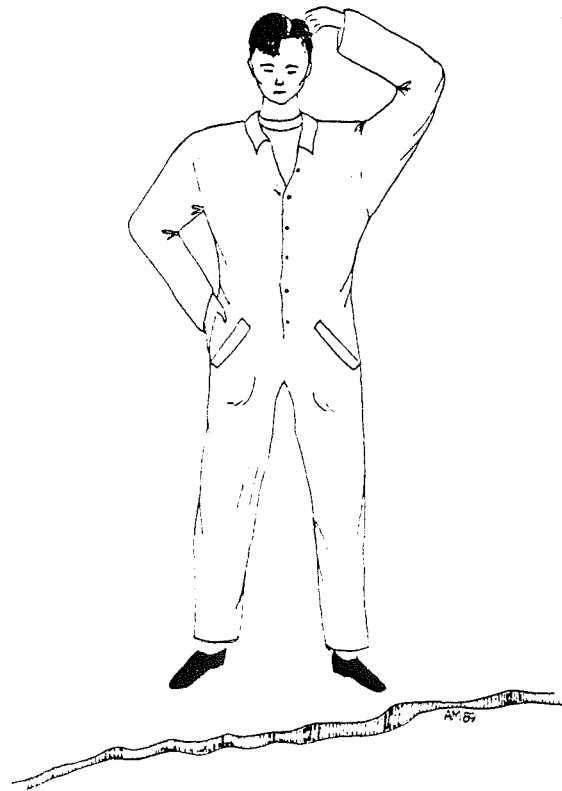


Tekniska Högskolan i Lund
Avdelningen för Bärande Konstruktioner



Lund Institute of Technology
Department of Structural Engineering



Industrigolv

EXAMENSARBETE

Handledare: Robert Danewid

Christer Fureby
Ulf Persson

Arkiv

MAJ 1989

konstruktionsteknik



Tekniska Högskolan i Lund
Avdelningen för Bärande Konstruktioner



Lund Institute of Technology
Department of Structural Engineering

Industrigolv

EXAMENSARBETE

Handledare: Robert Danewid

LUND MAJ 1989

Christer Fureby

Ulf Persson

FÖRORD

Detta examensarbete behandlar industrigolv på mark och bygger till stor del på teoretiska studier men även på besiktningar och intervjuer. Examensarbetet har utförts vid institutionen för bärande konstruktioner vid Lunds Tekniska Högskola och Skanska konsulter i Malmö.

Vi vill tacka vår handledare Robert Danewid för hjälp, uppmuntran, goda ideer och kaffe.

Vi vill även tacka

Sigurd Karlsson	SKA
Jan Ekblad	SKA
Ronny Borg	Sydsten
Bo Westerberg	Strängbetong
Göran Fagerlund	BML LTH

och

Ingbritt Larsson

för hjälp med illustrationerna

Kristina Norström och Anna Millqvist

för hjälp med redigering och korrekturläsning.

LUND 890520

Ulf Persson

Christer Fureby

1 INNEHÅLLSFÖRTECKNING

	SID
1 INNEHÅLLSFÖRTECKNING	1
2 ABSTRACT	3
3 INLEDNING	4
4 AVGRÄNSNINGAR	7
5 GRUNDLÄGGANDE BEGREPP OCH HÄRLEDNINGAR	8
5.1 MODELLERING	8
5.2 OARMERAD OCH ARMERAD PLATTA	9
5.3 HÄRLEDNING AV PLATTEKVATIONEN	11
5.4 DEFINITIONER	14
5.5 MOMENT OCH TVÄRKRAFT I CYLINDRISKA KOORDINATER	15
6 WINKLERBÄDD	17
6.1 FÖRUTSÄTTNINGAR	17
6.2 LÖSNING AV PLATTEKVATIONEN FÖR PUNKTLAST	17
6.3 MOMENTFÖRDELNING I NÄRHET AV LAST	29
7 ELASTISKT HALVRUM	31
7.1 FÖRUTSÄTTNINGAR	31
7.2 ALLMÄNT	31
7.3 LÖSNING AV JÄMVIKTSEKVATIONERNA	32
7.4 LAME' OCH CLAYPERONS PROBLEM	39
7.5 GENERELL LÖSNING MED PUNKTLAST	45
7.6 JÄMNT UTBREDD LAST	56
8 SAMVERKAN MELLAN TVÅ LASTER	67
9 MATERIALET ARMERAD BETONG	74
9.1 EGENSKAPER HOS ARMERAD BETONG	74
9.2 SPÄNNINGS-TÖJNINGSDIAGRAM FÖR STÅL	75
9.3 MATERIALET BETONG	77
9.4 MATERIALMODELLER	87
10 UNDERGRUNDEN	88
11 KRYMPNING	92
11.1 BETONGENS KRYMPNING	92
11.2 KRYMPNING I BETONGGOLV	95
12 DIMENSIONERINGSANVISNINGAR	113
12.1 DIMENSIONERINGSFILOSOFI	113
12.2 DIMENSIONERING AV HUVUDARMERINGEN	114
12.3 DIMENSIONERING MED HÄNSYN TILL LASTSPRICKOR	115

12.4	DIMENSIONERING MED HÄNSYN TILL KRYMPSPRICKOR	121
12.5	BESTÄMMNING AV SPRICKBREDDER	127
12.6	BEGRÄNSNING AV SPRICKBREDDER	129
13	EXEMPEL	131
14	SAMMANFATTNING	138
15	BETECKNINGAR	145
16	LITTERATURHÄNVISNINGAR	149

2 ABSTRACT

This paper deals with cracking in industrial concrete floors. We have restricted us to study two special cases, that is, cracks developed by the load itself and cracks due to shrinkage. We have of course also studied the deformation effects of the load.

The effect of the load has here been studied thoroughly by two separate methods, Winklerfoundation and the more exact Elastic halfspace theory. We have also studied effects caused by two separate loads at a distance.

The shrinkage is dealt with in accordance with a paper from Buö (11) who has studied this problem extensively.

Our purpose has been to establish designing aids for this type of pavements. These are quite extensive and are based on the regulations for concrete structures BBK 79.

3 INLEDNING

Utvecklingen beträffande laster på industrigolv har under en längre tid gått mot större trucklaster och pallställslaster. Detta tillsammans med att man i allmänhet fogindelar golvet efter hur stor golvyta som kan gjudas per arbetsdag har medfört att betydligt fler golv i dag har besvärande sprickbildning än (motsvarande del hade) för femton år sedan. En annan bidragande orsak till sprickbildningen kan vara att golvet inte är konstruerat på ett tillfredsställande sätt. Det kan till exempel vara så att bärförmågan överskattats, vilket leder till stora lokala deformationer i närheten av laster med liten rumslig utbredning om marken har låg bärmodul eller markmodul, det vill säga marken är "mjuk". Ett annat exempel kan vara att man får stora sprickor både längsgående och tvärgående i en truckgång. De längsgående sprickorna beror enbart av lasten, denna är sammansatt av laster från pallställ vid båda sidor om gången. De tvärgående sprickorna kan direkt relateras till krympningen.

Att golvet inte är konstruerat på ett tillfredsställande sätt beror troligtvis på att fullständiga beräkningsprinciper och normer saknas för betonggolv på mark. Den litteratur som finns på området är oftast mer generell och matematiskt avancerad och lämpar sig inte för dimensionering. Se till exempel (10), (21) och (37).

Man använder i dag till ganska stor del en empirisk beräkningsmetodik, vilket innebär att, man konstruerar nya golv på basis av äldre, väl fungerande golv. Då tar man oftast inte hänsyn till att vissa grundläggande förutsättningar skiljer sig åt. Detta leder då i vissa fall till att golvet fungerar dåligt och man får reparera i efterhand vilket kan bli ganska dyrt.

Historiskt sett härstammar dessa problem från 1930-talet då man började bygga vägar och flygfält i oarmerad betong, främst i Tyskland och USA. En del av den litteratur som vi har använt kommer från denna epok och är framtagen för dessa ändamål. Se till exempel (10) och (20). På slutet av 1950-talet började man sätta in jetflygplan i reguljär trafik, samtidigt började lastbilarnas axeltryck att öka. Detta medförde att betongen började spricka. För att motverka sprickbildningen fick man antingen göra beläggningen mycket tjock, uppemot 600 mm, eller armera betongen. Det sistnämnda verkade av både ekonomiska och praktiska skäl mest realistiskt. Nu började man studera problemet närmare, fortfarande främst med hänsyn till lastens verkningar men man började även få upp ögonen för krympningens inverkan. Se till exempel (25).

På senare tid har problemet också spridit sig till byggbranschen i och med att belastningarna ökat. Här spelar krympningen en större roll. Detta beror främst på att den relativa fuktigheten varierar på ett annat sätt genom tvärsnittet. Det finns också flera andra faktorer som är lite speciella, såsom samverkan mellan två eller flera laster, temperaturrörelser och plastisk krympning.

Det är ganska uppenbart att sprickbildning i ett industri-golv inte är önskvärt, dels med hänsyn till den estetiska effekten och dels för att det i vissa fall kan vara farligt. Om man har tung trucktrafik på golvet tvärs en spricka kommer denna att vidga sig och gå sönder i kanterna, så kallad pop-out. Då fås en markant ökning av sprickvidden som behöver åtgärdas med det snaraste.

Målsättningen med vårt examensarbete är att studera industrigolv på mark med avseende på effekter av yttre last och krympning. Vi separerar effekterna av yttre last och krympning och behandlar dessa var för sig. Resultatet av denna

teoretiska analys skall sedan mynna ut i dimensioneringsanvisningar, där man med utgångspunkt från belastning, markenskaper samt andra eventuella krav från beställaren kan beräkna:

- * Två dimensionerande moment, ett med avseende på lokala deformationer och ett med avseende på sprickbildning.
- * Parametrar som beaktar krympningen.

Utifrån dessa ingångsvärden kan man sedan beräkna erforderlig armeringsarea både med avseende på last och krympning.

4 AVGRÄNSNINGAR

Dimensionering av industrigolv på mark är ett komplext område och innefattar förutom dimensionering med hänsyn till yttre last även:

- * Plastisk krympning
- * Krympsprickor orsakade av långtidslast
- * Temperatursprickor
- * Dålig vidhäftning

Detta examensarbetet berör endast dimensionering med hänsyn till yttre last, deformationer och sprickor samt krympsprickor.

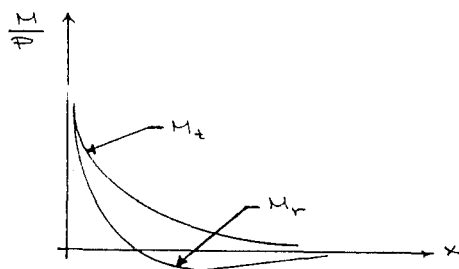
5 GRUNDLÄGGANDE BEGREPP OCH HÄRLEDNINGAR

5.1 MODELLERING

De två typer av modeller som behandlas här är Winklerbädd och elastiskt halvrum. Ingendera realiseras fullständigt i detta examensarbete. Detta beror på förenklade antaganden, till exempel säger vi att betongplattan är lineärt elastisk samt att undergrunden i den första metoden modelleras med hjälp av fjädrar medan den i metod två antas lineärt elastisk.

Metoden med det elastiska halvrummet leder till bättre överensstämmelse med verkligheten, dock till ett pris av betydligt svårare beräkningar.

Vi har ritat upp ett antal beräkningsdiagram på grundval av den elasticitetsteoretiska analysen enligt de ovanstående metoderna. Dessa kommer att ha det principiella utseendet:



Figur 5.1 Principiellt utseende på beräkningsdiagram

där

$$x = \frac{r}{\alpha}$$

α = Karakteristisk radie

Den karakteristiska radien är av formen:

$$\alpha = \left(\frac{D^3}{Q^4} \right)^{1/4}$$

D = Plattstyvhet

Q = Markmodul, metodberoende

Detta gör det lätt att gå in i diagrammen och bestämma ett värde på kvoten M / P som sedan ger momentet, ty P är känd.

Två stora huvudproblem föreligger:

- * Betongen fungerar inte lineärt elastiskt
- * Jordparametrarna

Det första av dessa problem kräver en annan materialmodell, denna blir av naturliga skäl betydligt mera komplicerad än den lineärt elastiska och det går inte att lösa problemet analytiskt. Däremot kan dylika problem ganska lätt lösas med hjälp av finita element metoden om en bra materialmodell används.

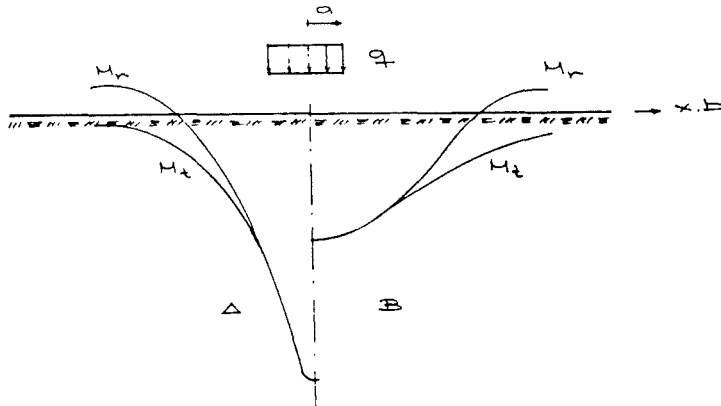
För det andra problemet utgår vi från att bäddmodulen kan beräknas på något sätt, se kapitel 10 där formler finns. Dessa bygger i sin tur på andra materialdata som elasticitetsmodul och Poissons tal. Vi har även funnit uttryck på värden på elasticitetsmoduler för skiktade jordlagerprofiler. Lämpligtvis görs en geoteknisk undersökning på platsen varav nödvändiga storheter bestäms experimentiellt. Då kan formeln för den skiktade elasticitetsmodulen med fördel användas.

5.2 OARMERAD OCH ARMERAD PLATTA

Studera den ungefärliga momentfördelningen i en betongplatta på grund av en konstant last över en cirkelyta med radien a .

L = Elastisk styvhetsradie

ν = Relativ lastradie = $\frac{a}{L}$



A : Liten lastutbredning

B : Stor lastutbredning

Figur 5.2 Principiell momentfördelning i en betongplatta

Används oarmerad eller svagt armerad platta erhålls stora dragspänningar mitt under lasten varvid plattan måste dimensioneras så att f_{cbt} inte överskrids under lasten. Ökar tjockleken ökar L varvid ν minskar, detta ger att M_t^{\max} ökar vilket minskar verkan av tjockleksökningen.

Problemen med sprickbildning i plattans överkant blir stora om $M_r^{\max} > M_{crd} = \text{sprickmomentet}$. Detta svarar mot att $\nu = 0.2$.

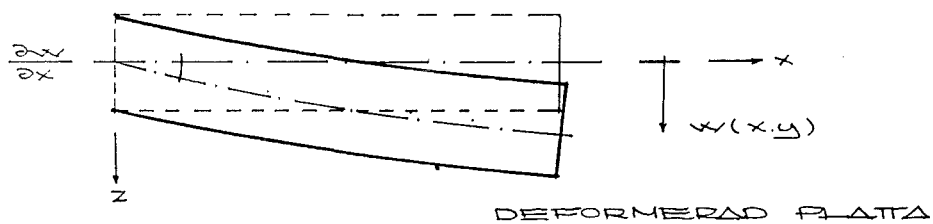
Det är då lämpligt att armera plattan centriskt och låta M_r tas av armeringen i stadium II. Om plattan är tjock kan armeringen läggas i underkant. I överkanten måste vi beakta inverkan av uppsprickning, detta görs genom att man har ett krav på minimiarmering. Armeras plattan i underkanten och inte centriskt måste överkantsarmeringen läggas in för att motverka sprickbildningen. Ovanstående gäller endast om

$$P > P_{crd}$$

Uppsprickningen i underkanten, stadium II, ger en kraftig minskning av plattstyvheten, D , som ger minskning av L och därmed ökning av ν . Detta ger oss ett lägre M och en utjämnad momenttopp. Det är osäkert om elasticitetsteorin kan tillämpas i detta fall eftersom plattstyvheten inte är entydigt bestämd. Försök har visat att man kommer närmast sanningen om man räknar med plattstyvheten i stadium II. Matematiskt svarar detta mot att $\nu = 0$.

5.3 HÄRLEDNING AV PLATTEKVATIONEN

Studera en del av den deformerade plattan:



Figur 5.3 Del av deformerad platta

Förkjutningarna blir för ren böjning:

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad 5.2$$

På matrisform:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \quad 5.3$$

Hookes lag ger på matrisform:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot 2 \end{pmatrix} \cdot w \quad 5.4$$

Detta kan också skrivas:

$$\bar{\epsilon} = -z \cdot \bar{\nabla}^2 w \quad 5.5$$

De konstitutiva sambanden kan vid lineärt isotropt material skrivas:

$$\bar{\sigma} = D_D \bar{\epsilon} \quad 5.6$$

där

$$D_D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Både töjningar och spänningar varierar lineärt över tjockleken. Det gäller att:

$$\bar{\epsilon} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \cdot \bar{\sigma} \cdot dz \quad 5.7$$

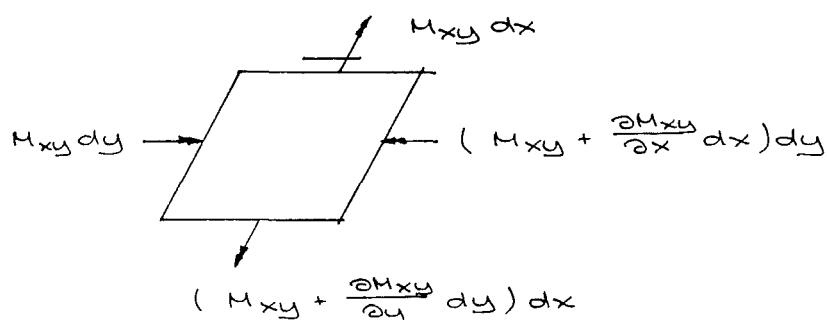
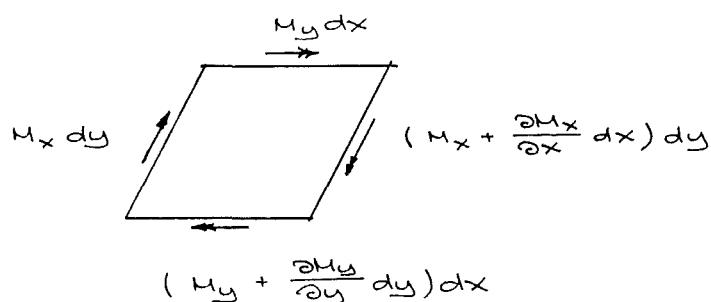
$$\bar{\sigma} = -z D_D \bar{\epsilon} \quad 5.8$$

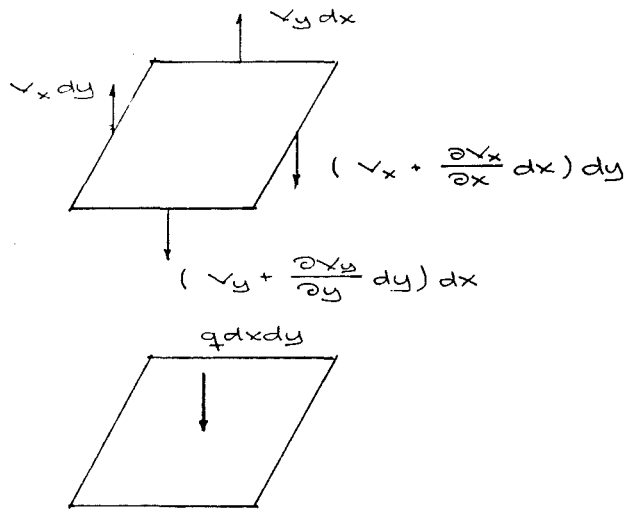
$$\bar{\epsilon} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} -z^2 D_D \bar{\epsilon} dz \quad 5.9$$

Då fås:

$$\bar{\epsilon} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \bar{\epsilon} \quad 5.10$$

Jämviktssamband:





Då fås:

$$\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + q = 0 \right. \quad 5.11$$

$$\left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_{xy}}{\partial y} = v_x \right. \quad 5.12$$

$$\left[\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_{xy}}{\partial x} = v_y \right. \quad 5.13$$

Härur fås:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad 5.14$$

Eller på matrisform:

$$\nabla^T \bar{u} + q = 0 \quad 5.15$$

där

$$\bar{u} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \nabla^T v \quad 5.10$$

Då fås:

$$\nabla^T D^T \nabla^T v + q = 0 \quad 5.16$$

Explicit utskrivet blir detta:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} q \quad 5.17$$

eller:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad 5.18$$

Inför Laplaceoperatorn:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

samt:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

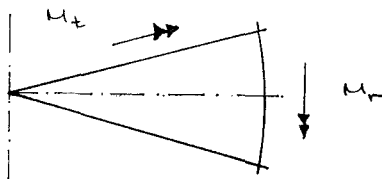
så fås:

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad 5.19$$

Laplaceoperatorn är en invariant operator och kan då användas i kroklinjiga koordinatsystem som till exempel cylinderkoordinater.

5.4 DEFINITIONER

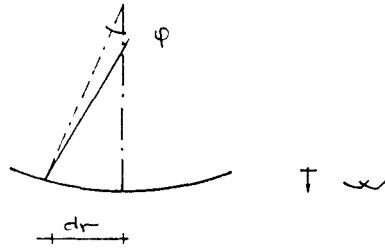
Definitionsfigur på moment: Index baseras på i vilken riktning genererade spänningar uppträder.



Figur 5.4 Definitionsfigur för moment

5.5 MOMENT OCH TVÄRKRAFT I CYLINDRISKA KOORDINATER

Studera ett snitt av plattan då den är symmetriskt belastad:



Figur 5.5 Snitt av symmetriskt belastad platta

Poisson har gett uttrycken för huvudkrökningsradierna:

$$\left[\frac{1}{r_1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \right. \quad 5.20$$

$$\left[\frac{1}{r_2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\phi}{r} \right. \quad 5.21$$

Enligt tidigare vet vi:

$$\left[M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{1}{r_x} + \nu \frac{1}{r_y} \right) \right. \quad 5.22$$

$$\left[M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \left(\frac{1}{r_y} + \nu \frac{1}{r_x} \right) \right. \quad 5.23$$

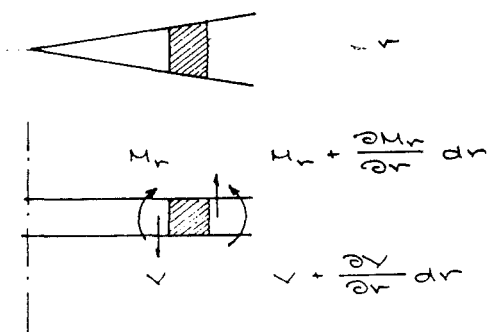
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Då fås:

$$\left[M_r = -D \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right. \quad 5.24$$

$$\left[M_t = -D \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -D \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right. \quad 5.25$$

Studera ett infinitesimalt element:



Figur 5.6 Infinitesimalt element

Jämvikt:

$$\begin{aligned} \curvearrowright : (M_r + \frac{\partial M_r}{\partial r} dr)(r+dr) d\theta - M_r r d\theta - \dots \\ \dots - M_t dr d\theta + V_r dr d\theta = 0 \end{aligned}$$

Då fås:

$$\begin{aligned} M_r r d\theta + M_r dr d\theta + \frac{\partial M_r}{\partial r} r dr d\theta + \frac{\partial M_r}{\partial r} dr^2 d\theta - \dots \\ \dots - M_r r d\theta - M_t dr d\theta + V_r dr d\theta = 0 \end{aligned}$$

$$(M_r + \frac{\partial M_r}{\partial r} r - M_t + V_r) dr d\theta = 0$$

$$M_r + \frac{\partial M_r}{\partial r} r - M_t + V_r = 0 \quad 5.26$$

Insättning av:

$$\left[M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right. \quad 5.24$$

$$\left[M_t = -D \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right. \quad 5.25$$

ger:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\gamma}{D} \quad 5.27$$

Ur detta fås:

$$\gamma = D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad 5.28$$

6 WINKLERBÄDD

6.1 FÖRUTSÄTTNINGAR

Denna metod bygger på att en belastning i en punkt enbart ger upphov till deformationer i denna punkt. Vidare antas följande:

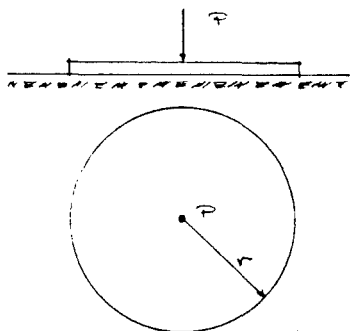
- * Plattan är lineärt elastisk och homogen, samt har konstant tjocklek (böjstyvhet)
- * Undergrunden är fullständigt elastisk och en belastning i en punkt ger enbart upphov till deformationer i samma punkt. Detta kan ses som fjädrar placerade på ett infinitesimalt avstånd från varandra, varav :

$$\sigma = k \cdot w \quad 6.1$$

k = Bäddmodul

- * Plattan och undergrunden har perfekt kontakt genom hela deformationsförloppet

6.2 LÖSNING AV PLATTEKVATIONEN FÖR PUNKTLAST



Figur 6.1 Punktlast på cirkulär platta

Antag att stödintensiteten är proportionell mot nedböjningen, det vill säga:

$$\sigma = k \cdot w \quad 6.1$$

Inför cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad 6.2$$

Axialsymmetrin ger att enbart r är variabel av intresse, då fås:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ \Delta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\end{aligned}\tag{6.3}$$

Då kan differentialekvationen:

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D}\tag{6.4}$$

skrivs:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w = \frac{q - kw}{D}\tag{6.5}$$

LÖSNING AV PROBLEMET MED HJÄLP AV BESSELFUNKTIONER

Den styrande differentialekvationen är:

$$\Delta \Delta w = \frac{q - kw}{D}\tag{6.6}$$

och i polära koordinater:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{q - kw}{D}\tag{6.7}$$

Sätt:

$$\alpha^4 = \frac{D}{k} \quad \rightarrow \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = L$$

$q = 0$ över plattan utom i origo där P verkar. Differentialekvationen blir:

$$\alpha^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + w = 0\tag{6.8}$$

Skriv ekvationen i dimensionslös form genom substitutionen:

$$\begin{cases} z = \frac{r}{\alpha} \\ x = \frac{r}{\alpha} = \frac{r}{L} \end{cases}$$

Detta ger:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + z = 0\tag{6.9}$$

Sätt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

så fås:

$$\Delta \Delta z + z = 0$$

6.10

Så här långt är metodiken densamma som förut. Gör nu variabelbytet:

$$z = x\sqrt{i}$$

$$\rightarrow x = \frac{z}{\sqrt{i}}$$

$$\rightarrow x = z \cdot (i)^{-\frac{1}{2}}$$

Studera differentialoperatören:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

6.11

$$\left[\begin{array}{l} z = x\sqrt{i} \\ x = \frac{z}{\sqrt{i}} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} i$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{i}}{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{i}$$

Detta ger:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} = i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

6.12

Differentialekvationen blir då:

$$i \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) i \left(\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial z} \right) + z = 0$$

6.13

$$i^2 = -1$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial z} \right) - z = 0$$

6.14

Sätt:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

så fås:

$$\Delta \Delta z - z = 0$$

6.15

Denna differentialekvation kan spjälkas upp i två differentialekvationer:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta(\Delta z + z) - (\Delta z + z) = 0 \end{array} \right. \quad 6.16a$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta(\Delta z - z) + (\Delta z - z) = 0 \end{array} \right. \quad 6.16b$$

Det är enkelt att visa att ovanstående differentialekvationer är identiska med

$$\Delta\Delta z - z = 0 \quad 6.15$$

Studera uttrycket inom parentes:

$$\Delta z + z = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} + z$$

respektive:

$$\Delta z - z = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - z$$

En lösning till systemet ovan är just:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta z + z = 0 \end{array} \right. \quad 6.17a$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta z - z = 0 \end{array} \right. \quad 6.17b$$

det vill säga:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} + z = 0 \end{array} \right. \quad 6.18a$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - z = 0 \end{array} \right. \quad 6.18b$$

Dessa är Besselska differentialekvationer vars lösningar finns i utförliga handböcker. Lösningarna blir:

$$\left[\begin{array}{l} z_1 = A_1 J_0(\xi) + B_1 Y_0(\xi) \end{array} \right. \quad 6.19a$$

$$\left[\begin{array}{l} z_2 = A_2 I_0(\xi) + B_2 K_0(\xi) \end{array} \right. \quad 6.19b$$

Där:

J_0 = Besselfunktion

Y_0 = Associerad Besselfunktion

I_0 = Modifierad Besselfunktion

K_0 = Modifierad associerad Besselfunktion

Lösningen till ursprungsproblemet fås då som en lineärkombination av ovanstående lösningar, det vill säga:

$$z = A J_0(\xi) + B Y_0(\xi) + C I_0(\xi) + D K_0(\xi) \quad 6.20$$

eller med:

$$z = x\sqrt{i}$$

$$z = A J_0(x\sqrt{i}) + B y_0(x\sqrt{i}) + C I_0(x\sqrt{i}) + D K_0(x\sqrt{i}) \quad 6.21$$

Sedan gäller följande relationer:

$$\begin{cases} I_0(x\sqrt{i}) = J_0(xi\sqrt{i}) \\ K_0(x\sqrt{i}) = i \frac{\pi}{2} H_0'(xi\sqrt{i}) \end{cases}$$

