan detta skrivas på den kompakta formen

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.32)$$

vilket är den linjära finita elementekvationen för transient värmeledning [15].

Om värmeflödet är temperaturberoende blir det konstitutiva sambandet olinjärt i form av [15]

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}(\phi)\nabla\phi \quad (2.33)$$

Samtidigt kan värmekapaciteten också bero på temperaturen. Ekvationen tar då formen

$$\mathbf{C}(\mathbf{d})\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}(\mathbf{d})\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (2.34)$$

Ovanstående ekvation är svår att lösa analytiskt men genom en tidsstegsметод är det möjligt att finna en lösning.

## 2.2.4 Tidsintegration

Ekvation (2.34) består av ett antal olinjära ordinära differentialekvationer. För att transformera de till ett antal olinjära algebraiska ekvationer introduceras ett tidsintegrationsschema kallat Eulers generaliserade metod enligt [14]

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\dot{\mathbf{d}}_n + \gamma\dot{\mathbf{d}}_{n+1}] \quad (2.35)$$

$\gamma = 1$  resulterar i ovillkorlig stabilitet för olinjära problem kallat, *backward Euler scheme*. Ekvationen ovan tar då formen

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) \quad (2.36)$$

Med (2.36) insatt i balans ekvationen (2.34) ger utan indexnotation [14]

$$\psi(\mathbf{d}) = \mathbf{0} = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}(\mathbf{d} - \mathbf{d}_n) + \mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{f} \quad (2.37)$$

Ovanstående ekvation är olinjär och en iterativ lösningsmetod måste användas för att lösa systemet. Newton-Raphsons metod används till detta.

## 2.3 Materialmodeller för deformationsanalys

Då temperaturfältet har beräknats kan ett materials mekaniska egenskaper beskrivas av olika konstitutiva samband mellan spänningar och töjningar. Dessa töjningar är elastiska, plastiska, termiska och kryptöjningar.

$$\varepsilon^{tot} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} + \varepsilon^{th} + \varepsilon^{cr} \quad (2.38)$$

Nedan ställs balansekvationen för en statisk kropp upp tillsammans med dess finita elementformulering. Därefter beskrivs materialmodellerna för elasticitet, längdvidgning, plasticitet och krypning.

### 2.3.1 Balansekvationen

Balansekvationen för en statisk kropp i jämvikt kan härledas genom att titta på en godtycklig del av en kropp. Kroppen har volymen  $V$  och den yttre randen utgörs av  $S$ . De krafter som verkar på kroppen utgörs av ytkraftsvektorn  $\mathbf{t}$  som är vinkelrät mot ytan  $S$  och tyngdkraften  $\mathbf{b}$ . Där vektorn  $\mathbf{t}$  har enheten  $N/m^2$ . För att nå jämvikt krävs att [13]

$$\int_S \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{b} dV = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

Detta uttryck kan delas upp i ytterligare tre ekvationer:

$$\int_S t_x dS + \int_V b_x dV = 0 \quad (2.40)$$

$$\int_S t_y dS + \int_V b_y dV = 0 \quad (2.41)$$

$$\int_S t_z dS + \int_V b_z dV = 0 \quad (2.42)$$

Där

$$t_x = \mathbf{s}_x^T \mathbf{n}; \quad t_y = \mathbf{s}_y^T \mathbf{n}; \quad t_z = \mathbf{s}_z^T \mathbf{n} \quad (2.43)$$

Ekvation (2.40) kan nu skrivas som

$$\int_S \mathbf{s}_x^T \mathbf{n} dS + \int_V b_x dV = 0$$

Den första termen kan nu omformuleras med Gauss sats vilket ger

$$\int_V (\text{div } \mathbf{s}_x + b_x) dV = 0 \quad (2.44)$$

Då detta uttrycket gäller för godtyckliga regioner  $V$  ges

$$\text{div } \mathbf{s}_x + b_x = 0 \quad (2.45)$$

Vektorn  $\mathbf{s}_x$  innehåller tre komponenter  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  och  $\sigma_{xz}$ . Om detta kombineras med divergensen för en vektor fås följande ur (2.40)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (2.46)$$

På samma sätt behandlas ekvation (2.41) och (2.42) och då får man följande differentialekvationer

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z = 0 \quad (2.49)$$

Dessa differentialekvationer uttrycker jämviktsvillkoren för en kropp. På matrisform kan detta uttryckas på följande form

$$\tilde{\nabla}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

där  $\boldsymbol{\sigma}$  innehåller alla spänningskomponenter. Ett mera kompakt skrivsätt ges av ekvation (2.51) nedan, ekvationen gäller för tredimensionella problem [14].

$$\tilde{\nabla}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

Nu återstår att härleda svag form från jämviktsvillkoren. Anta en godtycklig vektor  $\mathbf{v}$  med följande komponenter

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Vidare får man

$$\tilde{\nabla} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Om ekvation (2.53) multipliceras med vektorn  $\boldsymbol{\sigma}$  får man

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_{xy} \\ &\quad + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Från ekvationerna (2.47)-(2.49) kan man nu härleda den svaga formen. Om man med ekvation (2.47) multiplicerar med den godtyckliga funktionen  $v_x$ , integrerar över volymen  $V$  och använder sig av Green-Gauss sats så erhåller man enligt [14]

$$\begin{aligned} \int_S v_x \sigma_{xx} n_x dS - \int_V \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} dV + \int_S v_x \sigma_{xy} n_y dS - \int_V \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{xy} dV \\ + \int_S v_x \sigma_{xz} n_z dS - \int_V \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{xz} dV + \int_V v_x b_x dV = 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Ytkraftvektorns  $\mathbf{t}$  tre komponenter måste uppfylla randvillkoren

$$t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z \quad (2.56)$$

$$t_y = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z \quad (2.57)$$

$$t_z = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \quad (2.58)$$

Om ekvation (2.56) kombineras med ekvation (2.47) kan uttrycket förenklas till

$$\int_S v_x t_x dS - \int_V \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \sigma_{xz} \right) dV + \int_V v_x b_x dV = 0 \quad (2.59)$$

På samma sätt som i ekvation (2.59) multipliceras ekvationerna (2.48) och (2.49) med de godtyckliga funktionerna  $v_y$  och  $v_z$ . Om dessa tre ekvationer slutligen adderas samman får man

$$\begin{aligned} \int_S (v_x t_x + v_y t_y + v_z t_z) dS + \int_V (v_x b_x + v_y b_y + v_z b_z) dV \\ - \int_V \frac{\partial v_x}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \sigma_{zz} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \sigma_{xy} \\ + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \sigma_{xz} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \sigma_{yz} dV = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Med hjälp av ekvation (2.54) ges nu den svaga formen av [14]

$$\int_V (\tilde{\nabla}\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S \mathbf{v}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{b} dV \quad (2.61)$$

### 2.3.2 FE-formulering av balansekvationen

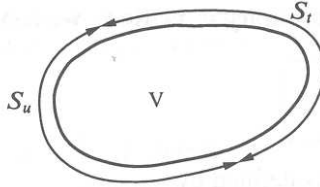
Enligt [13] kan den svaga formen från ekvation (2.61) skrivas som

$$\int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S \mathbf{v}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{v}^T \mathbf{b} dV \quad (2.62)$$

Där  $\boldsymbol{\varepsilon}^v$  beror på den godtyckliga viktsvektorn  $\mathbf{v}$  enligt nedan

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{1}{2}(\tilde{\nabla} \mathbf{v} + \tilde{\nabla}^T \mathbf{v}) \quad (2.63)$$

Förskjutningsvektorn  $\mathbf{u}$  föreskrivs för den godtyckliga kroppen med volymen  $V$ . På samma sätt föreskrivs vektorn  $\mathbf{t}$  längs med randen  $S$ , se figur 2.10.



Figur 2.10: Randvillkor för en kropp med volymen  $V$  [13]

Finita elementmetoden baserar sig på att förskjutningsvektorn går att uttrycka med hjälp av uttrycket

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (2.64)$$

där  $\mathbf{N}$  innehåller de globala formfunktionerna och  $\mathbf{a}$  innehåller kroppens förskjutningar [13]. Med förskjutningarna givna enligt (2.64) kan motsvarande töjningar bestämmas enligt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.65)$$

där matrisen  $\mathbf{B}$  fås genom derivering av  $\mathbf{N}$ . Den godtyckliga viktsvektorn  $\mathbf{v}$  approximeras på samma sätt som med förskjutningsvektorn  $\mathbf{u}$  vilket leder till uttrycket

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{c} \quad (2.66)$$

I ekvation (2.66) är både  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{c}$  godtyckliga och  $\mathbf{c}$  är inte beroende av position [13]. Detta leder fram till uttrycket

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{B} \mathbf{c} \quad (2.67)$$

Om man kombinerar (2.66), (2.67) samt den svaga formen given enligt (2.69) får man nu

$$\mathbf{c}^T \left[ \left( \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \right) \ddot{\mathbf{a}} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \right] = 0 \quad (2.68)$$

Denna ekvation är giltig för godtyckliga  $\mathbf{c}$ -matriser vilket ger slutresultatet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{f} \quad (2.69)$$

Massmatrisen  $\mathbf{M}$  definieras enligt

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$$

och  $\mathbf{f}$ -matrisen beskriver de yttre krafterna enligt

$$\mathbf{f} = \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV$$

Vid statiska villkor, d.v.s. då nodernas acceleration  $\ddot{\mathbf{a}}$  är noll, reduceras ekvation (2.64) till

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} \quad (2.70)$$

där

$$\boldsymbol{\psi} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f} \quad (2.71)$$

Ekvationerna (2.70) och (2.71) beskriver jämviktsvillkoren för kroppen och gäller för en godtycklig kropp som befinner sig i jämvikt [13]. För linjär elasticitet har man enligt [13]

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a} \quad (2.72)$$

Om denna kombineras med ekvationerna (2.70) och (2.71) får man

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.73)$$

där

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV$$

För generella olinjära problem kan man inte uttrycka de aktuella spänningarna m.h.a. töjningarna. Istället får man använda sig av derivatan m.a.p. tiden ur samband (2.72). För elasto-plastiska problem blir detta

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.74)$$

Det konstitutiva sambandet (2.74) är således olinjärt vilket leder till att även (2.70) och (2.71) blir olinjära [13]. Om ekvation (2.70) delas upp m.a.p. tiden får man

$$\int_V \mathbf{B}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV = \dot{\mathbf{f}} = \int_S \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{t}} dS + \int_V \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{b}} dV \quad (2.75)$$

Ekvation (2.70) beskriver den kroppens totala jämvikt medan (2.75) beskriver de inkrementiella jämviktsstegen [13]. För elasto-plasticitet får man från ekvation (2.74) att [13]

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}_t \mathbf{B} \dot{\mathbf{a}}; \quad \mathbf{D}_t = \begin{cases} \mathbf{D} & \text{för elasticitet} \\ \mathbf{D}^{ep} & \text{för plasticitet} \end{cases} \quad (2.76)$$

Eftersom den inkrementiella förskjutningarna  $\dot{\mathbf{a}}$  är oberoende av läge ger ekvation (2.75) och (2.76) att

$$\mathbf{K}_t \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{f}} \quad (2.77)$$

där den tangentiella styvhetsmatrisen  $\mathbf{K}_t$  för hela kroppen ges av [13]

$$\mathbf{K}_t = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_t \mathbf{B} dV$$

Ekvation (2.77) behövs för att kunna lösa den inkrementiella responsen för kroppen. Uttryck (2.77) består av olinjära ekvationer.

### 2.3.3 Linjär elasticitet

Stål som används i fackverksbalken antas vara ett elastoplastiskt material. Det vill säga att det är linjärt upp till flytspänningen där det börjar plasticeras. Som det tidigare beskrivits avses ett elastiskt material som vid avlastning helt återgår till dess ursprungliga form, d.v.s. inga kvarstående deformationer. Relationen mellan spänning och töjning ges av det konstitutiva sambandet, även kallad Hooke's lag [14]

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.78)$$

Där  $\sigma$  är spänningarna,  $E$  är elasticitetsmodulen och  $\varepsilon$  är den elastiska töjningen. Den generaliserade formen av Hooke's lag ges av sambandet,

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad (2.79)$$

där

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{61} & D_{62} & \dots & D_{66} \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

$\mathbf{D}$  beskriver den konstitutiva matrisen och dess ingående element beskriver olika materials beteende under lastpåverkan. Om  $\mathbf{D}$ -matrisen ser likadan ut oberoende av vilket koordinatsystem som används sägs materialet vara isotropt. Som tidigare

nämnt är stål ett exempel på ett isotropt material.  $\mathbf{D}$ -matrisen får då följande utseende

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Skjuvmodulen för ett isotropt material ges av

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.82)$$

$\mathbf{D}$ -matrisen innehåller två av varandra oberoende koefficienter, elasticitetsmodulen  $E$  och tvärkontraktionstalet  $\nu$ . Där tvärkontraktionstalet definieras som förhållandet mellan vinkelrät och parallel töjning. För stål sätts denna parameter till 0.3. För  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$  innebär detta att  $\mathbf{D}$  är positivt definit vilket ger att

$$\det \mathbf{D} \neq 0 \quad (2.83)$$

Detta innebär att ekvation (2.79) kan inverteras till

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} \quad (2.84)$$

där  $\mathbf{C}$  kallas för kompliansmatrisen. Då  $\mathbf{D}$ -matrisen är positivt definit krävs att

$$E > 0; \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (2.85)$$

Inversen av  $\mathbf{D}$ -matrisen blir därmed

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \quad (2.86)$$



### 2.3.4 Längdutvidgning

Längdutvidgningskoefficienten  $\alpha$  är en funktion av stålets temperatur och ses i figur 2.11. Det beskriver ett materials benägenhet att utvidga sig och mäts i enheten  $K^{-1}$ .

