Radiella lösningar till en klass av semilineära elliptiska ekvationer

Patrik Petersson

Examensarbete
2015:E31

Lunds universitet

Naturvetenskaplig fakultet
Matematikcentrum
Matematik

Centrum Scientiarum Mathematicarum

Radiella lösningar till en klass av semilineära elliptiska ekvationer.
Examensarbete i Matematik

Patrik Petersson

27 maj 2015

Abstract

In this thesis we consider the boundary value problem
$(\star)$ $u'' + [(n-1)/r]u' + f(u) = 0$ $(r > 0, n > 1)$, $u'(0) = 0$, $\lim_{r\to\infty} u(r) = 0$, where f satisfies a number of appropriate conditions. Under these assumptions, a theorem states that for every nonnegative integer m, $(\star)$ has a solution $u(r)$ with exactly m zeros in $(0, \infty)$. A proof, using a scaling argument and a shooting method is presented. It is also shown that this theorem holds for a class of modified coefficients for u'. A uniqueness theorem that applies for another class of f states that $(\star)$ has at most one solution $u(r)$ such that $u(r) > 0$ in $(0, \infty)$. We present the main part of the proof and give some examples of functions f satisfying the hypothesis of the theorem. In the last part we discuss a few similar results and also what progress has been made in this field until today.

Sammanfattning

I det här arbetet betraktas randvärdesproblemet
$(\star)$ $u'' + [(n-1)/r]u' + f(u) = 0$ $(r > 0, n > 1)$, $u'(0) = 0$, $\lim_{r\to\infty} u(r) = 0$, där f uppfyller ett antal lämpliga villkor. Under dessa antaganden finns det en sats som säger att för varje icke-negativt heltal m, har $(\star)$ en lösning med precis m nollställen i $(0, \infty)$. Ett bevis presenteras, där ett skalningsargument och en shooting-metod används. Vi visar även att satsen gäller för en klass av modifierade koefficienter för u'. En entydighetssats som gäller för en annan klass av f säger att $(\star)$ har högst en lösning $u(r)$ sådan att $u(r) > 0$ i $(0, \infty)$. Vi presenterar större delen av beviset och ger några exempel på funktioner f som uppfyller satsens förutsättningar. I den avslutande delen diskuteras några liknande resultat samt hur utvecklingen på området sett ut fram till idag.

Innehåll

1 Inledning

Betrakta den partiella differentialekvationen

$$\Delta u(x) + f(u(x)) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Vi söker radiellt symmetriska lösningar och sätter

$$u(x) = u(|x|), \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Den partiella derivatan av u med avseende på x_i ges av

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|}u'(|x|), \qquad |x| \neq 0$$

och ytterligare en derivering ger

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{|x|}u'(|x|) - \frac{x_i^2}{|x|^3}u'(|x|) + \frac{x_i^2}{|x|^2}u''(|x|)$$

Med Laplaceoperatorn $\Delta = \nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})$ erhålles

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''(|x|) + \frac{n-1}{|x|}u'(|x|)$$

och ekvation (1) övergår i den ordinära differentialekvationen

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + f(u(r)) = 0, \qquad |x| = r. \tag{2}$$

Ekvationer av typen (2) har tillämpningar inom bl.a. kvantfysik där lösningarna representerar stående vågor. I det här examensarbetet undersöks några egenskaper hos lösningarna till ekvation (2) i intervallet $r \geq 0$. Speciellt betraktas lösningar som uppfyller randvillkoren

$$u'(0) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0. \tag{3}$$

Det är känt att det för en stor klass av funktioner f finns en oändlig följd av lösningar $\{u_m\}_{m=0}^{\infty}$ till ekvation (2) som uppfyller randvillkoren (3) och där u_m har precis m nollställen. Denna teori sammanställs i arbetets första del. De metoder som används och de resultat som framkommer här har sin utgångspunkt i artiklarna [9], [7] och [16]. I arbetets andra del diskuteras under vilka förhållanden resultaten från den första delen gäller om koefficientfunktionen $\frac{n-1}{r}$ byts ut mot andra funktioner. Ett exempel är $\frac{r}{2} + \frac{n-1}{r}$ som uppträder i studiet av radiella lösningar till semilineära värmeledningsekvationer [9]. Vi visar att resultaten är giltiga för en stor klass av koefficientfunktioner på formen $h(r) = b(r) + \frac{n-1}{r}$. Den tredje delen av arbetet behandlar entydigheten hos positiva lösningar till randvärdesproblemet (2)-(3). Huvudparten av ett entydighetsbevis sammanställs från [10] och det ges även några exempel på funktioner f som uppfyller tillräckliga villkor för entydighet. I den avslutande delen diskuteras några närliggande resultat som haft betydelse för utvecklingen på området fram till idag.

2 Ett föreskrivet antal nollställen

2.1 Teorem 1

Som vi nämnde i inledningen kommer vi att undersöka lösningarna till följande randvärdesproblem:

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + f(u(r)) = 0, \quad r > 0 \tag{4}$$

$$u'(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0 \tag{5}$$

I fortsättningen låter vi $n > 1$ vara en reell parameter, och vi antar att funktionen f uppfyller följande villkor:

(§1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är lokalt Lipschitzkontinuerlig.

(§2) $uf(u) < 0$ för små $|u|$, $u \neq 0$.

(§3) Det existerar tal $\beta^- < 0 < \beta^+$ sådana att

$f(u) < 0$ då $u \in (-\infty, \beta^-]$ och $f(u) > 0$ då $u \in [\beta^+, \infty)$,

$F(u) < 0$ då $u \in (\beta^-, 0) \cup (0, \beta^+)$ där $F(u) = \int_0^u f(t)dt$.

(§4) $f(u) = k(u)|u|^{p-1}u + g(u)$, där

$p > 1$ och uppfyller $n < \frac{2(p+1)}{p-1}$,

$$k(u) = \begin{cases} k_- > 0, & u < 0 \\ k_+ > 0, & u > 0 \end{cases}$$

och

$\frac{|g(u)|}{|u|^p} \to 0$ då $|u| \to \infty$.

Notera att $F(u)$ är definierad så att $F(0) = 0$ samt att villkoren (§1) och (§2) medför att $f(0) = 0$. Av (§3) följer att $F(u)$ är strängt avtagande för $u \leq \beta^-$ och strängt växande för $u \geq \beta^+$. Vidare medför (§3) och (§4) att $f(u) \to \pm\infty$ då $u \to \pm\infty$ och därmed att $F(u) \to \infty$ då $|u| \to \infty$. Funktionen $F(u)$ måste således ha exakt ett negativt och ett positivt nollställe. I fortsättningen väljer vi talen β^- och β^+ så att $F(\beta^-) = F(\beta^+) = 0$.

Figur 1 visar ett exempel på en funktion $f(u)$ som med $p = 3$ och $n < 4$ uppfyller villkoren (§1)-(§4).

Av ekvation (4) kan vi omedelbart dra några viktiga slutsatser:

Om $u'(r_0) = 0$ för något $r = r_0 > 0$ och om $f(u(r_0)) < 0$ så har u ett lokalt minimum i r_0 (eftersom det då gäller att $u''(r_0) > 0$). På motsvarande sätt har u ett maximum i r_0 om $f(u(r_0)) > 0$.

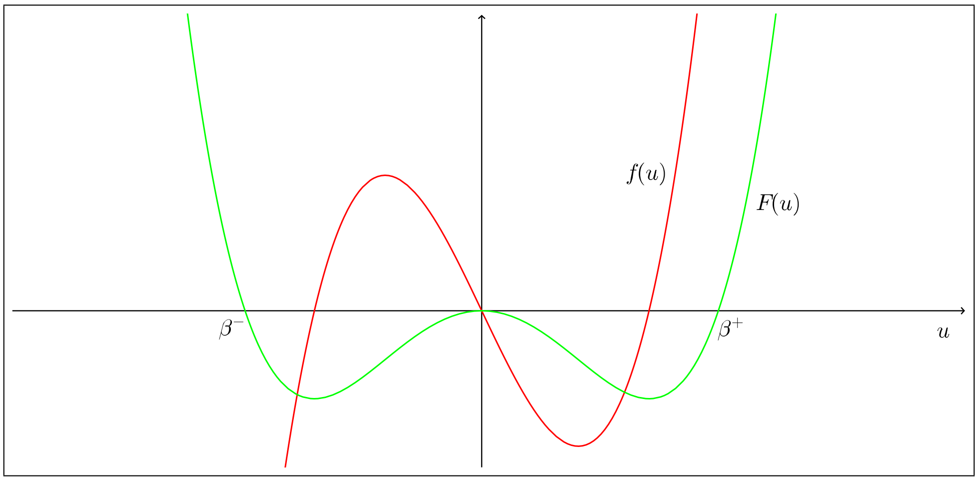
En icke-konstant lösning kan inte ha några maxima eller minima i punkter där $u = 0$. Detta beror på att (4) tillsammans med villkoren $u(r_0) = u'(r_0) = 0$ har den entydiga lösningen $u(r) \equiv 0$. För bevis hänvisas till Picard Lindelöfs existens- och entydighetssats för begynnelsevärdesproblem, samt appendix i [12].

I fortsättningen kommer vi att använda beteckningen $u(r, a)$ för den lösning till (4) som uppfyller begynnelsevillkoren $u(0) = a > 0$ och $u'(0) = 0$. Observera att om $f(a) = 0$ så har vi den konstanta lösningen $u(r, a) \equiv a$.

Vi formulerar nu huvudresultatet i denna del:

Teorem 1: *Låt m vara ett icke-negativt heltal. Om f uppfyller villkoren (§1)-(§4) så har problemet (4)-(5) en lösning med precis m nollställen i intervallet $(0, \infty)$.*

Avsnitt 2.2 och 2.3 ägnas åt att formulera och bevisa några resultat som lägger grunden till beviset av Teorem 1.



Figur 1: $f(u) = u^3 - u$

2.2 Energifunktionen

Ekvation (4) kan efter multiplikation med u' skrivas

$$\left(\frac{1}{2}u'^2 + F(u)\right)' = -\frac{n-1}{r}u'^2. \tag{6}$$

Kvantiteten $\frac{1}{2}u'^2 + F(u)$ betecknas $E(r)$ eller $E(r,a)$ och kommer att kallas **energin** till lösningen $u(r,a)$. Om $u(r,a)$ är en icke-konstant lösning så ser vi att högerledet i (6) är negativt (förutom i isolerade punkter där $u' = 0$). Det betyder att $E(r)$ är en strängt avtagande funktion av r, ett faktum som kommer att visa sig vara mycket användbart i det fortsatta resonemanget.

Lemma 1. *Antag att u är en icke-konstant lösning till (4) och att $u'(r_0) = 0$ för något $r_0 \geq 0$. Då gäller att om $f(u(r_0)) < 0$ så är $u(r) > u(r_0)$ för alla $r > r_0$ och om $f(u(r_0)) > 0$ så är $u(r) < u(r_0)$ för alla $r > r_0$.*

Bevis. Antag att $f(u(r_0)) < 0$. Då är $u(r_0)$ ett lokalt minimum och $u(r_0 + \epsilon) > u(r_0)$ då $\epsilon > 0$ är tillräckligt litet. Antag att $u(r_1) = u(r_0)$ för något $r_1 > r_0$. Då har vi,

$$E(r_1) = \frac{1}{2}u'(r_1)^2 + F(u(r_1)) = \frac{1}{2}u'(r_1)^2 + F(u(r_0)) \geq$$

$$\geq F(u(r_0)) = \frac{1}{2}u'(r_0)^2 + F(u(r_0)) = E(r_0)$$

vilket motsäger att energin är strängt avtagande. Ett analogt resonemang används i fallet $f(u(r_0)) > 0$. $\square$

Lemma 1 medför att varje icke-konstant lösning är uppåt/nedåt begränsad av sitt första lokala maximum/minimum. Dessutom avtar amplituden för lösningar som oscillerar (vilket motiverar benämningen "energi"ur en fysikalisk synvinkel). Energins avtagande medför också att varje lösning är begränsad och därmed definierad för alla $r > 0$. ($|u| \to \infty$ skulle medföra att $F(u) \to \infty$ och vi skulle få motsägelsen $E \to \infty$.)