$H_0'(\alpha)$ = Första ordningens Hankelfunktion

Då kan lösningen skrivas:

$$\begin{aligned} z = & A J_0(x\sqrt{i}) + B y_0(x\sqrt{i}) + C J_0(xi\sqrt{i}) + \dots \\ & \dots + D i \frac{\pi}{2} H_0'(xi\sqrt{i}) \end{aligned} \quad 6.22$$

Ovanstående lösningar befinner sig i det komplexa talplanet. Separera real- och imaginärdelar, inför Kelvinfunktionerna:

$$\begin{cases} \operatorname{ber}(x) + i \operatorname{bei}(x) = J_0(xi\sqrt{i}) \end{cases} \quad 6.23a$$

$$\begin{cases} \operatorname{ker}(x) + i \operatorname{kei}(x) = \frac{\pi i}{2} H_0'(xi\sqrt{i}) \end{cases} \quad 6.23b$$

För att kunna skriva om lösningen med hjälp av Kelvinfunktionerna behöver vi uttrycka y_0 i Kelvinfunktioner. Använd:

$$H_0'(xi\sqrt{i}) = J_0(xi\sqrt{i}) + i y_0(x\sqrt{i})$$

$$y_0(x\sqrt{i}) = -i \cdot \left[H_0'(xi\sqrt{i}) - J_0(xi\sqrt{i}) \right]$$

där:

$$\begin{cases} H_0'(xi\sqrt{i}) = \frac{2}{\pi i} (\operatorname{ker}(x) + \operatorname{kei}(x)) \\ J_0(xi\sqrt{i}) = \operatorname{ber}(x) + \operatorname{bei}(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow y_0(x\sqrt{i}) = & -i \cdot \left[\frac{2}{\pi i} (\operatorname{ker}(x) + \operatorname{kei}(x)) - \dots \right. \\ & \left. \dots - \operatorname{ber}(x) - \operatorname{bei}(x) \right] \end{aligned} \quad 6.24$$

Insättning i ekv. 6.22

$$\begin{aligned} z = & A \cdot \left[\operatorname{ber}(x) + \operatorname{bei}(x) \right] + B \cdot \left[\frac{-2}{\pi} (\operatorname{ker}(x) + \dots \right. \\ & \dots + \operatorname{kei}(x) + i \operatorname{ber}(x) + i \operatorname{bei}(x) \left. \right] + C \cdot \left[\operatorname{ber}(x) + \dots \right. \\ & \left. \dots + i \operatorname{bei}(x) \right] + D \cdot \left[\operatorname{ker}(x) + i \operatorname{kei}(x) \right] \end{aligned}$$

Inför nya konstanter, detta ger:

$$z = \psi_1 \operatorname{ber}(x) + \psi_2 \operatorname{bei}(x) + \psi_3 \operatorname{ker}(x) + \psi_4 \operatorname{kei}(x) \quad 6.25$$

Samtliga funktioner är reella för reella argument x . Randvillkoren ger ψ . Följande gäller för små argument:

$$\text{Der}(x) = 1 - \frac{x^4}{64} \quad 6.26$$

$$\text{Bei}(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{2304} \quad 6.27$$

$$\text{ker}(x) = -\ln x - \ln 2 - \gamma + \frac{\pi x^2}{16} \quad 6.28$$

$$\text{kei}(x) = -\frac{x^2}{4} \ln x - \frac{\pi}{4} + (1 + \ln 2 - \gamma) \frac{x^2}{4} \quad 6.29$$

och följande för stora argument:

$$\text{Der}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad 6.30$$

$$\text{Bei}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad 6.31$$

$$\text{ker}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad 6.32$$

$$\text{kei}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad 6.33$$

$\gamma = \text{Eulers konstant} = 0.577\dots$

Då noteras följande:

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Der}(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \text{Bei}(x) = \infty \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \psi_1 = \psi_2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{ker}(x) = -\infty$$

$$\rightarrow \psi_3 = 0$$

Detta ger:

$$z = \psi_4 \cdot \text{kei}(x) \quad 6.34$$

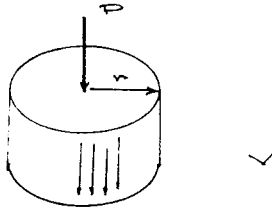
Bestäm ψ_4 :

Tvärkraften ges av:

$$V = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta \psi) \quad 6.35$$

$$\left[\begin{array}{l} z = \psi_4 \text{kei}(x) \\ x = \frac{r}{\alpha} \\ \psi = \alpha z \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \psi = \alpha \psi_4 \cdot \text{kei}\left(\frac{r}{\alpha}\right) \quad 6.36$$



Figur 6.2 Utskuret element av platta med punktlast

$$\downarrow : \psi \cdot 2\pi r + P = 0$$

$$\psi = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \chi$$

$$\psi = \psi_4 \frac{D}{\alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\pi}{8} \frac{r}{\alpha} + \dots \right)$$

$$-\frac{P}{2\pi r} = \psi_4 \frac{D}{\alpha^2 r}$$

$$\psi_4 = -\frac{P \alpha^2}{2\pi D}$$

$$D = \frac{E(1-\nu^2)}{12}$$

$$\alpha = L = \sqrt{\frac{D}{K}}$$

Då fås:

$$\psi = -\frac{P \alpha^2}{2\pi D} \operatorname{kei}\left(\frac{r}{\alpha}\right) \quad 6.37$$

$$\chi = -\frac{P}{2\pi \sqrt{DK}} \operatorname{kei}\left(\frac{r}{\alpha}\right) \quad 6.38$$

Det gäller att:

$$\operatorname{kei}(x) = -\frac{x^2}{4} \ln x - \frac{\pi}{4} + (1 + \ln 2 - \gamma) \frac{x^2}{4} \quad 6.39$$

för små x

$$\operatorname{kei}(x) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad 6.40$$

för stora x

Precis under punktlasten ($r = 0$) gäller då:

$$k_{ei}(0) = -\frac{\pi}{4} \quad 6.29$$

$$w(0) = \frac{P \alpha l^2}{2\pi D} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$w(0) = \frac{P \alpha l^2}{8D} \quad 6.41$$

Enligt Handbook of Mathematical Functions (1) så definieras k_{ei} enligt:

$$k_{ei}(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} \left\{ Y_0(x e^{i\frac{\pi}{4}}) - \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} \left\{ J_0(x e^{i\frac{\pi}{4}}) \right\} \right\}$$

Följande polynom ger en god approximation av uttrycket ovan

$$k_{ei}(x) = -\ln \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ber}(x) - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber}(x) + 6.764 \left(\frac{x}{8}\right)^2 - \dots$$

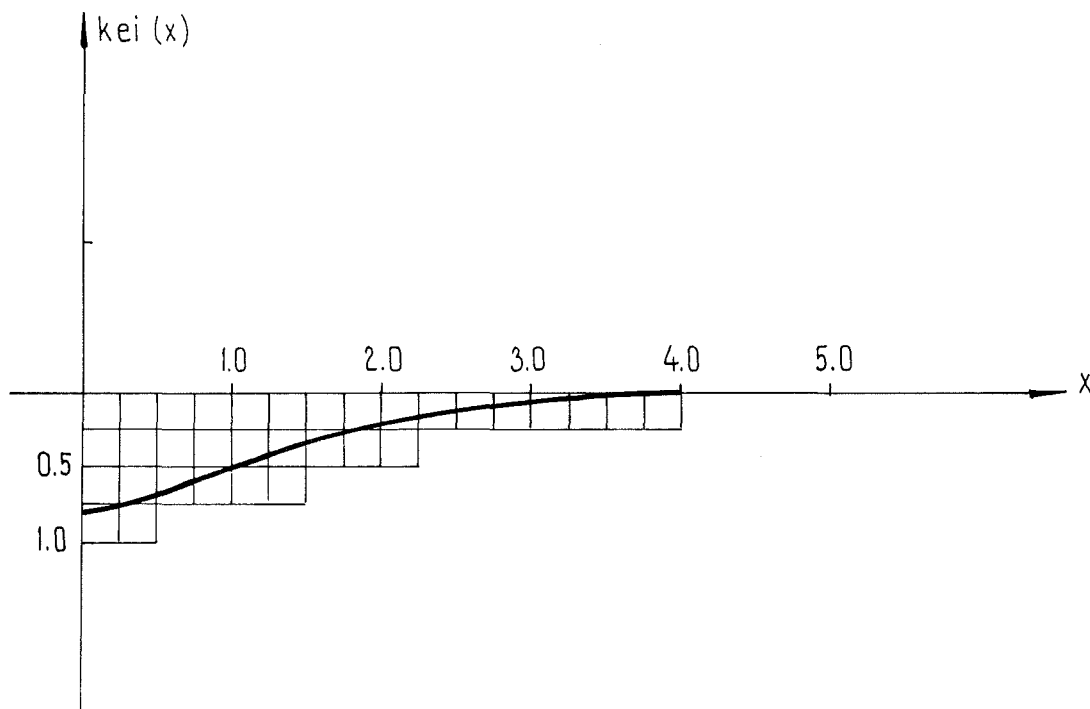
$$\dots - 142.918 \left(\frac{x}{8}\right)^6 + \dots \quad 6.42$$

där:

$$\operatorname{ber}(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{2304} + \dots \quad 6.43$$

$$\operatorname{ber}(x) = \left\{ -\frac{x^4}{64} + \dots \right. \quad 6.44$$

Se diagram 6:1.



$$\begin{aligned} \text{kei}(x) &= -\ln\left(\frac{1}{2}x\right) \text{bei}(x) - \frac{\pi}{4} \text{ber}(x) + 6.764\left(\frac{x}{8}\right)^2 - 142.918\left(\frac{x}{8}\right)^6 + \\ &+ 124.235\left(\frac{x}{8}\right)^{10} - 21.300\left(\frac{x}{8}\right)^{14} \\ \text{bei}(x) &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^{10}}{14745600} \\ \text{ber}(x) &= 1 - \frac{x^4}{64} - \frac{x^8}{147456} \end{aligned}$$

Diagram 6.1 $\text{kei}(x)$ som funktion av x

Lösningen, det vill säga utböjningsfunktionen kan tecknas:

$$w(r) = -\frac{P\alpha^2}{2\pi D} \operatorname{kei}\left(\frac{r}{\alpha}\right) \quad 6.37$$

eller genom variabelbytet:

$$x = \frac{r}{\alpha}$$

$$w(x) = -\frac{P\alpha^2}{2\pi D} \operatorname{kei}(x)$$

Momenten:

$$\left[\begin{array}{l} M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{array} \right. \quad 5.24$$

$$\left[\begin{array}{l} M_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \end{array} \right. \quad 5.25$$

Variabelbytet:

$$x = \frac{r}{\alpha}$$

$$dx = \frac{dr}{\alpha}$$

$$dx^2 = \frac{dr^2}{\alpha^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} M_r = -D \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\nu}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \frac{-P\alpha^2}{2\pi D} \operatorname{kei}(x) \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} M_t = -D \frac{1}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \cdot \frac{-P\alpha^2}{2\pi D} \operatorname{kei}(x) \end{array} \right.$$

som blir:

$$\left[\begin{array}{l} M_r = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\nu}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \operatorname{kei}(x) \end{array} \right. \quad 6.45a$$

$$\left[\begin{array}{l} M_t = \frac{P}{2\pi} \left(-\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \operatorname{kei}(x) \end{array} \right. \quad 6.45b$$

Relationen mellan momenten och lasten P , är intressant det vill säga:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{M_r}{P} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\nu}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \operatorname{kei}(x) \end{array} \right. \quad 6.46a$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{M_t}{P} = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \operatorname{kei}(x) \end{array} \right. \quad 6.46b$$

Dessa två relationer plottas i diagram nr 6:2. Speciellt fås för $\nu = 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{M_r}{P} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{kei}(x) \end{array} \right. \quad 6.46a$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{M_t}{P} = \frac{-1}{2\pi x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{kei}(x) \end{array} \right. \quad 6.46b$$

Dessa relationer plottas också, se diagram nr 6:3.

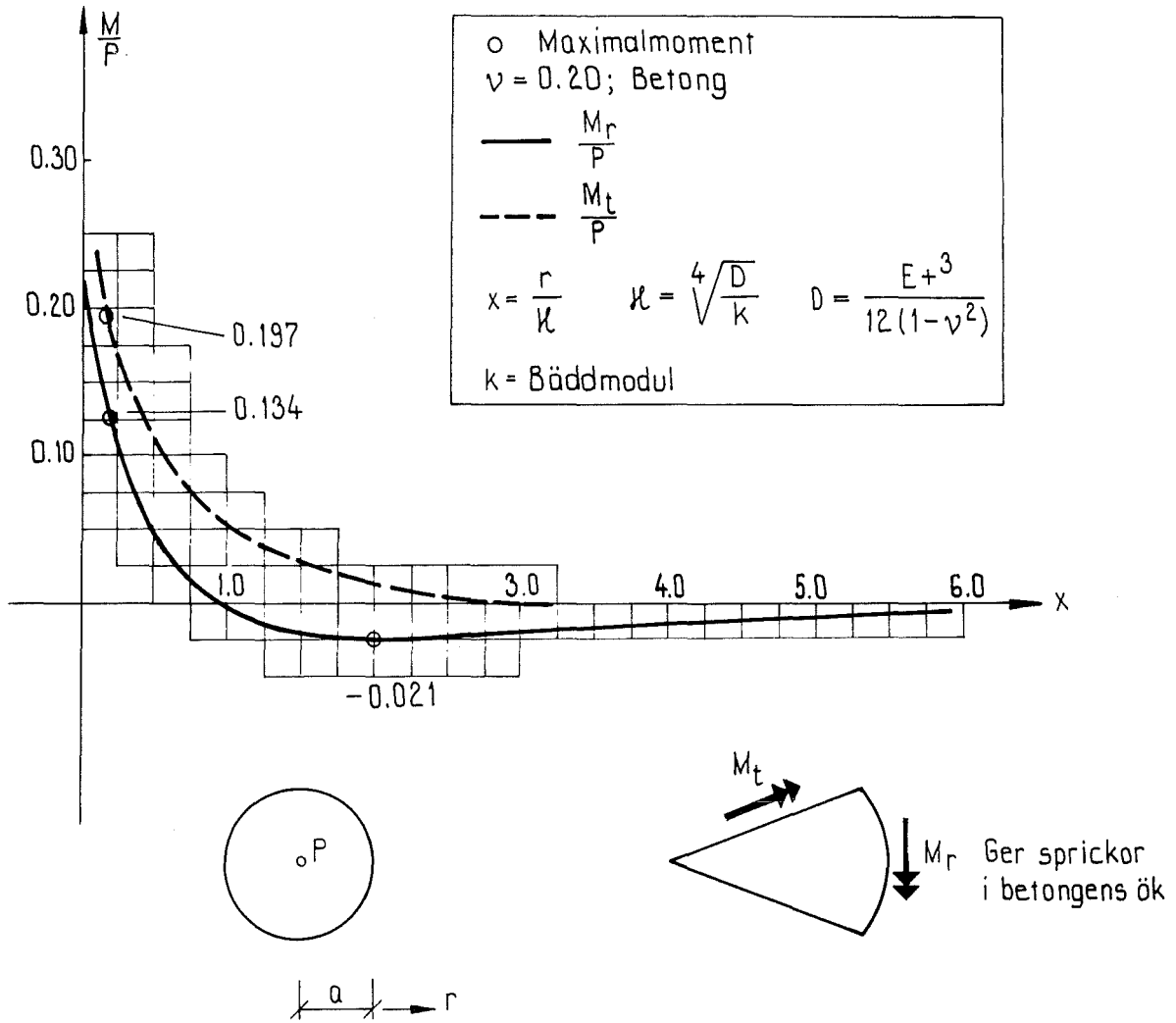


Diagram 6.2 Relationen mellan momenten och lasten för $\nu = 0.20$

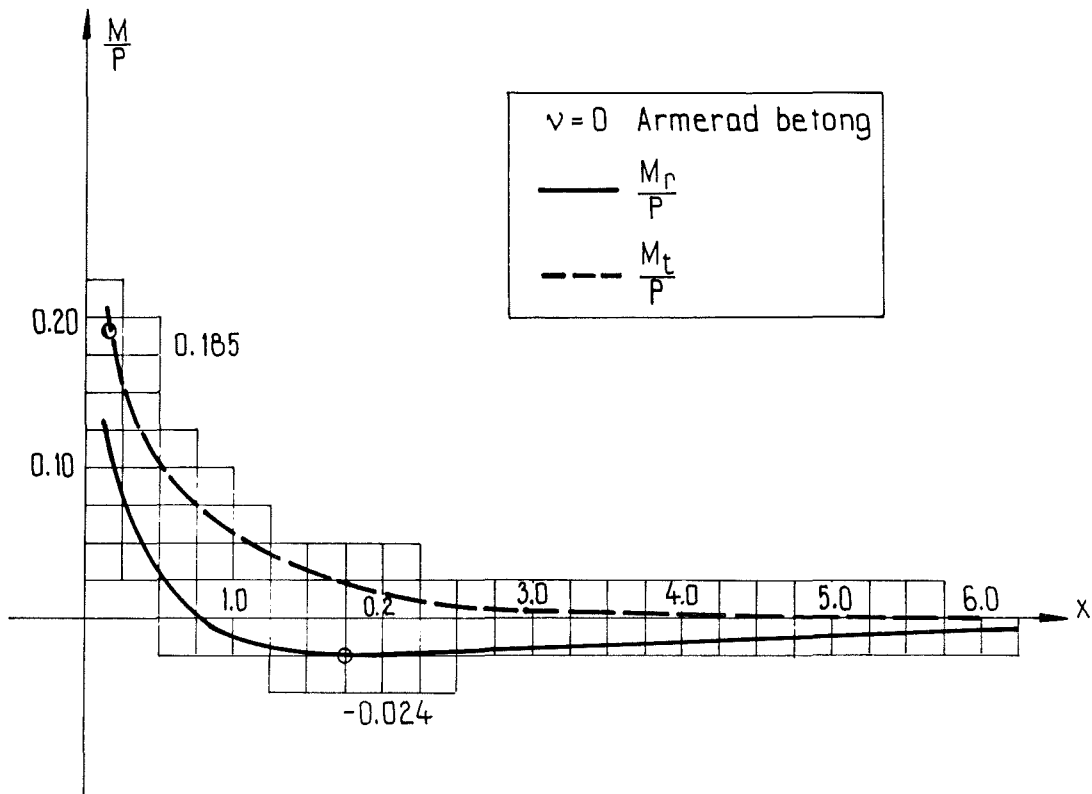
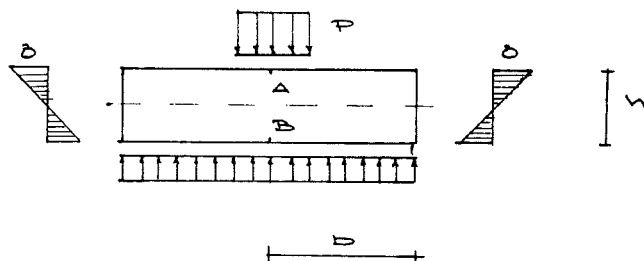


Diagram 6.3 Relationen mellan momenten och lasten för $\nu = 0$

6.3 MOMENTFÖRDELNINGEN I NÄRHET AV LAST

Studera nedanstående figur:



Figur 6.3 Del av den ursprungliga plattan där lasten verkar

Ur den ursprungliga plattan skär vi ut en cylinder kring origo, där lasten verkar. Lasten P antas ha en viss cirkulär utbredning med radien a .

$$b \gg h.$$

Vi antar också att den ursprungliga teorin givit så pass bra värden på momentfördelningen att dess moment kan användas som ingångsparametrar för beräkningen av spänningarna på radien b . Timoshenko (34) ger två approximativa uttryck för momenten:

$$\left[M_r = \frac{P}{4\pi} \left\{ (1+\nu) \left(\ln \frac{2}{x} - \gamma \right) - \frac{1}{2} (1-\nu) \right\} \right. \quad 6.47a$$

$$\left[M_z = \frac{P}{4\pi} \left\{ (1+\nu) \left(\ln \frac{2}{x} - \gamma \right) + \frac{1}{2} (1-\nu) \right\} \right. \quad 6.47b$$

$$\gamma = 0.5772157$$

Dessa approximativa formler ger endast god överensstämmelse inom intervallet:

$$0.2 < x < 0.9$$

Därmed är de också användbara för vårt syfte. Då har vi överfört problemet till ett problem där det gäller att studera en cylindrisk kropp utsatt för givna belastningar. Vi ger här utan härledning två uttryck för det maximala momenten mitt under lasten:

$$\left[M^{\text{MAX}} = (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \left\{ \ln \frac{2a}{a} - \gamma + \frac{1}{2} \right\} \right. \quad 6.48a$$

$$\left[M^{\text{MAX}} = (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \left\{ \ln \frac{2a}{a} + 0.616 \right\} \right. \quad 6.48b$$

Den intressanta storheten är:

$$\frac{M^{\text{MAX}}}{P} = \frac{1+\nu}{4\pi} \cdot \left[\ln \frac{2a}{a} + 0.616 \right] \quad 6.49$$

där:

a = lastens utbredning

$$2a = L = \sqrt[4]{\frac{PD}{K}}$$

För en kvadratisk lastutbredning med sidlängden b fås:

$$\frac{M^{\text{MAX}}}{P} = \frac{1+\nu}{4\pi} \cdot \left[\ln \frac{2a}{b} + 1.177 \right] \quad 6.50$$

Kvadraten ersätts med en cirkel med radien $c = 0.57b$

Dessa har då lika areor.

7 ELASTISKT HALVRUM

7.1 FÖRUTSÄTTNINGAR

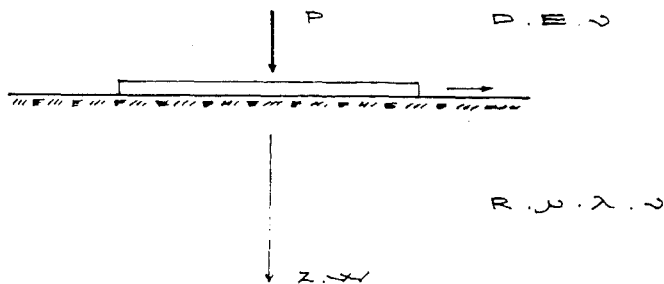
Denna metod bygger på att en last i en viss punkt ger deformationer i närliggande punkter; (funktionen $W(k)$). Specialfallet att last i en punkt enbart ger upphov till deformation i denna punkt, det vill säga Winklerbädd, faller ut om $W(k) = \text{konstant} = 1 / k$.

Följande förutsättningar antas vara uppfyllda:

- * Undergrunden har stor dimension i förhållande till plattan
- * Ingen friktion förekommer mellan platta och undergrund
- * Perfekt kontakt mellan platta och undergrund
- * Undergrunden kan karakteriseras med materialparametrar

7.2 ALLMÄNT

Detta problem kallas ibland i litteraturen Boussinesqs problem eftersom det först studerades av honom (9). Problemet är betydligt svårare att lösa än Winklerbädden. För vidare studier angående det elastiska halvrummet hänvisar vi till Terazawa (32). Han har på ett förnämligt sätt löst de elasticitetsteoretiska ekvationerna helt allmänt och därefter specialstuderat ett antal fall varav ett har sådana randvillkor att det precis passar med vårt problem. Detta är nog den mest exakta lösningen av problemet, åtminstone då det gäller lineärt elastiska material.



Figur 7.1 Vår modell med beteckningar

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Räkningarna blir enklare att handskas med om de vanliga elasticitetsteoretiska konstanterna E och ν för materialet ersätts med Lamés konstanter. Följande samband råder:

$$\left[\begin{array}{l} E = \frac{\nu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \end{array} \right. \quad 7.1a$$

$$\left[\begin{array}{l} \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{array} \right. \quad 7.1b$$

respektive:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{array} \right. \quad 7.2a$$

$$\left[\begin{array}{l} \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right. \quad 7.2b$$

$$\lambda + \mu = \kappa - \frac{2}{3}\mu \quad 7.3$$

κ = Bulkmodul

7.3 LÖSNING AV JÄMVIKTSEKVATIONERNA

Det är speciellt lösningen av jämviktsekvationerna som ställer till de största problemen. Jämviktsekvationerna för en elastisk- isotrop kropp utan externa volymlaster kan tecknas enligt följande:

Jämvikt:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \kappa_i = 0 \quad 7.4$$

Töjningar - förskjutningar:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 7.5$$

Konstitutiv relation:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad 7.6$$

Kombineras 7.4, 7.5 och 7.6 fås:

$$\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_{jj}} + (\lambda + \mu) \frac{\partial u_j}{\partial x_{ji}} + \kappa_i = 0 \quad 7.7$$

Inga externa volymlaster:

$$\kappa_i = 0$$

$$\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_{jj}} + (\lambda + \mu) \frac{\partial u_j}{\partial x_{ji}} = 0 \quad 7.7b$$

Detta kan också skrivas:

$$\text{rot rot } \underline{u} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \text{grad div } \underline{u} \quad 7.7c$$

\underline{u} = Förskjutningsvektorn = (u, v, w)

Sätt:

$$\Delta = \text{div } \underline{u}$$

$$\rightarrow \text{rot rot } \underline{u} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \text{grad } \Delta \quad 7.7a$$

$$\text{div}(\text{rot rot } \underline{u}) = \text{div} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \text{grad } \Delta \right) \quad 7.8a$$

Det gäller att:

$$\text{div rot } \underline{u} = 0$$

Då fås:

$$\text{div grad } \Delta = 0 \quad 7.8b$$

Lösningen till denna ekvation används sedan till att bestämma förskjutningsvektorn \underline{u}

$$\text{rot rot } \vec{u} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \text{ grad div } \vec{u}$$

$$\text{rot rot } \vec{u} = \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \text{ grad div } \vec{u}$$

$$\text{rot rot } \vec{u} - \text{grad div } \vec{u} = \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right) \text{ grad div } \vec{u} \quad 7.9$$

Lägg sedan märke till att:

$$\text{rot rot } \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \Delta \vec{u}$$

så att:

$$\Delta \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}$$

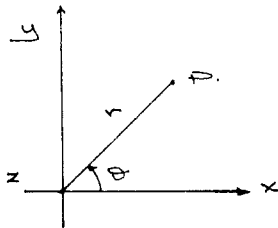
Då fås:

$$\text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \text{ grad div } \vec{u} \quad 7.10a$$

$$\Delta \vec{u} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu} \text{ grad div } \vec{u} \quad 7.10b$$

Cylindriska koordinater (r, θ, z) :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



Figur 7.2 Cylindriska koordinater

BESTÄMNING AV Δ :

$$\text{div grad } \Delta = 0 \quad 7.8b$$

eller:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = 0 \quad 7.8c$$

För $z > 0$:

Ansätt:

$$\Delta = \delta(r) e^{-kz} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad 7.11a$$

$k > 0$

Då fås:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \delta = 0 \quad 7.8d$$

Besselsk differentialekvation:

$$\rightarrow \delta(r) = C_m J_m(kr) \quad 7.12$$

som ger:

$$\Delta = C_m J_m(kr) e^{-kz} \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases} \quad 7.11b$$

Vi har nu två fall:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta = C_m e^{-kz} J_m(kr) \cdot \cos m\theta \end{array} \right. \quad 7.13a$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta = C_m e^{-kz} J_m(kr) \cdot \sin m\theta \end{array} \right. \quad 7.13b$$

BESTÄMNING AV \square DÅ:

$$\Delta = C_m e^{-kz} J_m(kr) \cos m\theta \quad 7.13a$$

Inför potentialerna:

$$\left[\begin{array}{l} \psi_r = \psi_r(r, z) \cos m\theta \\ \psi_\theta = \psi_\theta(r, z) \sin m\theta \\ \psi_z = \psi_z(r, z) \cos m\theta \end{array} \right. \quad 7.18$$

Transformera ekvationen:

$$\text{grad div } \square - \text{rot rot } \square = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \text{grad } \Delta \quad 7.10a$$

Detta är egentligen tre kopplade partiella differentialekvationer. Transformera ekvationerna med hjälp av potentialerna enligt:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial z^2} - \frac{m^2+1}{r^2} \psi_r - \frac{2m}{r^2} \psi_\theta = -\frac{\lambda+\mu}{\nu} k \psi_0 \quad 7.14a \\ \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial z^2} - \frac{m^2+1}{r^2} \psi_\theta - \frac{2m}{r^2} \psi_r = \frac{\lambda+\mu}{\nu} \frac{m}{r} \psi_0 \quad 7.14b \\ \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \psi_z = \frac{\lambda+\mu}{\nu} k \psi_0 \quad 7.14c \end{array} \right.$$

$$\psi_0 = C_m e^{-kz} J_m(kr)$$

Härur fås lätt:

$$\psi_z = v(z) J_m(kr) \quad 7.15a$$

Denna ekvation satisfierar:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - k^2 v = \frac{\lambda+\mu}{\nu} k C_m e^{-kz} \quad 7.16$$

Lösningen är:

$$v(z) = \left(-\frac{\lambda+\mu}{2\nu} C_m z + D_m \right) e^{-kz} \quad 7.17$$

där:

D_m = Integrationskonstant

Detta ger då:

$$\psi_z = \left(-\frac{\lambda+\mu}{2\nu} C_m z + D_m \right) e^{-kz} J_m(kr) \cos m\theta \quad 7.15b$$

För att bestämma ψ_r och ψ_θ går man tillväga på i princip samma sätt.