För  $20^\circ\text{C} \leq T_s < 750^\circ\text{C}$  :

$$\frac{\Delta l}{l} = 1.2 \cdot 10^5 \cdot T_s + 0.4 \cdot 10^{-8} \cdot T_s^2 - 2.416 \cdot 10^{-4} \quad (2.87)$$

För  $750^\circ\text{C} \leq T_s < 860^\circ\text{C}$  :

$$\frac{\Delta l}{l} = 1.1 \cdot 10^{-2} \quad (2.88)$$

För  $860^\circ\text{C} \leq T_s < 1200^\circ\text{C}$  :

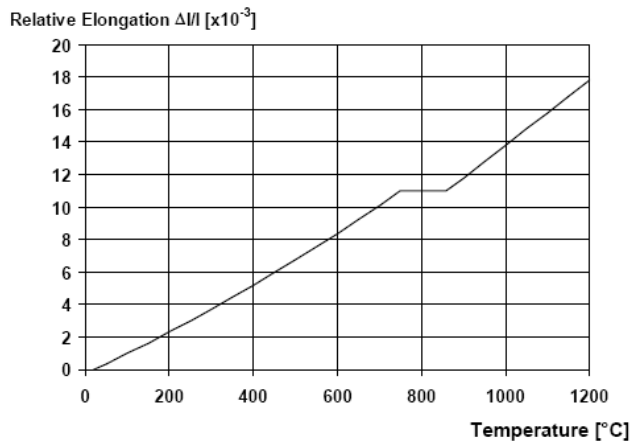
$$\frac{\Delta l}{l} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot T_s - 6.2 \cdot 10^{-3} \quad (2.89)$$

Där:

$l$  är längden vid  $20^\circ\text{C}$ ;

$\Delta l$  är förlängningen orsakad av temperaturökningen;

$T_s$  är stålets temperatur [ $^\circ\text{C}$ ].



Figur 2.11: Värmeutvidgning för stål som funktion av temperaturen [7]

Vid de flesta enklare beräkningar kan man anta att utvidgningen är konstant och därför kan man använda,

$$\frac{\Delta l}{l} = 14.1 \cdot 10^{-6}(T_s - 20) \quad (2.90)$$

### Termiska töjningar

Ekvation (2.84) ger att om inga spänningar existerar så finns inte heller några töjningar [14]. Det finns emellertid situationer då töjningarna är skilda från noll medan spänningarna är noll vilket ses i ekvation (2.91)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (2.91)$$

där  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  kallas för de initiala töjningarna [14]. Från ekvation (2.84) är det känt att  $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$ . Om detta kombineras med föregående ekvation får man

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \quad (2.92)$$

Ett fall är då de initiala töjningarna är de termiska töjningarna. Då ett material är fritt att expandera kommer spänningarna att vara noll och de termiska töjningarna kommer då att ges av

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \alpha \Delta T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

där  $\alpha$  är längdutvidgningskoefficienten och  $\Delta T$  är förändringen i temperatur [14]. Om ekvation (2.81), (2.93) och (2.92) kombineras ges enligt [14]

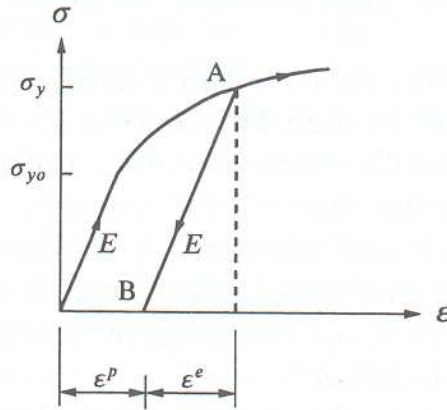
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (2.94)$$

där

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{\alpha E \Delta T}{1 - 2\nu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

### 2.3.5 Plasticitet

Plasticitetsteorin beskriver det tidsoberoende beteendet som är olinjärt och där plastiska töjningar finns kvar efter det att materialet är avlastat. Beteendet hos ett elasto-plastiskt material kan ses i figur 2.12.



Figur 2.12: Respons från ett elasto-plastiskt material [13]

Det sägs att materialet hårdnar då flytspänningen ökar med de plastiska deformationerna. Den initiala flytspänningen definieras som [13]

$$F(\sigma) = 0 \quad (2.96)$$

Eftersom flytspänningen varierar med de plastiska deformationerna kan den rådande spänningen uttryckas i form av en flytfunction [13]

$$f(\sigma, K_1, K_2, \dots) = 0 \quad (2.97)$$

där  $K_1, K_2, \dots$  är parametrarna som beskriver materialets hårdnande. Följande notation används

$$K_\alpha = \text{Hårdnandets parametrar} \quad (\alpha = 1, 2, \dots) \quad (2.98)$$

$$K_\alpha = 0 \quad \text{Initialt} \quad (2.99)$$

Materialets hårdnande beror alltså på hur parametrarna  $K_\alpha$  väljes.

Materialets tillstånd beskrivs av de interna variablerna  $\kappa_\alpha$ . De interna variablerna memorerar den plastiska lasthistoriken hos materialet. Då de interna variablerna betecknar ett elasto-plastiskt material fås [13]

$$K_\alpha = K_\alpha(\kappa_\beta) \quad (2.100)$$

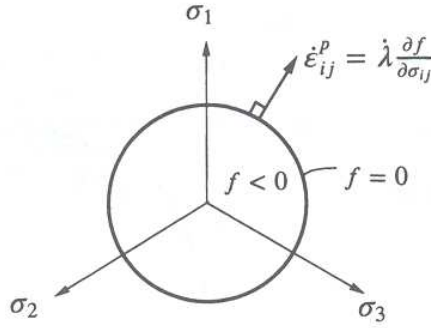
där antalet parametrar som beskriver hårdnandet är lika med antalet interna variabler. Antag att en potentialfunktion existerar likt flytfunktionen,  $f(\sigma, K_\alpha)$  [13]

$$g = g(\sigma, K_\alpha) \quad (2.101)$$

Potentialekvationen beror då på samma parametrar som flytfunktionen. Enligt den så kallade flödesregeln fås [14]

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma}; \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (2.102)$$

Flödesregeln säger att riktningen av  $\dot{\varepsilon}^{pl}$  ges av gradienten  $\partial g / \partial \sigma$  där den plastiska multipeln  $\dot{\lambda}$  bestämmer storleken av  $\dot{\varepsilon}^{pl}$ . Det vill säga den definierar den plastiska deformation som uppstår då en punkt i materialet inte längre uppträder linjärt, se figur 2.13.



Figur 2.13: Inkrementiella plastiska töjningar enligt von Mises yta i det deviatoriska planet [13].

Evolutionslagen definieras enligt följande [13]

$$\dot{\kappa}_\alpha = \dot{\lambda} k_\alpha(\sigma, K_\beta) \quad (2.103)$$

Den definierar hårdnandet på så sätt att flytdefinitionen förändras då plastiska deformationer uppkommer.

Den plastiska modulen  $H$  definieras enligt [13]

$$H = - \frac{\partial f}{\partial K_\alpha} \frac{\partial K_\alpha}{\partial \kappa_\beta} k_\beta \quad (2.104)$$

Den elasto-plastiska tangentiella styvhetsmatrisen,  $\mathbf{D}^{ep}$ , beror på spänningstillståndet  $\sigma$ , de hårdnande parametrarna  $K_\alpha$  och den plastiska modulen  $H$ . Notera att  $\mathbf{D}^{ep}$  varken beror på tidsderivatan av spänningen eller töjningen. Relationen är således inkrementell linjär enligt

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} \cdot \dot{\varepsilon} \quad (2.105)$$

### Von Mises plasticitetsmodell

Enligt von Mises modell är den initiala flytspänningen lika oberoende om materialet belastas i tryck eller drag. Detta stämmer väl överens med hur stål beter sig. Vid isotropiskt hårdnande enligt von Mises så ökar flytspänningen med ökande plastiska töjningar. Det vill säga  $K(\kappa)$  enligt (2.100) ökar med de plastiska deformationerna. Isotropt hårdnande för en godtycklig flytfunction blir [13]

$$f(\sigma, K_\alpha) = F(\sigma) - K \quad (2.106)$$

som säger att för isotropt hårdnande så förblir position och form konstant medan storleken av flytspänningen förändras med de plastiska deformationerna.

### 2.3.6 Krypning

Krypning är den långsamma plastiska deformationen hos metaller som inträffar under konstant spänning. Krypningen kan ge upphov till brott mycket tidigare än vad som är angivet som brottlast. Krypningen gör sig speciellt påmind vid temperaturer över 400°C [11].

De tidsberoende töjningarna är ickeproportionellt relaterade till spänningen. Som tidigare nämnt ger en tillräckligt hög temperatur eller spänning upphov till krypning. Enligt [13] uppstår krypning för metaller då

$$\frac{\theta}{\theta_M} > 0.3 - 0.4 \quad \Rightarrow \quad \text{Krypning} \quad (2.107)$$

där,

$\theta$  är den absoluta temperaturen [K]

$\theta_M$  är smälttemperaturen. [K]

För stål med smälttemperaturen 1800 K ( $\approx 1500^\circ\text{C}$ ) inträffar krypning vid temperaturer över 270° – 450°C [13].

Vid konstant temperatur och konstant spänning ges,

$$\varepsilon^{kr} = \varepsilon^{kr}(\sigma, last, \theta) \quad (2.108)$$

där lasten är tidsberoende. Med tidsberoende last fås istället,

$$\varepsilon^{kr} = \varepsilon^{kr}(\sigma, t, \theta) \quad (2.109)$$

De krypmodeller som finns är ofta av mycket komplex form för att experimentell data ska passa. En vanlig krypmodell som används är enligt [13] Power Law och kan skrivas som

$$\varepsilon^{kr} = A \left( \frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^n \left( \frac{t}{t^*} \right)^m e^{-\frac{Q}{R\theta}} \quad (2.110)$$

där  $A$ ,  $n$ ,  $m$  och  $Q$  är materialparametrar,  $\sigma^*$  och  $t^*$  är godtyckliga referensenheter.

## 2.4 Lösning av statisk olinjär analys

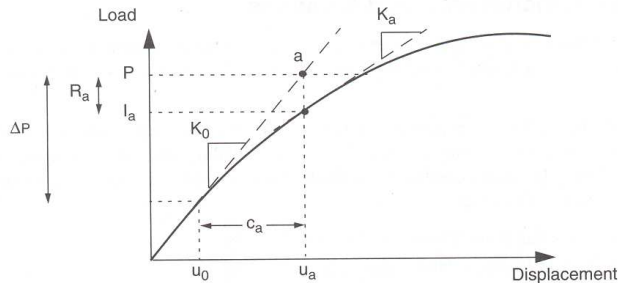
Vid deformationsanalysen kommer stålets olinjära beteende i form av plasticitet och geometrisk olinjäritet att beaktas. Vid dessa beteenden så är inte kraft-förskjutningen längre linjär. Styvheten är således beroende av förskjutningen. Vid en olinjär analys måste därför styvhetsmatrisen assembleras och inverteras flera gånger under beräkningens gång vilket gör att den kräver betydligt mer datorkraft än en vanlig linjär analys.

De externa krafterna,  $\mathbf{p}$ , och de interna nodala krafterna,  $\mathbf{i}$ , som verkar på en kropp måste vara lika stora för att kroppen ska vara i jämvikt. Det vill säga att nettokraften som verkar på varje nod är noll så att [8]

$$\mathbf{p} - \mathbf{i} = 0 \quad (2.111)$$

ABAQUS använder sig av Newton-Raphsons lösningsalgorithm vid olinjära problem. Metoden går ut på att lasten appliceras gradvis och en lösning räknas fram inkrementell. Beräkningen delas därför upp i ett antal lastinkrement som approximativt, var för sig, är i jämvikt i slutet av varje lastinkrement. Det kan krävas flera iterationer för att finna en godtagbar lösning till ett givet inkrement. Summan av alla inkrement är den approximativa lösningen till den olinjära beräkningen [8].