Lemma 2. *Antag att $E(r_0) < 0$ för något $r_0 \geq 0$. Då kan lösningen $u(r)$ inte därefter växla tecken eller konvergera mot noll.*

Bevis. $u(r) = 0$ medför att $E(r) = \frac{1}{2}u'(r)^2 > 0$. Så om energin är negativ och avtagande för något $r = r_0$ måste vi följaktligen ha $u \neq 0$ för alla större värden på r. Antag nu att $u \to 0$ då $r \to \infty$. Då gäller $F(u) \to 0$ då $r \to \infty$ och eftersom energin är avtagande och nedåt begränsad har vi dessutom $E \to E_0 < 0$ då $r \to \infty$. Men detta medför att $(u')^2 \to 2E_0 < 0$ då $r \to \infty$, vilket är omöjligt. Antagandet att $u \to 0$ då $r \to 0$ är därför felaktigt. □

Lemma 3. *Om $0 < a \leq \beta^+$ så är $u(r, a) > 0$ för alla $r > 0$ och kan inte uppfylla att $u(r, a) \to 0$ då $r \to \infty$.*

Bevis. Det gäller att $E(0, a) = \frac{1}{2}u'(0)^2 + F(u(0, a)) = F(a) \leq 0$. Eftersom $u(0, a) = a > 0$ så följer påståendet nu av Lemma 2. □

Genom Lemma 3 kan vi konstatera att det finns lösningar som helt saknar nollställen. Speciellt måste lösningar (med $a > 0$) som konvergerar mot noll starta i intervallet (β^+, ∞).

2.3 Fler resultat

Innan vi ger oss i kast med beviset av Teorem 1 behöver vi stöd av några resultat som talar om hur antalet nollställen till $u(r, a)$ ändras då a varierar. Lemmorna 4-6 nedan slår fast att det finns lösningar till (4) med ett godtyckligt antal nollställen. Vi börjar med att, genom en lämplig skalning av funktionen $u(r, a)$, visa att lösningarna (då $a \to \infty$) konvergerar mot en lösning som har oändligt många nollställen.

Lemma 4. *Låt $\lambda > 0$ och definiera*

$$v(r, \lambda) = \lambda^{-2/(p-1)} u\left(\frac{r}{\lambda}, \lambda^{2/(p-1)}\right). \tag{7}$$

Då $\lambda \to \infty$ så konvergerar $v(r,\lambda)$ likformigt mot $w(r)$ på kompakta delmängder av $[0,\infty)$ där $w(r)$ är lösningen till problemet

$$w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) + k(w)|w(r)|^{p-1} w(r) = 0, \tag{8}$$

$$w(0) = 1, \quad w'(0) = 0. \tag{9}$$

Bevis. Från (7) har vi

$$v'(r) = \lambda \lambda^{-2p/(p-1)} u'(r/\lambda) \quad och \quad v''(r) = \lambda^{-2p/(p-1)} u''(r/\lambda)$$

vilket tillsammans med (4) ger

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) + \lambda^{-2p/(p-1)} f\left(\lambda^{2/(p-1)} v(r)\right) =$$
$$= \lambda^{-2p/(p-1)} \left[u''(r/\lambda) + \frac{n-1}{r/\lambda} u'(r/\lambda) + f(u(r/\lambda)) \right] = 0.$$

Därmed satisfierar funktionen $v(r,\lambda)$ följande problem:

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) + \lambda^{-2p/(p-1)} f\left(\lambda^{2/(p-1)} v(r)\right) = 0 \tag{10}$$

$$v(0) = 1, \qquad v'(0) = 0 \tag{11}$$

Om energin för $v(r,\lambda)$ definieras på samma sätt som för $u(r,a)$ så får vi

$$E(r,\lambda) = \frac{1}{2} v'(r,\lambda)^2 + \lambda^{-2p/(p-1)} \int_0^{v(r,\lambda)} f\left(\lambda^{2/(p-1)} t\right) dt \tag{12}$$

Energin är som tidigare strängt avtagande. Detta tillsammans med (11) ger:

$$E(r,\lambda) < E(0,\lambda) = \lambda^{-2p/(p-1)} \int_0^1 f\left(\lambda^{2/(p-1)} t\right) dt =$$
$$= \lambda^{-2p/(p-1)} \lambda^{-2/(p-1)} \left[F(\lambda^{2/(p-1)} t) \right]_0^1 = \lambda^{-2(p+1)/(p-1)} F\left(\lambda^{2/(p-1)}\right)$$

Enligt (§4) gäller

$$F(u) = \frac{k(u)|u|^{p+1}}{p+1} + G(u), \qquad G(u) = \int_0^u g(s) ds$$

Vidare har vi enligt l'Hospitals regel och (§4) att

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{|G(u)|}{|u|^{p+1}} = \lim_{|u|\to\infty} \frac{|g(u)|}{|u|^p} = 0$$

Detta medför att det finns ett $N > 0$ sådant att $G(u) < |u|^{p+1}$ då $|u| \geq N$. För $\lambda \geq N^{(p-1)/2}$ gäller således

$$E(r,\lambda) < \lambda^{-2(p+1)/(p-1)} F\left(\lambda^{2/(p-1)}\right) = \frac{k_+}{p+1} + \frac{G\left(\lambda^{2/(p-1)}\right)}{\lambda^{2(p+1)/(p-1)}} < \frac{k_+}{p+1} + 1$$

vilket visar att energin är uppåt begränsad oberoende av r och λ.

Å andra sidan kan integral-termen i (12) skrivas

$$\lambda^{-2p/(p-1)} \int_0^v f\left(\lambda^{2/(p-1)} t\right) dt = \frac{F\left(\lambda^{2/(p-1)} v\right)}{\lambda^{2(p+1)/(p-1)}} = \frac{k(v)|v|^{p+1}}{p+1} + \frac{G\left(\lambda^{2/(p-1)} v\right)}{\lambda^{2(p+1)/(p-1)}}$$

För varje $\epsilon > 0$ finns det ett $N_\epsilon > 0$ sådant att $|G(u)| < \epsilon |u|^{p+1}$ då $|u| \geq N_\epsilon$. I intervallet $\lambda \geq 1$ gäller speciellt

$$\frac{\left|G\left(\lambda^{2/(p-1)} v\right)\right|}{\lambda^{2(p+1)/(p-1)}} < \frac{\epsilon \left|\lambda^{2/(p-1)} v\right|^{p+1}}{\lambda^{2(p+1)/(p-1)}} = \epsilon |v|^{p+1}$$

och

$$\frac{k(v)|v|^{p+1}}{p+1} + \frac{G\left(\lambda^{2/(p-1)} v\right)}{\lambda^{2(p+1)/(p-1)}} \geq \frac{k(v)|v|^{p+1}}{p+1} - \frac{\left|G\left(\lambda^{2/(p-1)} v\right)\right|}{\lambda^{2(p+1)/(p-1)}} > \left(\frac{k(v)}{p+1} - \epsilon\right) |v|^{p+1}$$

då $|v| \geq N_\epsilon$.

Med ϵ tillräckligt litet så gäller enligt (12) att $E(r,\lambda) \to +\infty$ likformigt i λ då $|v| \to \infty$. Eftersom $E(r,\lambda)$ är uppåt begränsad måste därför funktionsföljden $\{v(r,\lambda)\}_{\lambda=1}^{\infty}$ vara likformigt begränsad. Följaktligen har vi

$$|v(r,\lambda)| \leq M, \qquad r > 0, \quad \lambda \geq 1 \tag{13}$$

där M är en positiv konstant.

Om vi nu multiplicerar (10) med r^{n-1} och integrerar så får vi, med $v'(0) = 0$,

$$r^{n-1} v'(r,\lambda) = -\lambda^{-2p/(p-1)} \int_0^r t^{n-1} f\left(\lambda^{2/(p-1)} v(t,\lambda)\right) dt. \tag{14}$$

Vidare gäller, genom utnyttjande av (13) och (§4) att

$$\left|f\left(\lambda^{2/(p-1)} v(t,\lambda)\right)\right| = \left|k(v)\lambda^2 |v|^{p-1} \lambda^{2/(p-1)} v + g\left(\lambda^{2/(p-1)} v\right)\right| \leq$$

$$\leq \max(k_-, k_+) \lambda^{2p/(p-1)} |v|^p + \lambda^{2p/(p-1)} |v|^p = \lambda^{2p/(p-1)} |v|^p (\max(k_-, k_+) + 1) \leq$$

$$\leq \lambda^{2p/(p-1)} M^p(\max(k_-, k_+) + 1) = konstant \cdot \lambda^{2p/(p-1)}.$$

Från (14) får vi nu,

$$|v'(r,\lambda)| \leq \lambda^{-2p/(p-1)} \cdot konstant \cdot \lambda^{2p/(p-1)} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r t^{n-1} dt =$$

$$= konstant \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n}{n} = konstant \cdot r.$$

Låt I vara en kompakt delmängd av $[0, \infty)$ och låt $s, t \in I$, $(s < t)$. Enligt medelvärdessatsen har vi

$$\frac{v(t,\lambda) - v(s,\lambda)}{t-s} = v'(\xi, \lambda)$$

för något $\xi \in (s,t)$. För varje $\epsilon > 0$ gäller nu att

$$|v(t,\lambda) - v(s,\lambda)| = |t-s| \cdot |v'(\xi,\lambda)| \leq |t-s| \cdot konstant \cdot \xi < \epsilon$$

om $|t-s|$ är tillräckligt litet.

Det visar att funktionsföljden $\{v(r,\lambda)\}_{\lambda=1}^{\infty}$ är likformigt ekvikontinuerlig och det finns, enligt Arzela-Ascolis teorem, en delföljd $\{v(r,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ som konvergerar likformigt mot funktionen $w(r)$ på I.

Högerledet i (14) kan nu med hjälp av (§4) skrivas

$$-\int_0^r t^{n-1} k(v) |v(t,\lambda)|^{p-1} v(t,\lambda) dt - \lambda^{-2p/(p-1)} \int_0^r t^{n-1} g\left(\lambda^{2/(p-1)} v(t,\lambda)\right) dt \tag{15}$$

(§4) medför att det för varje $\epsilon > 0$ finns det ett $N_\epsilon > 0$ sådant att $|g(u)| < \epsilon |u|^p$ då $|u| \geq N_\epsilon$. I intervallet $|u| \leq N_\epsilon$ är $g(u)$ kontinuerlig och därmed begränsad. Det finns därför en konstant $C > 0$ så att $|g(u)| < C + \epsilon |u|^p$ för alla u. En uppskattning av den andra termen i (15) ger

$$0 \leq \lambda^{-2p/(p-1)} \left| \int_0^r t^{n-1} g\left(\lambda^{2/(p-1)} v(t,\lambda)\right) dt \right| \leq$$

$$\leq \lambda^{-2p/(p-1)} \int_0^r t^{n-1} \left| g\left(\lambda^{2/(p-1)} v(t,\lambda)\right)\right| dt <$$

$$< \lambda^{-2p/(p-1)} \int_0^r t^{n-1} \left(C + \epsilon \lambda^{2p/(p-1)} |v(t,\lambda)|^p\right) dt \leq$$

$$\leq r^n \lambda^{-2p/(p-1)} \left(C + \epsilon \lambda^{2p/(p-1)} M^p\right) = \frac{Cr^n}{\lambda^{2p/(p-1)}} + \epsilon M^p r^n \to \epsilon M^p r^n$$

då $\lambda \to \infty$.

Eftersom talet ϵ kan väljas godtyckligt litet gäller därför

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left[\lambda^{-2p/(p-1)} \int_0^r t^{n-1} g\left(\lambda^{2/(p-1)} v(t, \lambda)\right) dt\right] = 0$$

Detta medför att hela uttrycket i (15) konvergerar mot

$$-\int_0^r t^{n-1} k(w)|w(t)|^{p-1} w(t) dt$$

då $\lambda_k \to \infty$.

Eftersom denna funktion är kontinuerlig kommer enligt (14) derivatorna $v'(r, \lambda_k)$ att konvergera punktvis mot någon kontinuerlig funktion $\phi(r)$. Vid gränsövergången $\lambda_k \to \infty$ i (14) får vi därför följande ekvation:

$$r^{n-1} \phi(r) = -\int_0^r t^{n-1} k(w)|w(t)|^{p-1} w(t) dt$$

Då $v'(r, \lambda_k)$ är begränsad på I ger Lebesgues dominerande konvergenssats

$$w(r) = \lim_{k \to \infty} v(r, \lambda_k) = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \int_0^r v'(t, \lambda_k)\right) dt = 1 + \int_0^r \phi(t) dt$$

så att $\phi(r) = w'(r)$. Följaktligen har vi $w(0) = 1, w'(0) = 0$ och

$$r^{n-1} w'(r) = -\int_0^r t^{n-1} k(w)|w(t)|^{p-1} w(t) dt$$

som efter derivering och division med r^{n-1} ger

$$w''(r) + \frac{n-1}{r} w'(r) + k(w)|w(r)|^{p-1} w(r) = 0$$

d.v.s. (8). $\square$

Lemma 5. *Låt $n > 1, p > 1$ och antag att $n < \frac{2(p+1)}{p-1}$. Då har lösningen $w \in C^2([0, \infty))$ till problemet (8)-(9) oändligt många nollställen.*

Bevis. Då värdet på den positiva konstanten $k(w)$ inte kommer att påverka beviset på något väsentligt sätt kan vi för enkelhets skull anta att $k(w) = 1$. Först visar vi att w har minst ett nollställe. Sedan återanvänder vi resonemanget för att visa att w har oändligt många nollställen.