Sätt:

$$\left[\begin{array}{l} \psi_r + \psi_\theta = x \\ \psi_r - \psi_\theta = y \end{array} \right.$$

Då fås:

$$\text{grad div } \Pi - \text{rot rot } \Pi = -\frac{\lambda+\mu}{\nu} \text{grad } \Delta \quad 7.10a$$

Införs potentialerna 7.18

Så fås:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{(m+1)^2}{r^2} x = \frac{\lambda + \omega}{\rho} k C_m e^{-kz} J_{m+1}(kr) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{(m-1)^2}{r^2} y = -\frac{\lambda + \omega}{\rho} k C_m e^{-kz} J_{m-1}(kr) \end{cases} \quad 7.19$$

Lösningen blir:

$$\begin{cases} x = \left(-\frac{\lambda + \omega}{2\rho} C_m z + E_m \right) e^{-kz} J_{m+1}(kr) \\ y = \left(\frac{\lambda + \omega}{2\rho} C_m z + F_m \right) e^{-kz} J_{m-1}(kr) \end{cases} \quad 7.20$$

där:

E och F är integrationskonstanter

Sätt nu:

$$\begin{cases} \Delta_m = \frac{1}{2} [E_m + F_m] \\ B_m = \frac{1}{2} [E_m - F_m] \end{cases}$$

Då fås:

$$\begin{aligned} u_r = & \frac{\lambda + \omega}{2\rho} C_m z J'_m(kr) + \left[\Delta_m \frac{m}{kr} J_m(kr) - \dots \right. \\ & \left. \dots - B_m J'_m(kr) \right] e^{-kz} \cos m\theta \end{aligned} \quad 7.21$$

$$\begin{aligned} u_\theta = & -\frac{\lambda + \omega}{2\rho} C_m z \frac{m}{kr} J_m(kr) + \left[B_m \frac{m}{kr} J_m(kr) - \dots \right. \\ & \left. \dots - \Delta_m J'_m(kr) \right] e^{-kz} \sin m\theta \end{aligned} \quad 7.22$$

Då fås ett system av lösningar enligt:

$$\Delta = C_m J_m(kr) e^{-kz} \cos m\theta \quad 7.13a$$

$$\begin{aligned} u_r = & \left[\left[\frac{\lambda + \omega}{2\rho} C_m z - B_m \right] J'_m(kr) + \Delta_m \frac{m}{kr} \dots \right. \\ & \left. \dots J_m(kr) \right] e^{-kz} \cos m\theta \end{aligned} \quad 7.21$$

$$\begin{aligned} u_\theta = & \left[\left[-\frac{\lambda + \omega}{2\rho} C_m z + B_m \right] \frac{m}{kr} J_m(kr) + \Delta_m \dots \right. \\ & \left. \dots J'_m(kr) \right] e^{-kz} \sin m\theta \end{aligned} \quad 7.22$$

$$u_z = - \left[\frac{\lambda + \omega}{2\rho} C_m z - D_m \right] J_m(kr) e^{-kz} \cos m\theta \quad 7.15b$$

Vi har även ett samband mellan konstanterna B , C och D .
Det vill säga:

$$k(B_m - D_m) = \frac{\lambda + 3\nu}{2\nu} C_m \quad 7.23$$

Analoga beräkningar görs för fallet:

$$\Delta = C_m e^{-kz} J_m(kr) \sin m\theta \quad 7.13b$$

Vi erhåller:

$$\Delta = C_m e^{-kz} J_m(kr) \sin m\theta \quad 7.13b$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_r = & \left[\left[\frac{\lambda + \nu}{2\nu} C_m z - B_m \right] J'_m(kr) + \Delta_m \frac{m}{kr} \dots \right. \\ & \left. \dots J_m(kr) \right] e^{-kz} \sin m\theta \quad 7.24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_\theta = & \left[\left[\frac{\lambda + \nu}{2\nu} C_m z - B_m \right] \frac{m}{kr} J_m(kr) + \dots \right. \\ & \left. \dots + \Delta_m J'_m(kr) \right] e^{-kz} \cos m\theta \quad 7.25 \end{aligned}$$

$$\bar{u}_z = - \left[\frac{\lambda + \nu}{2\nu} C_m z - D_m \right] J_m(kr) e^{-kz} \sin m\theta \quad 7.26$$

samt:

$$k(B_m - D_m) = \frac{\lambda + 3\nu}{2\nu} C_m \quad 7.27$$

SPÄNNINGARNA

Dessa kan beräknas genom sambanden:

$$\sigma_z = \lambda \Delta + 2\nu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad 7.28a$$

$$\sigma_r = \lambda \Delta + 2\nu \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad 7.28b$$

$$\sigma_\theta = \lambda \Delta + 2\nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right] \quad 7.28c$$

$$\tau_{rz} = \nu \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \quad 7.28d$$

$$\tau_{r\theta} = \nu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad 7.28e$$

$$\tau_{z\theta} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] \quad 7.28f$$

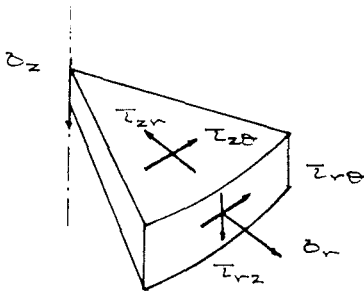
Då kan spänningarna fullständigt beräknas. Två uttryck erhålls

7.4 LAMÉ OCH CLAYPERONS PROBLEM

Den lösning som vi nu tagit fram kan användas till att lösa problem av typen:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = f(r, \theta) \\ \tau_{rz} = c \\ \tau_{z\theta} = c \end{array} \right. \quad 7.29$$

Detta innebär att vi har någon sorts belastning på ytan som orsakar en normalspänning i halvrymden, medan skjuvspänningarna på ytorna rz och $z\theta$ är noll.



Figur 7.3 Spänningarna på ett utskuret element

Ett specialfall av ovanstående är att $\sigma_z = f(r)$, det vill säga normalspänningen i planet z är oberoende av vinkeln θ . Detta fall uppkommer vid axialsymmetrisk belastning.

Låt spänningen på begränsningsytan, $z = 0$, vara given genom:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = \left[z \cos m\theta + z \sin m\theta \right] \Delta_m(kr) \\ \tau_{rz} = 0 \\ \tau_{z\theta} = 0 \end{array} \right. \quad 7.30$$

Kombination av uttryck för spänningar och förskjutningar ger:

$$z = -\nu C_m - 2\nu k D_m$$

$$\frac{\lambda + \omega}{2} C_m + \omega k (B_m + D_m) = 0$$

$$\Delta_m = 0$$

$$\bar{z} = -\omega C_m - 2\omega k D_m$$

$$\frac{\lambda + \omega}{2} C_m + \omega k (B_m + D_m) = 0$$

$$\Delta_m = 0$$

Med hjälp av:

$$\begin{cases} k(B_m - D_m) = \frac{\lambda + 3\omega}{2\omega} C_m \\ k(B_m - D_m) = \frac{\lambda + 3\omega}{2\omega} C_m \end{cases} \quad 7.31$$

fås:

$$\begin{cases} C_m = \frac{z}{\lambda + \omega} \\ B_m = \frac{z}{2k(\lambda + \omega)} \\ D_m = \frac{(\lambda + 2\omega)z}{2\omega k(\lambda + \omega)} \\ \Delta_m = 0 \end{cases} \quad 7.32$$

samt motsvarande för:

$$C_m, B_m, D_m \text{ och } \Delta_m$$

Då kan både förskjutningar och spänningar bestämmas:

$$u_r = \left(\frac{z}{2\omega} - \frac{1}{2(\lambda + \omega)k} \right) \cdot \left[z \cos m\theta + z \sin m\theta \right] e^{-kz} J_m(kr) \quad 7.33a$$

$$u_\theta = \left(\frac{z}{2\omega} - \frac{1}{2(\lambda + \omega)k} \right) \cdot \left[z \cos m\theta + z \sin m\theta \right] \frac{m}{kr} e^{-kz} J_m(kr) \quad 7.33b$$

$$u_z = - \left(\frac{z}{2\omega} + \frac{\lambda + 2\omega}{2\omega(\lambda + \omega)k} \right) \cdot \left[z \cos m\theta + z \sin m\theta \right] e^{-kz} J_m(kr) \quad 7.33c$$

samt:

$$\sigma_z = (1 + kz) \cdot \left[z \cos m\theta + z \sin m\theta \right] e^{-kz} J_m(kr) \quad 7.34a$$

$$\tau_{rz} = -kz \left[z \cos m\theta + z \sin m\theta \right] e^{-kz} J_m(kr) \quad 7.34b$$

$$\tau_{z\theta} = -kz \left[z \cos m\theta - z \sin m\theta \right] \frac{m}{kr} e^{-kz} J_m(kr) \quad 7.34c$$

Som vi ser stämmer detta med de givna randspänningarna.

Vi kan generalisera genom att anta följande spänningsfördelning på randen $z = 0$.

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = \sum_m \int_0^\infty \left[z_m(k) \cos m\theta + \overline{z_m(k)} \sin m\theta \right] J_m(kr) dk \\ \tau_{rz} = 0 \\ \tau_{z\theta} = 0 \end{array} \right. \quad 7.35$$

Detta skiljer sig väldigt lite från (ekv. 7.30) och vi kan teckna lösningen direkt:

$$\left[\begin{array}{l} u_r = \sum_m \left(\frac{z}{2\nu} - \frac{1}{2(\lambda+\nu)k} \right) \cdot \int_0^\infty \left[z_m(k) \cos m\theta + \overline{z_m(k)} \sin m\theta \right] e^{-kz} J_m(kr) dk \end{array} \right. \quad 7.36a$$

$$\left[\begin{array}{l} u_\theta = \sum_m \left(\frac{z}{2\nu} - \frac{1}{2(\lambda+\nu)k} \right) \cdot \int_0^\infty \left[z_m(k) \cos m\theta + \overline{z_m(k)} \sin m\theta \right] e^{-kz} \frac{m}{kr} J_m(kr) dk \end{array} \right. \quad 7.36b$$

$$\left[\begin{array}{l} u_z = -\sum_m \left(\frac{z}{2\nu} + \frac{\lambda+2\nu}{2\nu(\lambda+\nu)k} \right) \int_0^\infty \left[z_m(k) \cos m\theta + \overline{z_m(k)} \sin m\theta \right] e^{-kz} J_m(kr) dk \end{array} \right. \quad 7.36c$$

och:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = \sum_m \int_0^\infty (1+kz) \cdot \left[z_m(k) \cos m\theta + \overline{z_m(k)} \sin m\theta \right] e^{-kz} J_m(kr) dk \end{array} \right. \quad 7.37a$$

$$\left[\begin{array}{l} \tau_{rz} = \sum_m \int_0^\infty -kz \cdot \left[z_m(k) \cos m\theta + \overline{z_m(k)} \sin m\theta \right] e^{-kz} J_m(kr) dk \end{array} \right. \quad 7.37b$$

$$\left[\begin{array}{l} \tau_{z\theta} = \sum_m \int_0^\infty -kz \cdot \left[\overline{z_m(k)} \cos m\theta + z_m(k) \sin m\theta \right] e^{-kz} \frac{m}{kr} J_m(kr) dk \end{array} \right. \quad 7.37c$$

Låt oss generalisera randspänningarna ytterligare.

$$\begin{cases} \sigma_z = F(r, \theta) \\ \tau_{rz} = 0 \\ \tau_{z\theta} = 0 \end{cases} \quad 7.38$$

då $z = 0$.

$F(r, \theta)$ är en godtycklig funktion som kan utvecklas i en trigonometrisk serie av typen:

$$F(r, \theta) \sim \sum_m \left[F_m(r) \cos m\theta + \overline{F_m(r)} \sin m\theta \right] \quad 7.39$$

Då återstår bara problemet att bestämma konstanterna:

$$F_m(r), \overline{F_m(r)}$$

Då $z = 0$ ska det gälla att:

$$\begin{cases} \sigma_z = F(r, \theta) \\ \sigma_z = \sum_m \int_0^\infty \left[z_m(k) \cos m\theta + \overline{z_m(k)} \sin m\theta \right] J_m(kr) dk \\ F(r, \theta) = \sum_m \int_0^\infty \left[z_m(k) \cos m\theta + \overline{z_m(k)} \sin m\theta \right] \dots \\ \dots J_m(kr) dk \end{cases} \quad \begin{matrix} 7.38 \\ 7.35 \\ 7.39 \end{matrix}$$

Serieuutveckling av F ger direkt:

$$F_m(r) = \int_0^\infty z_m(k) J_m(kr) dk \quad 7.40a$$

$$\overline{F_m(r)} = \int_0^\infty \overline{z_m(k)} J_m(kr) dk \quad 7.40b$$

Låt oss nu bestämma $z(k)$ och $\overline{z(k)}$ ur de två tidigare integralerna (ekv. 7.35) Detta kan lättast göras med hjälp av Webens integralteorem:

$$F(r) = \int_0^\infty \int_0^\infty F(\alpha) J_m(kr) J_m(k\alpha) dk d\alpha dk \quad 7.41$$

som är giltigt då:

$$m \neq \pm \frac{1}{2}$$

och även kan skrivas:

$$F(r) = \int_0^{\infty} J_m(kr) k dk \int_0^{\infty} F(\alpha) J_m(k\alpha) \alpha d\alpha \quad 7.41$$

Då ser vi att:

$$\left[\begin{array}{l} z_m(k) = k \int_0^{\infty} F(\alpha) J_m(k\alpha) \alpha d\alpha \end{array} \right. \quad 7.42a$$

$$\left[\begin{array}{l} \overline{z}_m(k) = k \int_0^{\infty} \overline{F(\alpha)} J_m(k\alpha) \alpha d\alpha \end{array} \right. \quad 7.42b$$

Lösningen är nu fullständig och den fås genom att sätta in de beräknade värdena på $z(k)$ och $\overline{z(k)}$ i uttrycken för spänningar och förskjutningar.

Låt oss nu specialisera oss till ett rotationssymmetriskt problem, det vill säga:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = F(r) \\ \tau_{rz} = 0 \\ \tau_{z\theta} = 0 \end{array} \right. \quad 7.43$$

då $z = 0$

Lösningen blir med hjälp av tidigare uttryck (ekv. 7.33 och 7.34)
 $m = 0$

$$\left[\begin{array}{l} u_r = \left(\frac{z}{2\nu} - \frac{1}{2(\lambda+\nu)k} \right) \cdot \int_0^{\infty} z(k) e^{-kz} J_0(kr) dk \\ u_\theta = 0 \\ u_z = 0 \left(\frac{z}{2\nu} - \frac{\lambda+2\nu}{2\nu(\lambda+\nu)k} \right) \int_0^{\infty} z(k) e^{-kz} J_0(kr) dk \end{array} \right.$$

och:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = \int_0^{\infty} (1+kz) z(k) e^{-kz} J_0(kr) dk \\ \tau_{rz} = - \int_0^{\infty} kz \cdot z(k) e^{-kz} J_0'(kr) dk \\ \tau_{z\theta} = 0 \end{array} \right.$$

där:

$$z(k) = \int_0^{\infty} F(\alpha) J_0(k\alpha) d\alpha$$

Vi kan också notera att:

$$J_0'(s) = -J_1(s)$$

Man kan nu lösa en hel svit av rotationssymmetriska problem med olika randvillkor. I vårt speciella fall har vi att:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = F(r) \\ \tau_{zr} = 0 \\ u_r = w(r) \end{array} \right. \quad 7.44$$

Detta är ett specialfall av:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = F(r) \\ \tau_{zr} = \tau_{zr}(r) \\ u_r = u_r(r) \end{array} \right. \quad 7.45$$

Det sistnämnda problemets lösning kan erhållas ur den allmänna lösningen av det rotationssymmetriska problemet med beaktande av randvillkoren.

Lösningen är:

$$\left[\begin{array}{l} u_r = - \int_0^{\infty} \left[- \frac{z(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)} \left[R(k) + 2\mu k W(k) \right] + \dots \right. \\ \dots + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} W(k) + \frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)k} R(k) \left. \right] e^{-kz} J_1(kr) dk \quad 7.46a \\ u_z = - \int_0^{\infty} \left[\frac{z(\lambda+\mu)k}{2\mu(\lambda+2\mu)} \left[R(k) + 2\mu k W(k) \right] + \dots \right. \\ \dots + W(k) \left. \right] e^{-kz} J_0(kr) dk \quad 7.46b \end{array} \right.$$

och:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_z = - \int_0^{\infty} \left[\frac{z(\lambda+\mu)k}{\lambda+2\mu} \left[R(k) + 2\mu k W(k) \right] + \dots \right. \\ \dots + \frac{2\mu(\lambda+\mu)k}{\lambda+2\mu} W(k) - \frac{\mu}{\lambda+2\mu} R(k) \left. \right] e^{-kz} J_0(kr) dk \quad 7.47a \\ \tau_{rz} = - \int_0^{\infty} \left[- \frac{z(\lambda+\mu)k}{\lambda+2\mu} \left[R(k) + 2\mu k W(k) \right] + \dots \right. \\ \dots + R(k) \left. \right] e^{-kz} J_1(kr) dk \quad 7.47b \end{array} \right.$$

där:

$$R(k) = k \int_0^{\infty} \tau(\alpha) J_1(k\alpha) d\alpha \quad 7.48$$

och:

$$W(k) = k \int_0^{\infty} u_r(\alpha) J_0(k\alpha) d\alpha \quad 7.49$$

Dessa två funktioner är en sorts influensfunktioner som tar hänsyn till inverkan av den aktuella storheten τ eller u_r i andra punkter än den aktuella.

7.5 GENERELL LÖSNING MED PUNKTLAST

$$\tau_{rz} = 0 \quad 7.44$$

för $z = 0$

Då fås:

$$\left[\begin{aligned} u_z = w &= \int_0^{\infty} W(k) J_0(kr) dk & 7.46b \\ \tau_{rz} &= - \int_0^{\infty} R(k) J_1(kr) dk = 0 & 7.47b \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow R(k) = 0 \quad 7.48$$

Då fås:

$$\partial_z = - \int_0^{\infty} \frac{2w(\lambda+w)k}{\lambda+2w} W(k) J_0(kr) dk \quad 7.47a$$

Sätt:

$$R = \frac{2w(\lambda+w)}{\lambda+2w}$$

som ger:

$$\partial_z = -R \int_0^{\infty} k W(k) J_0(kr) dk \quad 7.47a$$

Den styrande differentialekvationen för en symmetriskt belastad platta kan skrivas:

$$\Delta \Delta w = \frac{P + \partial_z}{D} \quad 5.19$$

enligt tidigare (ekv. 5.19).

Detta kan också skrivas:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial x}{\partial r} \right] \right] \right\} = \frac{p + \partial_z}{D}$$

Sätt in:

$$x = \int_0^{\infty} X(k) J_0(kr) dk \quad 7.46b$$

så fås:

$$\int_0^{\infty} k^4 X(k) J_0(kr) dk = \frac{p + \partial_z}{D} \quad 7.49$$

Sedan gäller att:

$$\partial_z = -R \int_0^{\infty} k X(k) J_0(kr) dk \quad 7.47a$$

Sätt in detta uttryck och vi erhåller:

$$\begin{aligned} D \cdot \int_0^{\infty} k^4 X(k) J_0(kr) dk &= \dots \\ \dots &= p - \int_0^{\infty} R k X(k) J_0(kr) dk \\ D &= \int_0^{\infty} (Dk^4 + Rk) X(k) J_0(kr) dk \end{aligned} \quad 7.50$$

Lasten:

Utveckla $p = p(r)$ i en Besselserie av ordning 0:

$$p(r) \sim \int_0^{\infty} P(k) J_0(kr) dk \quad 7.51a$$

där:

$$P(k) = k \int_0^{\infty} \alpha p(\alpha) J_0(k\alpha) d\alpha \quad 7.51b$$

BESTÄMNING AV LASTFUNKTIONERNA

$$P(k) = k \int_0^{\infty} \alpha p(\alpha) J_0(k\alpha) d\alpha \quad 7.51b$$

p = medelspänning

PUNKTLAST

$$P(k) = k \int_0^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p}{\pi \epsilon^2} \alpha J_0(k\alpha) d\alpha$$

$$P(k) = \frac{p}{2\pi} \quad 7.52$$

UTBREDD LAST

Lastens radie = a

$$\begin{aligned}
 D(k) &= k \int_0^{\infty} \frac{D}{a^2 k^2} r J_0(kr) dr = \dots \\
 &= \frac{D}{a^2 k} \int_0^a r J_0(kr) dr = \dots \\
 &= \left. \begin{array}{l} kr = x \rightarrow dr = \frac{1}{k} dx \\ 0 \rightarrow 0 ; a \rightarrow ka \end{array} \right\} = \dots \\
 &= \frac{D}{a^2 k^2} \int_0^{ka} x J_0(x) dx = \dots \\
 &= \frac{D}{a^2 k} \left[x J_1(x) \right]_0^{ka} = \dots \\
 &= \frac{D}{a^2} J_1(ka) \qquad \qquad \qquad 7.53
 \end{aligned}$$

LAST MED CIRKULÄR UTBREDNING

Radie = a

$$D(k) = \frac{D}{a} J_1(ka) \qquad \qquad \qquad 7.53$$

Detta ger:

$$D = \int_0^{\infty} (DK^2 + RK) X(k) J_0(kr) dk \qquad \qquad \qquad 7.50$$

$$D \sim \int_0^{\infty} D(k) J_0(kr) dk \qquad \qquad \qquad 7.51a$$

Likheten ger då

$$(DK^2 + RK) X(k) = D(k)$$

$$X(k) = \frac{D(k)}{DK^2 + RK}$$

$$X(k) = \frac{D(k)}{k(DK^2 + R)} \qquad \qquad \qquad 7.54$$

PUNKTLAST

$$D(k) = \frac{D}{2\pi} k \qquad \qquad \qquad 7.52$$

$$D = \int_0^{\infty} (DK^2 + RK) X(k) J_0(kr) dk \qquad \qquad \qquad 7.50$$

$$D \sim \int_0^{\infty} D(k) J_0(kr) dk \qquad \qquad \qquad 7.51a$$

$$\rightarrow w(k) = \frac{P(k)}{k(Dk^2 + R)}$$

$$\rightarrow w(k) = \frac{P}{2\pi(Dk^2 + R)}$$

7.55

där:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

P = Total last

$$R = \frac{2\nu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$$

Detta är alltså en markkonstant. Denna kan också uttryckas i de vanliga konstanterna E och ν :

$$R = \frac{E}{2(1+\nu)(1-\nu)}$$

$$R = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$$

7.56

NEDBÖJNING FÖR PUNKTLAST

Följande gäller:

$$w = \int_0^{\infty} w(k) J_0(kr) dk \quad 7.46b$$

Sätts $w(k)$ in fås:

$$w = \int_0^{\infty} \frac{P}{2\pi(Dk^2 + R)} J_0(kr) dk \quad 7.57a$$

$$\rightarrow w = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)}{Dk^2 + R} dk$$

Det stora problemet är nu att beräkna integralen.

Sätt:

$$S_0 = \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)}{Dk^2 + R} dk \quad 7.58a$$

Variabelbyte:

$$\left[\begin{array}{l} x = kr \\ D^2 = \frac{D}{r^2} r^2 \end{array} \right.$$

Då fås:

$$S_0 = \frac{b^2}{(DR^2)^{\frac{1}{3}}} \int_0^{\infty} \frac{J_0(x)}{x^2+b^2} dx \quad 7.58b$$

det vill säga:

$$W = \frac{P}{2\pi} \cdot S_0 \quad 7.57b$$

För beräkning av integralen hänvisar vi till Watson (36) Theory of Bessel functions. Beräkningen är mycket komplicerad och därför ges endast slutresultatet här:

$$\begin{aligned} b^2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(x)}{x^2+b^2} dx &= S_0 \cdot (DR^2)^{\frac{1}{3}} = \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{6m+2} \cdot \psi\left(\frac{b}{2}\right) - \left(\frac{b}{2}\right)^{6m+2} \cdot \psi(3m+2)}{((3m+1)!)^2} \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \dots \right. \\ &\left. \dots \left\{ \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{6m+2}}{(3m!)^2} - \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{6m+4}}{((3m+2)!)^2} \right\} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{6m+5}}{\Gamma^2\left(3m+\frac{7}{2}\right)} \right\} \quad 7.59 \end{aligned}$$

där:

$\Gamma(z)$ = Gammafunktionen

$\psi(z)$ = Psi-funktionen = $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$

Numeriskt kan detta tecknas.

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(DR^2)^{\frac{1}{3}}}{2\pi} \cdot S_0 = \dots \\ &= \frac{b^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(x)}{x^2+b^2} dx = \dots \\ &= \left[0.02979 b^2 - 0.00001079 b^8 + \dots \right] \ln \frac{b}{2} + \dots \\ &+ 0.1925 - 0.01682 b^2 - 0.003007 b^4 + \dots \\ &+ 0.0007074 b^5 - 0.00008353 b^6 + \dots \\ &+ 0.00001626 b^8 + \dots \quad 7.60 \end{aligned}$$

Lösningen blir

$$W = \frac{P}{(DR^2)^{\frac{1}{3}}} \cdot S_1(b) \quad 7.57c$$

Detta ritas upp i diagram 7:1

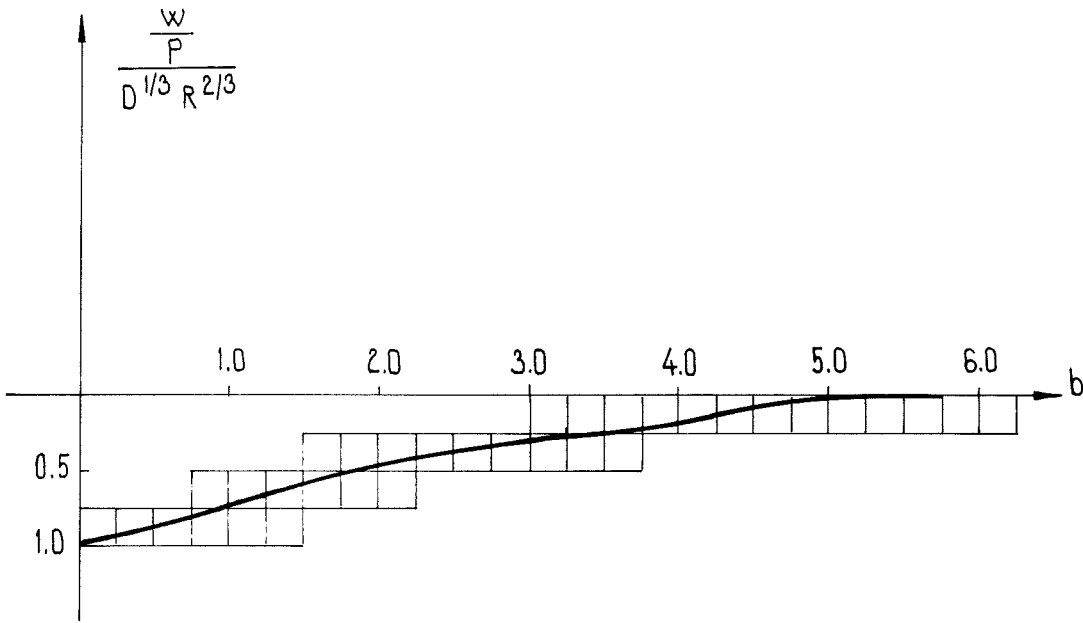


Diagram 7.1 Nedböjningen under punktlaster

BERÄKNING AV MOMENT FÖR PUNKTLAST

Momenten ges av:

$$\left[M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right. \quad 5.24$$

$$\left[M_t = -D \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right. \quad 5.25$$

där:

$$w = \frac{P}{(DR^2)^{\frac{1}{3}}} \cdot S_1(b) \quad 7.57c$$

Det gäller att:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \left(\frac{P}{D} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\partial S_1}{\partial b}$$

som ger:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{P^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\partial S_1}{\partial b}$$

samt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{P^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\partial^2 S_1}{\partial b^2}$$

Då fås:

$$\left[\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{P^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\partial^2 S_1}{\partial b^2} - \frac{\nu}{r} \frac{P^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial S_1}{\partial b} \right] \\ M_t &= -D \left[-\frac{\nu}{r} \frac{P^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \frac{\partial S_1}{\partial b} + \frac{P^{\frac{1}{3}}}{D^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{\partial^2 S_1}{\partial b^2} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\left[M_r = D \left[\frac{\nu}{r} \frac{\partial S_1}{\partial b} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial b^2} \right] \right. \quad 7.61a$$

$$\left[M_t = D \left[\frac{\nu}{r} \frac{\partial S_1}{\partial b} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial b^2} \right] \right. \quad 7.61b$$

som ger:

$$\left[\frac{M_r}{D} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial S_1}{\partial b} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial b^2} \right. \quad 7.62a$$

$$\left[\frac{M_t}{D} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial S_1}{\partial b} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial b^2} \right. \quad 7.62b$$

Ovanstående två relationer ritas upp med $\nu = 0.2$ och med $\nu = 0$ i diagram 7:2 och 7:3