Den olinjära responsen av ett litet lastinkrement  $\Delta\mathbf{p}$  kan ses i figur 2.14. Strukturens

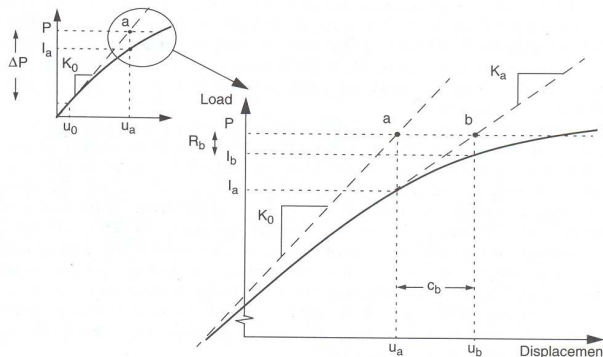


Figur 2.14: Första iterationen i ett inkrement [8]

initiala styvhet  $\mathbf{K}_0$  vid  $u_0$  och  $\Delta\mathbf{p}$  används för att räkna ut en förskjutningskorrektur,  $c_a$ .  $c_a$  används sedan för att räkna ut förskjutningen  $u_a$ . En ny styvhet,  $\mathbf{K}_a$ , beräknas sedan vid den uppdaterade förskjutningen  $u_a$ . Samtidigt beräknas  $\mathbf{i}_a$ . Skillnaden mellan  $\mathbf{i}_a$  och den totala pålagda lasten  $\mathbf{p}$  är [8]

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{p} - \mathbf{i}_a \quad (2.112)$$

där  $\mathbf{r}_a$  är den överblivna kraften. Vid en olinjär analys är det i princip omöjligt för  $\mathbf{r}_a$  att vara lika med 0. Därför jämförs  $\mathbf{r}_a$  med ett toleransvärde och om  $\mathbf{r}_a$  är mindre än detta så accepteras den uppdaterade jämviktslösningen. Dock måste ett villkor till vara uppfyllt för att gå vidare i analysen. Nämligen att  $c_a$  är liten i förhållande till den totala inkrementiella förskjutningen, mindre än 1 %. Om dessa båda villkor är uppfyllda sägs lösningen ha konvergerat. Om lösningen från en iteration inte har konvergerat genomförs en ny iteration för att få de interna och externa krafterna i balans. Nästa iteration använder den nya styvheten  $\mathbf{K}_a$  tillsammans med  $\mathbf{r}_a$  för att bestämma en ny förskjutningskorrektur  $c_b$  som för systemet närmare jämvikt [8], se figur 2.15.



Figur 2.15: Andra iterationen i samma inkrement [8]

Varje iteration räknar ut en ny styvhetsmatris för systemet och löser ekvationerna. Något som kan jämföras med vid linjär analys där enbart en styvhetsmatris sätts ihop för att sedan lösa systemet. Datorkraften det tar att lösa ett olinjärt system blir därför mycket större.

### 2.4.1 Dämpningskoefficient

Olinjära statiska problem kan vara instabila. Dessa instabiliteter kan vara av geometrisk karaktär såsom buckling, eller materiella såsom plasticitet. Om dessa instabiliteter förekommer i en global kraft-förskjutningsrespons med en negativ styvhet kan problemet studeras med en bucklingsanalys. Men om dessa instabiliteter förekommer lokalt kommer där bli en lokal överföring av töjningsenergi från en del av modellen till dess närliggande grannar och en global lösningsmetod fungerar inte. Dessa problem måste antingen lösas dynamiskt eller med införande av en artificiell dämpning.

Viskösa krafter introduceras som är tillräckligt stora för att förhindra direkt buckling eller kollaps men tillräckligt små för att inte påverka beteendet hos modellen så

länge den är stabil. Den viskösa kraften beräknas som [10]

$$\mathbf{f}_v = c\mathbf{M}\mathbf{v} \quad (2.113)$$

och adderas till de globala jämviktsekvationerna

$$\mathbf{p} - \mathbf{i} - \mathbf{f}_v = 0 \quad (2.114)$$

där  $\mathbf{M}$  är den artificiella massmatrisen,  $c$  är dämpningsfaktorn och  $\mathbf{v}$  är en vektor innehållande nodhastigheterna [10].

Medan modellen är stabil är de viskösa krafterna små och därför också den försvinnande viskösa energin väldigt liten. Den artificiella dämpningen har då ingen effekt. Om en lokal region skulle bli instabil ökar de lokala hastigheterna och delar av den frigjorda töjningsenergin tas upp av den tillförda dämpningen. Dämpningsfaktorn,  $c$ , bestäms genom att den extrapolerade försvunna energin är en bråkdel av den extrapolerade töjningsenergin. Dämpningsfaktorn bör anges i storleksordningen  $2 \cdot 10^{-4}$  [10].



## 2.5 Bucklingsanalys

En struktur kan buckla till följd av kollaps på grund av instabilitet i strukturen. Detta sker ofta i slanka strukturer som tryckbelastas axiellt, d.v.s strukturer som är styva men som vid en liten deformation tappar sin styvhet och böjer av plötsligt. För att kontrollera det fenomenet genomfördes en bucklingsanalys i ABAQUS d.v.s. ett egenvärdesproblem löses. Laster för när styvhetsmatrisen blir singulär sökes så att problemet

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = 0 \quad (2.115)$$

har icke triviala lösningar.  $\mathbf{K}$  är styvhetsmatrisen då lasterna är pålagda och  $\mathbf{v}$  är de icke triviala förskjutningslösningarna.

ABAQUS definierar en inkrementell last  $\mathbf{q}$  som skalas med en lastmultipel  $\lambda_i$ . Egenvärdesproblemet blir enligt [10]

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda_i \mathbf{K}_\Delta) \mathbf{v}_i = 0 \quad (2.116)$$

där

$\mathbf{K}_0$  är styvhetsmatrisen inkluderat föregående laster, om några;

$\mathbf{K}_\Delta$  är de differentiella initiala spänningarna och styvhetsmatrisen orsakad av lasten  $\mathbf{q}$ ;

$\lambda_i$  är egenvärdena;

$\mathbf{v}_i$  är bucklingsmoderna (egenvektorena);

$i$  refererar till den  $i$ :te bucklingsmoden.

Den kritiska bucklingslasten är alltså

$$\mathbf{p} + \lambda_i \mathbf{q} \quad (2.117)$$

där  $\mathbf{p}$  är den innan pålagda lasten.  $\lambda_i$  talar alltså om när den kritiska lasten är uppnådd och dess lägsta värde är normalt av intresse.

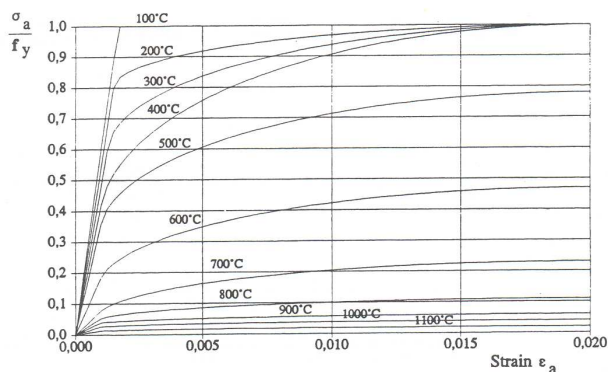


# Kapitel 3

## Modellering i ABAQUS

### 3.1 Analys av enkel balkmodell

För att utveckla beräkningsmetodik gjordes först en inledande analys av en fritt upplagd fyrkantsprofil på två stöd. Profilens dimensioner angavs till 200x200x8 mm och dess längd till 2 m. Temperaturberoende värden på stålets konduktivitet, specifika värmekapacitet, elasticitet, längdutvidgningskoefficient, plasticitet och krypning anges. Stålet är enligt uppgift från EAB S355 och dess spänning-deformationskurva återfinns i Eurocode 3 enligt [7], se figur 3.1. Värden på de elastiska och plastiska töjningarna ges för temperaturer upp till 1100°C. Detta görs inledande för att utveckla en beräkningsmetodik som kan användas för den större modellen.



Figur 3.1: *Relativt endimensionellt spänning-töjnings samband för S355 stål vid olika temperaturer [7]*

### 3.1.1 Materialparametrar

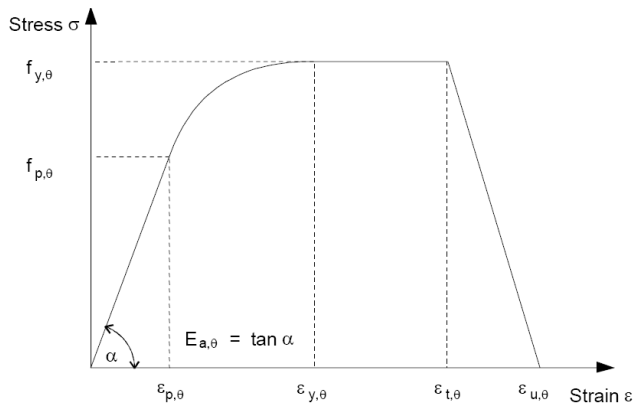
#### Elasticitet och termisk töjning

Elasticitetssambandet anges som en temperaturberoende elasticitetsmodul enligt tabell 3.1 samt värde för tvärkontraktionstalet som antas vara konstant under brandförloppet. Den temperaturberoende längdutvidningskoefficienten  $\alpha$  enligt avsnitt 2.3.3 anges i ABAQUS för att räkna ut de termiska töjningarna. Se bilaga A för indata.

#### Plasticitet

Stålet kommer att plasticeras efter det att flytspänningen uppnåtts. Den initiala flytspänningen är definierad som spänningen där lutningen på kurvan i spänning-töjningsdiagrammet inte längre är linjär, se figur 3.1. Den efterföljande töjningen är således både elastisk och plastisk. Den plastiska töjningen fås genom att dra ifrån den elastiska töjningen från den totala töjningen, se figur 3.2.

$$\varepsilon^{pl} = \varepsilon^{tot} - \varepsilon^{el} = \varepsilon^{tot} - \sigma/E \quad (3.1)$$



<b>Key:</b>	$f_{y,\theta}$	effective yield strength;
	$f_{p,\theta}$	proportional limit;
	$E_{a,\theta}$	slope of the linear elastic range;
	$\varepsilon_{p,\theta}$	strain at the proportional limit;
	$\varepsilon_{y,\theta}$	yield strain;
	$\varepsilon_{t,\theta}$	limiting strain for yield strength;
	$\varepsilon_{u,\theta}$	ultimate strain.

Figur 3.2: Spännings-töjningssamband för stål [7]

I tabell 3.1 kan reduktionsfaktorn för elasticitetsmodulen samt flytspänningen ses vid olika temperaturer. Tabulerade värden för spänning- töjningsdiagrammet kan ses i bilaga C. Med hjälp av tabell 3.1 och tabulerade värden för spänningen utmed kurvan i figur 3.1 kan den elastiska töjningen beräknas med hjälp av Hookes lag längs med hela kurvan vid de olika temperaturerna. Ekvation 3.1 används sedan för att beräkna de plastiska töjningarna utmed spännings- töjningsdiagrammet. Det är dessa plastiska töjningar utmed spännings- töjningsdiagrammet som anges som indata till ABAQUS. Detta sker för temperaturer upp till 900 grader Celsius. Se bilaga A för alla data.

Steel Temperature $\theta_a$	Reduction factors at temperature $\theta_a$ relative to the value of $f_y$ or $E_a$ at 20°C		
	Reduction factor (relative to $f_y$ ) for effective yield strength $k_{y,\theta} = f_{y,\theta}/f_y$	Reduction factor (relative to $f_y$ ) for proportional limit $k_{p,\theta} = f_{p,\theta}/f_y$	Reduction factor (relative to $E_a$ ) for the slope of the linear elastic range $k_{E,\theta} = E_{a,\theta}/E_a$
20°C	1,000	1,000	1,000
100°C	1,000	1,000	1,000
200°C	1,000	0,807	0,900
300°C	1,000	0,613	0,800
400°C	1,000	0,420	0,700
500°C	0,780	0,360	0,600
600°C	0,470	0,180	0,310
700°C	0,230	0,075	0,130
800°C	0,110	0,050	0,090
900°C	0,060	0,0375	0,0675
1000°C	0,040	0,0250	0,0450
1100°C	0,020	0,0125	0,0225
1200°C	0,000	0,0000	0,0000

Tabell 3.1: Reduktionsfaktorer för spänning- töjningssamband för stål vid olika temperaturer [7]

## Krypning

Den viskoplastiska modell som används för att simulera den temperaturberoende krypningen hos balken finns beskriven i avsnitt 2.3.6. Värden för materialparametrarna kan ses i bilaga A.

### Termiska materialparametrar

De termiska materialparametrarna anges i ABAQUS som temperaturberoende konduktivitet och specifik värmekapacitet enligt avsnitt 2.2. Se bilaga A för dessa värden på ovanstående storheter.

### 3.1.2 Randvillkor

Balken modelleras som fritt upplagd mellan 2 stöd. En momentan temperatur på 800°C under 10 minuter läggs på undersidan av balken. Ut ur balken sker inget värmefflöde vilket kan tolkas som att den är isolerad.

### 3.1.3 Laster

Balken utsätts för en utbredd last på 50 kN/m<sup>2</sup> på dess ovasida samt sin egentyngd.

### 3.1.4 Elementtyp

Beräkningen utförs som en kopplad temperatur och förskjutningsberäkning. Vid en sådan beräkning tillåts de mekaniska och termiska egenskaperna att bero på varandra och beräknas samtidigt [9]. Vid denna analys så beror dock ej temperaturfältet av töjningsfältet.

Ett kopplat temperatur-förskjutnings element har frihetsgrader för både förskjutning och temperatur. Vid beräkning av elementets geometri och förskjutning används linjär interpolation [9].

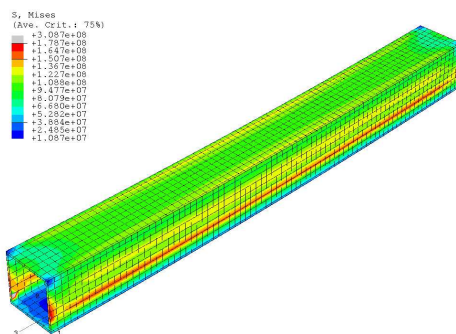
Solida element används för statisk linjär analys och för icke-linjära analyser såsom vid plasticitet och geometrisk olinjäritet. Ett kopplat temperatur-förskjutnings solidelement passar därför till beräkningen. Det solidelement som används kallas för C3D8T (sex sidor och åtta noder) [9].