Om nollställen saknas så är lösningen strikt positiv enligt (9). Antag därför att $w > 0$ för $r \geq 0$.

Multiplikation av ekvation (8) med r^{n-1} ger

$$(r^{n-1}w'(r))' = -r^{n-1}w(r)^p$$

och efter integrering tillsammans med villkoret $w'(0) = 0$ erhålles

$$r^{n-1}w'(r) = -\int_0^r t^{n-1}w(t)^p dt. \tag{16}$$

Låt oss först behandla fallet $n \leq 2$. För $r \geq 1$ har vi enligt (16)

$$r^{n-1}w'(r) \leq -\int_0^1 t^{n-1}w(t)^p dt$$

eller

$$w'(r) \leq -Cr^{1-n}, \qquad C = \int_0^1 t^{n-1}w(t)^p dt > 0.$$

Ytterligare en integrering ger,

$$w(r) - w(1) \leq -C\int_1^r t^{1-n}dt.$$

För $n \leq 2$ växer integralen $\int_1^r t^{1-n}dt$ obegränsat när $r \to \infty$ och det följer att $w(r) \to -\infty$ då $r \to \infty$. Detta motsäger vårt antagande att $w(r) > 0$ och bevisar att w har ett nollställe i fallet $n \leq 2$.

Antag nu att $n > 2$. Enligt ekvation (16) är $w(r)$ avtagande och vi kan göra uppskattningen

$$-r^{n-1}w'(r) \geq w(r)^p \int_0^r t^{n-1}dt = r^n w(r)^p/n$$

eller $w'(r)w(r)^{-p} \leq -\frac{r}{n}$. Den här olikheten kan vi integrera och får då

$$-\frac{r^2}{2n} \geq \int_0^r w'(t)w(t)^{-p}dt = \frac{1}{p-1}(w(0)^{1-p} - w(r)^{1-p})$$

som kan skrivas om till

$$r^{2/(p-1)}w(r) \leq \frac{1}{\left(\frac{w(0)^{1-p}}{r^2} + \frac{p-1}{2n}\right)^{1/(p-1)}}. \tag{17}$$

Eftersom $w(0) = 1$ och högerledet i (17) har ett ändligt gränsvärde då $r \to \infty$ är funktionen $r^{2/(p-1)}w(r)$ begränsad och vi kan sätta $w(r) \leq Mr^{-2/(p-1)}$ där M är en positiv konstant. Detta medför att

$$\int_0^\infty t^{n-1}w(t)^{p+1}dt \leq M^{p+1}\int_0^\infty \frac{1}{t^{\left(\frac{2(p+1)}{p-1}-n\right)+1}} < \infty \tag{18}$$

där konvergensen följer av vårt antagande att $\frac{2(p+1)}{p-1} > n$.

Nu multiplicerar vi (8) med $r^{n-1}w(r)$ och använder identiteten

$$(r^{n-1}w'w)' = (n-1)r^{n-2}w'w + r^{n-1}w''w + r^{n-1}(w')^2.$$

Det ger

$$(r^{n-1}w'w)' - r^{n-1}(w')^2 + r^{n-1}w^{p+1} = 0$$

och efter integrering från 0 till r erhålles

$$\int_0^r t^{n-1}w'(t)^2dt = r^{n-1}w'(r)w(r) + \int_0^r t^{n-1}w(t)^{p+1}dt. \tag{19}$$

Eftersom $w(r) > 0$ och $w'(r) < 0$ så är $r^{n-1}w'(r)w(r) < 0$. Formlerna (18) och (19) medför då att

$$\int_0^\infty t^{n-1}w'(t)^2dt \leq \int_0^\infty t^{n-1}w(t)^{p+1}dt < \infty. \tag{20}$$

Nu multiplicerar vi ekvation (8) med $r^n w'(r)$ och använder oss av identiteterna

$$(r^n(w')^2)' = nr^{n-1}(w')^2 + 2r^n w'w''$$
$$(r^n w^{p+1})' = nr^{n-1}w^{p+1} + (p+1)r^n w^p w'.$$

Vi får följande omskrivning av (8):

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{r^n(w')^2}{2} + \frac{r^n w^{p+1}}{p+1}\right] = \frac{n}{p+1}r^{n-1}w^{p+1} - \frac{n-2}{2}r^{n-1}(w')^2$$

och integrering från 0 till r ger

$$\frac{r^n}{2}w'(r)^2 + \frac{r^n}{p+1}w(r)^{p+1} = \frac{n}{p+1}\int_0^r t^{n-1}w(t)^{p+1}dt - \frac{n-2}{2}\int_0^r t^{n-1}w'(t)^2dt. \tag{21}$$

Enligt (20) konvergerar de båda integralerna i högerledet då $r \to \infty$. Om vi sätter

$$h(r) = \frac{r^n}{2} w'(r)^2 + \frac{r^n}{p+1} w(r)^{p+1}$$

så följer det att $\lim_{r\to\infty} h(r) = l$ existerar. Vidare gäller enligt (20) att

$$\int_0^\infty t^{-1} h(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{n-1} w'(t)^2 dt + \frac{1}{p+1}\int_0^\infty t^{n-1} w(t)^{p+1} dt < \infty$$

vilket medför att $l = 0$. Låter vi $r \to \infty$ i (21) får vi således

$$\frac{n-2}{2}\int_0^\infty t^{n-1} w'(t)^2 dt = \frac{n}{p+1}\int_0^\infty t^{n-1} w(t)^{p+1} dt. \tag{22}$$

Nu medför formlerna (20) och (22) att $\frac{n-2}{2} \geq \frac{n}{p+1}$ eller $n \geq \frac{2(p+1)}{p-1}$, vilket motsäger vårt antagande.
Det bevisar att w har ett nollställe i fallet $n > 2$.

Slutligen visar vi att lösningen w har oändligt många nollställen.
Antag att w har ett största nollställe r_0. I så fall gäller för alla $r > r_0$ antingen att $w(r) > 0$ eller att $w(r) < 0$. Vi kan för enkelhets skull anta att det förstnämnda gäller och sedan föra ett analogt resonemang i fallet $w(r) < 0$. Multiplikation av (8) med r^{n-1} följt av integrering från r_0 til r ger,

$$r^{n-1} w'(r) = r_0^{n-1} w'(r_0) - \int_{r_0}^r t^{n-1} w(t)^p dt. \tag{23}$$

Det gäller att $w'(r_1) = 0$ för något $r_1 > r_0$. Ty, i annat fall är $w(r)$ växande för alla $r > r_0$ och det gäller att $\int_{r_0}^r t^{n-1} w(t)^p dt \to \infty$ då $r \to \infty$. Då har högerledet i (23) ett nollställe för något $r > r_0$ vilket är en motsägelse.

Låt nu r_1 vara det första r-värdet efter r_0 sådant att $w'(r_1) = 0$. Vi multiplicerar ekvation (8) med r^{n-1} och integrerar den här gången från r_1 till r. Då erhålles (med $w'(r_1) = 0$)

$$r^{n-1} w'(r) = -\int_{r_1}^r t^{n-1} w(t)^p dt.$$

Situationen är nu analog med när vi inledde resonemanget om att w har minst ett nollställe. Vi kan därför använda samma argument för att visa att w har ytterligare ett nollställe genom att låta r_1 (istället för 0) vara undre integrationsgräns. Den enda betydande avvikelsen är att formel (17) istället lyder

$$r^{2/(p-1)}w(r) \leq \frac{1}{\left(\frac{w(r_1)^{1-p}}{r^2} + \frac{p-1}{2n}\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) + \frac{p-1}{n(n-2)}\left(\frac{r_1^n}{r^n} - \frac{r_1^2}{r^2}\right)\right)^{1/(p-1)}}$$

men med samma resultat som följd. Antagandet att w har ett största nollställe är därmed felaktigt vilket bevisar Lemma 5. $\square$

Vi kan nu konstatera att antalet nollställen till funktionerna $u(r,a)$ växer obegränsat då a kontinuerligt genomlöper intervallet $(0,\infty)$. Nästa resultat visar att antalet nollställen kan öka med högst ett åt gången.

Lemma 6. *Låt talet $\tilde{a} > \beta^+$ vara sådant att $u(r,\tilde{a})$ har exakt k nollställen ($k \geq 0$) och uppfyller $u(r,\tilde{a}) \to 0$ då $r \to \infty$. Om $|a - \tilde{a}|$ är tillräckligt litet så har $u(r,a)$ som mest $k+1$ nollställen i $[0,\infty)$.*

Bevis. Vi genomför beviset i fallet $k = 0$. Då $k \geq 1$ kan man med små justeringar upprepa resonemanget genom att först förskjuta u-axeln förbi det k:te nollstället för $u(r,\tilde{a})$.

Som vi tidigare har sett uppfyller energin ekvationerna

$$E = \frac{1}{2}u'^2 + F(u)$$

och

$$E' = -\frac{n-1}{r}u'^2$$

Om u'^2 elimineras från dessa två ekvationer erhålles

$$E' + \frac{2n-2}{r}E = \frac{2n-2}{r}F(u)$$

som efter multiplikation med den integrerande faktorn r^{2n-2} kan skrivas

$$(r^{2n-2}E)' = (2n-2)r^{2n-3}F(u). \tag{24}$$

Vi antar nu att a ligger nära $\tilde{a}$ och att $u(r,a)$ har ett första nollställe för $r = R_1$. Det gäller alltså att $u(R_1,a) = 0$ och att $u(r,a) > 0$ i intervallet $[0,R_1)$. Vårt mål är att visa att $u(r,a)$ inte kan ha ett **andra** nollställe. Det gör vi genom att visa att energin måste anta ett negativt värde innan ett andra nollställe kan nås. Då följer resultatet av Lemma 2.

Mer specifikt ska vi visa att $E(r,a)$ kommer att ha antagit ett negativt värde innan $u(r,a) = \gamma$, där γ är ett godtyckligt negativt tal (förutsatt att $|a - \tilde{a}|$ är tillräckligt litet).

Fixera $\gamma \in (\beta^-, 0)$ och notera att $F(u) < 0$ i detta intervall.

Det gäller att $u'(R_1, a) < 0$. Om $u'(r,a)$ händelsevis skulle växla tecken någonstans i intervallet $\beta^- < u(r,a) < 0$ så skulle vi få $E < 0$ i samma ögonblick som $u'(r,a) = 0$. Enligt Lemma 2 kan $u(r,a)$ därefter inte ha något nytt nollställe. Vi kan därför anta att $u(r,a)$ är strängt avtagande, åtminstone tills $u(r,a)$ antar värdet γ.

Välj ett $\delta > 0$ sådant att $\delta \leq |F(u)|$ för alla $u \in (\gamma, \frac{\gamma}{2})$.

Låt R_2 och R_3 vara de första värdena efter R_1 för vilka $u(r) = \frac{\gamma}{2}$ respektive $u(r) = \gamma$ och antag att $E(R_3) \geq 0$.