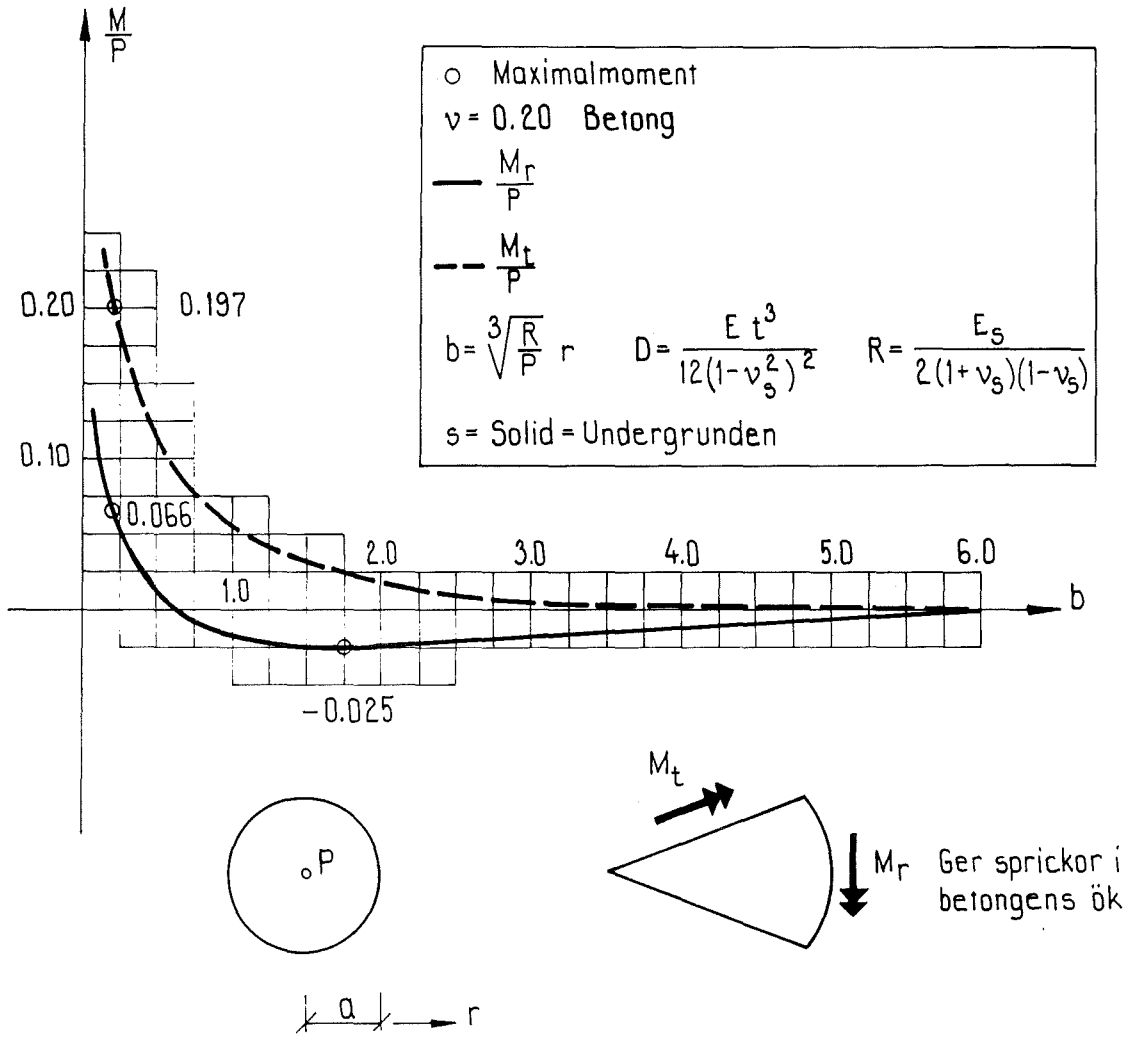


Diagram 7.2 Momentfördelningen under punktlaster, $\nu = 0.20$ betong

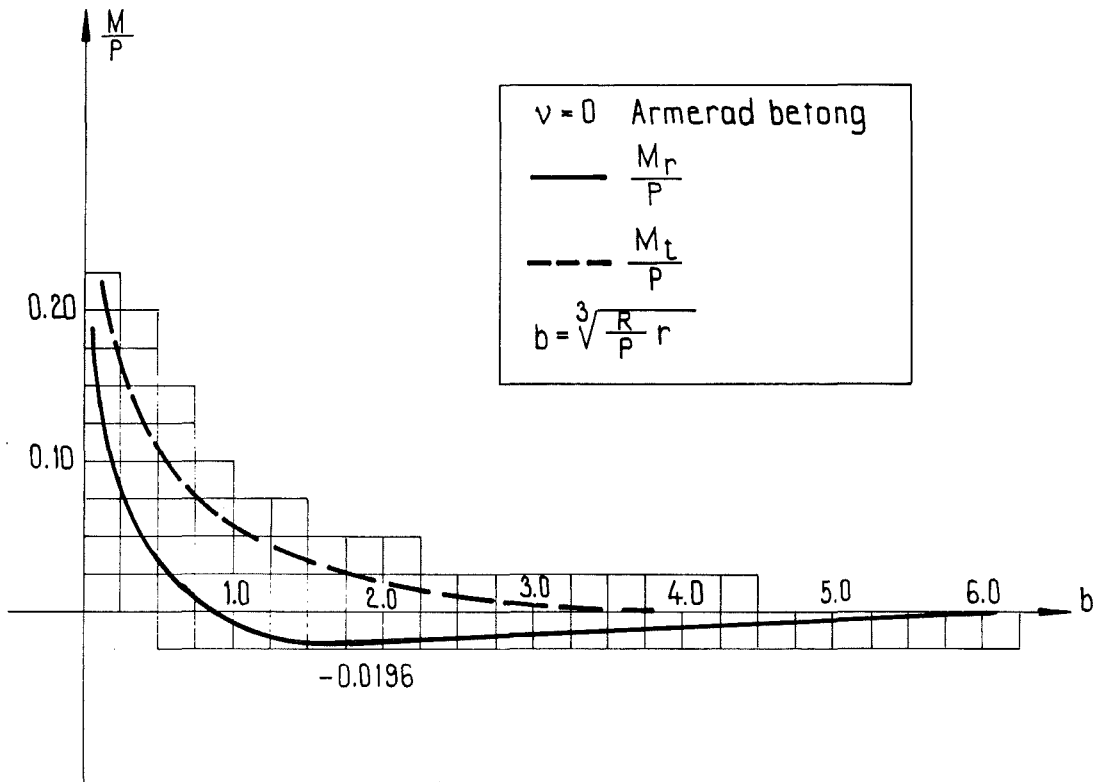


Diagram 7.3 Momentfördelningen under punktlasten, $\nu = 0$
 armerad betong

BERÄKNING AV TRYCKKURVA FÖR PUNKTLAST

Tryckkurvan motsvarar undergrundens respons på plattan. Nedböjningen ges av:

$$w = \frac{P}{(DR^2)^{\frac{1}{3}}} \cdot S_1(b) \quad 7.57c$$

Den styrande differentialekvationen är:

$$\Delta\Delta w = \frac{P_0 - \partial_z}{D} \quad 5.19$$

Detta kan skrivas:

$$\Delta\Delta w = \frac{P_0}{D}$$

$$\text{ty } \partial_z = P$$

som blir:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w}{\partial r} \right] \right\} \right] = \frac{P_0}{D} \quad 7.63$$

Detta ger:

$$P_0 = D \cdot \Delta\Delta w \quad 7.64$$

Om vi använder den dimensionslösa variabeln b fås:

$$P_0 = \frac{D}{\left(\frac{R}{D}\right)^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} \left[b \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} \left[b \frac{\partial w}{\partial b} \right] \right\} \right] \right] \quad 7.65a$$

Med:

$$w = \frac{P}{(DR^2)^{\frac{1}{3}}} \cdot S_1(b) \quad 7.57c$$

fås:

$$P_0 = -\left(\frac{R}{D}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot P \cdot \Delta\Delta S_1(b) \quad 7.65b$$

$$\Delta\Delta = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} \left[b \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} \left[b \frac{\partial}{\partial b} \right] \right\} \right]$$

Derivering ger:

$$P_0 = -\left(\frac{R}{D}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot P \cdot S_2(b) \quad 7.66$$

där:

$$S_2(b) = \Delta\Delta S_1(b)$$

Se diagram 7:4

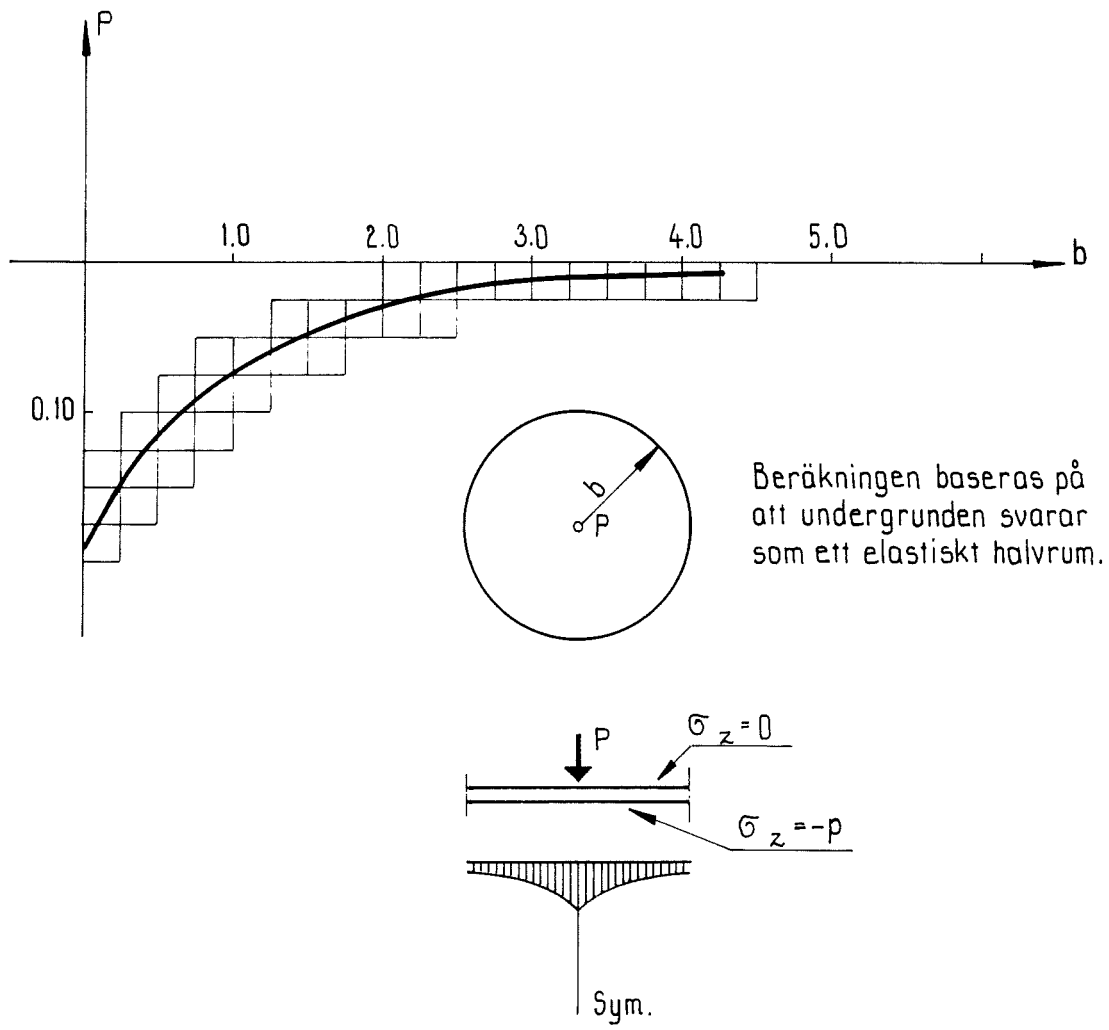
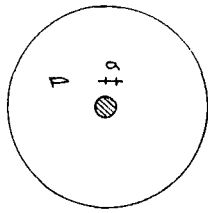


Diagram 7.4 Tryckkurvan under punktlasten

7.6 JÄMNT UTBREDD LAST



P = Totallast

a = Lastradie

Figur 7.4 Principfigur för last med viss utbredning

Vi har tidigare bestämt lastfunktionen $P(k)$ för en last med cirkulär utbredning:

$$P(k) = k \int_0^{\infty} \alpha P(\alpha) J_0(k\alpha) d\alpha \quad 7.51b$$

som blir:

$$P(k) = \frac{P}{\pi a} J_1(ka) \quad 7.53$$

$$P = \int_0^{\infty} (DK^4 + RK) w(k) J_0(kr) dk$$

$$P \sim \int_0^{\infty} P(k) J_0(kr) dk$$

Likheten ger:

$$w(k) = \frac{P(k)}{DK^4 + RK}$$

$$\rightarrow w(k) = \frac{P(k)}{k(DK^3 + R)} \quad 7.54$$

Sätt in $P(k)$ beräknad tidigare enligt (ekv. 7.53) :

$$w(k) = \frac{P}{\pi a k (DK^3 + R)} J_1(ka) \quad 7.67$$

Nedböjningen kan tecknas :

$$w = \int_0^{\infty} w(k) J_0(kr) dk \quad 7.46b$$

Sätt in 7.67, så fås:

$$w = \int_0^{\infty} \frac{P}{\pi a k (DK^3 + R)} J_1(ka) J_0(kr) dk \quad 7.68a$$

Detta kan också skrivas:

$$\chi = \frac{P}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{J_1(ka)}{k(Dk^2 + R)} \cdot J_0(kr) dk \quad 7.68b$$

Skriv om enligt följande:

$$D^3 = \frac{R}{D} r^3$$

$$\rightarrow D = \frac{r}{L} ; L = \sqrt[3]{\frac{R}{D}}$$

Sätt $x = ka$

$$k = \frac{x}{a}$$

$$dk = \frac{1}{a} dx$$

$$kr = \frac{x}{a} r = \frac{x}{a} L b$$

$$u = \frac{L}{L}$$

$$\rightarrow kr = \frac{Dx}{\omega}$$

där:

$$u = \frac{L}{L} = a \cdot \sqrt[3]{\frac{D}{R}}$$

Då fås:

$$\chi = \frac{P}{\pi a} \cdot \frac{1}{R} \cdot \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x \cdot \left[\left(\frac{x}{u} \right)^2 + 1 \right]} \cdot J_0\left(\frac{Dx}{\omega} \right) dx \quad 7.68c$$

$$a = uL$$

$$\rightarrow \chi = \frac{P}{\pi uL} \cdot \frac{1}{R} \cdot \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x \cdot \left[\left(\frac{x}{u} \right)^2 + 1 \right]} \cdot J_0\left(\frac{Dx}{\omega} \right) dx$$

$$\rightarrow \chi = \frac{P}{\pi u} \cdot \frac{1}{D^{\frac{1}{3}} R^{\frac{2}{3}}} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x \cdot \left[\left(\frac{x}{u} \right)^2 + 1 \right]} \cdot J_0\left(\frac{Dx}{\omega} \right) dx \quad 7.68d$$

Detta kan också skrivas:

$$\chi = \frac{P}{\pi (DR^2)^{\frac{1}{3}}} S_3(b, u) \quad 7.68e$$

där:

$$S_3(b, u) = u^2 \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x(x^2 + u^2)} \cdot J_0\left(\frac{bx}{u} \right) dx$$

Låt oss specialisera oss på att beräkna momenten under lastens centrum. Det är dessa storheter som är mest intressanta. Det största momentet bör rimligtvis uppträda mitt under lasten, vilket räkningar visar att det gör.

$$\left[M_r = -D \cdot \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right] \right. \quad 5.24$$

$$\left. M_t = -D \cdot \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right] \right] \quad 5.25$$

$$\nu = 0$$

$$\left[M_r = -D \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right. \quad 5.24b$$

$$\left. M_t = D \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right] \quad 5.25b$$

Observera nu att:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{R}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial R}$$

så att med:

$$\chi = \frac{P}{\pi (DR^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot S_3(b, \omega) \quad 7.68e$$

fås:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = \left(\frac{R}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{P}{\pi (DR^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial b} = \dots$$

$$\dots = \frac{P}{\pi (RD^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial b}$$

$$D = \frac{r}{L} \quad ; \quad L = \left(\frac{D}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow r = LB$$

$$M_t = D \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r}$$

$$\rightarrow M_t = D \left(\frac{R}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{D} \cdot \frac{P}{\pi (D^2 R)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial b}$$

$$\rightarrow M_t = \frac{P}{\pi D} \frac{\partial S_3}{\partial b} \quad 7.69$$

samt:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = \left(\frac{R}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{P}{\pi (D^2 R)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial^2 S_3}{\partial b^2} = \dots$$

$$\dots = \frac{P}{\pi D} \cdot \frac{\partial^2 S_3}{\partial b^2}$$

$$M_r = -D \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}$$

$$\rightarrow M_r = -D \frac{P}{\pi D} \frac{\partial^2 S_3}{\partial b^2}$$

$$\rightarrow M_r = -\frac{P}{\pi} \cdot \frac{\partial^2 S_3}{\partial b^2} \quad 7.70$$

Beräkna nu derivatorna av $S_3(b, \omega)$

$$S_3(b, \omega) = \omega^2 \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2(x^2 + \omega^2)} J_0\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx \quad 7.71$$

då fås:

$$\frac{\partial S_3}{\partial b} = \omega^2 \cdot \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x(x^2 + \omega^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial b} J_0\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx = \dots$$

$$\dots = \omega^2 \cdot \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x(x^2 + \omega^2)} \cdot \frac{x}{\omega} \cdot \left[-J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) \right] dx = \dots$$

$$\dots = \omega \cdot \int_0^\infty \frac{-x J_1(x)}{x(x^2 + \omega^2)} J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx = \dots$$

$$\dots = -\omega \cdot \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2 + \omega^2} J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx \quad 7.72$$

samt:

$$\frac{\partial^2 S_3}{\partial b^2} = -\omega \cdot \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2 + \omega^2} \frac{\partial}{\partial b} J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx = \dots$$

$$\dots = -\omega \cdot \int_0^\infty \frac{J_1(x)}{x^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\omega} \cdot \left[J_0\left(\frac{bx}{\omega}\right) - J_2\left(\frac{bx}{\omega}\right) \right] dx = \dots$$

$$\dots = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x \cdot J_1(x)}{x^2 + \omega^2} \cdot \left[J_0\left(\frac{bx}{\omega}\right) - J_2\left(\frac{bx}{\omega}\right) \right] dx \quad 7.73$$

Här har vi använt:

$$\begin{cases} 2J'_p = J_{p-1} - J_{p+1} \\ J'_p = \frac{1}{2} [J_{p-1} - J_{p+1}] \end{cases}$$

Momenten ges av:

$$M_z = \frac{P}{\pi D} \cdot \frac{\partial S_3}{\partial b} \quad 7.69$$

$$M_r = -\frac{P}{\pi} \cdot \frac{\partial^2 S_3}{\partial b^2} \quad 7.70$$

$$u_t = -\frac{P}{\pi b \mu} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^3 + \mu^3} J_1\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx \quad 7.69b$$

$$u_r = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \mu^3} \left[J_0\left(\frac{bx}{\mu}\right) - J_2\left(\frac{bx}{\mu}\right) \right] dx \quad 7.70b$$

Nedböjningen ges av:

$$w = \frac{P\mu^2}{\pi(DR^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x(x^3 + \mu^3)} J_0\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx = \frac{P}{\pi(DR^2)^{\frac{1}{2}}} S_3(b) \quad 7.68$$

där:

$$S_3(b) = \mu^2 \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x(x^3 + \mu^3)} J_0\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx$$

Låt oss nu studera om nedböjningen, radiella moment och tangentiella moment har ändliga värden under lastens centrum.

* Nedböjningen:

Hur ser $\frac{\partial w}{\partial b}$ ut för $b=0$ det vill säga rakt under lastens centrum.

$$\frac{\partial w}{\partial b} = \frac{P\mu^2}{\pi(DR^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x(x^3 + \mu^3)} \frac{\partial}{\partial b} J_0\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx = \dots$$

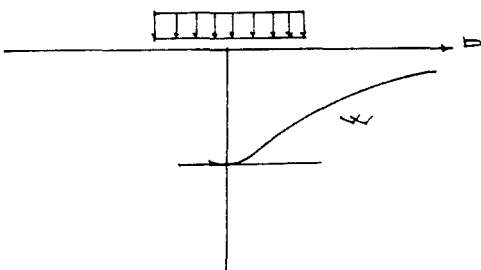
$$\dots = \frac{P\mu^2}{\pi(DR^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{-J_1(x)}{x(x^3 + \mu^3)} \left(\frac{x}{\mu}\right) J_1\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx = \dots$$

$$\dots = \frac{-P\mu}{\pi(DR^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^2 + \mu^3} J_1\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial b} \right|_{b=0} = 0$$

ty $J_1(0) = 0$

→ Horisontell tangent,



Figur 7.5 Nedböjning orsakad av lasten

* Radiella moment:

$$M_n = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{\partial^2 S_2}{\partial b^2} = \dots \quad 7.70$$

$$\dots \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x J_1(x)}{x^3 + \mu^3} J_0\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx - \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x J_1(x)}{x^3 + \mu^3} \dots$$

$$\dots J_2\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx$$

Hur ser $\frac{\partial M_n}{\partial b}$ ut för $b=0$ det vill säga rakt under lastens centrum.

$$\frac{\partial M_n}{\partial b} = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x J_1(x)}{x^3 + \mu^3} \cdot \frac{\partial}{\partial b} J_0\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx - \dots$$

$$\dots - \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x J_1(x)}{x^3 + \mu^3} \cdot \frac{\partial}{\partial b} J_2\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx = \dots$$

$$\dots = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x J_1(x)}{x^3 + \mu^3} \cdot \left(\frac{x}{\mu}\right) J_1\left(\frac{bx}{\mu}\right) dx - \dots$$

$$\dots = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x J_1(x)}{x^3 + \mu^3} \cdot \left(\frac{x}{2\mu}\right) \left[J_1\left(\frac{bx}{\mu}\right) - J_3\left(\frac{bx}{\mu}\right) \right] dx = \dots$$

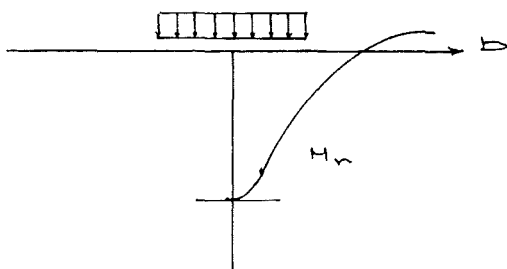
$$\dots = \frac{P}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{x^2 J_1(x)}{x^3 + \mu^3} \cdot \left[J_3\left(\frac{bx}{\mu}\right) - \frac{3}{2} J_1\left(\frac{bx}{\mu}\right) \right] dx$$

$$\left. \frac{\partial M_n}{\partial b} \right|_{b=0} = 0$$

ty:

$$\begin{cases} J_3(0) = 0 \\ J_1(0) = 0 \end{cases}$$

- Horisontell tangent i $b = 0$



Figur 7.6 Radiell momentfördelning orsakad av lasten

* Tangentiella moment:

$$M_t = \frac{-P}{\pi b} \frac{\partial S_3}{\partial b}$$

7.69

$$M_t = \frac{-P}{\pi b} \omega \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^3 + \omega^3} J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx$$

Hur ser $\frac{\partial M_t}{\partial b}$ ut för $b=0$ det vill säga rakt under lastens centrum.

$$\frac{\partial M_t}{\partial b} = - \frac{P\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^3 + \omega^3} \frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{1}{b} J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) \right] dx = \dots$$

$$\dots = - \frac{P\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^3 + \omega^3} \left[-\frac{1}{b} \left(\frac{x}{\omega}\right) J_2\left(\frac{bx}{\omega}\right) \right] dx = \dots$$

$$\dots = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \omega^3} \cdot \frac{1}{b} J_2\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx = \dots$$

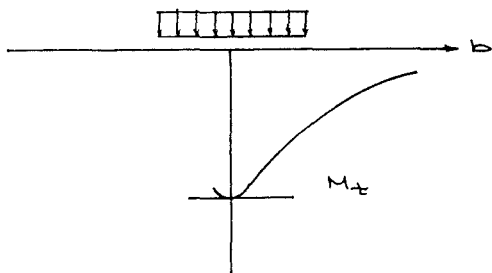
$$\dots = \left. \begin{array}{l} b \rightarrow 0^+ \\ J_n(x) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ n = 2 \\ J_2\left(\frac{bx}{\omega}\right) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{bx}{2\omega}\right)^2 = \frac{b^2 x^2}{8\omega^2} \end{array} \right\} = \dots$$

$$\dots = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \omega^3} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{b^2 x^2}{8\omega^2} dx = \dots$$

$$\dots = \frac{Pb}{8\pi\omega^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3 J_1(x)}{x^3 + \omega^3} dx$$

$$\left. \frac{\partial M_t}{\partial b} \right|_{b=0} = 0$$

- Horisontell tangent i $b = 0$



Figur 7.9 Momentfördelning orsakad av lasten

MOMENTAMPLITUDERNA I $b = 0$

Det gäller att:

$$\left[\begin{aligned} M_r &= \frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \omega^3} \left[J_0\left(\frac{bx}{\omega}\right) - J_2\left(\frac{bx}{\omega}\right) \right] dx & 7.70 \\ M_t &= \frac{D\omega}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^3 + \omega^3} J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx & 7.69 \end{aligned} \right.$$

Då fås:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \omega^3} \left[J_0\left(\frac{bx}{\omega}\right) - J_2\left(\frac{bx}{\omega}\right) \right] dx = \dots \\ &= \left. \begin{aligned} D < \infty \\ J_0\left(\frac{bx}{\omega}\right) &\sim \left(\frac{bx}{\omega}\right)^0 = 1 \\ J_2\left(\frac{bx}{\omega}\right) &\sim \frac{1}{2} \left(\frac{bx}{\omega}\right)^2 = \frac{b^2 x^2}{8\omega^2} \end{aligned} \right\} = \dots \\ &= \frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \omega^3} \left[1 - \frac{b^2 x^2}{8\omega^2} \right] dx \rightarrow \dots \\ &\rightarrow \frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \omega^3} dx \quad ; \quad D \Delta \quad D \rightarrow 0 \end{aligned}$$

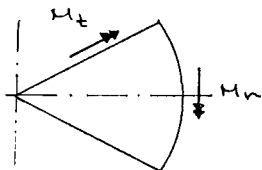
$$\begin{aligned} M_t &= \frac{D\omega}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^3 + \omega^3} J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) dx = \dots \\ &= \left. \begin{aligned} D < \infty \\ J_1\left(\frac{bx}{\omega}\right) &\sim \frac{bx}{2\omega} \end{aligned} \right\} = \dots \\ &= \frac{D\omega}{\pi b} \int_0^{\infty} \frac{J_1(x)}{x^3 + \omega^3} \cdot \frac{bx}{2\omega} dx = \dots \\ &= \frac{D}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \omega^3} dx \end{aligned}$$

alltså:

$$M_r = M_t \quad \text{då } b = 0$$

detta på grund av symmetriskäl.

Studera en cirkelsektor.

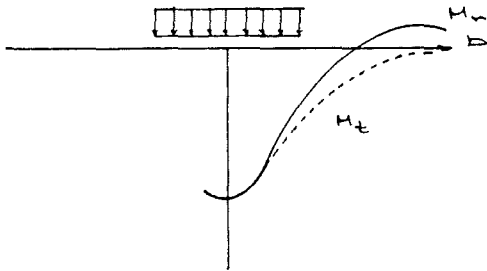


Figur 7.8 Cirkelsektor med radiellt och tangentiellt moment markerat

Krymp nu cirkelsektorn så att dess radie går mot noll och låt den svepa ett helt varv. Då finner vi att:

$$M_t = M_r \quad ; \quad D = 0$$

Momentfördelningen bör då se ut enligt följande:



Figur 7.7 Tangentiell momentfördelning orsakad av lasten

Båda momenten har lokala maxima i $b = 0$. Dessa kan beräknas enligt följande:

$$M_r^{\max} = M_t^{\max} = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{x J_1(x)}{x^3 + \nu^3} dx \quad 7.73$$

Dessa moment, speciellt M_t^{\max} , är dimensionerande moment för huvudarmeringen. Integralen beräknas numeriskt för ett antal ν , därefter plottas $\frac{M^{\max}}{P}$ som funktion av ν , se diagram 7:5. Vi skisserar även $\frac{M}{P}$ som funktion av b för några ν , se diagram 7:6. Noggrannheten har vi gett avkall på, det är bara det principiella utseendet som är intressant. Om den belastade ytan inte är cirkulär så kan den ersättas med en cirkulär yta med samma area.