- C - spännings/förskjutnings element
- 3D - 3D-spänning
- 8 - antal noder
- T - kopplad temperatur-förskjutning

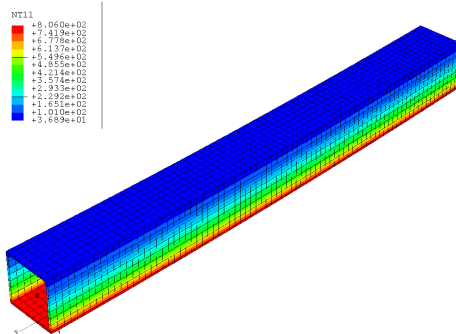
Sexsidiga element ger en lösning med tillräcklig noggrannhet och har dessutom en bättre konvergens än trianglar och tetraedrar [9].

### 3.1.5 Resultat

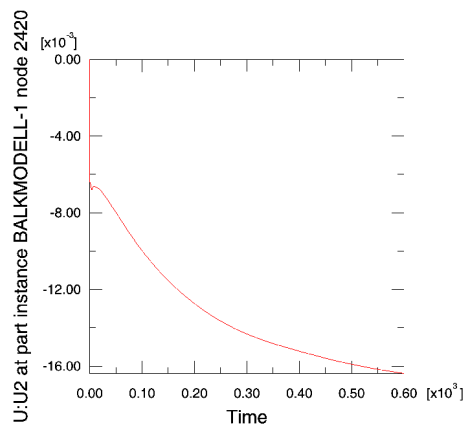
Balkmodellens von Mises spänning, temperaturfördelning och nedböjning visas i figurerna 3.3-3.5. I figur 3.5 kan man se nedböjningen som funktion av tiden som ligger på cirka 16 mm efter 10 minuter. Dessa resultat visar att beräkningsmetodiken fungerar.



Figur 3.3: von Mises spänningar vid beräkningens sista steg



Figur 3.4: Temperatur under beräkningens sista steg



Figur 3.5: Nedböjningen som funktion av tiden



# Kapitel 4

## Analyserade strukturer

### 4.1 Fackverksbalk

En fackverksbalk på 24 meter upplagd på 2 stöd ska analyseras för samtidig brand och lastpåverkan där ritningen har fått av EAB, se bilaga B för ritning av balken. Balken består av S355 konstruktionsstål med materialparametrar enligt kapitel 2. S-avståndet mellan balkarna antas vara 6 meter. Nedanstående bild visar en liknande balk som ska analyseras.

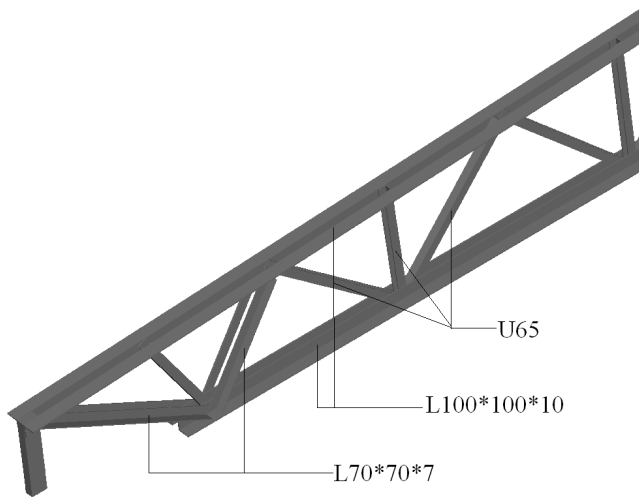
Det ovanliggande plåttaket är stabiliserande för fackverksbalkarna där taket är fastspikat i balken med jämna mellanrum. I regel brandskyddas detta tak med cirka 50 mm mineralull på undersidan. Balkarna har således kvar sin stagning under hela brandförloppet om detta brandskydd samt spikarna antas vara intakta.



Figur 4.1: Foto på en fackverksbalk i stål

### 4.1.1 Geometri

Fackverksbalken är 24 meter lång, 1.494 meter som högsta mittpunkt och 0.75 meter vid stödet vilket ger en lutning på 3.58 grader. Balkens över- och underarm är uppbyggd av två stycken L100 × 100 × 10 mm profiler. Diagonalerna är av typ U65 och ändstängerna av typ L70 × 70 × 7 mm, se figur 4.2. De olika balkdelarna är svetsade mot varandra.



Figur 4.2: Balkens olika strukturelement

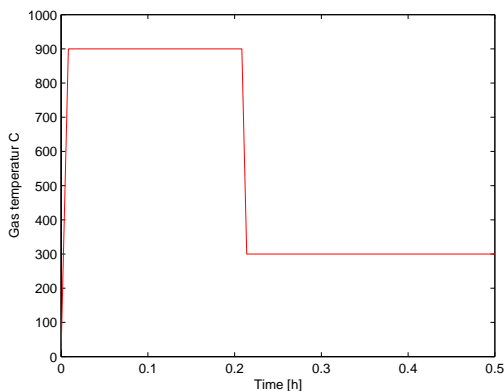
### 4.1.2 Lastfall

Byggnaden i vilken balken ska uppföras antas befinna sig i snözon 1.5 och lastkombination 7 som gäller vid brand används [2].

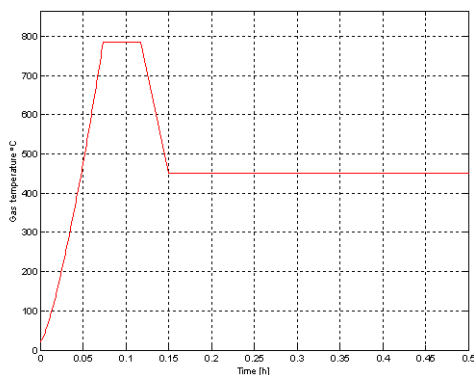
$$q_k = 1.0G_k + 1.0\psi Q_k + 1.0Q_{ak} \quad (4.1)$$

Det ger en last på 46000 Pa per balk, egentygnd ej medräknat, om s-avståndet på 6 meter antas.  $Q_{ak}$  är en termisk last som bestäms av vilken brandkurva som påverkar balken.

Fackverksbalken ska analyseras för ett antal olika brandscenarioer med två olika brandkurvor. En kurva är från den tidigare nämnda kraftiga branden orsakad av brand i en chipshylla. Den andra kurvan är en mildare och en mer trolig brandkurva framtagen av FSD där det brinner 3 meter under balken. Se figur 4.3 och 4.4 för gastemperaturen som funktion av tiden.



Figur 4.3: Gastemperatur som funktion av tiden vid den kraftiga branden



Figur 4.4: Gastemperatur som funktion av tiden vid den milda branden

Det första scenariot är en brand i ett stallage som inte sprider sig. Detta stallage befinner sig vid mitten av balken som utsätts för en 8 meter bred flamma. Det andra scenariot är en brand som sprider sig från stallage till stallage längs med balken. Branden i ett stallage antas vara i 10 minuter innan det sprids till nästa stallage som befinner sig 8 meter bort. Detta medför således 3 stycken stallagebränder som varar sammanlagt i 30 minuter. Eftersom branden börjar vid stödet på balken innefattar den även brand i ett stallage vid stöd.



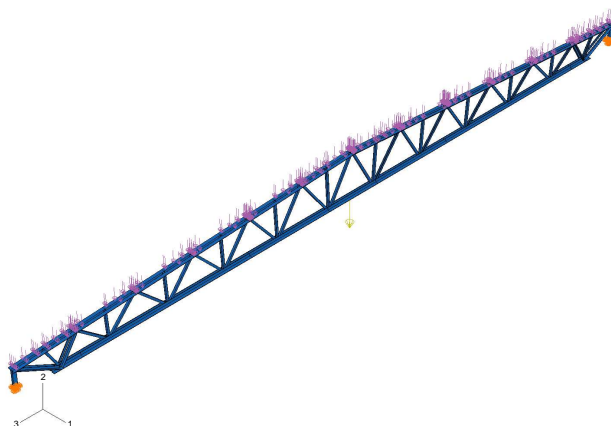
# Kapitel 5

## Finita elementanalyser

### 5.1 Introduktion

En fackverksbalk med en längd av 24 meter, upplagd på två stöd analyserades med hjälp av det kommersiella finita elementprogrammet ABAQUS. Balken är vanlig i takkonstruktioner med s-avståndet 6 meter. Balken består av S355 stål. Beräkningen tar hänsyn till att alla materialparametrar är temperaturberoende samt olinjäritet vilket medför att strukturen tillåts genomgå stora geometriska förändringar samt plasticeras.

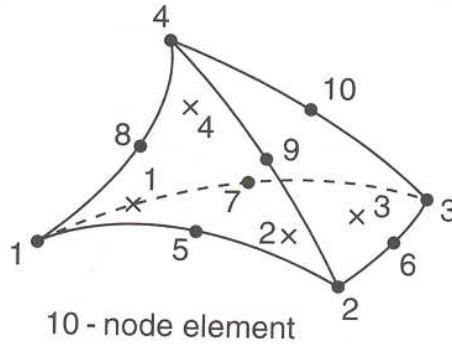
Först genomförs en bucklingsanalys för att kontrollera den kritiska bucklingslasten för strukturen. Därefter genomförs en transient värmeanalys för att beräkna temperaturen i balken som funktion av tiden. Dessa temperaturer används som indata till deformationsanalysen som sedan genomförs. Avslutningsvis presenteras och diskuteras resultaten av bucklingsanalysen och deformationsanalysen.



Figur 5.1: *Modell av balken i ABAQUS*

## 5.2 Elementindelning

Balken delas in i 3 dimensionella modifierade tetraeder element med kvadratisk approximation samt 10 noder och 4 integrationspunkter, se figur 5.2.



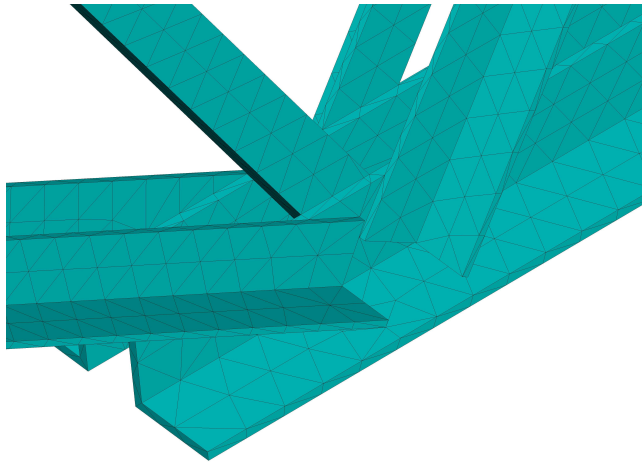
Figur 5.2: 10 - nods tetraederelement [9]

Eftersom metallers plastiska deformation är inkompressibel medför detta att många fullt integrerade andrags element påverkas av så kallad "volumetric locking". Detta p.g.a. att vid modellering av inkompressibla material fås en kinematisk låsning till elementen. Detta innebär att volymen av elementen förblir konstant vid integrationspunkterna. När dessa element inte kan lösa upp låsningarna medför det en alltför styv respons hos strukturen. De modifierade andrags tetraedra elementen undviker detta problem till stor del [8].

Tetraeder element med linjär approximation bör undvikas vid spänningsanalyser eftersom de generellt är för styva och uppvisar en långsam konvergens vid förfining av elementnätet. Ett extremt fint nät är då nödvändigt för att ge ett korrekt resultat [9].

Tetraeder element är valt eftersom det är en relativt komplex struktur som ska elementindelas. Dessa element är allsidiga och många automatiska elementindelningssgoritmer hanterar enbart tetraeder element. Dock medför ett bra nät av hexaeder element en likvärdig noggrannhet till en lägre beräkningskostnad [9].

Samma struktur och antal element används både vid temperatur och deformationsanalysen. Kvadratiske modifierade tetraeder element används således även vid temperaturberäkningen. Detta för att få temperaturen vid samma antal noder och på samma position som vid spänningsanalysen. För ett erhålla ett bra resultat delades balken in i 113320 element. Se figur 5.3 för en bild av elementnätet.

Figur 5.3: *Elementindelning av balken*

## 5.3 Bucklingsanalys

En struktur kan buckla till följd av kollaps på grund av instabilitet i strukturen. Detta sker ofta i slanka strukturer som tryckbelastas axiellt, d.v.s strukturer som är styva men som vid en liten deformation tappar sin styvhet och böjer av plötsligt. För att kontrollera det fenomenet genomfördes en bucklingsanalys i ABAQUS för att finna den kritiska bucklingslasten. Kritisk bucklingslast är

$$q_{cr} = \lambda_i q \quad (5.1)$$

En utförligare beskrivning av bucklingsanalysen återfinnes i avsnitt 2.5.