Nu integrerar vi (24) från R_2 till R_3 vilket ger

$$R_3^{2n-2}E(R_3) - R_2^{2n-2}E(R_2) = (2n-2)\int_{R_2}^{R_3} t^{2n-3}F(u(t))dt =$$

$$= -(2n-2)\int_{R_2}^{R_3} t^{2n-3}|F(u(t))|dt \leq -(2n-2)\delta(R_3 - R_2)\min(R_3^{2n-3}, R_2^{2n-3}).$$

Då $E(R_3) \geq 0$, erhåller vi

$$R_2^{2n-2}E(R_2) \geq (2n-2)\delta(R_3 - R_2)\min(R_3^{2n-3}, R_2^{2n-3}).$$

eller

$$E(R_2) \geq \frac{1}{R_2}(2n-2)\delta(R_3 - R_2)\frac{\min(R_3^{2n-3}, R_2^{2n-3})}{R_2^{2n-3}} \tag{25}$$

Eftersom $u'(r,a)$ är begränsad i intervallet (R_2, R_3) är avståndet $R_3 - R_2$ uppåt och nedåt begränsat av positiva konstanter då $a \to \tilde{a}$. Vidare gäller (p.g.a. kontinuiteten i a) att R_2 och $R_3 \to \infty$ då $a \to \tilde{a}$. Detta medför att $R_2/R_3 \to 1$ då $a \to \tilde{a}$ och speciellt har vi

$$\frac{\min\left(R_3^{2n-3}, R_2^{2n-3}\right)}{R_2^{2n-3}} \to 1$$

då $a \to \tilde{a}$.

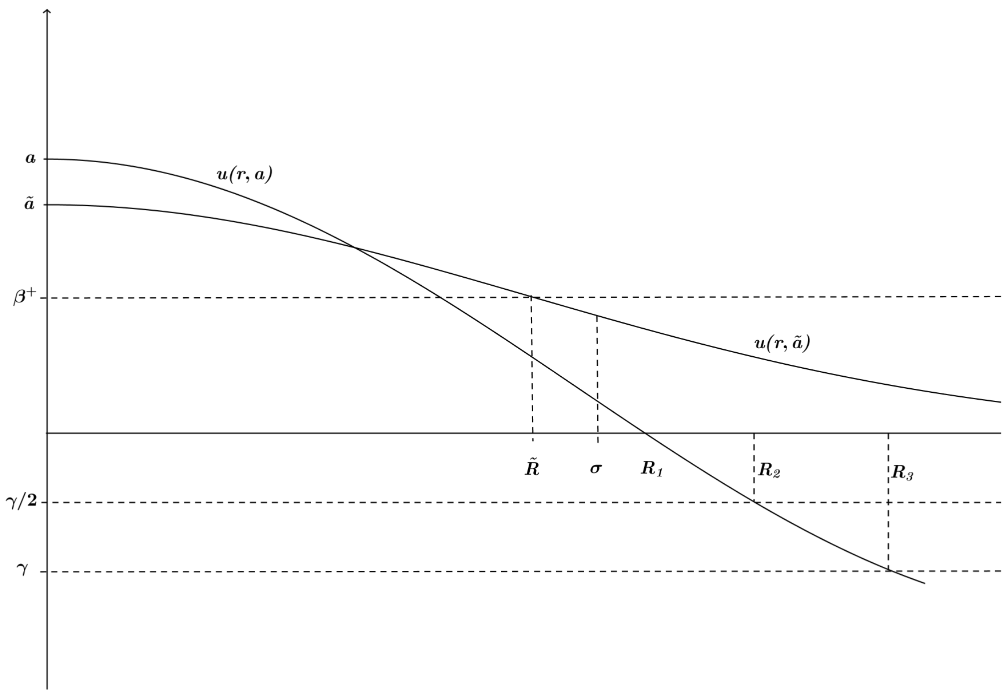
Om a ligger tillräckligt nära $\tilde{a}$ gäller följaktligen

$$\frac{\min\left(R_3^{2n-3}, R_2^{2n-3}\right)}{R_2^{2n-3}} > \frac{1}{2}$$

och enligt (25) har vi

$$E(R_2) \geq \frac{C}{R_2}, \qquad C > 0$$

Vi låter nu $\tilde{R}$ vara det första värdet på r för vilket $u(r, \tilde{a}) = \beta^+$. Sedan väljer vi ett värde $\sigma \in (\tilde{R}, R_1)$ sådant att $u(\sigma, \tilde{a}) < \beta^+$. Observera att vi även har $u(\sigma, a) < \beta^+$ om a ligger tillräckligt nära $\tilde{a}$.



Figur 2: R_1, R_2 *och* R_3 *beror på* a. $\tilde{R}$ *och* σ *är fixa tal.*

Medelvärdessatsen ger

$$\frac{\gamma/2 - u(\sigma, a)}{R_2 - \sigma} = u'(\xi, a), \qquad \xi \in (\sigma, R_2) \tag{26}$$

Eftersom $E > C/R_2$ i (σ, R_2) och $F(u) \leq 0$ i samma intervall, har vi

$$\frac{1}{2}u'^2 = E - F(u) \geq E > C/R_2$$

eller $|u'| > \frac{C_2}{\sqrt{R_2}}$. Från (26) får vi nu för små $|a - \tilde{a}|$ att

$$R_2 - \sigma = \frac{|\gamma/2 - u(\sigma, a)|}{|u'(\xi, a)|} < \frac{|\gamma/2 - \beta^+|}{C_2/\sqrt{R_2}} = C_3\sqrt{R_2}$$

Således gäller

$$\frac{\sigma}{R_2} > 1 - \frac{C_3}{\sqrt{R_2}} > \frac{1}{2}$$

då R_2 är tillräckligt stort (a tillräckligt nära $\tilde{a}$). Men då får vi att $R_2 < 2\sigma$ vilket motsäger att R_2 kan bli godtyckligt stort. Det betyder att antagandet $E(R_3) \geq 0$ var felaktigt vilket bevisar Lemma 6. $\Box$

2.4 Bevis av Teorem 1

Definiera mängden $A_0 = \{a > 0 \mid u(r, a) \text{ saknar nollställen}\}$.
Vi har i Lemma 3 visat att $(0, \beta^+] \subseteq A_0$, så att A_0 är icke-tom. Eftersom (Lemma 4-5) antalet nollställen växer mot oändligheten då $a \to \infty$, är A_0 uppåt begränsad.

Vi definierar nu $a_0 = \sup A_0$ och bevisar följande:

$$u(r, a_0) > 0, \qquad \forall r > 0 \tag{27}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, a_0) = 0 \tag{28}$$

Antag att $u(r, a_0)$ har ett nollställe för något $r = r_0 > 0$. I så fall har $u(r, a_0)$ en teckenväxling i r_0. Om $\epsilon > 0$ är tillräckligt litet medför detta att även $u(r, a_0 - \epsilon)$ har ett nollställe, eftersom $u(r, a)$ beror kontinuerligt på a. Det betyder att $\sup A_0 < a_0$ vilket är en motsägelse. Alltså gäller (27).

Multiplikation av ekvation (4) med r^{n-1} och integrering från 0 till r ger

$$u'(r)r^{n-1} = -\int_0^r t^{n-1} f(u(t))dt \tag{29}$$

Eftersom $a_0 \geq \beta^+$ har vi enligt (§3) att $f(u(0, a_0)) = f(a_0) > 0$. Detta medför att $f(u(r, a_0)) > 0$ och enligt (29) att $u'(r, a_0) < 0$ för tillräckligt små $r > 0$.

Antag nu att $u'(r_0, a_0) > 0$ för något $r_0 > 0$. Om $\epsilon > 0$ är tillräckligt litet medför kontinuiteten att $u(r, a_0 + \epsilon)$ har ett lokalt minimum för något

$r < r_0$ och enligt Lemma 1 kan denna lösning inte ha något nollställe. Vi får motsägelsen $\sup A_0 > a_0$.

Det gäller således att $u(r, a_0)$ är avtagande och nedåt begränsad och att $\lim_{r\to\infty} u(r, a_0) = \bar{u} \geq 0$ existerar. Vi antar att $\bar{u} > 0$.

Energin $E(r, a_0)$ är avtagande och nedåt begränsad så att $\lim_{r\to\infty} E(r, a_0) = \bar{E}$ existerar. Men detta medför att även $c = \lim_{r\to\infty} u'(r, a_0)$ existerar, ty

$$u'(r, a_0)^2 = 2(E - F(u)) \to 2(\bar{E} - F(\bar{u})).$$

Vi konstaterar att $c = 0$. Alternativet skulle vara att $c < 0$ vilket uppenbarligen ger motsägelsen $u(r, a_0) \to -\infty$. Från (4) har vi

$$u'' = -\frac{n-1}{r}u' - f(u) \to -f(\bar{u})$$

och det måste gälla att $f(\bar{u}) = 0$. Av vårt antagande samt av villkoret (§3) följer det att $0 < \bar{u} < \beta^+$. Därmed har vi

$$\bar{E} = F(\bar{u}) < 0.$$

Om $\epsilon > 0$ är tillräckligt litet kommer följaktligen $E(r, a_0 + \epsilon)$ att anta ett negativt värde innan $u(r, a_0 + \epsilon)$ når sitt första nollställe. Men då medför Lemma 2 att $u(r, a_0 + \epsilon)$ inte kan ha några nollställen alls, vilket återigen motsäger definitionen av a_0. Det betyder att $\bar{u} = 0$ och att (28) gäller.
Vi har därmed visat att $u(r, a_0)$ är en positiv lösning till problemet (4)-(5).

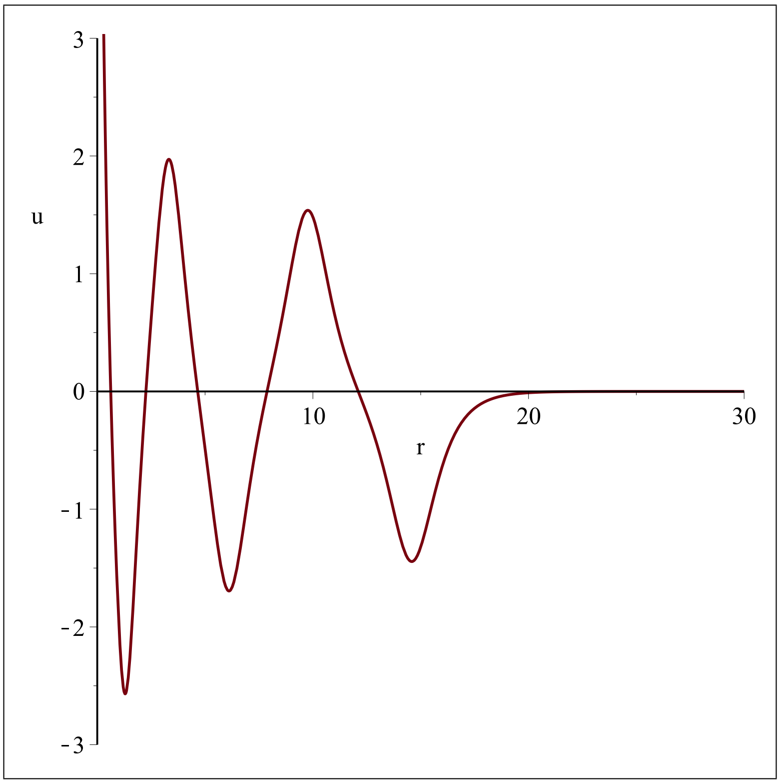
Nu definierar vi mängden $A_1 = \{a > a_0 \mid u(r, a) \text{ har högst ett nollställe}\}$. Det följer från definitionen av a_0 samt av Lemma 4-6 att A_1 är icke-tom och uppåt begränsad. Vi sätter $a_1 = \sup A_1$ och observerar att $u(r, a)$ har precis ett nollställe för $a \in (a_0, a_1)$.

Det gäller att $u(r, a_1)$ har ett första nollställe för något $r_0 > 0$ och att $u'(r_0, a_1) < 0$. Vi kan även konstatera att det finns ett första $r_1 > r_0$ sådant att $u'(r_1, a_1) = 0$. I annat fall skulle vi för ett tillräckligt litet $\epsilon > 0$ haft $u'(r, a_1 + \epsilon) < 0$ för alla $r > r_0$ vilket motsäger definitionen av a_1.

Genom att resonera på samma sätt som i beviset av (27)-(28) kan vi nu visa att att $u(r, a_1)$ är en lösning till (4)-(5) med precis ett nollställe.

Fortsätter vi induktivt kan vi alltså för varje givet heltal $m \geq 0$ producera en lösning $u(r, a_m)$ med precis m nollställen, vilket bevisar Teorem 1. $\square$

Figur 3 visar en numerisk plot av $u(r, a_5)$ med $n = 2$ och $f(u) = u^3 - u$.