Exempel: Kvadrat

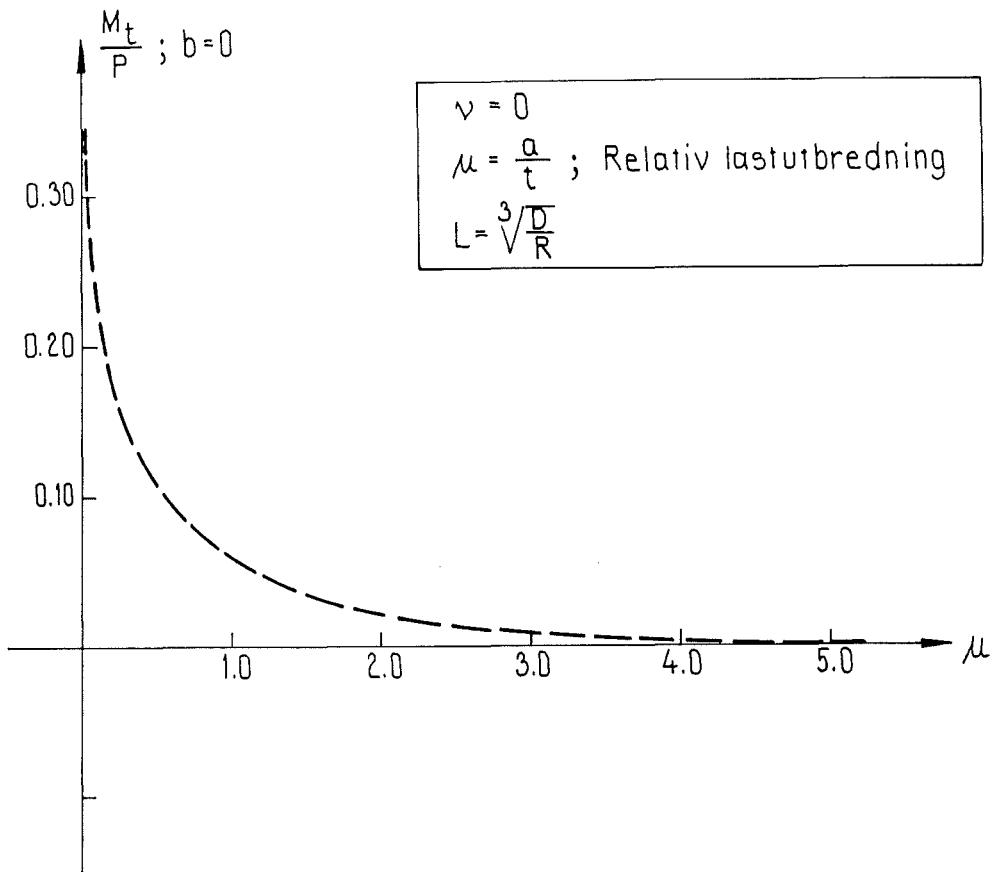
Sidlängd = L

$$\rightarrow L^2 = \pi a^2$$

$$\rightarrow a \approx 0.57L$$

$$\rightarrow \nu \approx 0.57 \frac{H}{L}$$

7.74

Diagram 7.5 M/P som funktion av b

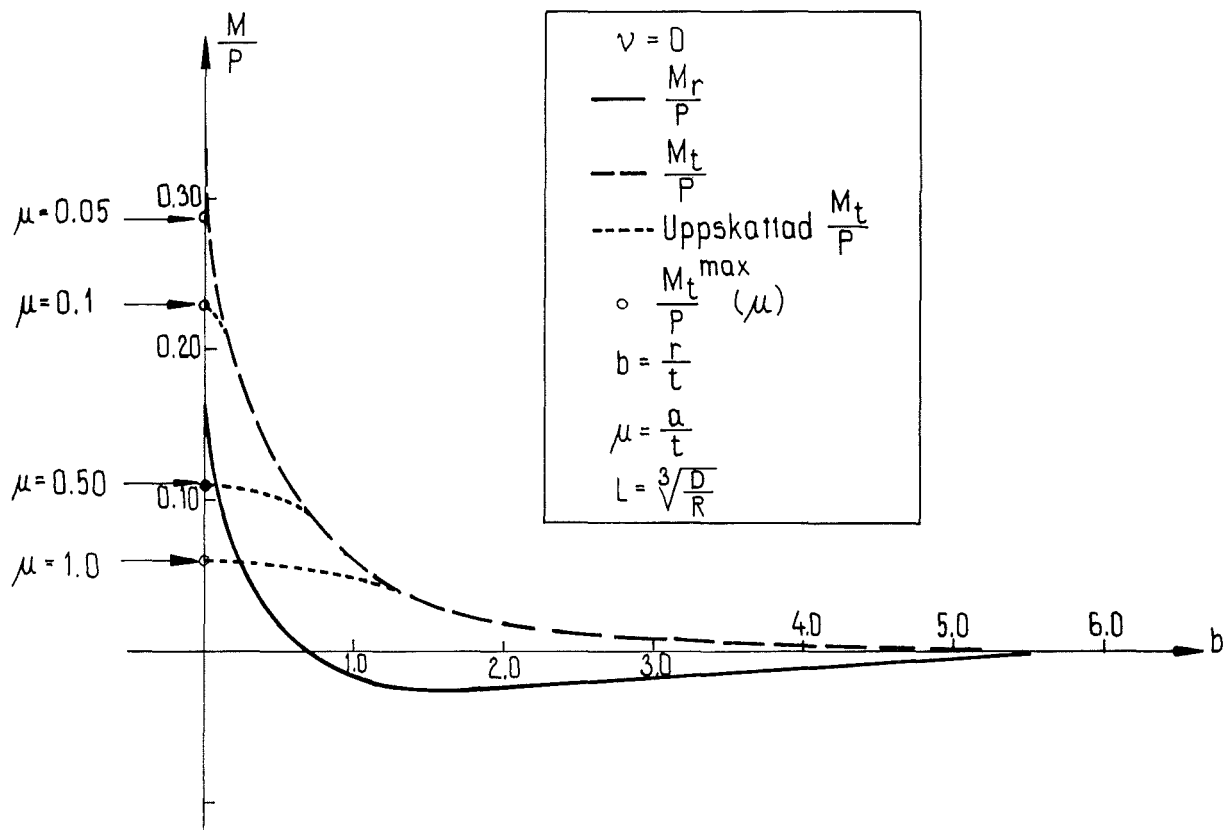


Diagram 7.6 M/P som funktion av $b = 0$

8 SAMVERKAN MELLAN TVÅ LASTER

Vi ska här studera vad som händer då två laster samverkar, det vill säga är placerade på ett inbördes avstånd d .

Metoden baseras på beräkningar av nedböjningar och moment enligt elastiska halvrummet. Då både plattan och undergrunden antas lineärt elastiska, kan direkt superposition användas. Resultaten visas direkt i diagramform.

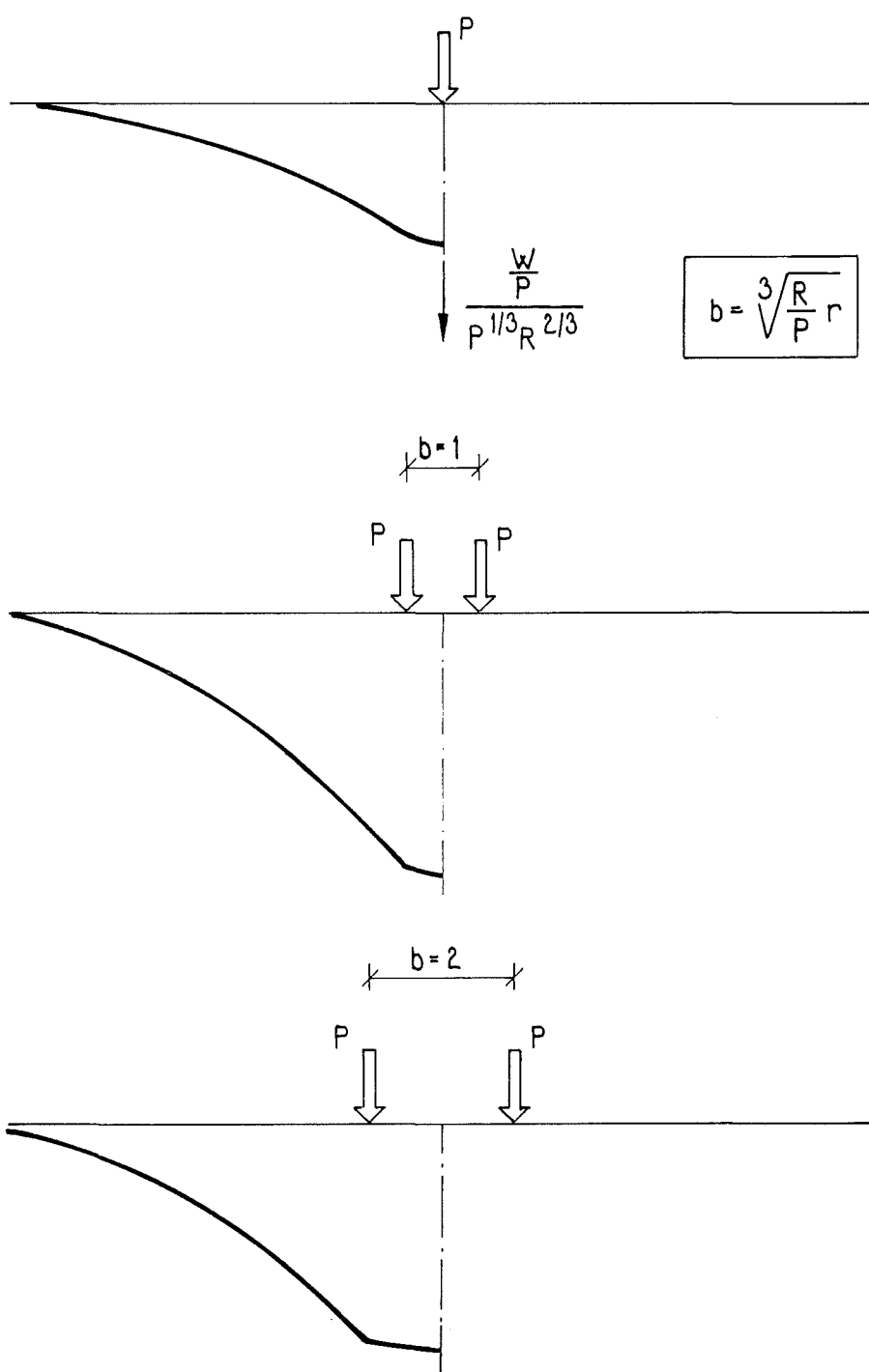


Diagram 8.1, 8.2 och 8.3 Deformation vid samverkan mellan två laster

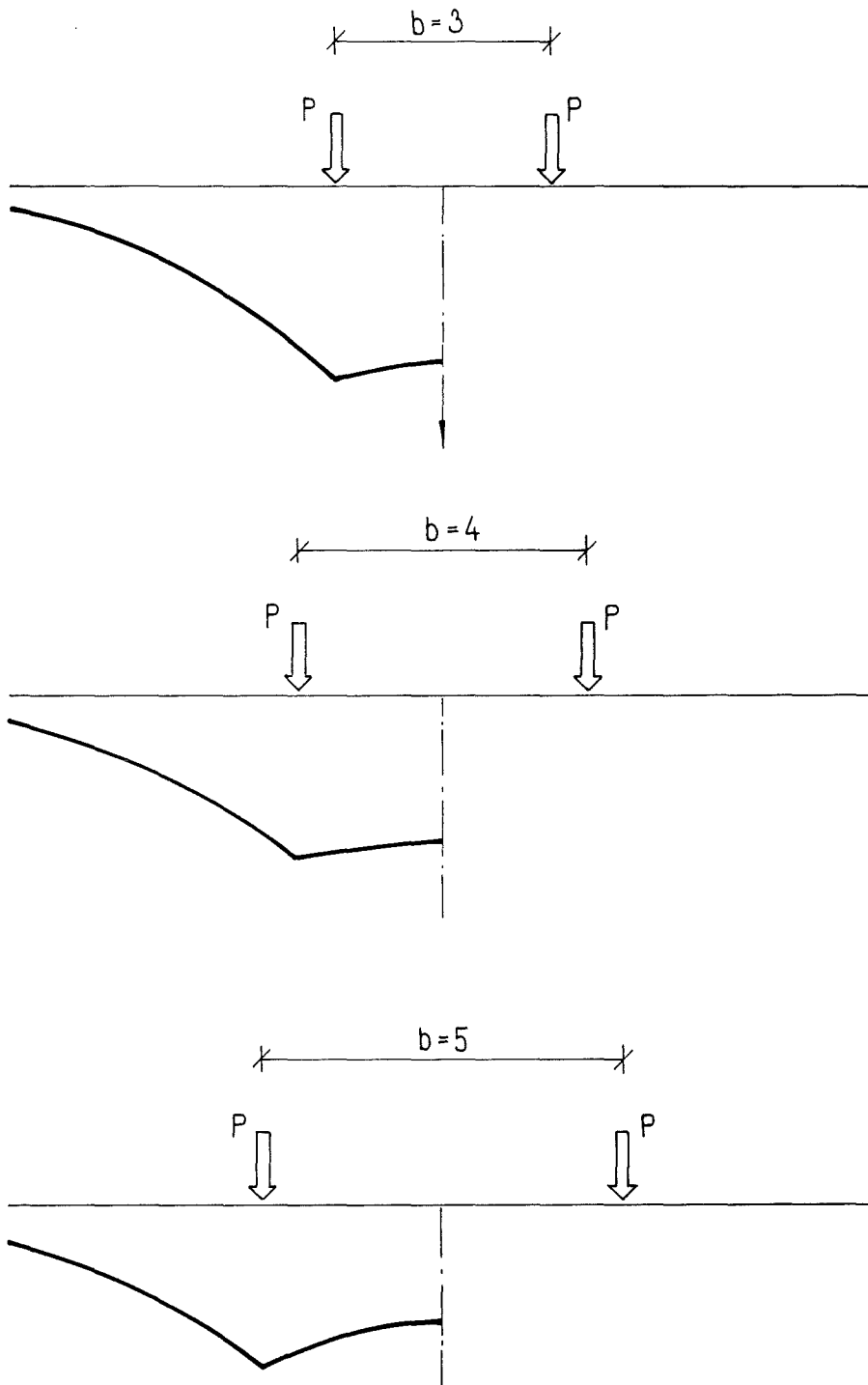


Diagram 8.4, 8.5 och 8.6 Deformation vid samverkan mellan två laster

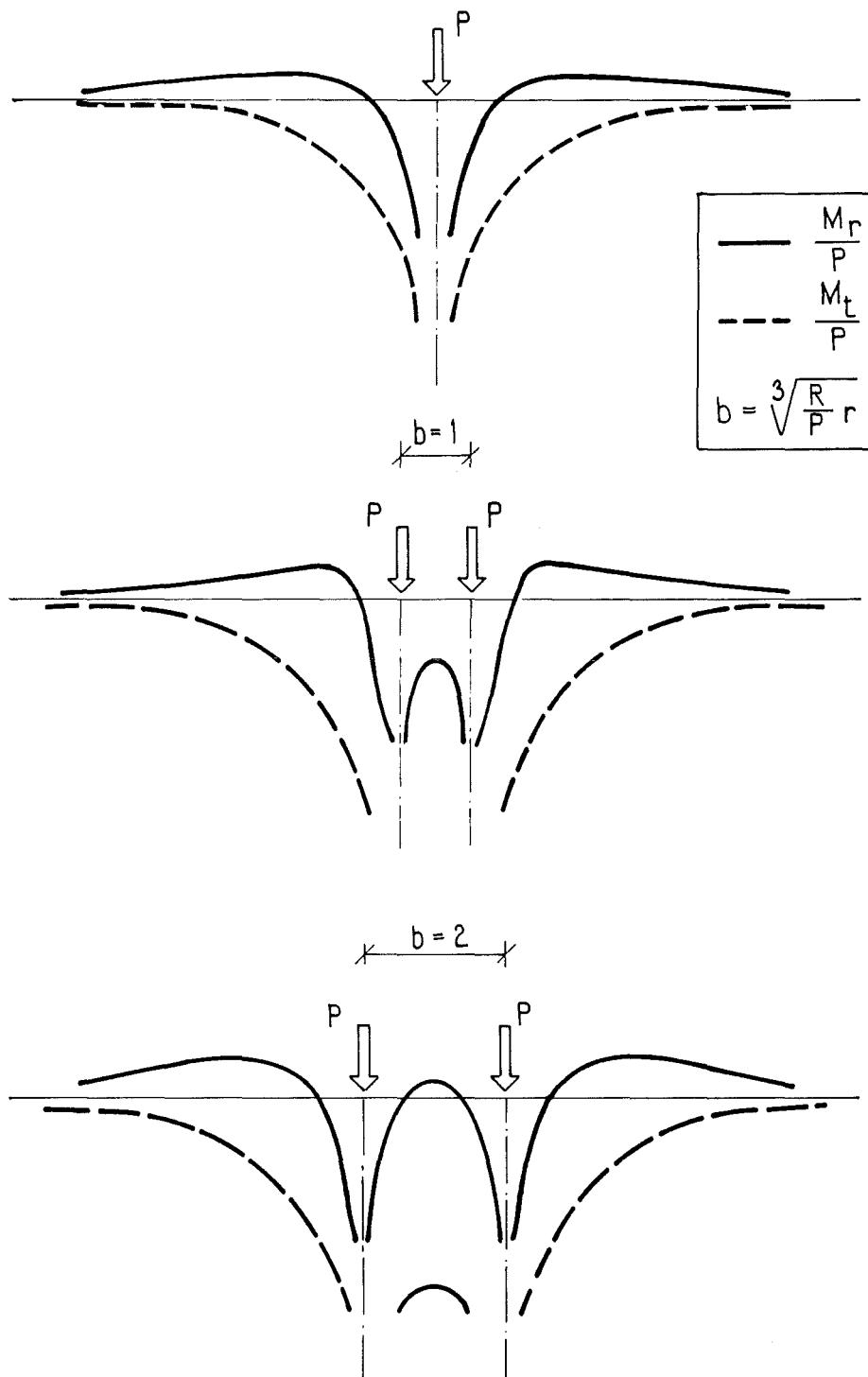


Diagram 8.7, 8.8 och 8.9 Momentfördelning vid samverkan mellan två laster

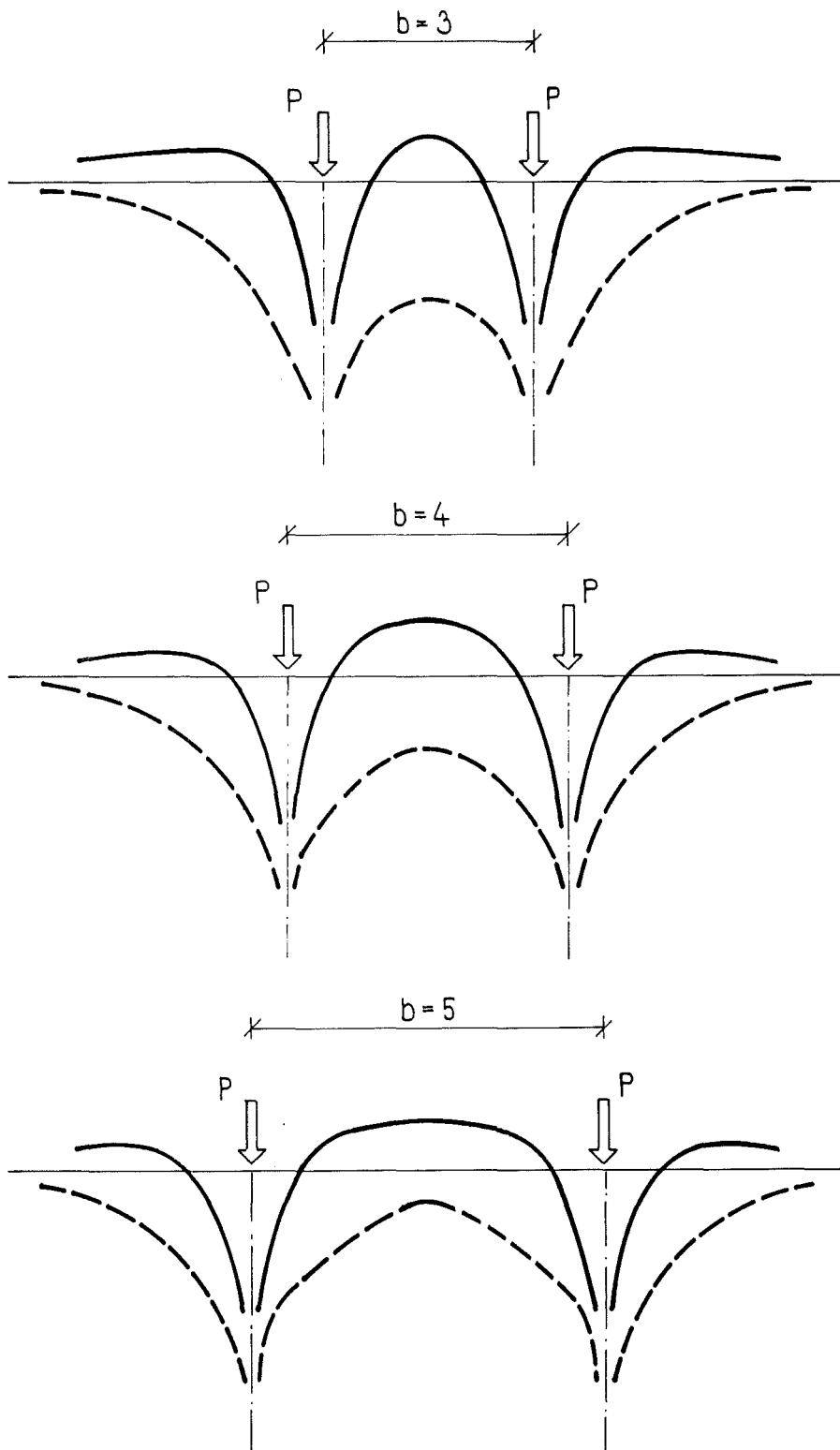


Diagram 8.10, 8.11 och 8.12 Momentfördelning vid samverkan mellan två laster

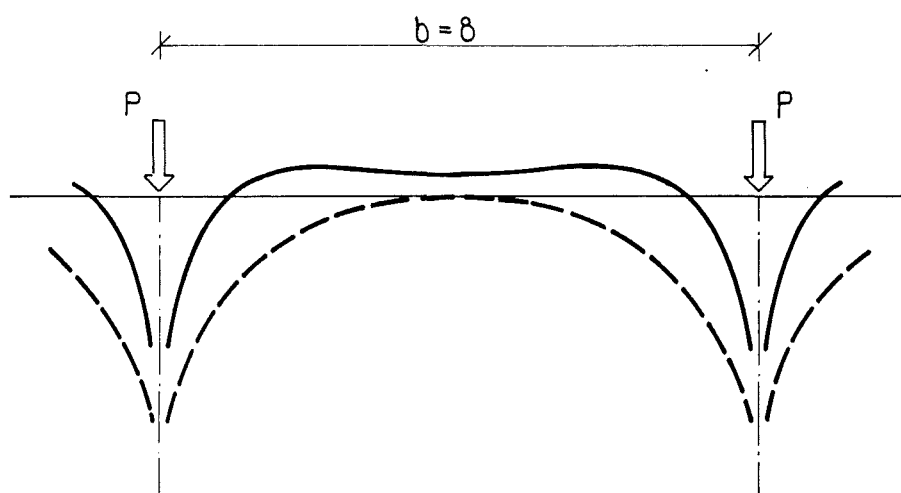


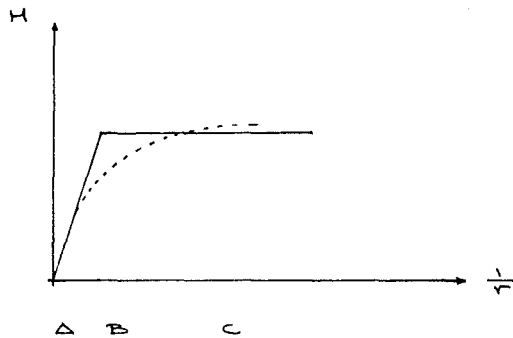
Diagram 8.13 Momentfördelning vid samverkan mellan två laster

Resultatet av den här beräkningen presenteras i föregående diagramserie. Nedböjningskurvorna är av mindre intresse. Momentdiagrammen däremot är mycket intressanta. Lasterna placeras på ett inbördes avstånd b där $\nu = 1, 2, 3 \dots$. Vi ser att för avstånd större än $2b$ fås ett positivt radiellt moment mellan lasterna. Detta ger upphov till sprickbildning mellan lasterna. Det är också intressant att se att M_r har maximum för $d = 4b$, där momentet ges av $M_r / P = 0.04$. Om avståndet mellan lasterna överstiger $12b$ kan man studera varje last separat, man behöver alltså inte superponera inverkan av de båda lasterna.

9 MATERIALET ARMERAD BETONG

9.1 EGENSKAPER HOS ARMERAD BETONG

Den armerade betongens egenskaper kan lättast åskådliggöras genom en generell arbetskurva, figur 9.1.



Figur 9.1 Generell arbetskurva för betong

△ : Elastiskt område

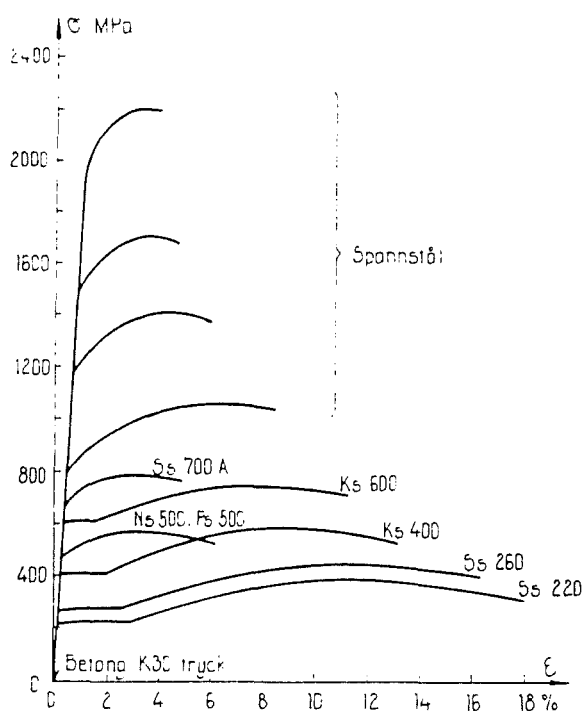
⊖ : Uppsprickningsområde

∩ : Plasticering, armeringen flyter och betongen krossas

De olineära egenskaperna orsakas framförallt av sprickbildning och flytning i armeringen. Även sådana fenomen som överskriden vidhäftningsförmåga och dymlingsverkan bidrar. Det finns dessutom en rad tidsberoende faktorer som krympning, krypning och temperaturdifferenser som påverkar processen olineärt. I de modeller som presenteras senare har tonvikten lagts på krympning, plasticering och sprickbildning.

9.2 SPÄNNINGS-TÖJNINGSDIAGRAM FÖR STÅL

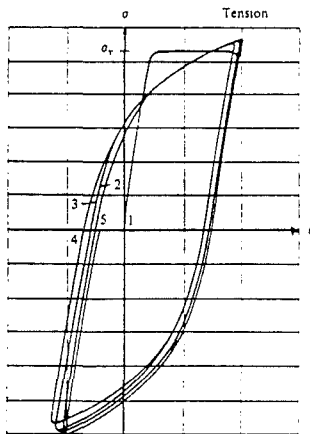
Några typiska arbetskurvor för armeringsstål redovisas i följande diagram, figur 9.2.



Figur 9.2 Arbetskurvor för armeringsstål

Det gäller dessutom att arbetskurvorna för dragning och tryck är identiska. Om belastningen påföres snabbt ökas sträckgränsen. En ökning på 14% har uppmätts vid en töjningshastighet på 0.01 s^{-1} .

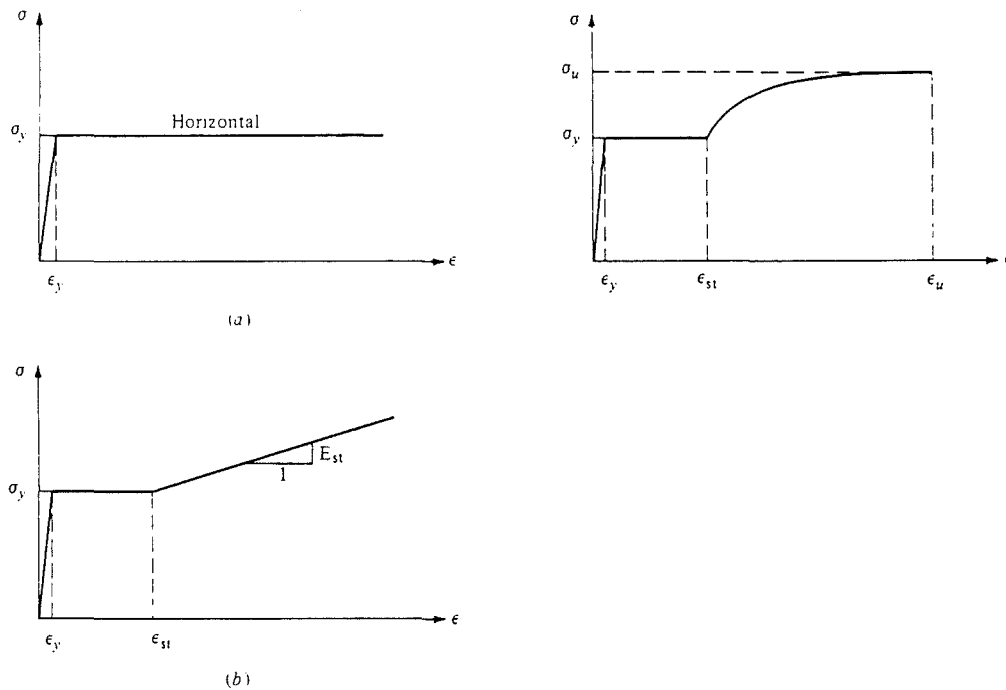
Arbetskurvan för stål ändras radikalt vid upprepade belastningar över sträckgränsen. Den mest påtagliga effekten blir att flytplatån försvinner och materialet visar flera tecken på icke-lineärt beteende, figur 9.3.