### 5.3.1 Randvillkor

Fyra stycken bucklingsanalyser genomfördes på balken som i samtliga fall var fast inspänd vid stöden. Det som skiljde de olika analyserna åt var hur balken var stagad. Det vill säga på vilket sätt förskjutningarna var föreskrivna i 1-riktningen enligt figur 5.1. Notera att dessa analyser genomfördes enbart med elasticitetsmodellen vid rumstemperatur då balken har sin maximala hållfasthet. De 4 randvillkoren var

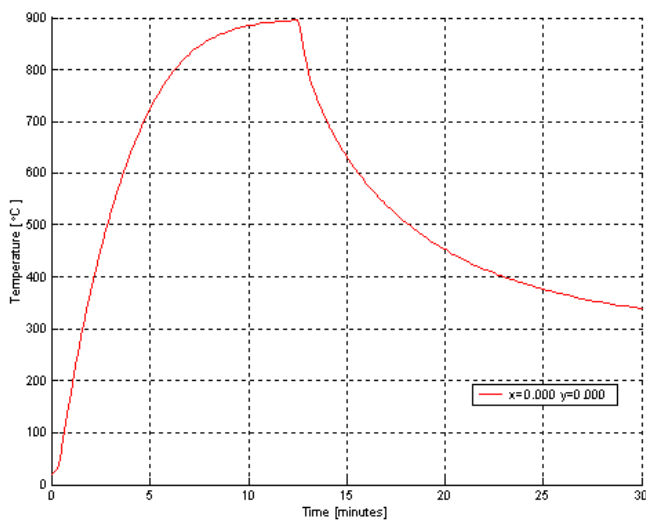
- Balken är inte stagad, d.v.s. fri att böja ut längs med hela balken. Detta för att finna den kritiska bucklingslasten vid en ostagad balk.
- Balken är stagad över hela sin längd.
- Balken är endast stagad de sista 16 meterna. Staget har alltså släppts de första 8 meterna på balken där eldflamman antas verka.
- Balken är ej stagad längs med 8 meter under balkens mitt.

## 5.4 Transient värmeanalys

Vid den transienta värmeanalysen beräknades temperaturspridningen i balken under diverse olika brandfall. Värmespridningen i balken sker i form av konduktion där alla ingående storheter är temperaturberoende. Utdata av intresse från denna analys är temperaturfördelningen i noderna under hela tidsförloppet.

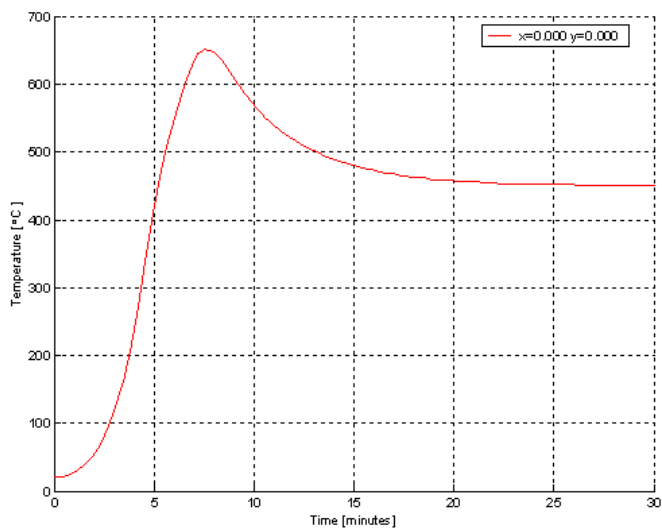
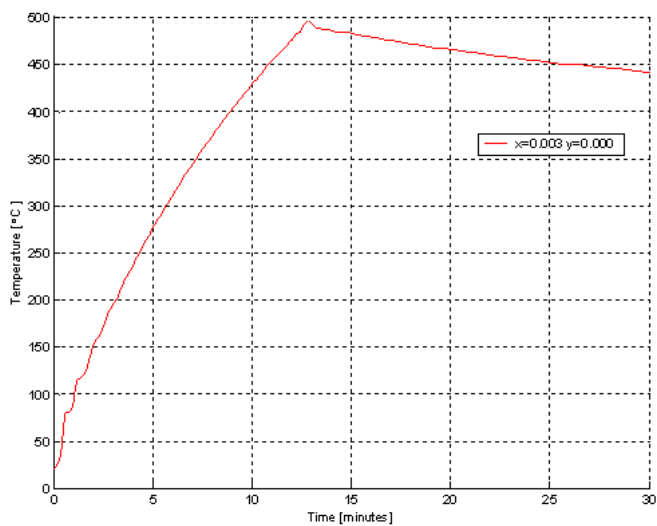
### 5.4.1 Randvillkor

Randvillkoren vid dessa analyser var de beskrivna brandkurvorna enligt avsnitt 4.1.2. Dock avser kurvorna i det avsnittet gastemperaturen och inte temperaturen på randen i stålet. FSD har därför också tagit fram kurvor för ståltemperaturen vid de olika brandfallen som funktion av tiden, se figur 5.4 och 5.5. Temperaturutvecklingen i ett brandskyddsmålat stål som funktion av tiden under exponering av den kraftigare branden kan ses i figur 5.6.



Figur 5.4: Temperaturutveckling i stålet vid den kraftiga branden.



Figur 5.5: *Temperaturutveckling i stålet vid den milda branden*Figur 5.6: *Temperaturutveckling i ett brandskyddat stål exponerat av den kraftiga branden*

## 5.5 Deformationsanalys

Deformationsanalysen gjordes med materialdata enligt kapitel 2.3 och temperaturfältet från den transienta värmeanalysen. Den statiska deformationen är olinjär vilket medför att stålet tillåts att plasticera samtidigt som strukturen tillåts att genomgå stora geometriska förändringar. Utdatan av intresse vid denna analys är förskjutningarna hos strukturen som funktion av tiden och temperaturen.

### 5.5.1 Randvillkor

Balken analyserades för ett antal olika randvillkor enligt figur 5.1. Vid alla analyserna modellerades balken som fritt upplagd med rullager. Randvillkoren som skiljde analyserna åt var huruvida balken var fri att böja ut i 1-riktning på samma sätt som är beskrivet i avsnitt 5.3.1. Dessa finns även sammanfattade i tabell 5.1.

### 5.5.2 Laster

Balken belastades med en utbredd last på dess ovansida i form av en ytkraft med lodrät normalvektor i det globala koordinatsystemet. Denna last är räknades fram enligt lastfall 7 för samtidig last och brandpåverkan som gav en last på 46000 Pa. Lasten reducerades också vid en analys för att kontrollera balkens förmåga att klara en mildare brand, se tabell 5.1 för en sammanfattning. Balkens egenvikt på  $7850\text{kg}/\text{m}^3$  medtogs också i beräkningarna.

## 5.6 Lösningmetod

Deformationen hos strukturen beror på temperaturfältet medan temperaturfördelningen beror i sin tur inte på deformationerna hos strukturen. Med hänsyn till detta löstes problemet i två steg. Först beräknades temperaturfördelningen i en transient värmeanalys. Temperaturen i noderna sparades som funktion av tiden i en fil som sedan användes som indata till den statiska analysen. Dessa temperaturer lades på som ett fördefinierat fält vid den statiska analysen. Både värmelednings- och den statiska analysen analyserades under ett tidsförlopp om 30 minuter. Den statiska analysen tog hänsyn till olinjära materialsamband samt geometrisk olinjäritet. En artificiell dämpning infördes vid några av analyserna för att kunna följa förloppet under en längre tidsperiod.

## 5.7 Analyserade brand- och lastfall

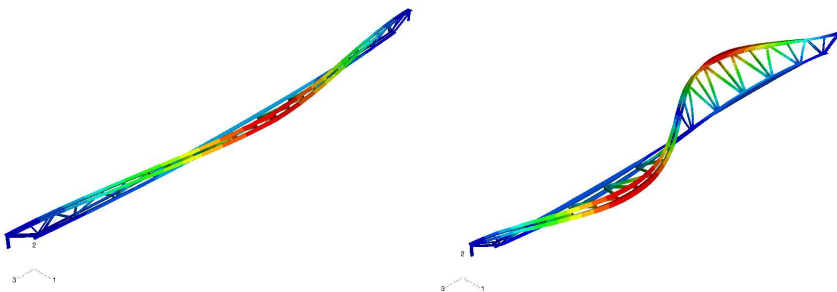
Balken analyserades för ett antal olika brand- och upplagsfall sammanfattade i tabell 5.1 där brandkurvorna finns beskrivna i avsnitt 4.2.1. Lastfallen som finns beskrivna i avsnitt 4.2.1 ska spegla en typ av kritiska fall. En brand som sker i mitten på balken där momentet är som störst och en brand som börjar vid stödet där tvärkrafterna är störst.

Fall	Last	Brandkurva	Startposition	Dämpningsfaktor	Stag
1.1	46000 Pa	Kraftig brand	Vänster stöd	Ingen	Fullt stagad
1.2	46000 Pa	Kraftig brand	Vänster stöd	$1 \times 10^{-5}$	Fullt stagad
1.3	46000 Pa	Kraftig brand	Vänster stöd	$2 \times 10^{-5}$	Fullt stagad
1.4	46000 Pa	Kraftig brand	Vänster stöd	$1 \times 10^{-4}$	Fullt stagad
2.1	46000 Pa	Mild brand	Vänster stöd	Ingen	Fullt stagad
2.2	46000 Pa	Mild brand	Vänster stöd	$1 \times 10^{-5}$	Fullt stagad
2.3	46000 Pa	Mild brand	Vänster stöd	$2 \times 10^{-5}$	Fullt stagad
2.4	46000 Pa	Mild brand	Vänster stöd	$1 \times 10^{-4}$	Fullt stagad
3	46000 Pa	Kraftig brand samt brand- skydd	Vänster stöd	Ingen	Fullt stagad
4	46000 Pa	Mild brand samt brand- skydd	Vänster stöd	Ingen	Fullt stagad
5	46000 Pa	Brandskyddad	Hela	Ingen	Fullt stagad
6	18400 Pa	Mild brand	Vänster stöd	Ingen	Fullt stagad
7	46000 Pa	Mild brand	Vänster stöd	Ingen	Ej stagad de första 8 m
8	46000 Pa	Kraftig brand	Balkmitt	Ingen	Ej stagad vid balkens mitt

Tabell 5.1: *Analyserade fall*

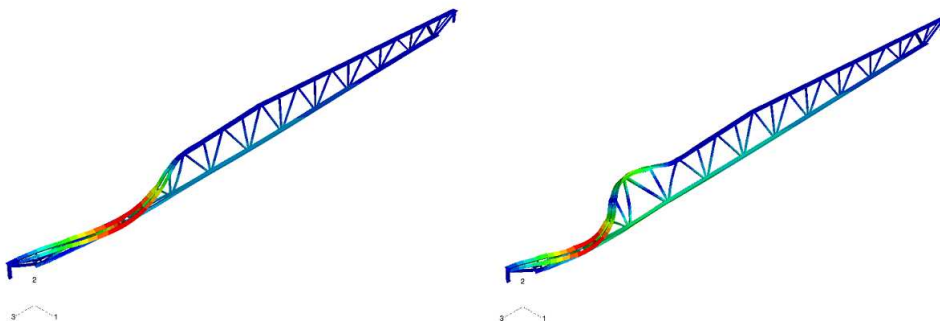
## 5.8 Resultat från bucklingsanalysen

Om balken ej stagas kommer den att buckla till följd av en direkt kollaps. Den första bucklingsmoden är vippning av balken och sker redan vid 0.33 gånger den totalt pålagda lasten. Nästa bucklingsmod sker vid 0.88 gånger den totalt pålagda lasten. Se figur 5.7.

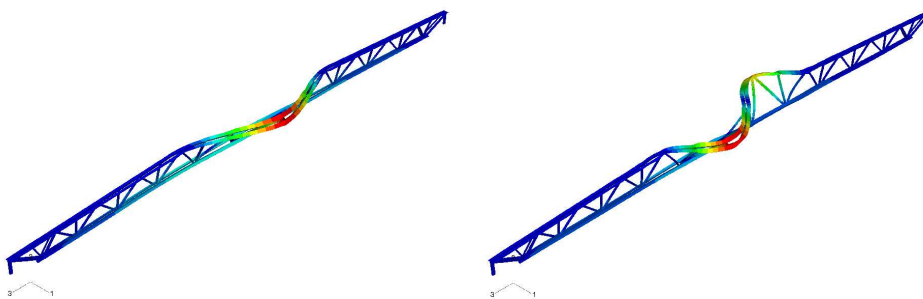


Figur 5.7: Första och andra bucklingsmoden enligt fall 1

Det kan konstateras att global buckling inte kommer vara ett problem då balken är helt stagad under hela förloppet eftersom bucklingslasten är nästan 7 gånger så stor som den totalt pålagda lasten. Om däremot taket inte är brandskyddat under hela brandförloppet kommer det att tappa en stor del av sin stagande effekt. Därför har, enligt fall 3 och 4, stagningen släppts där flamman antas verka på balken. Detta  $\lambda$ -värde ligger lägre än det för när balken är fullt stagad. Eftersom balken förlorar mycket av sin hållfasthet p.g.a. de höga temperaturerna i stålet kan man misstänka att balken kommer att kollapsa enligt den första bucklingsmoden i fall 3 och 4. Buckling enligt fall 3 och 4 kan ses i figur 5.8 och 5.9.