Figur 3: $u(r, a_5)$

3 En modifierad koefficient

Om koefficienten $\frac{n-1}{r}$ i ekvation (4) byts ut mot en mer allmän funktion $h(r)$ får vi

$$u''(r) + h(r)u'(r) + f(u(r)) = 0 \tag{30}$$

Vi ska i det här avsnittet undersöka vilka krav som måste ställas på funktionen $h(r)$ för att Teorem 1 fortfarande ska gälla. Om energin $E(r)$ definieras på samma sätt som tidigare så har vi

$$E'(r) = \left(\frac{1}{2}u'^2 + F(u)\right)' = -h(r)u'^2$$

och eftersom energin ska vara strängt avtagande ställer vi som första krav att $h(r) > 0$ för alla $r > 0$. Med detta krav är det enkelt att kontrollera att lemmorna 1-3 är uppfyllda. Vi tittar nu närmare på Lemma 4.

Definiera funktionen $v(r, \lambda)$ enligt (7). En beräkning (som tidigare) visar att $v(r)$ uppfyller ekvationen

$$v''(r) + \frac{h(r/\lambda)}{\lambda}v'(r) + \lambda^{-2p/(p-1)}f\left(\lambda^{2/(p-1)}v(r)\right) = 0 \tag{31}$$

Att funktionen v är begränsad visas på samma sätt som i Lemma 4.

Låt $h(r) = b(r) + \frac{n-1}{r}$ där funktionen $b(r)$ uppfyller följande villkor:

$$b(r) \geq 0, \qquad r \in [0, \infty) \tag{32}$$

$$B(r) = \int_0^r b(t)dt < \infty, \qquad r \in [0, \infty) \tag{33}$$

Det gäller då att

$$\frac{h(r/\lambda)}{\lambda} = \frac{b(r/\lambda)}{\lambda} + \frac{n-1}{r}$$

Multiplikation av (31) med $e^{B(r/\lambda)}r^{n-1}$ samt integrering från 0 till r ger oss följande motsvarighet till ekvation (14) i Lemma 4:

$$v'(r)e^{B(r/\lambda)}r^{n-1} = -\lambda^{-2p/(p-1)}\int_0^r e^{B(t/\lambda)}t^{n-1}f\left(\lambda^{2/(p-1)}v(t,\lambda)\right)dt. \tag{34}$$

Det gäller som tidigare att

$$\left|f\left(\lambda^{2/(p-1)}v(t,\lambda)\right)\right| \leq konstant \cdot \lambda^{2p/(p-1)}, \quad \lambda \geq 1$$

och med utnyttjande av att $B(t/\lambda)$ är en växande funktion får vi

$$|v'(r)| \leq konstant \cdot e^{-B(r/\lambda)}r^{1-n}\int_0^r e^{B(t/\lambda)}t^{n-1}dt \leq$$

$$\leq konstant \cdot e^{-B(r/\lambda)} \cdot e^{B(r/\lambda)}r^{1-n}\int_0^r t^{n-1}dt = konstant \cdot r$$

Vi konstaterar som tidigare att det finns delföljder $\{v(r,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ och $\{v'(r,\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ som konvergerar mot $w(r)$ respektive $w'(r)$ på kompakta intervall.

I gränsen $\lambda \to \infty$ gäller $e^{B(r/\lambda)} \to e^{B(0)} = e^0 = 1$ och vi finner att ekvation (34) lyder,

$$w'(r)r^{n-1} = -\int_0^r t^{n-1}k(w)|w(t)|^{p-1}w(t)dt$$

Efter derivering och division med r^{n-1} får vi

$$w''(r) + \frac{n-1}{r}w'(r) + k(w)|w(r)|^{p-1}w(r) = 0$$

d.v.s. (8).

Det är nu klart att Lemmorna 1-4 gäller om $h(r) = b(r) + \frac{n-1}{r}$ där $b(r)$ tillhör den stora klass av funktioner som uppfyller villkoren (32)-(33).

Vårt resonemang har hela tiden byggt på att lösningarna $u(r,a)$ ska konvergera mot lösningen till det specifika problemet (8)-(9) som ju bevisligen har ett obegränsat antal nollställen. Det är naturligtvis möjligt att vi för helt andra val av $h(r)$ kan erhålla andra gränsfunktioner som också har oändligt många nollställen. En fullständig utredning av vilka nödvändiga villkor som $h(r)$ måste uppfylla för att Teorem 1 ska gälla tycks vara en ganska omfattande uppgift och en sådan analys ligger utanför ramen för detta arbete.

Vi går vidare och studerar Lemma 6 med vår allmänna funktion $h(r)$. Precis som tidigare måste vi kräva att $h(r) > 0$. Motsvarigheten till ekvation (24) lyder:

$$(Ee^{2H(r)})' = 2h(r)e^{2H(r)}F(u)$$

där $H(r)$ är en (växande) primitiv funktion till $h(r)$. Integrering från R_2 till R_3 ger

$$E(R_3)e^{2H(R_3)} - E(R_2)e^{2H(R_2)} = 2\int_{R_2}^{R_3} h(t)e^{2H(t)}F(u(t))dt$$

och med $|F(u)| \geq \delta$ och $E(R_3) \geq 0$ erhåller vi

$$E(R_2)e^{2H(R_2)} \geq 2\delta(R_3 - R_2)e^{2H(R_2)}\left(\min_{t\in[R_2,R_3]}(h(t))\right)$$

eller

$$E(R_2) \geq \frac{1}{R_2}2\delta(R_3 - R_2)\left(R_2 \min_{t\in[R_2,R_3]}(h(t))\right)$$

Antag att vi för stora R_2 har

$$\left(R_2 \min_{t\in[R_2,R_3]}(h(t))\right) \geq K \tag{35}$$

där K är en positiv konstant.

I så fall gäller $E(R_2) \geq C/R_2$ och vi kan avsluta beviset på samma sätt som tidigare. Lemma 6 gäller alltså om funktionen $h(r)$ uppfyller (35).

Vi visar att villkoret (35), och därmed Lemma 6 är uppfyllt då h har formen $h(r) = b(r) + \frac{n-1}{r}$, och $b(r)$ uppfyller villkoren (32)-(33).

Det gäller att

$$\min_{t \in [R_2, R_3]} (h(t)) = h(r')$$

för något $r' \in [R_2, R_3]$.

Eftersom avståndet $r' - R_2$ är begränsat gäller även att kvoten $R_2/r' \to 1$ då $R_2 \to \infty$.

För stora R_2 får vi

$$\left(R_2 \min_{t \in [R_2, R_3]} (h(t)) \right) = b(r')R_2 + \frac{R_2}{r'}(n-1) \geq \frac{R_2}{r'}(n-1) > \underbrace{\frac{1}{2}(n-1)}_{K} > 0$$

Funktionen $b(r)$ behöver således inte uppfylla några ytterligare villkor för att Lemma 6 ska gälla. Beviset av Teorem 1 i avsnitt 2.4 kräver heller inte några ytterligare restriktioner på $b(r)$. Vi konstaterar därför att Teorem 1 gäller då funktionen $b(r)$ uppfyller villkoren (32) och (33).

Anm. Våra resultat utesluter inte att Teorem 1 kan gälla för andra funktioner $b(r)$. Om $b(r)$ exempelvis har formen $b(r) = \frac{k}{r}$, $(k \geq 0)$ så är villkoret (33) inte uppfyllt men då är $h(r) = \frac{k+n-1}{r}$ varvid Teorem 1 gäller med $n' = k + n$.

4 Entydighet för positiva lösningar

4.1 Teorem 2

Vi ska nu ägna oss åt ett resultat som säger att det (för lämpligt valda f) finns högst en positiv lösning till problemet (4)-(5).

Antag att f uppfyller följande krav:

(i) $\quad f \in C^1([0,\infty)), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = -m < 0$

(ii) $\quad f(u) < 0$ för $0 < u < \alpha$, $f(u) > 0$ för $u > \alpha$ och $f'(\alpha) > 0$ för något $\alpha > 0$.

Låt $\lambda > 0$ och definiera

$$I(u,\lambda) = \lambda u f'(u) - (\lambda + 2) f(u) \tag{36}$$

Teorem 2: *Antag att f uppfyller villkoren (i) och (ii), och antag att det för varje $U > \alpha$ finns ett $\lambda = \lambda(U) > 0$, kontinuerligt beroende av U, så att*

$$I(u,\lambda) \geq 0, \qquad 0 < u < U \tag{37}$$

och

$$I(u,\lambda) \leq 0, \qquad u > U. \tag{38}$$

Då har problemet (4)-(5) högst ***en*** *lösning $u(r)$ sådan att $u(r) > 0$ för $r \geq 0$.*

Det kan ofta vara besvärligt att kontrollera om en funktion f uppfyller villkoren i Teorem 2. En följdsats i slutet av avsnittet tillhandahåller ett mer användbart kriterium. Följande exempel visar dock hur Teorem 2 direkt kan tillämpas på en specifik funktion.

Exempel 1.

Låt f vara funktionen $f(u) = u^p - u$ där $p > 1$. Det är enkelt att kontrollera att (i) och (ii) är uppfyllda med $\alpha = m = 1$. Vi får

$$I(u,\lambda) = \lambda u(pu^{p-1} - 1) - (\lambda + 2)(u^p - u) = 2u\left(1 + \frac{\lambda(p-1) - 2}{2} u^{p-1}\right).$$

Fixera $U > 1$ och låt $\lambda(U) = \frac{2}{p-1}\left(1 - U^{1-p}\right)$. Insättning i uttrycket för I ger

$$I(u, \lambda(U)) = 2u\left(1 - \left(\frac{u}{U}\right)^{p-1}\right)$$

och vi ser att villkoren (37) och (38) är uppfyllda.

4.2 Funktionen $\delta(r)$

Låt som tidigare $u(r, a)$ vara den lösning till (4) som uppfyller $u(0) = a$ och $u'(0) = 0$. Eftersom $f \in C^1([0, \infty))$ är lösningen $u(r, a)$ av klass C^2 i variabeln r och av klass C^1 i variabeln a. Se Proposition 2.35 i [11]. Definiera $\delta(r) = \delta(r, a) = \frac{\partial u}{\partial a}$. Ett studium av funktionerna $\delta(r, a)$ kommer att ge oss en hel del information om lösningarna $u(r, a)$. Speciellt spelar teckenväxlingarna hos δ en viktig roll i beviset av Teorem 2.

Derivering av (4) med avseende på a visar att δ uppfyller ekvationen

$$\delta'' + \frac{n-1}{r}\delta' + f'(u)\delta = 0 \tag{39}$$

med begynnelsevillkor

$$\delta(0) = 1, \qquad \delta'(0) = 0$$

Definiera mängderna:

$$\begin{aligned} S^+ &= \{a > 0 : u(r, a) \geq M \text{ där } M > 0\} \\ S^0 &= \{a > 0 : u(r, a) > 0 \text{ och } \lim_{r\to\infty} u(r, a) = 0\} \\ S^- &= \{a > 0 : u(r, a) = 0 \text{ för något första } R = R(a) > 0\} \end{aligned}$$

Vi gör även tolkningen $R(a) = \infty$ då $a \in S^0$.

Följande resultat gällande mängderna S^+, S^0 och S^- är kända [1]:

(1) S^+, S^0 och S^- är disjunkta och täcker intervallet $(0, \infty)$.
(2) S^+ och S^- är icke-tomma med $(0, \alpha] \subseteq S^+$.
(3) Varje lösning u med $a \in S^0 \cup S^-$ är strängt avtagande i $[0, R)$
(4) S^+ och S^- är öppna i $(0, \infty)$.

Dessutom har vi från [12] att om $a \in S^0$ så gäller

$$\lim_{r\to\infty} \frac{u'(r)}{u(r)} = -\sqrt{m} \tag{40}$$

Vi presenterar nu ett antal delresultat som ligger till grund för beviset av Teorem 2.

Lemma 7. *Antag att* $a \in S^0 \cup S^-$. *Då finns det ett* $r_0 \in (0, R)$ *sådant att* $\delta(r)$ *är monoton i* $[r_0, R)$.

Bevis. Låt r' vara så stort att $f'(u(r)) < 0$ för alla $r \in [r', R)$. (Att ett sådant värde existerar garanteras av villkoren $(i) - (ii)$ samt att $u(r)$ avtar monotont mot 0 i $[0, R)$. Om $\delta(r)$ saknar stationära punkter i $[r', R)$ så är beviset klart. Antag därför att $\delta'(r_0) = 0$ för något $r_0 \in [r', R)$. I r_0 gäller enligt (39) att $\delta'' = -f'(u)\delta$ och vi ser att en stationär punkt med $\delta > 0$ måste vara ett lokalt minimum medan en stationär punkt med $\delta < 0$ måste vara ett lokalt maximum. Följaktligen kan inte $\delta'(r)$ därefter växla tecken vilket bevisar lemma 7. □

Lemma 8.
(a) Låt $a_0 \in S^-$ *och antag att* $\delta(R(a_0)) < 0$. *Då är R(a) en avtagande funktion av a nära* a_0.
(b) Låt $a_0 \in S^0$ *och antag att* $\delta(r) \to -\infty$ *då* $r \to \infty$. *Då gäller för något* $\epsilon > 0$ *att intervallet* $(a_0, a_0 + \epsilon)$ *är en delmängd av* S^-, *medan intervallet* $(a_0 - \epsilon, a_0)$ *är en delmängd av* S^+.