Figur 9.3 Arbetskurva vid upprepade belastningar

MODELL

Armeringen i en platta är nästan alltid belastad i längsled, därför räcker det att vår modell är endimensionell. På något sätt måste ändå arbetskurvan idealiseras. Några exempel på tänkbara approximationer visas i figur 9.4.



Figur 9.4 Idealiseringar av arbetskurvan

9.3 MATERIALET BETONG

Betong tillhör materialgruppen kompositer, där olika beståndsdelar blandas så att den resulterande produkten får önskade egenskaper. De olika komponenterna ingår inte i en kemisk förening utan kan urskiljas var för sig under materialets hela användningstid. Betong betraktas i regel som ett sprött material även om det visar en viss förmåga till plastisk deformation. Brottets karaktär beror inte enbart av materialet utan också av belastningens situation.

Vi ska här försöka sammanfatta betongens olika egenskaper, dels under axiella (vanligast) och dels under biaxiella belastningsförhållande.

AXIELLT BETEENDE

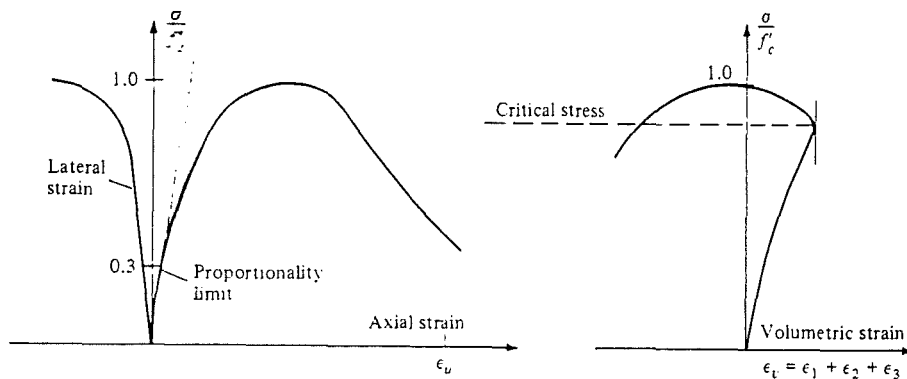
Tryckprov:

Ett typiskt samband mellan spänning och töjning visas i figur 9.5. Det råder ett lineärt förhållande mellan spänningar och töjningar upp till 30% av brottspänningen.

$$\sigma = E_0 \cdot \epsilon$$

Mellan $0.30 f_{\text{cck}}$ och $0.75 f_{\text{cck}}$ ökar krökningen måttligt men över $0.75 f_{\text{cck}}$ kröker kurvan betydligt snabbare och når sitt maximum vid ϵ_e . Därefter minskar spänningen med ökande töjning upp till ϵ_u .

Om töjningsinvarianten $\text{tr } \underline{E} = \epsilon_v$ plottas mot spänningen ser vi att ett lineärt samband råder upp till cirka $0.70 f_{\text{cck}}$, därefter börjar volymen hos betongkroppen att öka, figur 9.5.



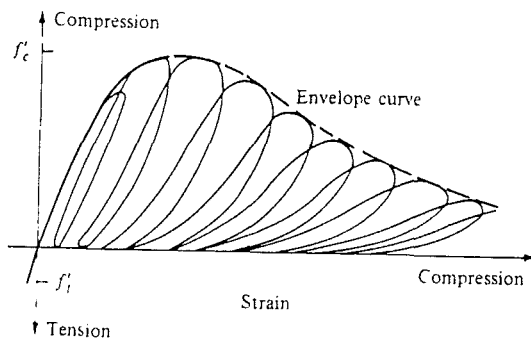
Figur 9.5 Tryckspänning som funktion av tvär-, axiell- och volymstöjning

Denna volymökning kan förklaras av att vid cirka $0.75 f_{cck}$ börjar vi få sprickbildning i betongen. För en spänning som understiger $0.30 f_{cck}$ ändras inte sprickbilden. Detta tyder på att den inre energin är mindre än den energin som behövs för att initiera sprickbildningen.

För en spänning mellan 30% och 50% av f_{cck} börjar de befintliga sprickorna sin spricktillväxt. Detta beror i huvudsak på spänningskoncentrationer i sprickspetsarna. Det råder här balans mellan den inre energin och sprickornas frigörelseenergi. Detta stadium brukar betecknas stabil spricktillväxt.

För spänningar mellan 50% och 70% av f_{cck} är den inre energin större än sprickornas frigörelseenergi vilket leder till att spricktillväxten blir instabil. Brott håller på att utbilda.

Om konstruktionen avlastas då spänningen är i intervallet $0.50 f_{cck} < \sigma < 0.75 f_{cck}$ erhålls vissa icke-lineära effekter. Då pålastning sker igen erhålls en hysteresformad arbetskurva, figur 9.6.



Figur 9.6 Hysteresformad arbetskurva

Den nu formade arbetskurvans elasticitetsmodul överensstämmer mycket bra med den ursprungliga. Vid avlastningar från spänningar över $0.75 f_{ck}$ erhålls stora icke-lineära effekter, det vill säga materialegenskaperna ändras markant vid stora belastningar.

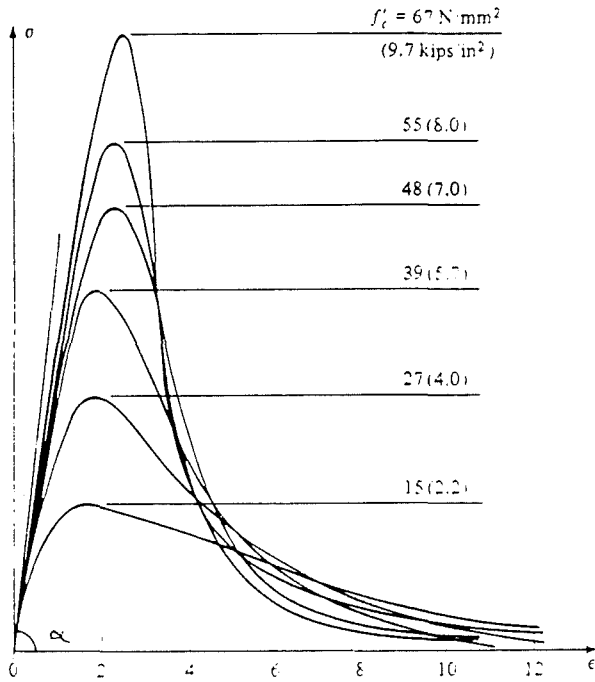
I området omkring f_{ck} uppstår ett primärt brott genom att sprickorna orsakar skador på materialets inre struktur.

ELASTICITETSMODUL

Betongens elasticitetsmodul är starkt avhängig av kubhållfastheten som principiellt visas i figur 9.7. Elasticitetsmodulen kan beräknas genom följande empiriska formel:

$$E_o = \text{konst} \cdot s^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho_{ck}} = \arctan \alpha \quad 9.1$$

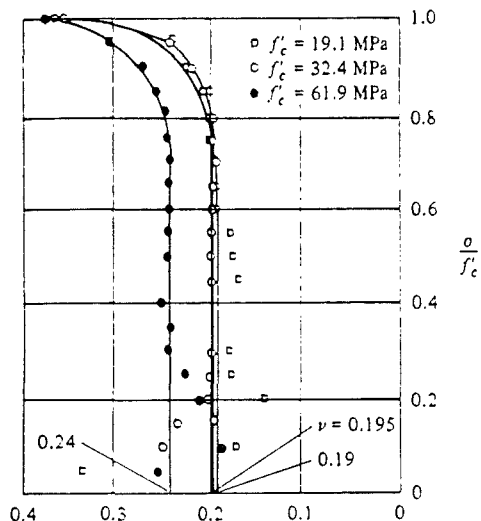
E_o kan motsvara E_{ck} i någon mån.



Figur 9.7 Arbetskurvor för betong

POISSONS TAL

Poissons tal för betong under axiell tryckbelastning varierar mellan 0.15 och 0.22, ett representativt värde är 0.19 eller 0.20. Vid axiell belastning är Poissons tal konstant upp till cirka 80% av f_{ccm} därefter börjar Poissons tal att öka. I den instabila krossningsfasen överstiger Poissons tal 0.5, se figur 9.8.



Figur 9.8 Relationen mellan spänningsförhållandet och Poissons tal

DRAGPROV

Man kan räkna med att inga sprickor uppstår i dragzonen så länge spänningen underskrider $0.60 f_{ccw}$. Därefter sker sprickbildningen mycket snabbt. Detta beror på materialets inre struktur och vi berör det inte djupare.

För varje dragspricka som uppstår reduceras den lastbärande arean. Detta leder till ökade spänningar i sprickspetsarna, vilket i sin tur leder till ökad spricktillväxt. Rent generellt kan man säga att:

$$f_{cth} = \text{konst} \cdot \sqrt{f_{ccw}} \quad 9.2$$

Betong kan uppta mycket mindre dragpåkänningar än tryckpåkänningar:

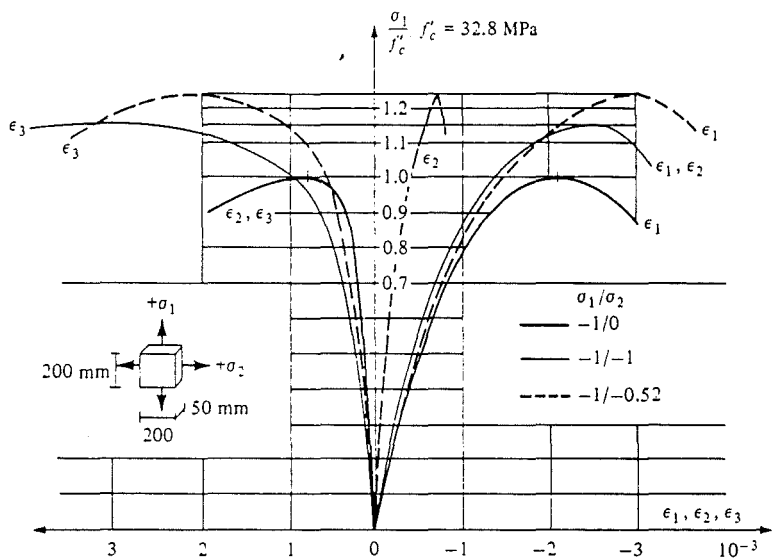
$$\frac{f_{ctw}}{f_{ccw}} = [0.05, 0.15] \quad 9.3$$

där den lägsta kvotdelen representerar betong med hög kubhållfasthet.

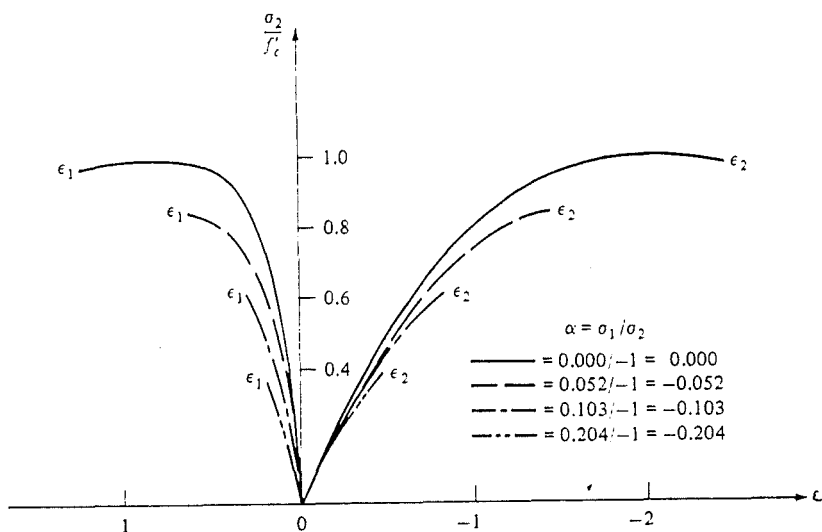
BIAXIELLT BETEENDE

På senare år har mycket arbete lagts ner på att studera betong under biaxiella förhållande, detta motsvarar plana tillstånd och är passande att arbeta med då man studerar tunna plattor. I dagens läge finns stora mängder data som underlag för metoden. Figurerna 9.9, 9.10 och 9.11 visar typiska experimentella spännings- töjningskurvor för betong utsatt för:

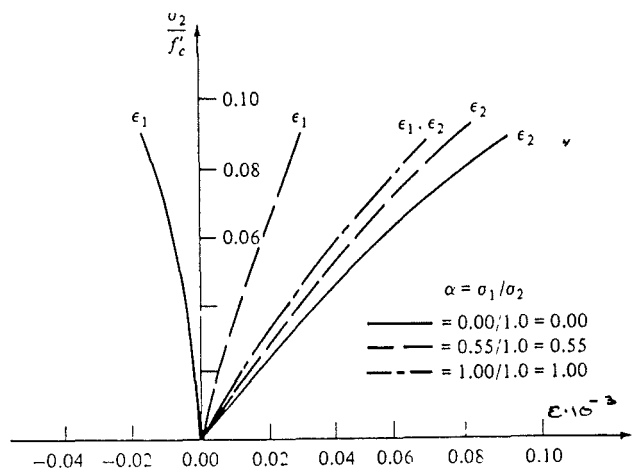
- * Biaxiell kompression figur 9.9
- * Biaxiell dragning-kompression figur 9.10
- * Biaxiell dragning figur 9.11



Figur 9.9 Biaxiell kompression



Figur 9.10 Biaxiell dragning-kompression

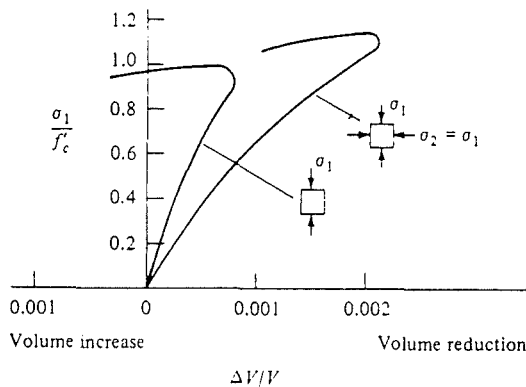


Figur 9.11 Biaxiell dragning

För det första ser vi att den maximala tryckspänningen ökar under biaxiell kompression. Den största spänningen ökar med cirka 25% vid ett spänningsförhållande $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 0.5$ och reduceras med cirka 16% då spänningsförhållandet är $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1.0$.

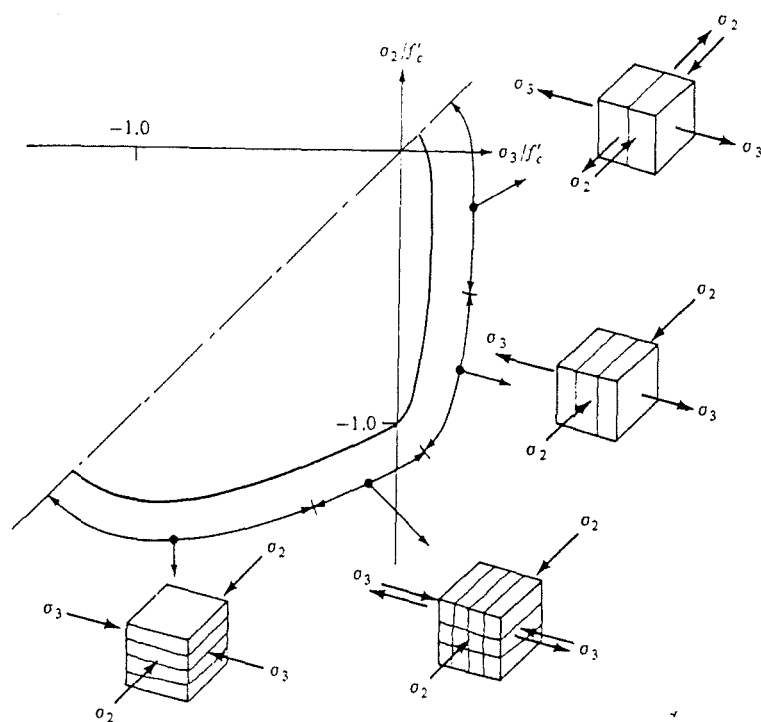
För det andra lägger vi märke till att betongens duktilitet vid biaxiell belastning är beroende av om spänningstillståndet ger upphov till drag eller tryckspänningar. Duktiliteten ökar mer under biaxiellt spänningstillstånd relativt axiellt spänningstillstånd.

För det tredje noterar vi att när vi närmar oss brott erhåller vi en volymökning under det att tryckspänningarna fortsätter att öka. Detta beror i huvudsak på spricktillväxt. Se figur 9.12.



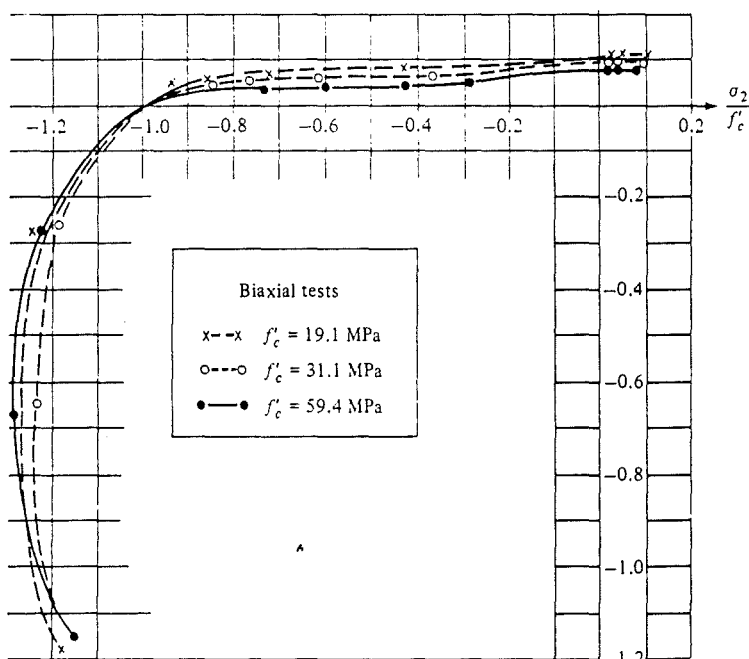
Figur 9.12 Förhållandet mellan tryckspänningar och betongvolymen

För det fjärde ser vi att brott orsakas av klyvning vinkelrät mot riktningen hos den största dragspänningen, figur 9.13. Töjningarna har stor betydelse för brottmekanismen.



Figur 9.13 Brottanvisningar vid biaxiellt belastad betong

För det femte lägger vi märke till att spänningsenvelopen verkar vara helt oberoende av lastväg, figur 9.14.



Figur 9.14 Spänningsenvelopen för biaxiellt belastad betong

EKVIVALENT SPÄNNINGS-TÖJNINGSSAMBAND

Vi kan omformulera det biaxiella spännings-töjningssambandet till ett ekvivalent axiellt spännings-töjningssamband genom att generalisera Saenz' ekvation:

$$\sigma = \frac{\alpha \cdot \epsilon}{1 + \left[\alpha \frac{\epsilon_P}{\sigma_P} - 2 \right] \frac{\epsilon}{\epsilon_P} + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_P} \right)^2} \quad 9.4$$

där:

σ = Huvudspänningar

ϵ = Huvudtöjningar

σ_P = Experimentiellt bestämt max-värde för huvudspänning

ϵ_P = Experimentiellt bestämt max-värde för huvudtöjning

α = Tangentmodul vid ($\epsilon=0$. $\sigma=0$)

Förutom ovanstående antas ett lineärt samband för dragspänningar. Ovanstående ekvation har en horisontell tangentmodul vid maximal spänning ($\epsilon_P \cdot \sigma_P$).

Denna ekvation överensstämmer med Saenz's ekvation i det elastiska fallet om:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = E_0 \\ (\epsilon_P \cdot \sigma_P) = (\epsilon_c \cdot \sigma_c) \end{array} \right.$$

Samhörande värde på ($\epsilon_P \cdot \sigma_P$) kan beräknas ur spänningsenvelopen.

$$\epsilon_P \approx 2.0 \cdot 10^{-3}$$

För ett lineärt elastiskt material gäller det att:

$$\sigma = \frac{E_0}{1 - \nu \alpha} \cdot \epsilon \quad 9.5$$

där:

E_0 = Tangentmodul

ν = Poissons tal

α = Kvoten mellan huvudspänningarna, beräknad så att huvudspänningen i den studerade riktningen står i nämnaren

Då kan vi sätta:

$$\alpha = \frac{E_c}{1 - \nu\alpha}$$

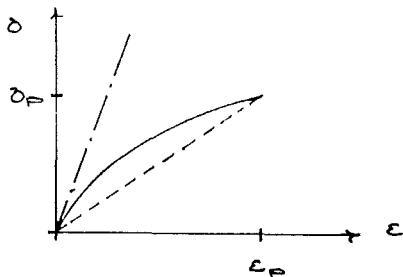
Saenz' generaliserade ekvation blir då:

$$\sigma = \frac{E_0 \varepsilon}{(1 - \nu\alpha) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{1 - \nu\alpha} \frac{E_0}{E_D} - 2 \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} \right)^2 \right\}} \quad 9.6$$

där:

$$E_D = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_P}$$

E_D = Sekantmodulen vid maximal spänning enligt figur 9.15.



Figur 9.15 Bestämning av sekantmodulen med hjälp av arbetskurvan

Den punkt där maximal spänning uppträder (ε_P, σ_P) är beroende av huvudspänningskvoten $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ samt av f_{cell} och ε_c . Värdet på de maximala huvudspänningarna betecknas σ_{1P} och σ_{2P} .

Huvuddragen i ovanstående teori syftar till att erhålla en ekvivalent enaxiell modell som baseras på biaxiellt beteende. Poissons tal antas vara 0.2 så länge spänningen understiger 80% av maxvärdet.

9.4 MATERIALMODELLER

Vad det gäller val av materialmodell visar det sig lämpligast att använda sig av den lineärt elastiska modellen. Andra modeller som bättre överensstämmer med materialets verkliga beteende kan naturligtvis också väljas men man får då vara medveten om de problem som uppstår:

- * Modellen blir matematiskt sett betydligt svårare att handskas med
- * Sambandet mellan spänningar och töjningar ligger på inkrementell nivå.
- * Analytiska metoder kan inte användas utan finita element metoden får tillgripas.
- * Någon form av tidsstegning får då användas beroende på att $d\delta = D d\epsilon$.
- * Vi måste bestämma innehållet i materialmatrisen. Teorier finns för själva utseendet men en mängd konstanter ska bestämmas, speciellt för undergrunden är detta ett problem.
- * Det är mycket arbetskrävande att modellera elastiska halvrummet med finita elementmetoden

Det mest svårbemästrade problemet är att bestämma korrekta värden på elementen i materialmatrisen. Blir inte materialmatrisen korrekt, är det ingen vinst att använda så avancerade modeller. För betongen kan vi finna flera olika D-matriser som fungerar bra. För undergrunden däremot är det svårare, här måste vi även beakta att undergrunden är inhomogen. Det behövs sålunda omfattande fältundersökningar för att kartlägga undergrundens egenskaper och dess utbredning. Vi anser att det ligger utanför vårt examensarbete att närmare fördjupa oss i detta, dessutom torde vinsten vara praktiskt taget obefintlig.

10 UNDERGRUNDEN

För plattor med ändlig styvhet beror kontaktryckets fördelning av plattans styvhet. Den hittills vanligaste metoden för beräkning av grundtryckets fördelning är bäddmodul teorin eller Winklermetoden. Man utgår från att jorden kan ersättas med fjädrar som verkar oberoende av varandra. Det beräknade kontaktrycket blir störst där plattans deformation är störst. Man antar i bäddmodul teorin att grundtrycket är direkt beronde av nedböjningen enligt.

$$\sigma = k \cdot w$$

σ = Grundtryck MPa
 k = Bäddmodul MPa/m
 w = Plattans nedböjning mm

Ovanstående anses gälla då grundtrycket understiger halva brottrycket.

Bäddmodul teorin kan speciellt vid kanter ge en felaktig grundtrycksfördelning. Orsaken till detta är ytbelastningens sidoeffekt, det vill säga någon form av reciprocitet. Denna sidoeffekt orsakas av att en belastning i en viss punkt på markytan också ger upphov till deformationer i närliggande punkter.

En annan viktig orsak till avvikelse mellan uppmätt värde och bäddmodul teorin är att kompressionsmodulen i allmänhet tillväxer med djupet.

För att beräkningarna skall bli korrekta erfordras att bäddmodulen ges ett korrekt värde. Detta visar sig i allmänhet vara mycket svårt, speciellt om jorden är skiktad.

Vid NORMALKONSOLIDERAD LERA blir totalsättningen oftast stor i förhållande till nedböjningsskillnaden mellan olika punkter i plattan. Då är det rimligt att anta att grundtrycket är jämt fördelat under plattan.

Vid STARKT ÖVERKONSOLIDERAD LERA (förkonsolideringstrycket överskrider ej av spänningar från total last) kan bäddmodulen beräknas ur sambandet:

$$k = \frac{100 \cdot \tau_{+L}}{B} \cdot \left(\frac{L + c \cdot E \cdot B}{1.5 \cdot L} \right) \quad 10.1$$

τ_{+L} = Lerans odränerade skjuvhållfasthet

B = Plattans bredd

L = Plattans längd

För FRIKTIONSMATERIAL kan man enligt Broms bestämma bäddmodulen ur sambandet:

$$k = c_0 \left(\frac{B - c \cdot B}{2H} \right)^2 \quad 10.2$$

c_0 = Bäddmodul för cirkulär platta med arean 0.10 m²

B = Plattans bredd

Broms anser dock att sättningarna överskattas.

JORDART	c_0 , beroende av lagringsförhållande		
	LÖST	MELLAN	FAST
TORR, FUKTIG SAND	13	40	150
SAND UNDER GRUNDEVATTENYTAN	8	25	100

Tabell 10.1 Bäddmoduler

Vesic ger (1961) ett analytiskt uttryck för bäddmodulen hos FRIKTIONSMATERIAL:

$$k = \frac{c \cdot c \cdot E}{B} \sqrt{\frac{E_D \cdot B^3}{E_B \cdot H_B}} \cdot \frac{E_D}{1 - \nu_D^2} \quad 10.3$$

E_p = Jordens elasticitetsmodul
 E_b = Plattans elasticitetsmodul
 I_b = Plattans tröghetsmoment
 B = Plattbredden
 ν_p = Poissons tal för jord

JORDTYP		E (MPa)
MORÄN	Lös ytmorän	10
	Övrig ytmorän	20
	Bottenmorän	50
GRUS	Fast lagrad	40
	Löst lagrad	10
SAND	Fast lagrad	20
	Löst lagrad	5
SILT	Fast lagrad	10
	Löst lagrad	2
LERA	Torrskorpelera	10
	Moränlera	10
PACKAD SPRÄNGSTENSFYLLNING		50
PACKAD MORÄN		30
PACKAD FRIKTIONSJORD		30
PACKAD FINJORD		10

Tabell 10.2 Elasticitetsmoduler

$$\mu = \frac{2G}{1 + \frac{2G}{\beta k}} \quad 10.4$$

$$\nu = \frac{1 - \frac{2G}{\beta k}}{2 + \frac{2G}{\beta k}} \quad 10.5$$

$$E = 2G(1 + \nu) \quad 10.6$$

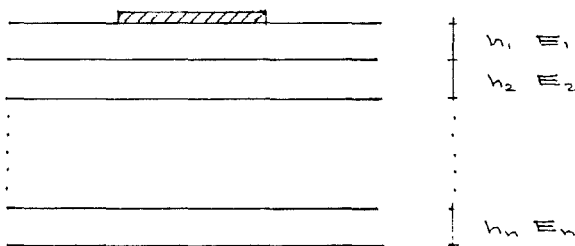
$$R = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \quad 10.7$$

k : Enligt tidigare

SKIKTAD UNDERGRUND

Enligt Beigler gäller:

$$\frac{1}{E_{gm}} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} h_j}{h_0 E_0} + \frac{n-1}{E_n} \right\} \quad 10.8$$



Figur 10.1 Skiktad undergrund

BÄDDMODUL

$$k = 1.3 \left(\frac{E_{gm}}{n_t} \right) \left(\frac{E_{gm}}{E_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} ; n_t = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \quad 10.9$$

Detta värde på bäddmodulen kan endast användas med stor försiktighet.

SAMBAND MELLAN E, ν OCH M

$$E = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \cdot M \quad 10.10$$

M = Kompressionsmodul

E = Elasticitetsmodul

ν = Poissons tal

11 KRYMPNING

11.1 BETONGENS KRYMPNING

Betongens krympning beror av många faktorer. De viktigaste är relativa fuktigheten i omgivningen, betongens sammansättning och behandling, konstruktionsdelens dimensioner samt betongens ålder efter gjutningstillfället.

I BBK anges följande värde på betongens slutkrympning för några olika fall vad gäller omgivningens fuktighet tabell 11.1:

RF	ϵ_{∞}
0,55	$400 \cdot 10^{-6}$
0,75	$250 \cdot 10^{-6}$
0,95	$100 \cdot 10^{-6}$

Tabell 11.1 Betongens slutkrympning

Dessa värden är tillämpbara i de flesta fall. I vissa fall, speciellt för en tunn platta som torkar ut snabbt kan följande metod användas:

$$\epsilon_s(t) = \epsilon_{\infty} \cdot (B(t) - B(t_0))$$

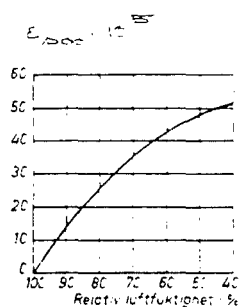
ϵ_{∞} = Slutkrympning

B = Tidsfaktor

t = Betongens ålder

t_0 = Betongens ålder vid den tidpunkt från vilken krympningen räknas

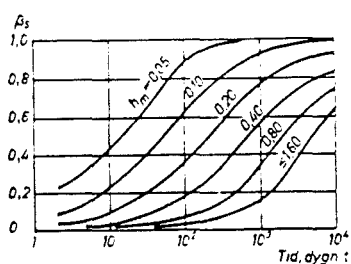
Värdet på slutkrympningen är i första hand beroende av omgivningens relativa fuktighet enligt figur 11.1.