Figur 5.8: Första och andra bucklingsmoden enligt fall 3



Figur 5.9: Första och andra bucklingsmoden enligt fall 4

En sammanfattning av resultaten från bucklingsanalysen kan ses i tabell 5.2

Fall	Stagning	$\lambda_1$
1	Ingen	0.33
2	Fullt	6.88
3	Sista 16 meterna	2.59
4	Mitten fri	1.99

Tabell 5.2: Resultat från bucklingsanalysen

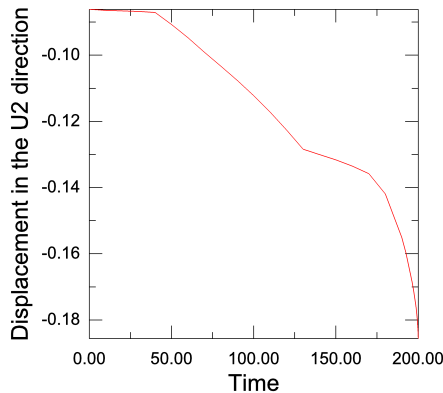
## 5.9 Resultat från värme- deformationsanalysen

I detta avsnitt genomförs först en diskussion om hur dämpningsfaktorn påverkar resultatet av analyserna och därefter presenteras resultaten för de olika analyserna som finns sammanfattade i tabell 5.1

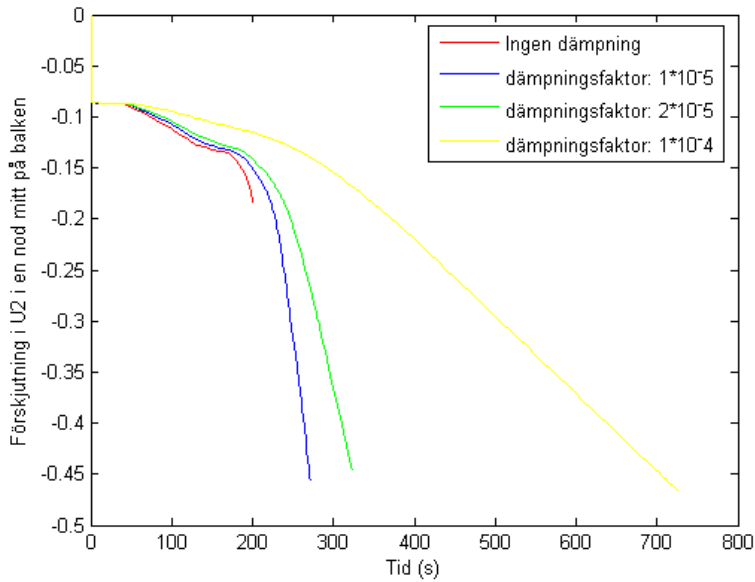
### 5.9.1 Stabilisator

Resultaten från deformationsanalysen varierar beroende på huruvida en dämpningsfaktor introducerades i beräkningarna samt vilket värde denna tog. I praktiken innebär detta att en plötslig kollaps av balken förhindras på grund av att en viskös kraft dämpar förskjutningarna. För en utförlig beskrivning hur dämpningsfaktorn fungerar se avsnitt 2.4.1.

En kontroll av hur stor dämpningsfaktorn gjordes i fall 1 enligt tabell 5.1. Balken beräknades för samma brandfall med 4 olika dämpningsfaktorer. En graf över hur nedböjningarna varierar som funktion av tiden vid de olika fallen kan ses i figur 5.10 och 5.11. Lutningen på grafen för fallet utan dämpning blir lodrät precis innan beräkningen avbryts. Detta tyder på att det sker en stor förskjutning på oändligt kort tid, d.v.s. balken tappar sin styvhet och kollapsar. Det är denna plötsliga förskjutning som dämpningsfaktorn förhindrar. Det kan konstateras att den lägsta dämpningen stämmer bäst överens med fallet utan dämpning. Målet är att kurvorna gällande beräkningarna med stabilisatorer ska sammanfalla med med kurvan där ingen hänsyn har tagits till någon dämpningsfaktor.



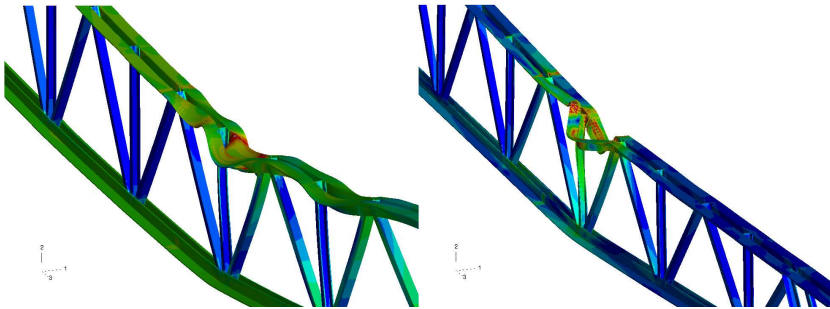
Figur 5.10: Förskjutningen i mitten på balken som funktion av tiden vid en kraftig brand utan dämpningsfaktor



Figur 5.11: Förskjutningen i mitten på balken som funktion av tiden enligt fall 1 med olika dämpningsfaktorer

För att få en tydligare bild av hur balken deformeras krävs det således att beräkningen genomförs med dämpning. Deformationen av balken syns då tydligt i skala 1:1. Dock går det att skala upp deformationerna som uppstår i balken och på så vis få en bild på var balken kommer att buckla även vid fallet utan dämpning. Det kan ses i figur 5.12 hur balken bucklar på samma ställe vid fallet utan och med dämpning. Däremot har den vänstra bilden skalats upp med en faktor 10 medan den högra är oskalad.

I den fortsatta presentationen kommer alla resultat hämtas från analyser som genomförs utan någon introducerad dämpning. Däremot så kommer deformationen av balken visas då den lägsta av dämpningsfaktorerna är medräknad för att få en tydlig bild av hur balken kommer att buckla och deformeras.



Figur 5.12: Förstoring av området där balken bucklar i fallet utan dämpning respektive med dämpning

### 5.9.2 Olika brand och lastfall

Nedan kommer resultaten från de olika provade fallen att presenteras i form av diagram för balkens nedböjning. Figurer för hur balken kommer att deformeras innan kollaps visas också. Kollaps antas ske vid den tidpunkt då beräkningen avbryts, där även lutningen på tids-förskjutningsgrafnen är lodrät, enligt tidigare diskussion i avsnitt 5.7.1.

#### Drag- och tryckspänningar i balken

Figur 5.13 visar drag och tryckspänningar i en homogent belastad fackverksbalk där svart visar drag och grått tryck. De tryckbelastade strukturelementen är känsliga för buckling och kommer att buckla då den kritiska bucklingslasten är uppnådd vilken kan vara lägre än strukturelementets lastbärande förmåga i drag.

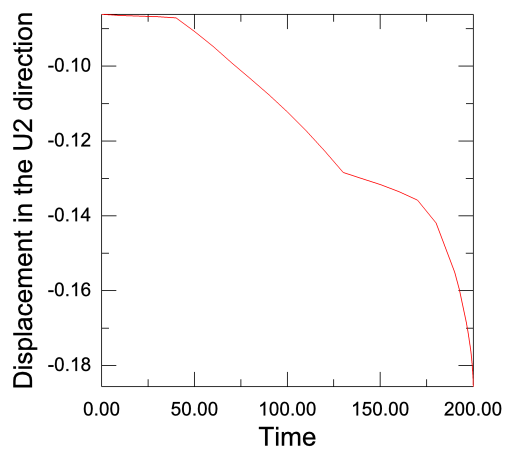


Figur 5.13: Drag och tryck i balken där svart är drag och grått är tryck

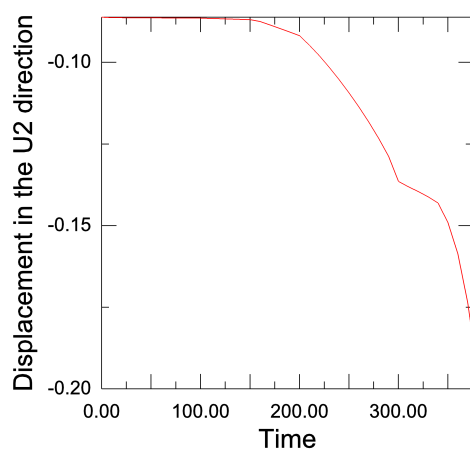
#### Kraftig brand respektive mild brand enligt fall 1 och 2

Figur 5.14 och 5.15 visar nedböjningen som funktion av tiden vid den kraftiga respektive milda branden vid stöd. Det kan ses att under exponering av den kraftiga branden så kommer balken att kollapsa redan efter 200 sekunder. Vid exponering av den mildare branden klarar sig balken i 376 sekunder. Det kan konstateras att balken kollapsar vid exakt samma temperatur vid båda fallen, nämligen  $560^{\circ}\text{C}$ . De spänningsomlagringar som eventuellt sker är inte tillräckligt stora för att upprätthålla balkens lastbärande förmåga. Däremot kommer balken att böja ner något mer under exponering av den mildare branden, dock bara marginellt.



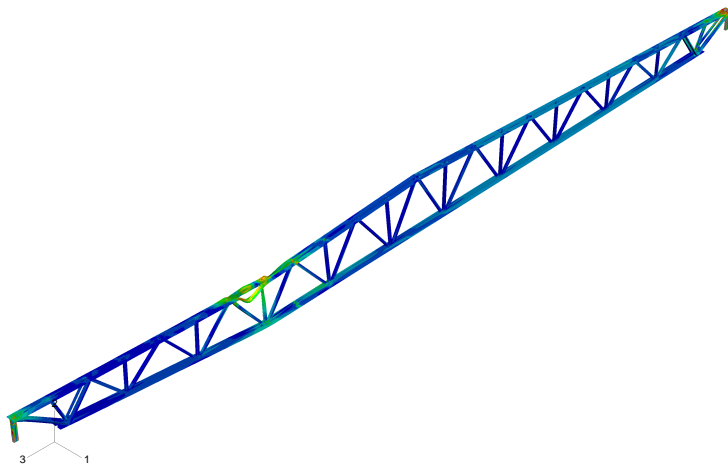


Figur 5.14: *Nedböjning som funktion av tiden vid den kraftiga branden enligt fall 1*



Figur 5.15: *Nedböjning som funktion av tiden vid den milda branden enligt fall 2*

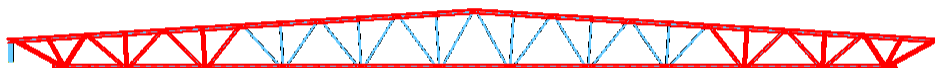
Balken kommer att kollapsa på liknande sätt vid de båda brandfallen p.g.a. att det är endast temperaturen i stålet som skiljer de båda fallen åt. Enligt figur 5.16 kan det ses att brottet kommer att ske vid balkens överfläns. Detta är inte förvånande med tanke på att detta strukturelement, vid den positionen är utsatt för stora tryckspänningar samt höga temperaturer.



Figur 5.16: *Deformation av balken under exponering av den kraftiga branden enligt fall 1.2.*

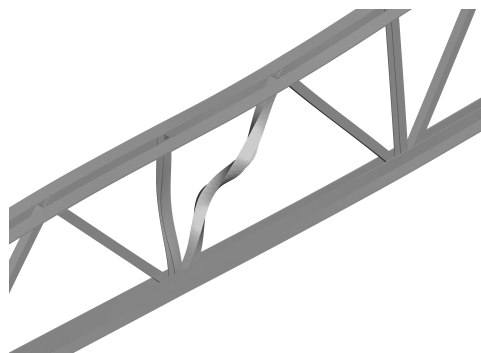
### Brandskyddade strukturedelar under exponering av den kraftiga branden enligt fall 3

Vid en statisk analys utan temperaturberoende framgår det vilka strukturelement i balken som är mest belastade. Dessa delar vore önskvärda att brandskyddsmåla. En analys där dessa delar har en föreskriven temperaturkurva enligt brandskyddat stål har genomförts. Se figur 5.17 för vilka delar i balken som analyserats som brandskyddsmålade.

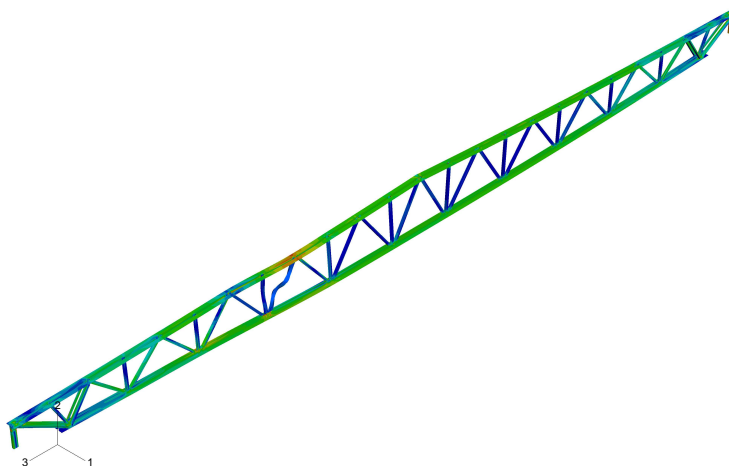


Figur 5.17: *Brandskyddade strukturedelar där rött är de skyddade delarna*

Vid exponering av den kraftiga branden framgår det att denna brandskyddsmålning inte är tillräcklig för att upprätthålla balkens hållfasthet. Fackverksbalken kommer att kollapsa efter 680 sekunder då branden spridits till det andra stallaget mitt under balken. Redan efter 350 sekunder vid en temperatur på 780°C kan det ses att staget i bild 5.18 börjar vrida sig. Ett oskyddat stag kommer alltså att vridknäckas till följd av kollaps av hela balken, se figur 5.19.