Bevis.
(a) Då $a \in S^-$ gäller $u(R(a), a) = 0$ och $u'(R(a), a) < 0$. Enligt implicita funktionssatsen är $R(a)$ en deriverbar funktion med derivatan

$$R'(a) = -\frac{\delta(R(a), a)}{u'(R(a), a)}$$

Antagandet $\delta(R(a_0), a_0) < 0$ medför nu att $R'(a_0) < 0$. □

(b) Då $a_0 \in S^0$ gäller det att $u(r, a_0) \to 0$ då $r \to \infty$.
Låt R_1 vara ett fixt tal så stort att $f'(u(R_1)) < 0$. Antagandet att $\delta(r) \to -\infty$ då $r \to \infty$ medför att det finns ett tal $R_2 > R_1$ sådant att $\delta(R_2) < 0$ och $\delta'(R_2) < 0$. Det innebär att $u(R_2, a)$ respektive $u'(R_2, a)$ är avtagande funktioner av a i någon öppen omgivning av a_0. För $a > a_0$ och a tillräckligt nära a_0 har vi således

$$u(R_2, a) < u(R_2, a_0), \qquad u'(R_2, a) < u'(R_2, a_0) \tag{41}$$

Om $a \in S^+$ så måste det finnas ett efterföljande tal $R_3 > R_2$ för vilket $u(R_3, a) = u(R_3, a_0)$. Om å andra sidan $a \in S^0$ så kommer både $u(r, a_0)$ och

$u(r,a)$ att konvergera mot 0 då $r \to \infty$. I bägge fallen kommer, p.g.a. (41), avståndet $w(r) = u(r,a_0) - u(r,a)$ att ha ett positivt maximum för något $r > R_2$. Från (4) och medelvärdessatsen har vi

$$w'' + \frac{n-1}{r}w' = \left(u''(r,a_0) + \frac{n-1}{r}u'(r,a_0)\right) - \left(u''(r,a) + \frac{n-1}{r}u'(r,a)\right) =$$

$$= -(f(u(r,a_0)) - f(u(r,a))) = -(u(r,a_0) - u(r,a))f'(\theta(r)) = -f'(\theta(r))w$$

där $\theta(r)$ ligger i intervallet $u(r,a) < \theta(r) < u(r,a_0)$. Men då är $f'(\theta(r)) < 0$ och vi ser att en stationär punkt för w endast kan vara ett minimum. Motsägelsen medför att $a \in S^-$. I fallet $a < a_0$ och a nära a_0, kan man på motsvarande sätt visa att $a \in S^+$. Här måste man dock se till att välja a så nära a_0 att $f(u(R_2,a)) < 0$. $\square$

Definition. Låt $a \in S^0 \cup S^-$. Talet a säges vara *tillåtligt* om $\delta(r,a)$ har precis ett nollställe i $[0,R)$. a säges vara *strängt tillåtligt* om a är tillåtligt och om dessutom

$\delta(R) < 0$ när $a \in S^-$
$\delta(r) \to -\infty$ då $r \to \infty$ när $a \in S^0$.

Figurerna 4-6 på nästa sida visar några tänkbara utseenden för funktionen δ i tre olika fall.

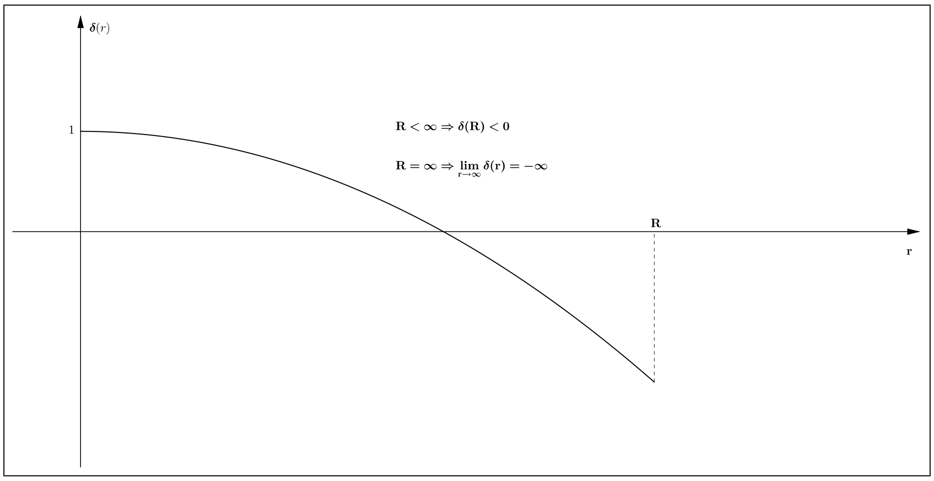
Observera att om a är strängt tillåtligt så är förutsättningarna i Lemma 8 uppfyllda, något som kommer att spela en avgörande roll i det kommande resonemanget. Vi ska visa att, under förutsättningarna i Teorem 2, alla $a \in S^0 \cup S^-$ är strängt tillåtliga och då behöver vi veta något om nollställena till funktionen δ. Följande resultat från oscillationsteorin är ett specialfall av Sturms jämförelsesats och lämnas utan bevis.

Lemma 9. *Antag att Y respektive Z är icke-triviala lösningar till ekvationerna*

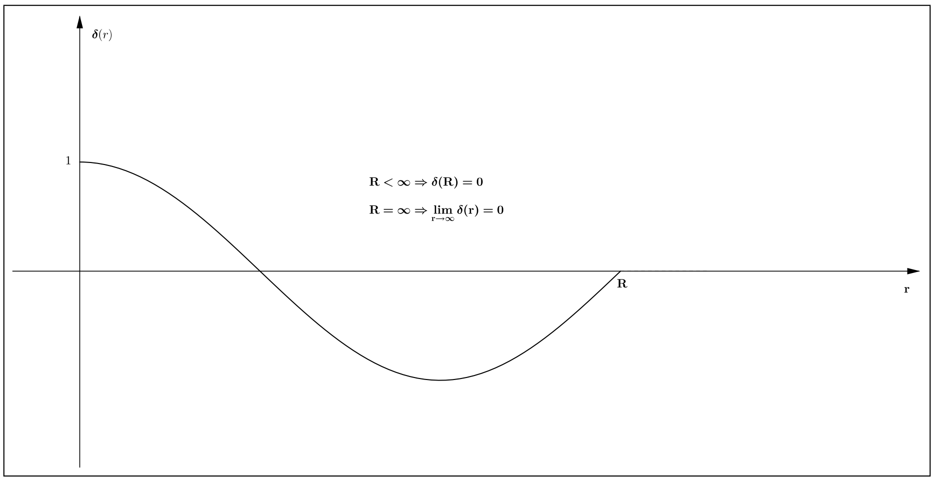
$$Y'' + \frac{n-1}{r}Y' + g(r)Y = 0$$

$$Z'' + \frac{n-1}{r}Z' + G(r)Z = 0$$

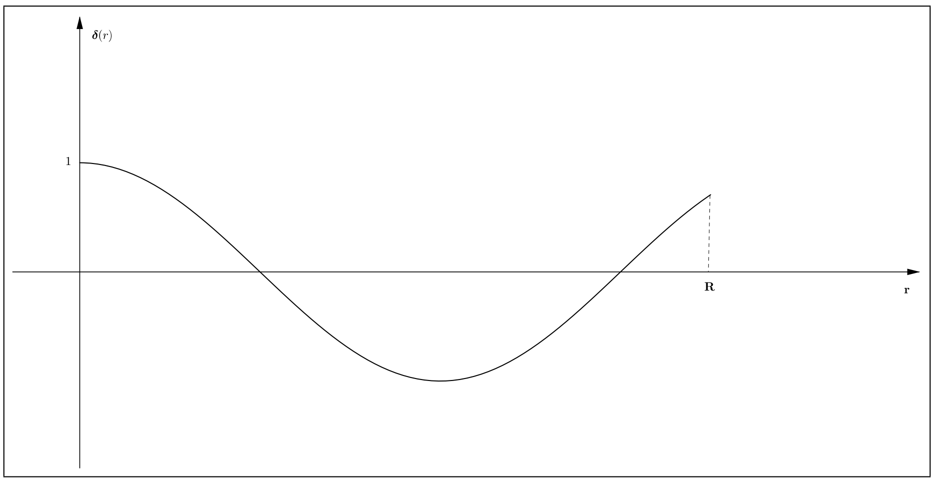
på intervallet $(0,s) \subset (0,\infty)$, där g och G är kontinuerliga på $(0,s)$, $G \geq g$ på $(0,s)$ och där G inte är identiskt lika med g. Antag vidare att Y och Z är kontinuerliga i $r = 0$ och att $Y'(0) = Z'(0) = Y(s) = 0$. Då har Z minst ett nollställe i $(0,s)$.



Figur 4: a är strängt tillåtligt



Figur 5: a är tillåtligt men ej strängt tillåtligt



Figur 6: a är otillåtligt

Lemma 10. *Antag att f uppfyller förutsättningarna i Teorem 2 och att $a \in S^0 \cup S^-$. Då har funktionen $\delta(r, a)$ minst ett nollställe i intervallet $(0, R)$.*

Bevis. Definiera för $\lambda > 0$ funktionen

$$v(r) = ru'(r) + \lambda u(r). \tag{42}$$

En beräkning med hjälp av (4) visar att v är en lösning till ekvationen

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' + f'(u)v = I(u, \lambda)$$

som kan skrivas

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' + Kv = 0, \qquad v \neq 0 \tag{43}$$

där

$$K = \left[f'(u) - \frac{I(u, \lambda)}{v}\right]$$

Låt $\lambda = \lambda(a)$ vara det värde som svarar mot $U = a$ enligt förutsättningarna i Teorem 2. Notera att kravet $U > \alpha$ är uppfyllt eftersom $(0, \alpha] \subset S^+$. Det gäller då att $I(u, \lambda) \geq 0$ för $0 < u < a = u(0)$. Om $I(u, \lambda) \not\equiv 0$ så är $K < f'(u)$ så länge $v > 0$.
Antag att $a \in S^-$. Då gäller $v(0) > 0$ och $v(R) < 0$ vilket innebär att v har ett nollställe för något R_0 i $(0, R)$. Vi har således $v'(0) = \delta'(0) = v(R_0) = 0$ och Lemma 9 tillämpat på ekvationerna (39) och (43) visar att δ har minst ett nollställe i $(0, R_0)$. Antag istället att $a \in S^0$. Då har vi

$$v(r) = ru'(r) + \lambda u(r) = \left(\frac{u'(r)}{u(r)}r + \lambda\right)u(r)$$

och enligt (40) kan vi välja r så stort att uttrycket inom parantes blir negativt. Det visar att v (och därmed δ) har ett nollställe även i fallet $R = \infty$. Om vi händelsevis skulle ha $I(u, \lambda) \equiv 0$ så är δ och v lösningar till samma differentialekvation. En beräkning av Wronskianen i $r = 0$ ger

$$W(0) = v(0)\delta'(0) - \delta(0)v'(0) = \lambda a \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$$

vilket visar att lösningarna är linjärt beroende och δ har ett nollställe som sammanfaller med nollstället för v. □

Följande resultat ger oss de sista verktygen för att bevisa Teorem 2.

Lemma 11. *Värdet* $a_0 = \inf(S^0 \cup S^-)$ *är tillåtligt.*

Lemma 12. *Antag att* f *uppfyller förutsättningarna i Teorem 2 och låt* $a \in S^0 \cup S^-$ *vara tillåtligt. Då är* a *strängt tillåtligt.*

Lemma 13. *Mängden av strängt tillåtliga* $a \in S^0 \cup S^-$ *är både öppen och sluten i* $S^0 \cup S^-$.