Figur 11.1 Slutkrympningens beroende av relativa fuktigheten

För utomhuskonstruktioner och icke uppvärmda lokaler kan RF antas ha årsmedelvärdet 80%. För inomhuskonstruktioner, bostadshus, kontorshus och liknande där kontinuerlig uppvärmning sker kan relativa fuktigheten antas ha årsmedelvärdet 50%. För andra slag av lokaler, industrilokaler, sportshallar och dylikt blir ofta RF beroende av den verksamhet som bedrivs i lokalen

För konstruktioner tunnare än 100 mm sker krympningen under kortare tid än ett år. I sådana fall bör man bestämma värdet av på basis av andra värden på RF än årsmedelvärdet. Man kan till exempel dela in året i minst två delar (sommar och vinter) med olika värden på RF och tillämpa ovanstående ekvation på varje del.



Figur 11.2 Fuktövergångstalet β_s som funktion av tiden

Storleken på krympvärdena är också till stor del beroende av betongens sammansättning varvid vattenhalten synes vara den viktigaste faktorn. Då vattenhalten är ett olämpligt mått

kan i stället konsistens och ballastens grovlek användas. Ovanstående figur 11.2 gäller för trögflytande till plastisk konsistens och en maximal stenstorlek på 32 mm. Vid mera extrema förhållanden (lättflytande, maximal stenstorlek 10 mm) ökas slutkrympningen med 20%. Vid extrema förhållande åt andra hållet (styv, maximal stenstorlek 64 mm) minskas krympningen med 20%.

Tidsinverkan beror, förutom av tiden, av konstruktionens dimensioner på så sätt att en tunnare konstruktion krymper snabbare.

Konstruktionens teoretiska tjocklek definieras genom:

$$h_m = \frac{2A_c}{u}$$

A_c = Betongtvärsnittets area

u = Den del av tvärsnittet som är exponerad mot omgivningen

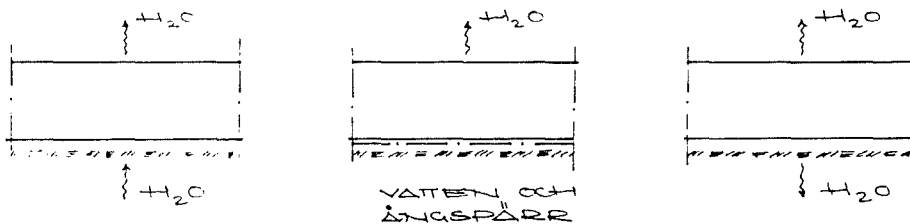
För plattor gäller att $h_m =$ tjockleken, β beror av h_m

11.2 KRYMPNING I BETONGGOLV

Den kunskap som finns om krympning hos betonggolv har till stora delar hämtats från de erfarenheter som har införskaffats via väg- och flygfältsbyggandet, det vill säga från hårt belastade utomhusbeläggningar. Vad det gäller uttorkningskrympningen för torrt liggande golv inomhus är den grovt räknat tre gånger så stor som för motsvarande golv i det fria. Därför är krympningen ett nyckelord för betonggolv inomhus. Krympningen utgör en bidragande orsak till kantresning och sprickbildning. Betongens krympning är främst en följd av cementpastans sammandragning när vattnet lämnar porsystemet.

GOLVGRUPPER MED AVSEENDE PÅ UTTÖRKNINGSMÖJLIGHETER

Då det nygjutna betonggolvet fukthärdats klart börjar uttorkningen och därmed uttorkningskrympningen. Uttorkningskrympningen börjar på översidan. Vad det gäller uttorkningsmöjligheterna på undersidan av betonggolvet kan följande indelning göras, figur 11.3.



Figur 11.3 Betonggolvet uttorkningsmöjligheter

Grupp: Förhållande vid golvets undersida:

- 1 Vatten kan tillföras
- 2 Vatten- och ångisolerat
- 3 Uttorkningsmöjlighet

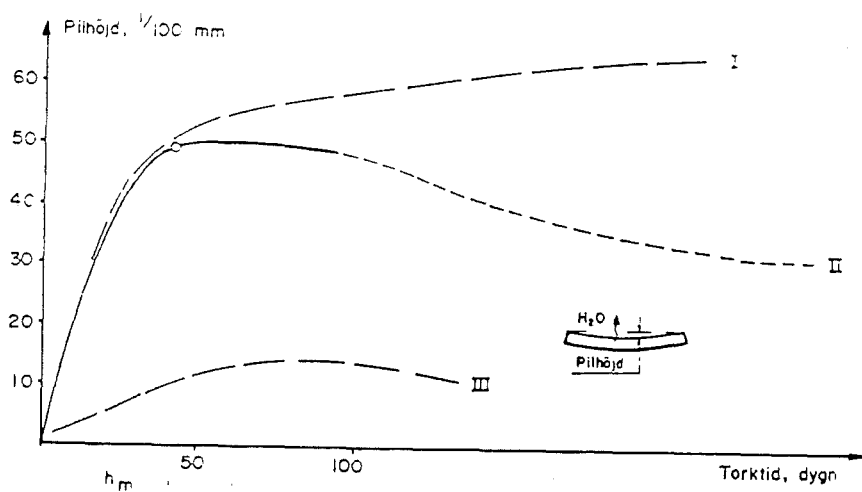
Grupp: Exempel:

- 1 Golv på mark
- 2 Golv på mark med diffusionstätt membran under golvet
- 3 Golv på isoleringsmaterial med ventilerad isolering

Golv på mycket torr mark sätts inom grupp 2, även om diffusionstätt membran inte finns.

OBEHINDRAD KRYMPNING-KRÖKNING

Det går att åstadkomma obehindrad krympning till exempel på en utskuren strimla av golvet. Strimlan förses med fuktisolering på snittytorna och har lämpligt arrangemang vid undersidan, som ser till att de önskade fuktförhållandena enligt gruppindelningen ovan gäller. I figur 11.4 kan resultatet av ett sådant försök avläsas.



Figur 11.4 Betongplattans krökning vid obehindrad krympning

Krympningen sker snabbast i översidan vilket ger upphov till krökning. För betonggolv med förhållanden vid golvets undersida enligt grupp 2, uppnår krökningen ett maxvärde efter en viss tid, h , och minskar sedan i viss omfattning (streckat parti). För grupp 1 blir krökningens maxvärde bestående. För grupp 3 fås ett mindre utpräglat maxvärde än för grupp 2.

Om vi gör antagandet att krympningen matematiskt anses ekvivalent med en diffusionsprocess, kan försöksresultatet av den typ som redovisas i figur 11.4 överföras till generell form. Efter matematisk förenkling av diffusionsekvationerna får vi följande resultat:

$$\text{För grupp 1:} \quad \Delta \epsilon_{DM} = \frac{\epsilon_{\infty}}{1 + \frac{k_D}{t \cdot f_D}} \quad 11.1$$

$$\text{För grupp 2:} \quad \Delta \epsilon_{DM} = \frac{0.95 \epsilon_{\infty}}{1 + \frac{2 \cdot k_D}{t \cdot f_D}} \quad 11.2$$

$$h_m = 0.2 t^2 \left(\frac{1}{2.5 k_D} + \frac{1}{f_D t} \right) \quad 11.3$$

Generellt gäller:

$$r_D^{-1} = \frac{\Delta \epsilon_D}{t} \quad 11.4$$

där:

t = Golvtjocklek

h_m = Uttorkningstid fram till maximal krökning

r_D = Krökningsradie

k_D = Materialkonstant, se vidare i texten

f_D = Materialkonstant, se vidare i texten

ϵ_{∞} = Betongens krympning efter oändligt lång tid i aktuell omgivning

$\Delta \epsilon$ = Maximal skillnad mellan krympning i över- och underyta, differenskrympning. Krympningen över tvärsnittet har först lineariserats

$\Delta \epsilon_{\infty}$ = Differenskrampningen, allmänt värde

MATERIALKONSTANTERNA k_{∞} OCH f_{∞}

k_{∞} = Diffusionskonstanten vid krympning

f_{∞} = Övergångstalet mot omgivningen

Siffervärdena för k_{∞} och f_{∞} ligger mellan 1 och 10 om sorterna är centimeter och månad. Vid studerandet av olika försöksserier har följande värde antagits som karakteristiska:

$$k_{\infty} = 8.5 \text{ cm}^2 / \text{mån}$$

$$f_{\infty} = 2.5 \text{ cm} / \text{mån}$$

Siffervärdet för f_{∞} gäller för en fri, icke täckt yta. För dessa karakteristiska värden på f_{∞} och k_{∞} gäller att temperaturen är +20 C och den relativa fuktigheten är 50%, denna uttorkningsmiljö gäller även för de fortsatta beräkningen av ϵ_{∞} .

KORREKTIONSFAKTORER

Med en 150 × 150 mm provkropp tillverkad av betong med Slite standardcement och mellansvenska stenmaterial fås följande slutkrympning:

$$\epsilon_{\infty} = \frac{k_{\infty} \left(\frac{W}{1000} \right)^{1.7}}{1 + \frac{K_{\perp}}{80}} \cdot 10^{-3} \quad 11.5$$

där:

W = Vattenhalten i betongen, kg / m³, räknat på betongens kompaktdel

K_⊥ = Betongens hållfasthetsklass

För den ovan nämnda betongen och utan tillsatsmedel fås $k_{\infty} = 20$. Konstanten k_{∞} beror av mängden tillsatsmedel och vi får $k_{\infty} = 26$ för något av följande tillsatsmedel:

- * Lufttillsatsmedel som ger 4%-6% luft i betongen
- * Retarderande eller vattenreducerande tillsatsmedel i sådan mängd att cirka 10% vattenreduktion erhålls
- * Flyttillsatser

Vad det gäller flyttillsatsers inverkan på krympningen finns inget entydigt svar att få. Olika utredningar visar att krympningen i betongen kan minska, vara oförändrad eller öka vid användandet av flyttillsatser. Flertalet av utredningarna talar dock om en viss förhöjning av krympningen då flyttillsatser används. Detta konstaterande gör att vi rekommenderar att även använda $k_{\infty} = 26$ vid användandet av flyttillsatser.

Det bör noteras att betong med vattenreducerande tillsatsmedel och härmed lägre vattenhalt dock får en större krympning än betongen utan tillsatsmedel av samma hållfasthetsklass.

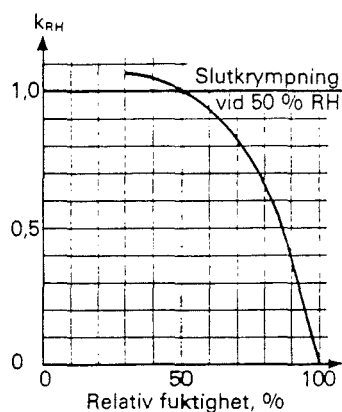
För varierande golvtjocklekar måste ϵ_{∞} korrigeras genom multiplikation med koefficienten, k_e , enligt tabell 11.2.

GOLVTJOCKLEK (mm)	k_e
25	1.25
50	1.00
75	0.90
100	0.80
125	0.70
150	0.60
175	0.50
200	0.40

Tabell 11.2 Korrektionsfaktor, k_e , för varierande golvtjocklekar.

Krympningsprocessen går långsamt. Man kan till exempel räkna med att den väsentligaste krympningen vid ostörd uttorkning ägt rum först vid en tidpunkt som motsvarar cirka 5 h

Miljön påverkar krympningen väsentligt. Ju lägre omgivningens relativa fuktighet är desto större blir betongens slutkrympning. För varierande värde på omgivningens relativa fuktighet måste slutkrympningen, ϵ_{∞} , korrigeras genom att multipliceras med faktorn k_{RH} i figur 11.5.



Figur 11.5 Relativa fuktighetens inverkan på slutkrympningen

VERKLIGA DEFORMATIONER

Tidigare har vi sett på obehindrad krympning, i verkligheten förhindras den obehindrade krympningen av en rad olika faktorer:

- * Armering
- * Underlag
- * Uppstickande rör, pelare, "förtagningar" vid dörrsmygar etc.
- * Egentyngd

Armeringens inverkan är av försumbar storlek vid de armeringsinnehåll vi rör oss med. Uppstickande rör, pelare etc

bör konstruktivt elimineras genom användandet av mjuka mellanläggsremsor eller dylikt. Här läggs tyngdpunkten på underlag och egentyngd. Vad det gäller kontakten mellan betonggolvs undersida och underlaget talas det om olika friktionskoefficienter beroende på underlaget. Följande värde på friktionskoefficienter erhålls enligt Buö (11):

GOLVETS UNDERLAG	FRIKTIONSKOEFFICIENT
Mineralullsmattor, små rörelser	0.5
Mineralullsmattor, stora rörelser Mineralullsskivor	1.0
Mark	1.5

Tabell 11.3 Friktionskoefficienter

Dragspänning beroende på friktionens inverkan på betonggolvet betecknas σ_{t1}

FÖRHINDRAD KRÖKNING, KANTRESNING

Vid stora utsträckta betonggolv pressar tyngden golvet mot underlaget och krökningen rätas ut. När vi studerar betonggolv kan vi anse att golvet inte kröker på områden med ett avstånd $x > x_r$ från närmaste momentfria kant. Med momentfria kant menas här genombrytande vägg, oarmerad fog eller spricka. x_r definieras enligt följande:

$$x_r = L + \frac{2.5}{\beta} \quad 11.6$$

L och β definieras nedan.

Inom detta plana parti har golvet ett närmast konstant moment.

$$M = M^*$$

Där M^* betecknar det moment som erfordras för att precis upphäva krökningen till följd av differenskrampningen:

$$M^* = - \frac{E_0 I}{r_D} = - \frac{E_0 I \Delta \epsilon_D}{t} \quad 11.7$$

Momentet ger anledning till lokal dragspänning i överytan:

$$\sigma_{t2} = \frac{\Delta \epsilon_D E_0}{2} \left(\frac{t}{t_{lok}} \right)^2 \quad 11.8$$

där:

$\Delta \epsilon_D$ = Differenskrampningen, med maxvärde $\Delta \epsilon_{DM}$

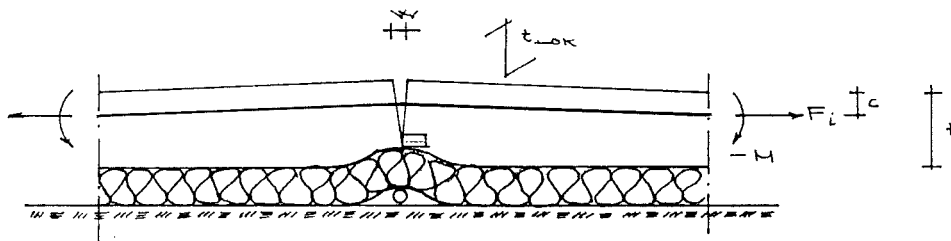
t = Den i stort gällande golvtjockleken

t_{lok} = Lokal golvtjocklek på det aktuella stället

$E_D = \frac{E_{ck}}{1+\phi}$ där: E_{ck} = Betongens karakteristiska elasticitetsmodul

$\phi = 1$ det vill säga vi antar mycket fuktig miljö

11.9



w = sprickbredd

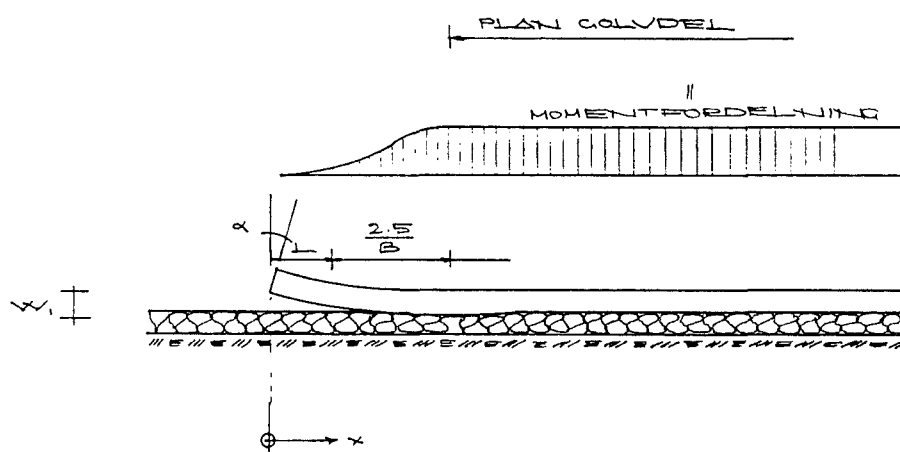
c = täcksikt + 1/2 armeringsdiameter

Figur 11.6 Armerat golv med spricka och tjockleksreduktion, här i anslutning till rördragning

Den lokala dragdeformationen, ϵ_z , motsvarande σ_{t2} är:

$$\epsilon_z = \frac{\Delta \epsilon_D}{2} \left(\frac{t}{t_{lok}} \right)^2 \quad 11.10$$

För avstånd $x < x_p$ minskar spänningarna gradvis mot noll vid momentfri kant, medan krökningen ökar mot värdet $1 / r_p$ vid kanten, som reser sig i förhållande till golvytan i övrigt. Se figur 11.7.



α = vinkeländring

w_1 = kantresning i förhållande till lågpunkten

Figur 11.7 Kantresning vid inverkan av differenskrypning

Hjälpvärden:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4E_0 I}} \quad 11.11$$

$$L^* = \sqrt{\frac{-2M'}{g}} \quad 11.12$$

där:

g = Golvets tyngd (kg / m^2)

I = Tröghetsmoment per meter av betonggolvet (m^4 / m)

k = Underlagets fjäderstyvhet (MPa / m)

Fjäderstyvheten för olika underlag varierar inom följande områden:

Mineralullsmattor och -skivor: $\kappa = 0.5-2.0$ MPa/m
 Mark : $\kappa = 10-200$ MPa/m

Villkor			w	w ₁	α	Rad nr
Verbalt formulering	Matematisk d:o	Område				
Anliggning mot underlag överallt			$= \frac{-M^*}{k_2 E_D l \beta^2} = \frac{\Delta \epsilon_s}{k_2 \beta^2 t}$ $k_2 =$	$= w_0 \cdot k_1$ $k_1 =$	$= \frac{-M^*}{E_D l \cdot \beta} = \frac{\Delta \epsilon_s}{l \beta}$	2 3
	$w_2 \leq \frac{10}{\kappa}$	$\begin{cases} l \beta \geq 5 \\ l \beta = 3 \end{cases}$	2 2.05	1.2 1.4		4
	$w_1 \leq \frac{10}{\kappa} \cdot \frac{2}{\pi}$	$l \beta < 3$		$\frac{\Delta \epsilon_s \cdot l^2}{8 \cdot t \cdot (1 + 0.003 (l \beta)^4)}$	$\frac{\Delta \epsilon_s \cdot l}{2 \cdot t \cdot (1 + 0.006 (l \beta)^4)}$	
Golvet lyfter sig från underlaget på längden L	$L = L^* - \frac{1}{\beta}$ $L \geq 0$	$(1 - 2L^*) \beta \approx 3$	$17.5 \cdot E_D \cdot \Delta \epsilon_s \cdot l^2 + \frac{g}{2 \kappa}$	$\approx w_0 + \frac{g}{\kappa} (k_1 - 1)$	$\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta \epsilon_s \cdot L^*}{t} + \frac{g \beta}{\kappa} \right)$	5
Speciellt för gransfallet styvt underlag	$\kappa \rightarrow \infty$	$\begin{cases} l > 2L^* \\ l < 2L^* \end{cases}$	$= \frac{\Delta \epsilon_s \cdot L^* \cdot l^2}{4t} = 17.5 \cdot E_D \cdot \Delta \epsilon_s \cdot l^2$ $\frac{\Delta \epsilon_s \cdot l^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{e} \left(\frac{l}{L^*} \right)^2 \right)$	$= w_0$ $= w_0$	$\frac{2 \cdot \Delta \epsilon_s \cdot L^*}{3t}$ $\frac{\Delta \epsilon_s \cdot l}{2t} \cdot \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{l}{L^*} \right)^2 \right)$	6 7

Tabell 11.4 Kantresningar för differenskrampningen

l = Total längd i betraktad riktning av den del som utgör ett kontinuerligt sammanhängande stycke, till exempel avståndet mellan två intilliggande fogar eller sprickor

VAD KAN VI GÖRA FÖR ATT UNDVIKA ELLER REDUCERA SPRICKOR OCH KANTRESNINGAR

* Välj tunnast möjliga golv. Kantresningen fördubblas exempelvis vid ändring från 5 till 10 centimeters golvtjocklek. Detta beror på att differenskrampningen, $\Delta \epsilon_{DM}$, är tjockleksberoende.

* Försök undvika att golvet har, eller genom sprickbildning får, momentfria kanter och hörn. Gjutskarvar och partier med rördragning eller andra tjockleksreduktioner utgör

potentiella ställen för sprickbildning. Momentöverföring efter sprickbildning tillförsäkras genom armering.

* Välj betong med låg vattenhalt efter bearbetningen, vilket kan uppnås på något av följande sätt:

- Grov ballast
- Styv konsistens
- Vakuumbehandling

SPRICKBILDNING I OARMERAT GOLV

Praktiskt taget alla flytande betonggolv är armerade. Armeringen ska vanligtvis läggas centriskt men hamnar i praktiken oftast nära undersidan. Det senare är att jämföra med ett helt oarmerat utförande med hänsyn till sprickbildning orsakad av differenskrämpning.

Sprickor uppträder enligt en spänningskriterieformulering när rådande spänning överskrider draghållfastheten, f_{ct} , under rådande klimat och villkor. Spänningskriterieformuleringen är direkt tillämpbar för effekten av last på golvet och för centriska krafter i anslutning till friktion mot underlag.

Spänningarna till följd av förhindrad krökning (ekv 11.8) innehåller två tidsfunktioner, $\Delta \epsilon_D$ och E_D . I någon mån är också böjdraghållfastheten, $f_{ct,t}$, en funktion av tiden. Spänningskriteriet för sprickbildning ersätts då med fördel av ett sprickbildningsdeformationskriterium:

$$\epsilon_k = \epsilon_{gr} \quad 11.13$$

ϵ_{ct} framgår av ekv 11.13. I tabell 11.5 finns värden på uppskattade. Värdena i tabell 11.5 är inte differentierade beträffande materialkvaliteter då detta visat sig svårt att

genomföra. Siffrorna ökar respektive minskar cirka 20% om golvtjockleken minskar till 25 mm respektive ökar till 10 mm.

UTVECKLINGEN AV DRAGTÖJNINGEN TAR I ANSPRÅK, DYGN	ϵ_{gr}
0	0.12
1	0.15
2	0.17
5	0.20
10	0.24
40	0.30

Tabell 11.5 Sprickkriterium, böjdragbrottöjning, ϵ_{gr} , för golvtjocklek cirka 5 centimeter

Den kritiska tiden för sprickbildning, h , infaller på grund av spänningsrelaxationer före den maximala kantresningen, Resultat har visat att vi kan anta följande ungefärliga förhållande mellan h_c och h_m : $h_c = \frac{2}{3}h_m$. Differenskrämpningen är vid denna tid oväsentligt lägre än sitt maximala värde det vill säga vi kan använda $\Delta\epsilon_D = \Delta\epsilon_{Dm}$ i våra ekvationer.

I praktiken är golven aldrig jämntjocka. Ofrivilliga tjockleksreduktioner förekommer exempelvis vid mjuka golvunderlag som packar sig ojämnt eller vid områdesvis vidhäftning till den betongavjämning som ibland används för att underlätta läggningen av det egentliga golvet. En annan orsak till att golven inte är jämntjocka är att rördragningar oftast ger markanta tjockleksreduktioner. ϵ_x kan till följd av sådana tjockleksreduktioner öka väsentligt och säkerheten mot sprickbildning reduceras. Vanligtvis förekommer samtidigt sådan inverkan, som bäst behandlas enligt spänningskriteriet. I brist på annan uppgift antas då sprickkriteriet

genom en lineärkombination. Ekv (11.13) ersätts alltså med det mer fullständiga sprickkriteriet:

$$\frac{\sigma_{t1}}{f_{ct}} + \frac{\sigma_{t2}}{f_{cbt}} + \frac{\epsilon_t}{\epsilon_{gr}} \leq 1 \quad 11.14$$

där:

f_{ct} = Draghållfastheten vid centrisk dragning i säkerhetsklass 1

f_{cbt} = Böjdraghållfastheten i säkerhetsklass 1

$$f_{cbt} = k \cdot \frac{f_{ct}}{\xi} \quad 11.15$$

där:

$\xi = 1$ för armerat golv

$\xi = 2$ för oarmerat golv

$$k = 0.6 + \frac{0.4}{\sqrt{h}}$$

h = Tvärsnittets totala höjd

Varje spricka utgör en ny momentfri kant i golvet. Förhindrad krökning förutsätts nedan vara enda anledningen till sprickbildning. För ett stort, jämntjockt, fogfritt och oarmerat golv på mjukt underlag med så stor krympskillnad mellan över- och undersida att sprickor med säkerhet uppstår, får ett avstånd mellan sprickorna på $(1.5 \text{ a } 3.0)/\beta$. På styvt underlag blir sprickavståndet $(0.9 \text{ a } 2.0) \cdot L'$. Gjutfogavståndet eller fackindelningen är i praktiken dock ofta bestämmande för sprickavståndet.

De största sprickbredderna sammanhänger med de största sprickavstånden. α -värdena i tabell 11.3 och under förutsättning att sprickorna sluter sig vid golvet under yta ger sprickbredden, w , enligt:

$$\text{Mjuka golvunderlag} \quad : \quad w_p = \frac{2\Delta\epsilon_s \cdot t_{lok}}{B \cdot t} \quad 11.16$$

(Mineralullsmattor och -skivor)

Styva golvunderlag (Mark) : $\chi_p = \frac{4}{3} \Delta \epsilon_D l^* \frac{t_{lok}}{t}$ 11.17

Om sprickor skulle bildas på områden med oreducerad golv-tjocklek, ersätts t_{lok} med t .

SPRICKBILDNING I ARMERAT GOLV

Sprickbildningen i ett armerat golv initieras som i ett oarmerat. Armeringens uppgift är att reducera både sprickbredder och kantresning i anslutning till sprickorna.

Någon allmänt accepterad uppfattning om armeringens sprickbegränsande effekt existerar inte när armeringsinnehållet är litet. Dock tyder erfarenheter inom branschen på att armeringen har sprickbegränsande effekt även då armeringsinnehållet är litet.

Med förutsättningar enligt figur 11.6 erhålls armeringsspänningen, σ_a :

$$\sigma_a = \frac{1}{A} \left\{ \frac{-M}{0.95(t_{lok}-c)} + F_i \left(1 - \frac{0.5t-c}{0.95(t_{lok}-c)} \right) \right\} \quad 11.18$$

Beteckningar enligt figur 11.6.

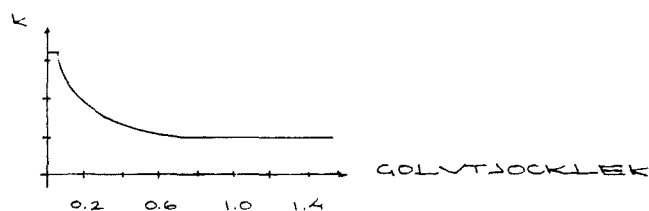
För fallet:

$$F_i = F_{max}$$

$$M_i = M_{cr} = \frac{1}{2} f_{ct} \cdot d \cdot k^2 \quad 11.19$$

k enligt figur 11.8

Detta är sprickmomentet för oarmerad platta, beräknat på basis av tjockleken t_{lok} .



Figur 11.8 Faktorn k beroende av golvtjockleken

Det är rimligt att fordra:

$$\sigma_a < f_y$$

eller:

$$\sigma_a < f_{0.2}$$

$f_y, f_{0.2}$ är flytspänningen respektive 0.2-gränsen för armeringen.

Krökningen till följd av krympdifferensen mellan över- och underkant av golvet upptas, dels som vinkeländring i fog eller spricka, dels som böjning i golvpartier däremellan. Uttrycks detta matematiskt, erhålls momentet i sprickan och sprickbredden:

$$M_D = M^* \cdot (1 - \nu) \quad 11.20$$

$$w_D = w_p \cdot \nu \quad 11.21$$

M_D, w_D = Moment respektive sprickbredd när hänsyn tagits till armeringen. Index p indikerar motsvarande storheter i oarmerat tillstånd.

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_p}{\alpha_{M,i}}} \quad 11.22$$

α_p = vinkeländringen i oarmerat tillstånd, det vill säga enligt tabell 11.3

$\alpha_{M,i}$ = $1/2 \cdot$ vinkeländringen i armerad fog som utsätts för momentet M^*

För villkor enligt figur 11.6 och med armeringsspänningen lägre än flytspänningen gäller:

$$\alpha_{M^i} = \frac{0.55 M^i l_0}{\Delta \cdot E_{\Delta}} \quad 11.23$$

där:

E_{Δ} = Armeringens elasticitetsmodul

l_0 = Den ekvivalenta friliggande armeringslängden i sprickområdet till följd av vidhäftningsnedbrytningen.