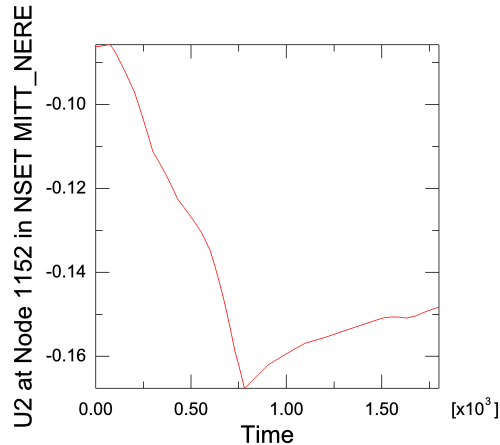
Figur 5.18: Förstoring av staget som vrider sig



Figur 5.19: Deformation av balken under exponering av den kraftiga branden vid brandskyddade strukturdelar

### Brandskyddade strukturdelar under exponering av den mildare branden enligt fall 4

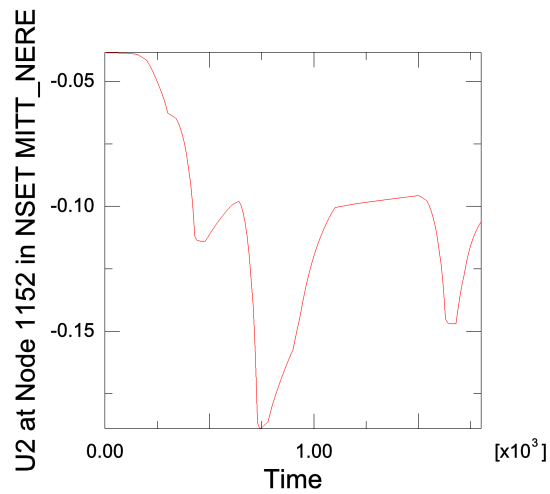
Vid exponering av den mildare branden av samma brandskyddsmålade delar så klarar sig balken under hela förloppet. Nedböjning som funktion av tiden kan ses i figur 5.20



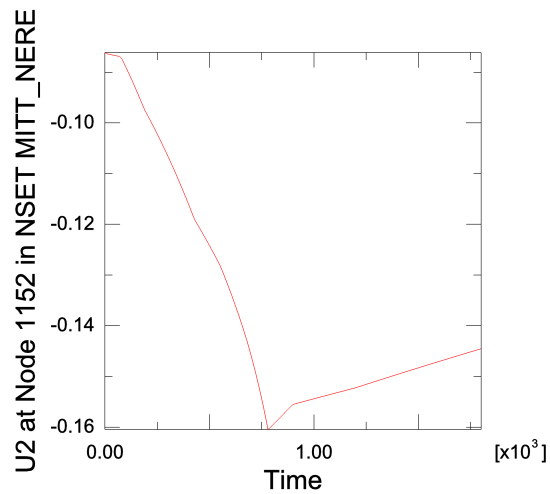
Figur 5.20: *Nedböjningen som funktion av tiden under exponering av den milda branden med skyddade strukturdelar.*

### Lastreducerat och brandskyddsmålet fall enligt 5 och 6

För att fackverksbalken ska klara ett brandscenario enligt R 30 krävs det att lasten reduceras med 60 % under påverkan av den mildare branden. Ett annat alternativ är att brandskyddsmåla delar av balken alternativt hela balken enligt temperaturkurvan, 5.17. Taket antas vara brandskyddat varpå balken behåller sin fulla stagnering under hela brandförloppet. Förskjutningsdiagram som funktion av tiden vid lastreducerat- respektive brandskyddsmålat fall kan ses i figur 5.21 och 5.22. Dessa diagram visar hur en nod i mitten på balken förskjuts i vertikal riktning under hela brandförloppet i 30 minuter.



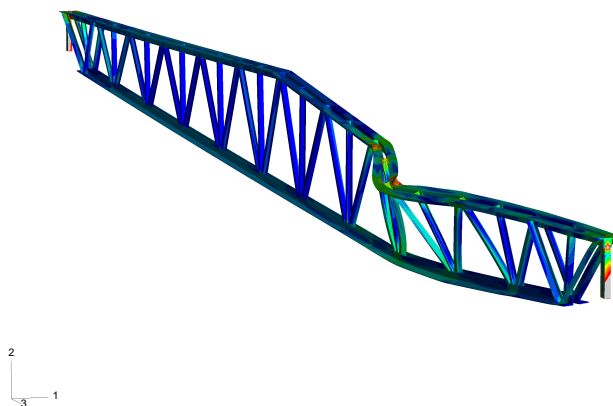
Figur 5.21: Förskjutningen i mitten på balken som funktion av tiden vid lastreducerad balk



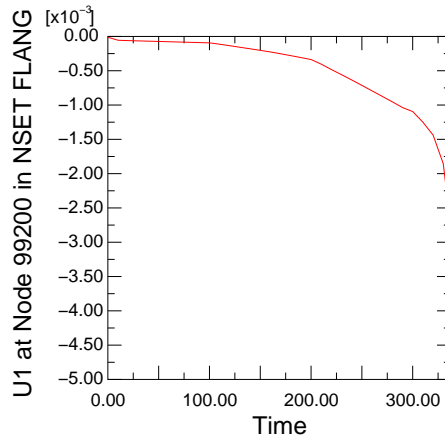
Figur 5.22: Förskjutningen i mitten på balken som funktion av tiden vid brandskyddsmålad balk

### Mild brand med reducerad stagförmåga enligt fall 7

Om taket antas vara oskyddat mot brand är det troligt att det kommer att förlora en stor del av sin möjlighet till att staga balken. Eftersom taket själv kommer att deformeras p.g.a. av de termiska töjningarna samtidigt som taket tappar mycket av sin egen styvhet. Enligt bucklingsanalysen av fall 3, se figur 5.8, så visade det sig att den kritiska bucklingslasten uppnås vid  $\lambda_1 q = 2.59q$ . Om balken tappar tillräckligt mycket av sin hållfasthet så borde bucklingen av balken påminna om just det fallet. Analys av balken med en dämpningsfaktor medtagen i beräkningen visar att kollapsen kommer att ske på samma ställe som i fall 1 och 2 fast en utböjning som påminner om första bucklingsmoden enligt fall 3 vid bucklingsanalysen, se figur 5.23. Enligt figur 5.24 kan det ses att utböjningen i 1-riktning sker på oändligt kort tid. Noden i vilken diagrammet är framräknat befinner sig i toppen på balken där den kommer att buckla enligt figur 5.23. Detta tyder på att balken kommer att buckla ut ur planet vid den positionen till följd av en plötslig kollaps redan efter 337 sekunder vid en temperatur av 493°C.



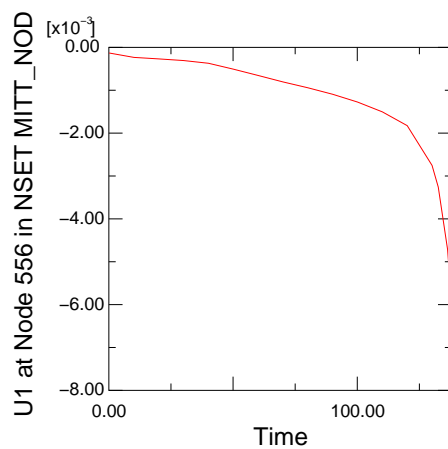
Figur 5.23: *Deformation av balken med reducerad stagförmåga enligt fall 7*



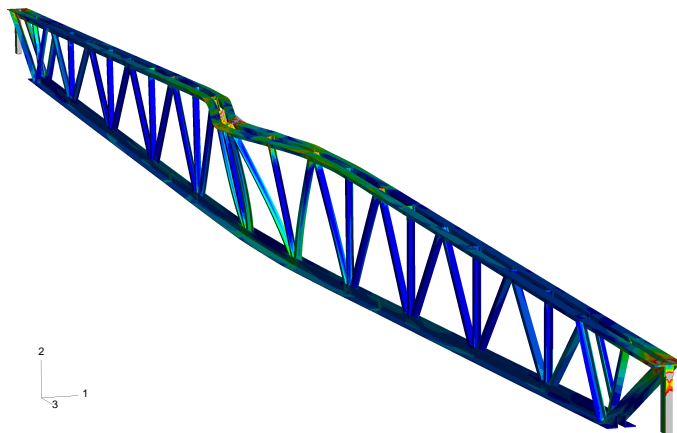
Figur 5.24: Förskjutning av balken som funktion av tiden i 1-riktning under exponering av den milda branden vid stöd enligt fall 7

### Kraftig brand mitt under balken med reducerad stagförmåga enligt fall 8

Resultatet vid exponering av den kraftigare branden mitt under balken påminner till viss del om resultatet i föregående fall. Diagram 5.25 visar hur en nod i toppen av balkens mitt förskjuts i 1 riktningen. Det kan ses att förskjutningen i den riktningen blir lodrät precis innan beräkningen inte längre kan finna en lösning till förskjutningen. Balken blir instabil och förskjuts ur planet på oändligt kort tid. Med införande av en dämpningsfaktor går det att följa förloppet bättre. Det kan ses i figur 5.26 hur balken bucklar ut ur planet. Kollaps av balken enligt detta fall sker redan efter 138 sekunder vid en temperatur av 425°C. Att kollapsen sker vid en lägre temperatur vid detta fall än vid föregående beror sannolikt på att den kritiska bucklingslasten är något lägre.



Figur 5.25: Förskjutning av balken som funktion av tiden i 1-riktning under exponering av den kraftiga branden mitt under balken enligt fall 8



Figur 5.26: Deformation av balken under exponering av den kraftiga branden mitt under balken enligt fall 8



En kort sammanfattning av resultaten kan ses i tabell 5.3

Fall	Tid (s) vid kollaps	Temperatur (°C) vid kollaps	$u_{mitt}$	$u_{max}$
1.1	200	560	0.186	0.195
1.2	272	684	0.457	0.627
1.3	323	752	0.447	0.615
1.4	728	894	0.468	0.647
2.1	376	560	0.191	0.196
2.2	446	650	0.436	0.592
2.3	502	645	0.435	0.591
2.4	926	462	0.368	0.368
3	680	892	0.177	0.177
4	Ej kollaps	-	0.168	0.168
5	Ej kollaps	-	0.145	0.145
6	Ej kollaps	-	0.189	-
7	337	493	-	-
8	138	425	-	-

Tabell 5.3: *Resultat från värme och deformationsanalysen*



# Kapitel 6

## Slutsats och diskussion

### 6.1 Sammanfattning

Huvuduppgiften för detta examensarbete har varit att analysera en fackverksbalk i stål för samtidig last och temperaturpåverkan samt förutsäga hur denna kommer att bete sig utifrån olika brandscenarion. Att kunna föreslå strukturella förbättringar vid trolig kollaps av balken har också varit önskvärt. För att analysera fackverksbalken har ABAQUS använts som verktyg vilket är ett generellt FEM program. Arbetet har delats in i fyra delar:

- En litteraturstudie om stål under brandpåverkan och FEM teori om transient värmeledning samt plasticitet som leder till olinjära materialsamband. Insamling av nödvändig data för att lösa problemet i ABAQUS.
- Modellering av en enkel balk i ABAQUS med riktiga materialdata som är temperaturberoende för att se om det går att lösa ett sådant problem.
- Modellering av den riktiga fackverksbalken i ABAQUS.
- Tolkning av resultat och förslag till strukturella förbättringar.

### 6.2 Slutsater

En del förenklingar har genomförts vid analys av fackverksbalken. Snedstagen i balken har modellerats som fast inspända. Dessa är egentligen svetsade mot närliggande profiler på olika sätt och har i verkligheten en mindre knäcklängd än i modellen. Balken har också modellerats som fritt upplagd vilket är en ytterlighet till det verkliga fallet där pelarna endast medger en viss förskjutning i längsled. Vid de flesta analyserna har det förutsatts att balken är helt stagad över hela sin längd under hela brandförloppet. Dock kommer plåttaket som stabiliserar balken förmodligen gå miste om en stor del av sin styvhet under ett brandförlopp om det inte är brandskyddat.

En fackverksbalk på 24 meter är instabil vid hög pålastning och måste därför alltid stagas mot vippning. Utan stagning skulle den vipa redan vid 0.33 gånger den last som räknats fram enligt lastfall 7 för samtidig last och brandpåverkan. Därför är det av största vikt att taket är brandskyddat så att dess stabiliserande verkan upprätthålls under hela brandförloppet.

Enligt analyserna så tappar fackverksbalken sin styvhet till följd av kollaps redan efter cirka 3.5 minuter under exponering vid stöd av den kraftiga branden. Vid exponering av den något troligare milda branden klarar sig balken i närmare 7 minuter innan kollaps. Temperaturen vid dessa båda tiderna är cirka  $560^{\circ}\text{C}$ . Vid last enligt lastfall 7 så klarar sig en fullt stagad fackverksbalk upp till denna temperatur innan det sker en kollaps. Om detta skulle medföra kollaps av närliggande fackverksbalkar till följd av ett fortskridande ras skulle skadorna kunna bli mycket omfattande. Framförallt om det är en lokal där många personer vistas samtidigt.

För att en fackverksbalk av denna typ ska ha en möjlighet att klara en brand av den mildare typen så krävs det en reduktion av lasten enligt lastfall 7 med 60%, vilket motsvarar en utbredd last på  $0.56 \text{ kN/m}^2$ . Det är i stort sett enbart balkens och plåttakets egenvikt samt installationer. Balken skulle därmed kollapsa i fall ytterligare last skulle tillkomma i form av snö t.ex. Ett annat alternativ skulle vara att brandskyddsmåla delar av balken. Genom att brandskyddsmåla de strukturdelar som utsätts för störst spänningar behåller en fackverksbalk sin bärande förmåga under exponering av den mildare branden. Både drag- och tryckbelastade strukturdelar har varit nödvändiga att skydda även fast det visat sig att brott kommer att ske i ett tryckt element. Under exponering av den kraftiga branden krävs det dock att hela fackverksbalken skyddas för att undvika kollaps.