Bevisen av Lemmorna 11 och 12 återfinns i [10] och bygger på samma slags oscillationsteori som användes i Lemma 10. Vi nöjer oss här med att bevisa Lemma 13 men återkallar först några resultat från topologin:

Låt S vara ett delrum av $\mathbb{R}$ och låt $T \subseteq S$. Då är T öppen i S om och endast om $T = U \cap S$ för någon öppen delmängd U av $\mathbb{R}$. På motsvarande sätt är T sluten i S om och endast om $T = V \cap S$ för någon sluten delmängd V av $\mathbb{R}$. Om S är sammanhängande och T är både öppen och sluten i S så är antingen $T = \emptyset$ eller $T = S$. Som exempel kan vi ta $S = [0, 2)$ och $T = [0, 1)$. Då är T öppen i S eftersom $T = (-1, 1) \cap S$. Däremot är T inte öppen i $\mathbb{R}$.

Bevis av Lemma 13. Låt $a \in S^0 \cup S^-$. Genom Lemma 10 kan vi konstatera att mängden av otillåtliga a består av precis de a-värden för vilka $\delta(r, a)$ har minst två nollställen i $(0, R)$. Eftersom δ är en kontinuerlig funktion av a, och eftersom δ inte kan ha några stationära punkter på r-axeln så kommer ett otillåtligt a-värde att förbli otillåtligt om vi perturberar a. Det betyder att mängden av otillåtliga a-värden är öppen i $S^0 \cup S^-$. Följaktligen är mängden av tillåtliga a-värden sluten i $S^0 \cup S^-$. Eftersom varje tillåtligt a-värde är strängt tillåtligt (enligt Lemma 12) är mängden av strängt tillåtliga a-värden sluten i $S^0 \cup S^-$. Det återstår att visa att mängden av strängt tillåtliga a-värden är öppen i $S^0 \cup S^-$.

Låt a vara strängt tillåtligt och antag att $a \in S^-$. Då har δ precis ett nollställe i $(0, R)$ och $\delta(R, a) < 0$. Då R beror kontinuerligt på a medför en perturbation av a att δ fortfarande har ett nollställe i $(0, R)$ och att vi fortfarande har $\delta(R) < 0$. Eftersom S^- dessutom är en öppen mängd kommer även det förändrade a-värdet att vara strängt tillåtligt. Mängden av strängt tillåtliga $a \in S^-$ är därför öppen i såväl $\mathbb{R}$ som i S^-. Antag nu att $a \in S^0$. Då har δ precis ett nollställe i $(0, \infty)$ och $\delta(r, a) \to -\infty$ då $r \to \infty$. Detta tillsammans med Lemma 7 medför att det finns ett R_0 så stort att $f'(u(r, a)) < 0$, $\delta(r, a) < 0$ och $\delta'(r, a) < 0$ för alla $r \geq R_0$. Då R_0 är fixt medför en perturbation av a att vi fortfarande kommer att ha $f'(u(R_0)) < 0$, $\delta(R_0) < 0$

och $\delta'(R_0) < 0$. Eftersom δ därefter inte kan ha några stationära punkter så fortsätter δ att avta monotont och δ kommer fortfarande att ha precis ett nollställe. Vidare har vi $a + \epsilon \in S^-$ enligt Lemma 8(b) och R är avtagande enligt Lemma 8(a) vilket medför att även $a + \epsilon$ är strängt tillåtligt. Därmed är mängden av strängt tillåtliga $a \in S^0 \cup S^-$ öppen i $S^0 \cup S^-$. $\square$

4.3 Bevis av Teorem 2

Antag att S^0 är icke-tom och låt $a_0 = \inf(S^0 \cup S^-)$. Eftersom S^+ och S^- är öppna i $(0, \infty)$ existerar $\min(S^0 \cup S^-)$ och vi har

$$a_0 = \inf(S^0 \cup S^-) = \min(S^0 \cup S^-) \in S^0$$

Således är $u(r, a_0)$ en positiv lösning till problemet (4)-(5). Om $u(r, a)$ är en annan lösning så måste det gälla att $a > a_0$. Enligt Lemma 11 är a_0 tillåtligt och därmed strängt tillåtligt enligt Lemma 12. Lemma 8(b) medför då att intervallet $(a_0, a_0 + \epsilon)$ ligger i S^- för något $\epsilon > 0$. Definiera

$$a_1 = \sup\{a \in (a_0, \infty) \mid x \in S^- \text{ för alla } x \in (a_0, a)\}.$$

Om $a_1 = \infty$ så är beviset klart. Antag därför att $a_1 < \infty$. Eftersom S^+ är öppen måste vi ha $a_1 \in S^0$ och det gäller att intervallet $[a_0, a_1]$ är en delmängd av $S^0 \cup S^-$. Lemma 13 medför nu att mängden T av strängt tillåtliga a-värden i $[a_0, a_1]$ är både öppen och sluten i $[a_0, a_1]$. Eftersom T är icke-tom och mängden $[a_0, a_1]$ är sammanhängande måste vi ha $T = [a_0, a_1]$ så att speciellt a_1 är strängt tillåtligt. Men det faktum att a_1 är strängt tillåtligt och $a_1 \in S^0$ medför enligt Lemma 8(b) att intervallet $(a_1 - \epsilon, a_1)$ ligger i S^+ för något $\epsilon > 0$ vilket är en motsägelse. Därmed har vi $(a_0, \infty) \subset S^-$ och beviset är klart. $\square$

4.4 En följdsats

I syfte att på ett enkelt sätt kunna avgöra om en funktion f uppfyller kraven för entydighet formulerar vi nu ett resultat som låter oss byta ut villkoren (37) och (38) i Teorem 2 mot två andra villkor.

Teorem 3. *Antag att f uppfyller (i) och (ii) och att det finns ett $\tau \geq 1$ sådant att*

$(f1)$ $\quad$ *$u^{-\tau} f(u)$ är växande för $u > 0$, och*

$(f2)$ $\quad$ *$u(u^{-\tau}f(u))'$ är avtagande för $u > \alpha$.*

*(I fallet $\tau = 1$, kräver vi att $u(u^{-\tau}f(u))'$ är strängt avtagande för $u > \alpha$.) Då har problemet (4)-(5) högst **en** positiv lösning.*

Bevis. Definiera $J(u,\tau) = uf'(u) - \tau f(u)$ och observera att $(f1)$ medför att

$$0 \leq u(u^{-\tau}f(u))' = u^{-\tau}J(u,\tau) \tag{44}$$

Om $\tau = 1$ och $u^{-1}J(u,1) = 0$ för något $u = u_0 > \alpha$ så har vi enligt $(f2)$ att $u^{-1}J(u,1) < 0$ och därmed $J(u,1) < 0$ för alla $u > u_0$, vilket motsäger (44). För $\tau = 1$ har vi därför

$$J(u,1) = uf'(u) - f(u) > 0, \qquad u > 0 \tag{45}$$

Låt nu $\sigma \geq \tau$. För $0 < u \leq \alpha$ har vi $f(u) \leq 0$, så att $J(u,\sigma) \geq J(u,\tau) \geq 0$. Observera även att $J(\alpha,\sigma) = \alpha f'(\alpha) - \sigma f(\alpha) = \alpha f'(\alpha) > 0$. För $u > \alpha$ har vi

$$u(u^{-\sigma}f(u))' = u(u^{\tau-\sigma}u^{-\tau}f(u))' = u^{\tau-\sigma}[u(u^{-\tau}f(u))' + (\tau-\sigma)u^{-\tau}f(u)].$$

Det gäller enligt $(f1)$ och $(f2)$ att uttrycket inom hakparantes är avtagande för $u > \alpha$. Det innebär att om $u(u^{-\sigma}f(u))' = 0$ för något $u > \alpha$ så kommer vi därefter att ha $u(u^{-\sigma}f(u))' \leq 0$. Detsamma måste gälla för $J(u,\sigma) = u^{\sigma+1}(u^{-\sigma}f(u))'$.

Vi visar nu att det för varje $U > \alpha$ finns ett $\sigma \geq \tau$ $(\sigma > 1)$ sådant att $J(U,\sigma) = 0$.

Fixera $U > \alpha$. Formlerna (44) och (45) ger $Uf'(U) - \tau f(U) \geq 0$ med strikt olikhet om $\tau = 1$. Låt $s \geq \tau$ och betrakta följande linjära funktion av s:

$$l(s) = Uf'(U) - sf(U) = J(U,s)$$

Vi ser att $l(\tau) \geq 0$ $(> 0$ om $\tau = 1)$ och $\frac{\partial l}{\partial s} = -f(U) < 0$. Det följer att $l(\sigma) = 0$ för något $\sigma \geq \tau$ $(> 1$ om $\tau = 1)$. Om vi nu sätter $\lambda = 2/(\sigma - 1)$ så erhålles

$$I(u,\lambda) = \lambda uf'(u) - (\lambda+2)f(u) = \frac{2}{\sigma-1}(uf'(u) - \sigma f(u)) = \lambda J(u,\sigma)$$

Enligt ovanstående resonemang gäller $I(U,\lambda) = \lambda J(U,\sigma) = 0$, samt

$$I(u,\lambda) = \lambda J(u,\sigma) \geq 0, \qquad 0 < u < U$$

$$I(u,\lambda) = \lambda J(u,\sigma) \leq 0, \qquad u > U.$$

D.v.s villkoren i Teorem 2 är uppfyllda. $\square$

Exempel 2. Låt $f(u) = \begin{cases} -m\sin u, & 0 \leq u \leq \pi \\ m(u-\pi), & u > \pi \end{cases}$

Då är villkoren (i) och (ii) uppfyllda med $\alpha = \pi$ och $m > 0$. Låt $\tau = 1$.
För $0 < u \leq \pi$ får vi

$$(u^{-1}f(u))' = \left(\frac{-m\sin u}{u}\right)' = \frac{m}{u^2}(\sin u - u\cos u) \geq 0$$

(eftersom funktionen $g(u) = \sin u - u\cos u$ uppfyller $g(0) = 0$ och $g'(u) = u\sin u \geq 0$ i det aktuella intervallet.)

För $u > \pi$ får vi

$$(u^{-1}f(u))' = \left(\frac{m(u-\pi)}{u}\right)' = \frac{m\pi}{u^2} \geq 0$$

Detta visar att villkoret $(f1)$ gäller. Vidare ser vi att $u(u^{-1}f(u))' = \frac{m\pi}{u}$ är strängt avtagande för $u > \pi$, och därmed gäller även $(f2)$.

Exempel 3. Låt $f(u) = \begin{cases} g(u), & 0 \leq u \leq 1 \\ \ln u, & u > 1 \end{cases}$

där funktionen g är sådan att villkoren (i) och (ii) är uppfyllda för f. Förutsättningarna i Teorem 3 är däremot inte uppfyllda. Ty för $u > 1$ har vi

$$(u^{-\tau}f(u))' = \left(\frac{\ln u}{u^\tau}\right)' = \frac{1}{u^{\tau+1}}\,(1 - \tau\ln u) < 0$$

för alla u sådana att $u > e^{1/\tau}$. Därmed är villkoret $(f1)$ inte uppfyllt för något värde på τ.

5 Andra resultat

5.1 Existens av positiva lösningar

Det ligger nu nära till hands att kombinera entydighetsresultatet(Teorem 2) i föregående avsnitt med existensresultatet(Teorem 1) som vi inledde med. Om funktionen f förutom villkoren $(i)-(ii)$ även uppfyller $(\S3)-(\S4)$ så är det klart (från Teorem 1) att det existerar en positiv lösning till problemet (4)-(5). Under förutsättningarna i Teorem 2 är denna lösning dessutom unik. Ett resultat av Berestycki och Lions [2] visar att existensen gäller även om villkoren $(\S3)-(\S4)$ byts ut mot följande två villkor:

(iii) Det finns ett $\beta > \alpha$ sådant att $F(\beta) = 0$, där $F(u) = \int_0^u f(t)dt$.

(iv) $\lim_{u\to\infty} f(u)/u^s = 0$, där $s = (n+2)/(n-2)$ då $n > 2$ och där s kan vara ett godtyckligt reellt tal då $1 < n \leq 2$.

Under villkoren (i)-(iv) (samt övriga förutsättningar i Teorem 2) har problemet (4)-(5) således exakt en positiv lösning.

Som exempel kan vi betrakta funktionen $f(u) = u^p - u$, där $p > 1$. Vi ser då att (iii) är uppfyllt med $\beta = (\frac{p+1}{2})^{1/(p-1)}$ och att (iv) gäller om $p < (n+2)/(n-2)$. Å andra sidan saknas en positiv lösning om $p \geq (n+2)/(n-2)$ och $n > 2$. Detta är ett resultat som följer av Pohozaev's identitet,

$$\int_0^r \left(F(u) - \frac{n-2}{2n}f(u)u\right) t^{n-1}dt = \frac{r^n}{2n}(u')^2 + \frac{r^{n-1}(n-2)}{2n}uu' + \frac{r^n}{n}F(u)$$

som (genom partialintegration) kan härledas från (4) och som måste vara uppfylld för varje lösning u till problemet (4)-(5). Men om $f(u) = u^p - u$ och $p \geq (n+2)/(n-2)$, $(n > 2)$ så följer det att integralen i vänsterledet är negativ och avtagande för alla $r > 0$ medan högerledet går mot noll då $r \to \infty$, vilket motsäger existensen av en lösning.

Det kan även nämnas att det finns funktioner f som uppfyller $(i)-(ii)$ och för vilka problemet (4)-(5) har mer än en positiv lösning. I [13] visas t.ex. hur man kan konstruera f så att problemet har två olika positiva lösningar.

5.2 Entydighet för teckenväxlande lösningar

Frågan om existensen av lösningar till problemet (4)-(5) med ett föreskrivet antal nollställen besvarades första gången 1986 av Jones och Küpper [8]. Deras arbete utgår från teorin för dynamiska system där lösningarna studeras som banor i ett tredimensionellt fasrum. Sedan dess har ett antal författare bevisat liknande resultat med både PDE- och ODE-metoder.

I [17] påvisas existensen av sådana lösningar även då ekvation (4) byts ut mot den mer generella ekvationen (en modifierad p-Laplace-ekvation):

$$\left(|u'|^{q-2}u'\right)' + \frac{n-1}{r}|u'|^{q-2}u' + f(u) = 0 \tag{46}$$

där $q > 1$ är en reell parameter. Vi ser att denna ekvation är identisk med (4) i specialfallet $q = 2$. Författarna använder villkor på funktionen f motsvarande $(\S1) - (\S4)$ och bortsett från mindre justeringar är de olika bevisstegen närmast identiska med de som presenterats i detta arbete.

Ett intressant och utmanande problem är att bevisa entydigheten hos lösningar till (4)-(5) med ett föreskrivet antal nollställen m. Som vi har sett är problemet löst för en stor klass av funktioner f i fallet $m = 0$. Coffman [3] studerade fallet $m = 0$ redan 1972 och lyckades bevisa entydigheten med $n = 3$ och med funktionen $f(u) = u^3 - u$. Han utvecklade här en teori kring användandet av funktionen $\delta = \frac{\partial u}{\partial a}$ för att studera hur lösningarna beter sig då $u(0) = a$ varierar. Sedan dess har ett flertal författare behandlat fallet $m = 0$ med större värden på n och med mer generella funktioner f. Liknande entydighetsresultat har erhållits med ekvationer av typen (46).

Entydighetsstudier av lösningar som växlar tecken är däremot ett relativt outforskat område. Det faktum att lösningarna inte längre är strängt monotona har visat sig leda till stora tekniska problem då det kommer till att analysera funktionen δ. Fram till för några år sedan hade sådana resultat publicerats av endast fyra författare i artiklarna [15], [4] och [5]. Att det finns ett praktiskt intresse av att studera lösningar som växlar tecken kan exemplifieras med följande citat från [15],

Soto-Crespo et al. (1991) investigated a partial differential equation (PDE) model of the self trapping of optical beams. The goal of these authors is to understand the mechanisms responsible for the breakup of optical beams into multi-bump structures called filaments. For this, they studied bounded, radially symmetric bound-state solutions that change sign.They linearized the PDE around these solutions and showed that they are unstable. Their analysis of the instability predicts that a small random perturbation from the symmetric bound-state solution will evolve into a multibump asymmetric solution as the variable corresponding to time increases. In addition, their methods predict *the exact number of bumps in the resultant solution.*

Recently, Laing and Troy (2003) employed similar methods to study multi-bump formation in a fourth-order PDE model of a neural sheet. They showed that multi-bump axisymmetric bound-state solutions are unstable, and that small perturbations from these solutions evolve into multi-bump asymmetric solutions as time increases. Their analysis also predicts the exact number of bumps in the resultant asymmetric solutions.

Troy visar i [15] att det finns en entydig lösning till (4)-(5) med $u(0) > 0$ och $n = 3$ som har precis ett nollställe i $(0, \infty)$ och där funktionen f ges av

$$f(u) = \begin{cases} u+1, & u \leq -1/2 \\ -u, & -1/2 < u < 1/2 \\ u-1, & u \geq 1/2 \end{cases} \tag{45}$$

I beviset utvecklas metoder för att kunna utnyttja funktionen δ trots de tekniska svårigheterna. Den styckvisa linjäriteten hos funktionen f innebär här att man kan studera både $u(r,a)$ och $\delta(r,a)$ explicit inom respektive intervall, vilket naturligtvis är en förenklande omständighet. I beviset utvecklas flera tekniker för att exakt bestämma var lösningarna skär de kritiska linjerna $u = \pm 1/2$. Detta är en viktig förutsättning för analysen av funktionen δ, något som stora delar av bevisresonemanget bygger på.

Troy's resultat förbättras i [5] med avseende på entydigheten. Författarna presenterar här ett entydighetsbevis för lösningar med ett godtyckligt antal nollställen där f tillhör en klass av funktioner som bl.a. innefattar (45). Låt oss titta närmare på detta resultat för se om vi därigenom kan dra några slutsatser om entydighet kopplat till Teorem 1.

Teorem 4. *Låt $2 \leq n \leq 4$ och antag att funktionen f uppfyller villkoren*

($\star$1) *f är udda, $f(0) = 0$ och det finns ett tal $b > 0$ sådant att $f(u) > 0$ för $u > b$, $f(u) \leq 0, f(u) \not\equiv 0$ för $u \in (0, b)$*

($\star$2) *Det finns ett $\beta > b$ sådant att $F(\beta) = 0$ och $\lim_{u\to\infty} F(u) = \infty$ där $F(u) = \int_0^u f(t)dt$*

($\star$3) *$f \in (C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty))$ och $f' \in L^1(0,1)$*

(⋆4) $\left(\frac{F}{f}\right)'(u) \geq \frac{n-2}{2}$ *för alla* $u > \beta$.

Då har problemet (4)-(5), för varje icke-negativt heltal m*, högst en lösning som uppfyller* $u(0) > 0$ *och som har exakt* m *nollställen i* $(0, \infty)$.

Vi noterar att villkoren (§1)-(§4) i Teorem 1 delvis överlappar villkoren (⋆1)-(⋆4) i Teorem 4. Om vi vill hitta funktioner f som uppfyller kraven för både existens och entydighet enligt Teorem 1 och Teorem 4 så tycks detta vara vara enklast i fallet $n = 2$. Då $n > 2$ visar det sig att villkoret (⋆4) kraftigt begränsar antalet möjligheter för funktionen f.

Exempel 4. Antag att $n \geq 3$ och att $f(u) = u^p - u$ där $p > 1$. För att villkoret (⋆4) ska vara uppfyllt måste det då gälla att $(F/f)' \geq \frac{n-2}{2}$ för alla $u > \beta = \left(\frac{p+1}{2}\right)^{1/(p-1)}$. En beräkning ger

$$\left(\frac{F}{f}\right)' = \frac{\frac{1}{p+1} + \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{p+1} - 2\right)\frac{u}{u^p} + \frac{1}{2u^{2p-2}}}{\left(1 - \frac{u}{u^p}\right)^2} \to \frac{1}{p+1}$$

då $u \to \infty$.

Det måste därför speciellt gälla att $\frac{1}{p+1} \geq \frac{n-2}{2} \geq \frac{1}{2}$ vilket är ekvivalent med att $p \leq 1$. För $n \geq 3$ finns det således inga funktioner f på denna form som uppfyller (⋆4).

Exempel 5. Antag att $n = 2$ och att $f(u) = u^p - u$ där $p > 1$ är ett udda heltal. Villkoret (⋆4) är nu uppfyllt om $(F/f)' \geq 0$ för alla $u > \left(\frac{p+1}{2}\right)^{1/(p-1)}$. Vi får

$$\left(\frac{F}{f}\right)' = \frac{2u^{2p-2} + (p^2 - 3p - 2)u^{p-1} + p + 1}{2(p+1)(u^{p-1} - 1)^2}$$

och man ser direkt att (⋆4) är uppfyllt för $p \geq 5$. För $p = 3$ får vi

$$\left(\frac{F}{f}\right)' = \frac{u^4 - u^2 + 2}{4(u^2 - 1)^2} = \frac{(u^2 - 1/2)^2 + 7/4}{4(u^2 - 1)^2} \geq 0$$

för alla $u > \sqrt{2} = \beta$, och (⋆4) gäller även i detta fall. En kontroll visar att f uppfyller alla övriga villkor i Teorem 1 och Teorem 4. Vi konstaterar att problemet (4)-(5) i detta fall har exakt en lösning ($u(0) > 0$) med m nollställen i $(0, \infty)$.

Referenser

[1] H. BERESTYCKI, P.-L. LIONS AND L.A. PELETIER, *An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in* $\mathbb{R}^n$, Indiana Univ.Math.J. 30 (1981) pp. 141-167.

[2] H. BERESTYCKI AND P.-L. LIONS, *Non-linear scalar field equations.* I, *Existence of a ground state;* II, *Existance of infinitely many solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983) pp. 313-375.

[3] C.V. COFFMAN, *Uniqueness of the ground state solution for* $\Delta u + u^3 - u = 0$ *and variational characterization of other solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972) pp. 81-95.

[4] C. CORTAZAR, M. GARCIA-HUIDOBRO AND C. YARUR, *On the uniqueness of the second bound state solution of a semilinear equation*, Ann. Inst.H.Poincare Anal. Non Lineaire 26 (2009) pp. 2091-2110.

[5] C. CORTAZAR, M. GARCIA-HUIDOBRO AND C. YARUR, *On the uniqueness of sign changing bound state solutions of a semilinear equation*, Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 28 (2011) pp. 599-621.

[6] C. CORTAZAR, M. GARCIA-HUIDOBRO AND C. YARUR, *On the existence of sign changing bound state solutions of a quasilinear equation.* J. Differential Equations 254 (2013) pp. 2603-2625.

[7] A. HARAUX AND F.B. WEISSLER, *Non-uniqueness for a semilinear initial-value problem*, Indiana Univ. Math. J. ,31 (1982), pp. 167-189.

[8] C. JONES AND T. KÜPPER, *On the infinitely many solutions of a semilinear elliptic equation*, SIAM J. Math. Anal. 17 (1986) pp. 803-835.

[9] K. MCLEOD, W.C. TROY AND F.B. WEISSLER, *Radial solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *with prescribed numbers of zeros*, J. Differential Equations 83, (1990) pp. 368-378.

[10] K. MCLEOD, *Uniqueness of positive radial solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *in* $\mathbb{R}^n$*, II.* Trans. Amer. Math. Soc. 339, no. 2, (1993) pp 495-505.

[11] W.M. NI AND R. NUSSBAUM,*Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of* $\Delta u + f(u, r) = 0$, Comm.PureAppl.Math.38, (1985) pp. 67-108.

[12] L.A. PELETIER AND J. SERRIN, *Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in* $\mathbb{R}^n$, Arch. Rational Mech. Anal. 81 (1983) pp. 181-197.

[13] P. POLACIK, *Morse indices and bifurcations of positive solutions of* $\Delta u + f(u) = 0$ *on* $\mathbb{R}^n$, Indiana Univ. Math. J. 50 (2001) pp. 1407-1432.

[14] G. TESCHL, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Graduate studies in Mathematics, Volume 140, Amer. Math. Soc., Providence (2012).

[15] W.C. TROY, *The existence and uniqueness of bound state solutions of a semilinear equation*, Proc. R. Soc. Lond. 461 (2005) pp. 2941-2963.

[16] F.B. WEISSLER, *Asymptotic analysis of an ODE and non-uniqueness for a semilinear PDE*, Arch. Rational Mech. Anal. 91 (1986) pp. 231-146.

[17] Z. ZHENGCE AND L. KAITAI, *Radial oscillatory solutions of some quasi-linear elliptic equations.*, Comput. Math. Appl. 47 (2004) pp. 1327-1334.

Master's Theses in Mathematical Sciences 2015:E31
ISSN 1404-6342

LUNFMA-3083-2015

Matematik
Matematikcentrum
Lunds universitet
Box 118, 221 00 Lund

http://www.maths.lth.se/