Vid samtidigt brand och lastpåverkan på en fackverksbalk så kommer balken att kollapsa då den förlorar tillräckligt mycket av sin hållfasthet. Detta brott är inte segt som vid många andra stålbalkar utan sker plötsligt p.g.a. lokal buckling i överflänsen eller knäckning i ett av snedstagen. För att säkerställa balkens lastbärande förmåga under ett brandförlopp enligt R 30 så krävs det att taket behåller sin stabiliserande verkan under hela brandförloppet samt att delar av, eller hela fackverksbalken brandskyddsmålas beroende på vilken temperaturkurva som är dimensionerande.

### 6.3 Förslag till vidare arbete

Vid kollaps av en fackverksbalk så kommer lasterna eventuellt att omfördelas till de närliggande fackverksbalkarna. Dessa balkar kommer då att få ta hand om den extra last som inträffar vid kollaps av en annan fackverksbalk. En analys av ett sådant fall skulle kunna vara intressant ur hela strukturens lastbärande funktion. Även analyser om vad som sker då mer än en balk brandpåverkas och hur dessa samverkar gällande

hela strukturens stabiliserande förmåga skulle kunna vara av intresse.

Vid ökande temperatur så kommer fackverksbalken att förlora mycket av sin lastbärande förmåga och den kritiska bucklingslasten kommer därmed sjunka vid ökad temperatur i stålet. Bucklingsanalyser vid andra temperaturer samt tidpunkter då balken deformerats under brandförloppet skulle kunna vara av intresse.

Spikarna som fäster plåttaket i balken skjuts genom balkens ovanfläns så att ett par millimeter sticker ut under flänsen. Hur varma dessa spikar blir under en brand torde vara av primärt intresse eftersom de är länken mellan det stabiliserande taket och balken. En kraftig försvagning av spikarna p.g.a. en brand skulle medföra att takets stabiliserande förmåga reduceras.



# Litteraturförteckning

- [1] Boverket, (2006) *Regelsamling för byggande - Boverkets byggregler*, BBR Boverket Publikationsservice
- [2] Boverket, (2003) *Regelsamling för konstruktion - Boverkets konstruktionsregler*, BKR Boverket Publikationsservice
- [3] Buchanan A., (2000) *Structural Design for Fire Safety*, Wiley
- [4] Burstöm PG., (2001) *Byggnadsmaterial*, Studentlitteratur
- [5] Stålbyggnadsinstitutet, (1991) *Brandskydd av stålkonstruktioner, Allmän del*,
- [6] Roylance D., (2001) *Stress-Strains curves*, Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology
- [7] European Committee for Standardization, (1995) *Eurocode 3 - Design of steel structures - Part 1-2: General rules - Structural fire design*
- [8] (2005) *Getting Started with ABAQUS, version 6.4*, Pawtucket, RI, USA.
- [9] (2005) *ABAQUS User's Manual, Volume IV, version 6.4*, Pawtucket, RI, USA.
- [10] (2005) *ABAQUS User's Manual, Volume II, version 6.4*, Pawtucket, RI, USA.
- [11] *Key-to-Steel*, <http://www.key-to-steel.com/Articles/Art48.htm>
- [12] Rotter J.M., Sanad A.M., Usmani A.S., Gillie M., Structural Performance of Redundant Structures under Local Fires, (1999) *Interflam '99, Proceedings of the Eighth International Conference (Scotland, 29th June - 1st July 1999)*
- [13] Ottosen N.S., Ristinmaa M., (2005) *The Mechanics of Constitutive Modeling*, Division of Solid Mechanics, Lund University, Sweden, Elsevier
- [14] Ottosen N.S., Petersson H.,(1992) *Introduction to the Finite Element Method*, Prentice Hall
- [15] Avd. för Byggnadsmekanik vid LTH (2005) *Additional notes in structural dynamics*, Division of Structural Mechanics, Lund University





# Bilagor



# A Indata till ABAQUS

Längdutvidgningskoefficienten som funktion av temperaturen

<i>Temperatur (<math>^{\circ}C</math>)</i>	<i><math>\alpha</math> (<math>/^{\circ}C</math>)</i>
100	$9.984 \cdot 10^{-6}$
200	$1.159 \cdot 10^{-5}$
300	$1.239 \cdot 10^{-5}$
400	$1.300 \cdot 10^{-5}$
500	$1.352 \cdot 10^{-5}$
600	$1.400 \cdot 10^{-5}$
700	$1.445 \cdot 10^{-5}$
800	$1.375 \cdot 10^{-5}$
900	$1.311 \cdot 10^{-6}$

Konduktiviteten som funktion av temperaturen

<i>Temperatur (<math>^{\circ}C</math>)</i>	<i>(<math>W/mK</math>)</i>
20	53.33
100	50.67
200	47.34
300	44.01
400	40.68
500	37.35
600	34.02
700	30.69
800	27.30
900	27.30

### Specifika värmekapaciteten som funktion av temperaturen

<i>Temperatur (°C)</i>	<i>(J/kgK)</i>
20	439.80
100	487.62
200	529.76
300	564.74
400	605.88
500	666.50
600	760.22
700	1008.16
800	803.26
900	650.00

### Elasticitetsmodulen som funktion av temperaturen

<i>Temperatur (°C)</i>	<i>Elasticitetsmodul (GPa)</i>
20	210
100	210
200	189
300	168
400	147
500	126
600	65.1
700	27.3
800	18.9
900	1.4

### Densiteten

<i>Densitet (kg/m<sup>3</sup>)</i>
7800

**Visko-plastisk modell som funksjon av temperaturen**

<i>Temperatur (°C)</i>	<i>A (-)</i>	<i>n (-)</i>	<i>m (-)</i>	<i>f (-)</i>
20	2.04	0.02	0	0.1667
100	2.04	0.02	0	0.169
200	2.04	0.02	0	0.1714
300	2.04	0.0127	0	0.1806
400	2.04	0.0127	0	0.1899
500	2.295	0.002903	0	0.2424
600	2.295	0.002903	0	0.3571
700	2.295	0.002903	0	0.4805

## Plastiska töjningar som funktion av temperaturen

<i>Temperatur (°C)</i>	<i>Flytspänning (MPa)</i>	<i>Plastisk töjning</i>
20	355	0
20	355	0.0005
20	355	0.001
20	355	0.0015
20	355	0.002
20	355	0.005
20	355	0.008
20	355	0.011
20	355	0.014
20	355	0.018
100	333.09	0
100	355	0.0005
100	355	0.001
100	355	0.0015
100	355	0.002
100	355	0.005
100	355	0.008
100	355	0.011
100	355	0.014
100	355	0.018
200	283.7	0
200	301.0	0.0005
200	307.4	0.001
200	312.4	0.0015
200	317.7	0.002
200	333.0	0.005
200	342.6	0.008
200	349.0	0.011
200	352.9	0.014
200	355.0	0.018

### Plastiska töjningar som funktion av temperaturen

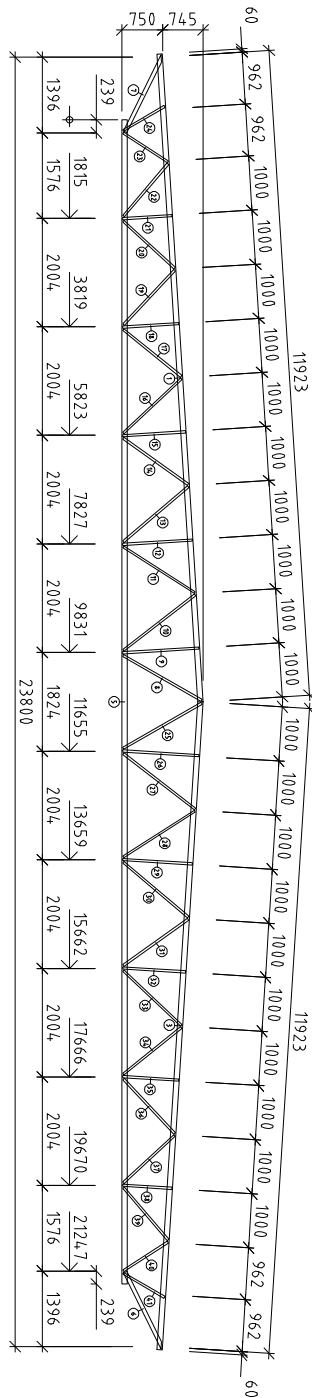
<i>Temperatur (°C)</i>	<i>Flytspänning (MPa)</i>	<i>Plastisk töjning</i>
300	207.1	0
300	243.7	0.0005
300	257.7	0.001
300	267.9	0.0015
300	276.1	0.002
300	309.3	0.005
300	329.2	0.008
300	342.2	0.011
300	350.3	0.014
300	354.8	0.018
400	147.0	0
400	184.6	0.0005
400	204.5	0.001
400	219.8	0.0015
400	232.2	0.002
400	283.0	0.005
400	313.9	0.008
400	334.4	0.011
400	347.2	0.014
400	354.7	0.018
500	126.0	0
500	154.4	0.0005
500	168.0	0.001
500	180.0	0.0015
500	188.9	0.002
500	225.4	0.005
500	247.4	0.008
500	262.0	0.011
500	271.2	0.014
500	276.6	0.018

## Plastiska töjningar som funktion av temperaturen

<i>Temperatur (°C)</i>	<i>Flytspänning (MPa)</i>	<i>Plastisk töjning</i>
600	65.0	0
600	81.7	0.0005
600	91.6	0.001
600	99.1	0.0015
600	105.1	0.002
600	130.6	0.005
600	148.0	0.008
600	156.6	0.011
600	163.0	0.014
600	166.9	0.018
700	27.3	0
700	35.5	0.0005
700	40.5	0.001
700	44.7	0.0015
700	47.9	0.002
700	61.8	0.005
700	70.3	0.008
700	76.0	0.011
700	79.5	0.014
700	81.7	0.018
800	18.5	0
800	22.0	0.0005
800	23.8	0.001
800	25.6	0.0015
800	26.6	0.002
800	32.0	0.005
800	34.8	0.008
800	36.9	0.011
800	38.3	0.014
800	39.1	0.018
900	12.8	0
900	17.8	0.004
900	20.2	0.009
900	21.3	0.018



## B Fackverksritning



Figur 6.1: Ritning av fackverksbalken från EAB.

## C Spännings- töjnings samband

Strain	Effective yield strength at elevated temperature, relative to yield strength at 20 °C.							
	$k_{y,\theta} = f_{y,\theta}/f_y$							
	Steel temperature $\theta_s$ [°C]							
	100	200	300	400	500	600	700	800
0,0000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,0005	0,296	0,266	0,237	0,207	0,177	0,092	0,038	0,027
0,0010	0,592	0,532	0,473	0,414	0,355	0,183	0,077	0,052
0,0015	0,887	0,799	0,657	0,520	0,435	0,230	0,100	0,062
0,0020	1,000	0,848	0,706	0,576	0,476	0,258	0,114	0,067
0,0025	1,000	0,866	0,739	0,619	0,507	0,279	0,126	0,072
0,0030	1,000	0,880	0,765	0,654	0,532	0,296	0,135	0,075
0,0035	1,000	0,892	0,786	0,685	0,554	0,312	0,144	0,078
0,0040	1,000	0,902	0,805	0,712	0,574	0,325	0,151	0,081
0,0045	1,000	0,910	0,822	0,736	0,591	0,337	0,158	0,083
0,0050	1,000	0,918	0,837	0,758	0,607	0,348	0,164	0,086
0,0055	1,000	0,925	0,851	0,778	0,621	0,359	0,169	0,088
0,0060	1,000	0,932	0,864	0,797	0,635	0,368	0,174	0,090
0,0065	1,000	0,938	0,876	0,814	0,647	0,377	0,179	0,091
0,0070	1,000	0,943	0,886	0,830	0,659	0,385	0,183	0,093
0,0075	1,000	0,948	0,896	0,845	0,669	0,399	0,187	0,094
0,0080	1,000	0,953	0,906	0,859	0,679	0,406	0,191	0,096
0,0085	1,000	0,957	0,915	0,872	0,689	0,412	0,195	0,097
0,0090	1,000	0,961	0,923	0,884	0,697	0,417	0,198	0,098
0,0095	1,000	0,965	0,930	0,896	0,705	0,423	0,201	0,099
0,0100	1,000	0,969	0,937	0,906	0,713	0,428	0,204	0,101
0,0110	1,000	0,975	0,950	0,925	0,726	0,437	0,209	0,102
0,0120	1,000	0,981	0,961	0,942	0,738	0,441	0,214	0,104
0,0130	1,000	0,985	0,971	0,956	0,748	0,448	0,218	0,106
0,0140	1,000	0,989	0,979	0,968	0,757	0,454	0,221	0,107
0,0150	1,000	0,993	0,985	0,978	0,764	0,459	0,224	0,108
0,0160	1,000	0,995	0,991	0,986	0,770	0,463	0,226	0,109
0,0170	1,000	0,997	0,995	0,992	0,774	0,466	0,228	0,109
0,0180	1,000	0,999	0,998	0,997	0,778	0,468	0,229	0,110
0,0190	1,000	1,000	0,999	0,999	0,779	0,470	0,230	0,110
0,0200	1,000	1,000	1,000	1,000	0,780	0,470	0,230	0,110

Figur 6.2: Spännings- töjnings samband för S355 stål vid olika temperaturer [7].