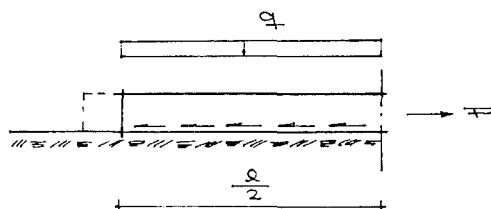
Om sprickan i stället bildas där ingen tjockleksreduktion finns, utbytes i ekv (11.18) t_{lok} mot t . För de stålsorter vi är intresserade av, nämligen kamstål och nät med profilerade stänger, gäller:

$$l_0 = 0.55 \left(4 + 12.5 \frac{\phi}{S} \right) \quad 11.24$$

ϕ = Armeringens diameter i centimeter

S = Armeringsandelen av hela tvärsnittet

BEAKTANDE AV DRAGKRAFT I GOLVET



Figur 11.9 Centrisk dragkraft i golv

F = Dragkraften

Dragkraften uppstår på grund av betongens friktion mot underlaget och dess storlek beror av friktionskoefficienten, och lasten, q , samt avståndet från kant till rörelsecentrum, $l/2$.

$$F = \mu q \frac{l}{2} \quad 11.25$$

μ = Friktionskoefficienten enligt tabell 11.3

Golvet spricker inte så länge dragkraften är mindre än dimensionerande dragkraft, F_D .

$$F_D = t \cdot f_{ctk} \quad 11.26$$

f_{ctk} = Betongens karakteristiska draghållfasthet (MPa)

Alltså ingen sprickbildning om:

$$F \leq F_D$$

$$w \leq \frac{q}{2} \leq t \cdot f_{ctk}$$

$$e \leq \frac{2t \cdot f_{ctk}}{q \cdot w} \quad ; \quad q = g + q_{DIM}. \quad 11.27$$

Ur detta kan man beräkna den största längd ett golvfält kan ha. Om aktuell längd är större än 1 läggs dilatationsfogar in på ett inbördes avstånd som är mindre än 1.

Vi ser att:

- * Ju större last på golvet och ju större friktion mot underlaget desto mindre blir 1
- * Ju större betongens draghållfasthet är och ju tjockare golvet är desto längre kan avståndet mellan fogarna vara. Observera att ökad golvtjocklek även resulterar i ökad last

SLUTSATSER

- * Betonggolv på mark måste nästan alltid armeras för att man ska kunna undvika besvärande sprickor på grund av krympningen
- * Armeringen är mest verksam ur krympningssynpunkt om den ligger högt uppe i golvet
- * Bara när konstruktion och utförande säkerställer jämn tjocklek och liten krympskillnad mellan över- och undersida ligger säkerheten mot sprickbildning på en rimlig nivå även utan armering

- * Låg differenskrämpning erhålls genom att använda:
 - Grov ballast
 - Styv konsistens
 - Vakuumbehandling

- * Vid tvärsnittsreduktioner, till exempel rördragning i golvet, måste man alltid sprickarmera om sprickor ska undvikas

- * Välj tunna golv för att minska differenskrämpningen

12 DIMENSIONERINGSANVISNINGAR

12.1 DIMENSIONERINGSFILOSOFI

Vi skall dimensionera betongplattan med hänsyn till inverkan av last och krympning. Dessa två delar kan separeras. Huvudarmeringen dimensioneras utifrån det tangentiella momentet. Detta ger dragspänningar i plattans underkant. Det dimensionerade momentets storlek beror i huvudsak på om lasten anses som diskret eller konstant utbredd över en liten cirkelyta eller om vi har två samverkande laster. För beräkning av momentet hänvisas till respektive kapitel.

Den armeringsmängd som tillhör huvudarmeringen betecknas A_{\perp} . Om lasten (diskret eller diskretiserad) överstiger ett visst värde P_{crd} fås sprickor direkt av lasten. Man skall alltid se till så man har minst minimiarmering för sprickfördelning i plattan. Denna armeringsmängd betecknas A_{\perp} . Krympningen ger också upphov till obehagliga dragspänningar i plattan. De sprickor som orsakas av dessa kan reduceras om man armerar plattan speciellt för dessa.

Denna armeringsmängd betecknas A_{κ} . Då skall en platta armeras enligt följande:

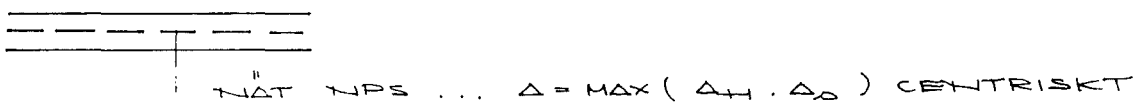
- * Huvadarmering A_{\perp}
- * Sekundärarmering A_{κ}

$$A_{\kappa} = \max \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\perp} \\ \Delta_{\kappa} \end{array} \right.$$

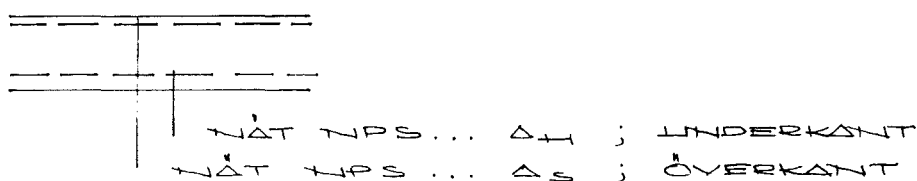
Sprickbredderna kan beräknas separat både för last och krympning.

Det finns två sätt att utforma en platta. I det ena fallet görs plattan så tunn som möjligt, cirka 80-100 mm. I det andra fallet görs plattan betydligt tjockare, cirka 200-300 mm. Det andra alternativet passar bäst då vi har stora laster som ger ett stort sprickmoment, till exempel vid samverkande laster. Dessa plattor skall armeras enligt följande:

TUNN PLATTA



TJOCK PLATTA



12.2 DIMENSIONERING AV HUVUDARMERING

M_t = Moment som ger upphov till tangentiella spänningar, ger upphov till dragspänningar i plattans underkant.

Detta moment är lämpligast som dimensioneringsmoment för huvudarmeringen och bestäms enligt kapitel 6 eller 7. Eventuellt kan ett annat dimensionerande moment erhållas om man studerar inverkan av lastens utbredning eller om man studerar samverkande laster.

Det dimensionerande momentet är till storlek oberoende av plattstyvheten och undergrundens egenskaper, bäddmodul eller markmodul. Då kan armeringen dimensioneras på vanligtvis enligt BBK 79:

$$\bar{m} = \frac{M}{bd^2 f_{cc}} \quad 12.1$$

$$w = 1 - \sqrt{1 - 2\bar{m}} \quad 12.2$$

$$\Delta_D = \frac{f_{cc}}{f_{st}} wbd \quad 12.3$$

M = Moment enligt ovan

12.3 DIMENSIONERING MED HÄNSYN TILL LASTSPRICKOR

M_r = Moment som ger upphov till radiella spänningar

Då $M_r / P < 0$ fås dragpåkänningar i plattans ovankant. Dessa spänningar kan ge upphov till sprickor i plattans ovankant.

$$M_r^{\text{MAX}} = \begin{cases} -0.024P & \text{Winklerbädd} \\ -0.020P & \text{Elastiska halvrummet} \end{cases}$$

Sprickor utbildas om:

$$M_r^{\text{MAX}} > M_{\text{crd}} \quad 12.4$$

M_{crd} = Dimensionerande sprickmoment

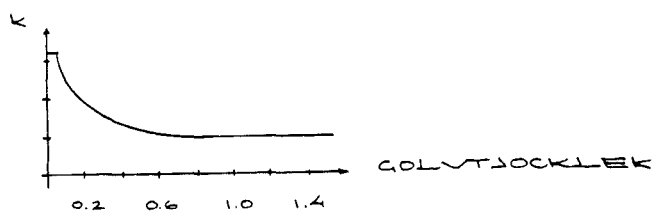
Enligt BBK 79 gäller:

$$\sigma_m \leq k \cdot \frac{f_{ct}}{\xi}$$

$$\xi = 2.0$$

$$\sigma_m \leq \frac{k}{2} \cdot f_{ct} \quad 12.5$$

k enligt figur 12.1



Figur 12.1 Faktorn k beroende av golvtjockleken

σ_m antas variera rätlinjigt över plattjockleken. Då fås:

$$\sigma_m = \frac{6M_{cr}}{bd^2} \quad 12.6$$

som ger:

$$M_{crd} = \frac{1}{12} \rho_{ct} b d^2 k \cdot 10^{-3} \quad (\text{Nm}) \quad 12.7$$

$$M_r^{\text{MAX}} = \begin{cases} -0.024P \\ -0.020P \end{cases}$$

Sprickor uppträder om:

$$M_r^{\text{MAX}} > M_{crd} \quad 12.4$$

Det vill säga, inga sprickor då:

$$P \leq \begin{cases} 3.472 k b d^2 \rho_{ct} \cdot 10^{-3} & \text{Winklerbädd} & 12.8a \\ 3.968 k b d^2 \rho_{ct} \cdot 10^{-3} & \text{Elastiska halvrummet} & 12.8b \end{cases}$$

Vi kan beräkna var de första sprickorna slår upp samt läget av den innersta sprickan utifrån de generaliserade momentdiagrammen för Winklerbädd respektive elastiskt halvrum. Detta har dock inget större praktiskt intresse utan mera teoretiskt. Man bör ha i minnet att plattan inte har samma tjocklek i alla tvärsnitt och den minsta tjockleken blir en sprickanvisning.

WINKLERBÄDD

Diagram 12.1 visar hur M / P varierar :

Den första sprickan slår upp där maxmomentet uppträder, det vill säga:

$$x = 1.75$$

$$x = \frac{r}{2l}$$

$$2l = \sqrt{\frac{D}{k}}$$

$$r_{cr} = 1.75 \sqrt{\frac{D}{k}} \quad 12.9$$

Den innersta sprickan uppträder vid:

$$x = 0.75 + \frac{M_{cnd}}{P} \quad 12.10$$

som ger:

$$r_{cr} = \left(0.75 + \frac{M_{cnd}}{P} \right) \sqrt{\frac{D}{k}} \quad 12.11$$

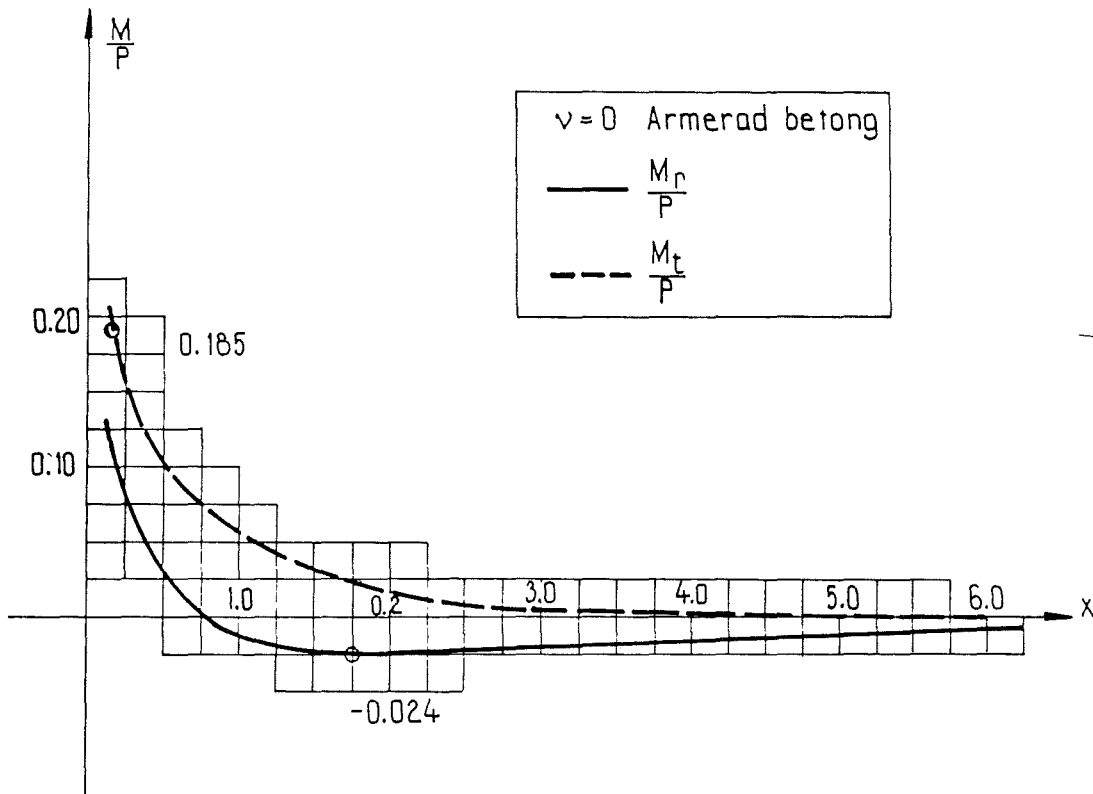


Diagram 12.1 Relationen mellan momenten och lasten för $\nu = 0$

ELASTISKT HALVRUM

Diagram 12.2 visar hur M / P varierar:

Den första sprickan slår upp där maxmomentet uppträder det vill säga:

$$b = 1.50$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{R}{D}} \cdot r$$

$$r_{cr} = 1.50 \sqrt[3]{\frac{R}{D}} \cdot r \quad 12.12$$

Den innersta sprickan uppträder vid:

$$b = 0.80 + \frac{M_{end}}{P} \quad 12.13$$

Som ger:

$$r_{cr} = \left(0.80 + \frac{M_{end}}{P} \right) \sqrt[3]{\frac{R}{D}} \quad 12.14$$

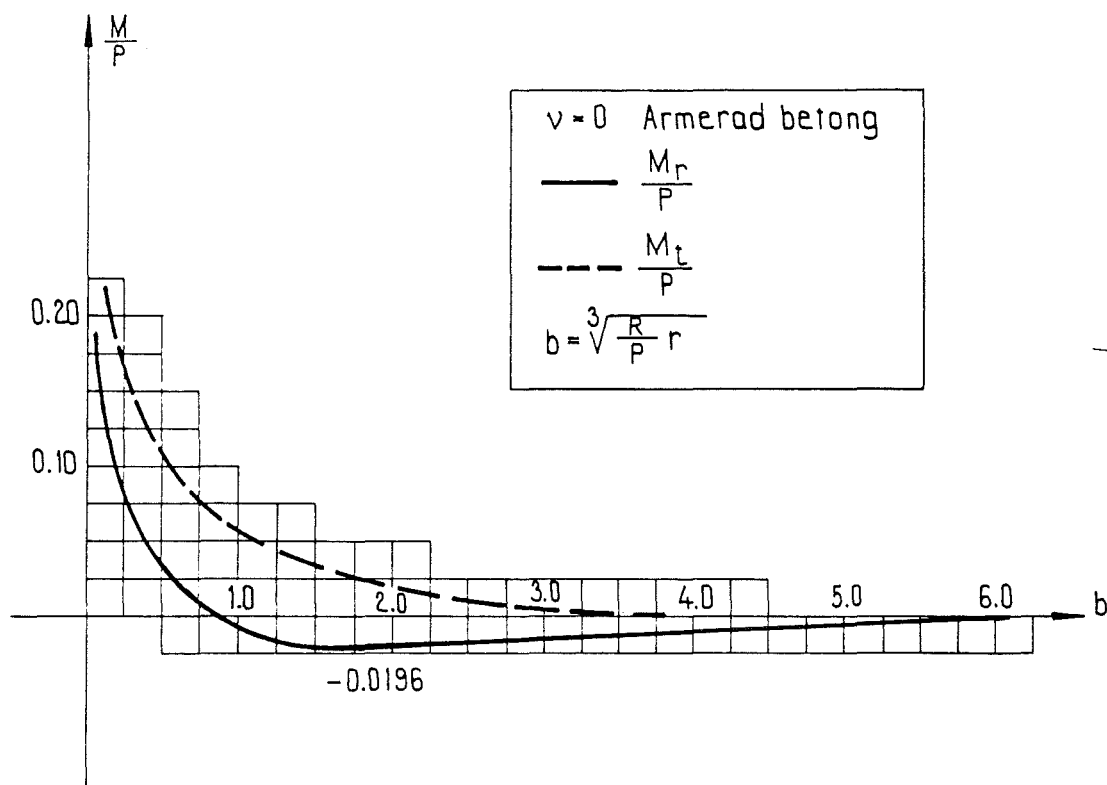


Diagram 12.2 Momentfördelningen under punktlaster, $\nu = 0$
 armerad betong

12.4 DIMENSIONERING MED HÄNSYN TILL KRYMPSPRICKOR

Detta avsnitt försöker åskådliggöra beräkningsgången för beräkningen av krympsprickor.

INDATA:

Vi räknar i säkerhetsklass 1.

Underlag : Fjäderstyvheten, K
 Golv : Tjocklek, t och lokal golvtjocklek, t_{lok}
 Golvbetong : Betongkvalitet till exempel K30
 Vattenhalt, W
 Armering : Armeringstyp
 Centrumavstånd
 Armeringstypen skall vara kamstål eller
 nät med profilerade stänger för att
 beräkningarna ska gälla.
 Relativ fuktighet: RH
 Tillsatsmedel : Ja eller Nej
 Gjutetapper : Längd, l_s
 Bredd, l_b
 Last : Dimensionerande utbredd last q_D

BERÄKNINGAR:

1. Beräkna största längd ett golvfält kan ha utan att sprickor uppträder på grund av den centriska dragkraften.

$$l \leq \frac{2t f_{ctk}}{(g+q_D)\omega} \quad 11.27$$

t = Golvtjockleken

f_{ctk} = Betongens karakteristiska draghållfasthet

g = Egentyngd

q_D = Dimensionerande utbredd last

ω = Friktionskoefficient enligt tabell 11.3

GOLVETS UNDERLAG	FRIKTIONSKOEFFICIENT
Mineralullsmattor, små rörelser	0.5
Mineralullsmattor, stora rörelser	1.0
Mineralullsskivor	
Mark	1.5

Tabell 11.3 Friktionskoefficienter

2. Beräkna betongens krympning efter oändligt lång tid:

$$\epsilon_{\infty} = \frac{k_r \left(\frac{W}{1000} \right)^{1.7}}{1 + \frac{k_I}{810}} \cdot 10^{-3} \quad 11.5$$

$k_r = 20$ Betong utan tillsatsmedel

$k_r = 26$ Betong med tillsatsmedel

$k_I =$ Betongkvalitet

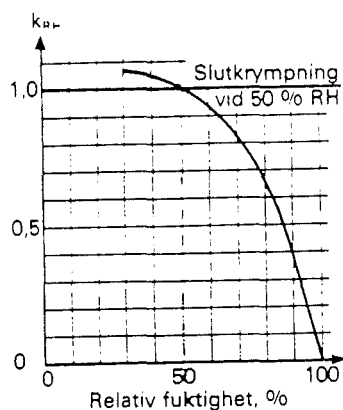
$W =$ Vattenhalt

3. Beräkna korrektionen av ϵ_{∞} med hänsyn till golvtjockleken. ϵ_{∞} multipliceras med relevant k_e - värde ur tabell 11.2 .

GOLVTJOCKLEK (mm)	k_e
25	1.25
50	1.00
75	0.90
100	0.80
125	0.70
150	0.60
175	0.50
200	0.40

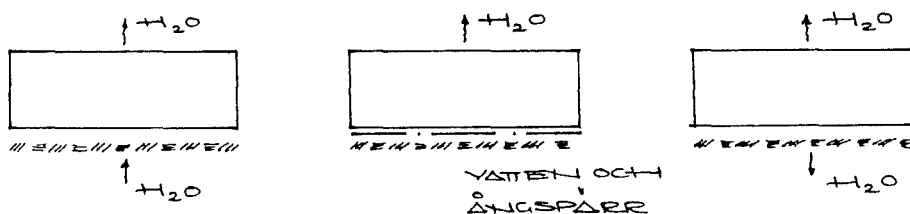
Tabell 11.2 Korrektionsfaktor, k_e , för varierande golv-tjocklekar

4. Beräkna korrektionen av ϵ_{∞} med hänsyn till relativa fuktigheten, RH. ϵ_{∞} multipliceras med relevant k_{RH} - värde ur figur 11.5 .



Figur 11.5 Relativa fuktighetens inverkan på slutkrympningen

5. Bedömning av viken grupp betonggolvet tillhör med hjälp av figur 11.3 .



Figur 11.3 Betonggolvetts uttorkningsmöjligheter

Grupp: Förhållande vid golvets undersida:

- 1 Vatten kan tillföras
- 2 Vatten- och ångisolerat
- 3 Uttorkningsmöjlighet

Grupp: Exempel:

- 1 Golv på mark
- 2 Golv på mark med diffusionstätt membran under golvet
- 3 Golv på isoleringsmaterial med ventilerad isolering

6. Beräkna betongens maximala differenskrypning :

$$\text{GRUPP 1: } \Delta \varepsilon_{DM} = \frac{\varepsilon_{000}}{1 + \frac{k_D}{t \cdot f_D}} \quad 11.1$$

$$\text{GRUPP 2: } \Delta \varepsilon_{DM} = 0.95 \frac{\varepsilon_{000}}{1 + \frac{2 \cdot k_D}{t \cdot f_D}} \quad 11.2$$

t = Betonggolvet tjocklek

k_D = Diffusionskonstant = $8.5 \cdot 10^{-4}$

f_D = Övergångstalet mot omgivningen = $2.5 \cdot 10^{-2}$

7. Beräkna hjälpvärdet :

$$B = \sqrt[4]{\frac{k}{4 E_0 I}} \quad 11.11$$

k = Underlagets fjäderstyvhet

E_0 = Betongens deformationsmodul = $\frac{E_c k}{1 + \phi}$ där $\phi = 1$
det vill säga vi antar mycket fuktig miljö

I = Tröghetsmomentet per meter

8. Beräkna det moment som erfordras för att precis upphäva krökningen till följd av differenskrämpningen, M^* :

$$M^* = - \frac{E_0 I \cdot \Delta \epsilon_D}{t} \quad 11.7$$

$\Delta \epsilon_D =$ Allmänt värde på differenskrämpningen, i vårt fall sätts $\Delta \epsilon_{Dm}$

9. Beräkna hjälpvärdet L^* :

$$L^* = \sqrt{\frac{-2M^*}{g}} \quad 11.12$$

10. Beräkna vilken rad vi hamnar på i tabell 11.4

Villkor			w	w ₁	α	Rad nr
Verbalt formulering	Matematisk d:o	Område				
Anliggningsmot underlag överallt			$= \frac{-M^*}{k_2 E_D I \beta^2} = \frac{\Delta \epsilon_s}{k_2 \beta^2 t}$	$= w_0 \cdot k_1$		1
			$k_2 =$	$k_1 =$		2
	$w_2 \leq \frac{g}{\kappa}$	$\begin{cases} \beta \geq 5 \\ \beta = 3 \end{cases}$	2 2,05	1,2 1,4	$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{-M^*}{E_D I \cdot \beta} = \frac{\Delta \epsilon_s}{t \beta} \end{aligned} \right.$	3
	$w_1 \leq \frac{g}{\kappa} \frac{2}{\pi}$	$\beta < 3$		$\frac{\Delta \epsilon_s \cdot l^2}{8 \cdot t \cdot (1 + 0,005 (1 \cdot \beta)^4)}$	$\frac{\Delta \epsilon_s \cdot l}{2 \cdot t \cdot (1 + 0,006 (1 \cdot \beta)^4)}$	4
Golvet lyfter sig från underlaget på längden L	$L = L^* - \frac{1}{\beta}$ $L \geq 0$	$(1 - 2L) \beta \geq 3$	$17,5 \cdot E_D \cdot \Delta \epsilon_s^2 + \frac{g}{2 \kappa}$	$\approx w_0 + \frac{g}{\kappa} (k_1 - 1)$	$\frac{2}{3} \left(\frac{\Delta \epsilon_s \cdot L^*}{t} + \frac{g \beta}{\kappa} \right)$	5
Speciellt för gränsfallet styvt underlag	$\kappa \rightarrow \infty$	$\begin{cases} l > 2L^* \\ l < 2L^* \end{cases}$	$= \frac{\Delta \epsilon_s \cdot L^{*2}}{4t} = 17,5 \cdot E_D \cdot \Delta \epsilon_s^2$	$= w_0$	$\frac{2 \cdot \Delta \epsilon_s \cdot L^*}{3t}$	6
			$\frac{\Delta \epsilon_s \cdot l^2}{8t} \cdot \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{l}{L^*} \right)^2 \right)$	$= w_0$	$\frac{\Delta \epsilon_s \cdot l}{2t} \cdot \left(1 - \frac{1}{12} \left(\frac{l}{L^*} \right)^2 \right)$	7

Tabell 11.4 Kantresningar för differenskrämpningen

$l =$ Total längd i betraktad riktning av den del som utgör ett kontinuerligt sammanhängande stycke, till exempel avståndet mellan två intilliggande fogar eller sprickor

11. Beräkna sprickbredden, w_p (oarmerat golv)

Mjuka golvunderlag, till exempel mineralullsmattor och mineralullsskivor:

$$\alpha_{VP} = \frac{2\Delta E_D \cdot t_{lok}}{E} \quad 11.16$$

Styva golvunderlag, till exempel mark:

$$\alpha_{VP} = \frac{4}{3} \Delta E_D L + \frac{t_{lok}}{E} \quad 11.17$$

12. Beräkna vinkeländringen, α_P , med hjälp av tabell 11.4 .
Använd den rad som vi kom fram till under punkt 10.

13. Beräkna den ekvivalenta friliggande armeringslängden i sprickområdet till följd av vidhäftningsnedbrytningen.

$$l_0 = 0.58 \cdot 10^{-2} \left(4 + 12.8 \frac{\phi}{s} \right) \quad 11.24$$

ϕ = Armeringsdiametern

s = Armeringsandelen av hela tvärsnittet

14. Beräkna $\alpha_{M+L} = 1/2 \times$ vinkeländringen i armerad fog som utsätts för momentet M^* :

$$\alpha_{M+L} = \frac{0.58 M^* \cdot l_0}{A \cdot E_D (t_{lok} - c)^2} \quad 11.23$$

A = Armeringsmängd

E_D = Armeringens elasticitetsmodul

15. Beräkna r :

$$r = \frac{l}{l + \frac{\alpha_P}{\alpha_{M+L}}} \quad 11.22$$

16. Beräkna sprickbredden, w_D (armerat golv)

$$w_D = \alpha_{VP} \cdot r \quad 11.21$$

12.5 BESTÄMNING AV SPRICKBREDDER

Vi använder oss uteslutande av den metodik och de formler som finns angivna i normen det vill säga BBK 79 utgåva 2 kapitel 4.5

Ur BBK 79 4.5.4 hämtas följande uttryck för sprickbredden:

$$w_k = 1.7 w_m \quad 12.15$$

$$w_m = \frac{\sigma_D}{E_s} \sigma_{rm} \cdot v \quad 12.16$$

$$v = \left(1 - \frac{\beta}{2.5 \alpha_1} \cdot \frac{\sigma_{Dn}}{\sigma_D} \right) ; \geq 0.4 \quad 12.17$$

$$\sigma_{rm} = 50 + \alpha_1 \alpha_2 \cdot \frac{\phi}{s} \quad 12.18$$

där:

w_m = Sprickbreddens medelvärde

w_k = Sprickbreddens karakteristiska värde

E_s = E-modul armering = 200 Gpa

β = 1,0

σ_{rm} = Sprickavståndets medelvärde

$$\sigma_{rm} = 50 + \alpha_1 \alpha_2 \cdot \frac{\phi}{s}$$

$$\sigma_{rm} = s ; \text{ ARMERINGSTÄT}$$

α_1 = Vidhäftningskonstant = ...

... = 0,8 Kamstänger

... = 1,2 Profilerade stänger

... = 1,6 Släta stänger

σ_D = Armeringspåkänning

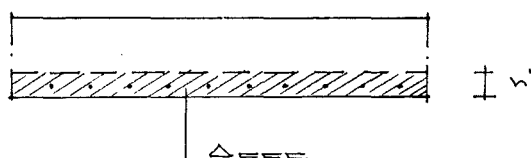
$$\sigma_D = \frac{2 \cdot M_r}{b d^2 (\alpha_s)^2} (1 - \alpha_s) \quad 12.19$$

$$x = \xi \cdot d = \alpha_s d \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha_s}} - 1 \right) \approx \alpha_s d \quad 12.20$$

$$\alpha = \frac{E_p}{E_c} \quad 12.21$$

A_s = Huvudarmeringens area

$$s = \frac{A_s}{\Delta_{EFF}} \quad 12.22$$



$$h' = \left. \begin{array}{l} 2c + \phi \\ \frac{h-x}{3} \end{array} \right\} \quad 12.23$$

α_2 = Koefficient som beaktar töjningsfördelningen

$$\alpha_2 = 0.125 \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1} \quad 12.24$$

$$\epsilon_1 > \epsilon_2$$



σ_{cr} = Spänning vid spricklast P_{cr}

För armering med fasta tvärstänger med inbördes avstånd s som till exempel armeringsnät behöver medelsprickavstånd inte sättas större än:

$$s = s_{crm}$$

Då fås:

$$w_k = 1.7 \frac{\sigma_D}{E_D} \cdot s \cdot \left(1 - \frac{3}{2.5\alpha_1} \cdot \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_D} \right) \quad 12.25$$

Detta kan förenklas till:

$$w_k = 1.7 \frac{\sigma_D}{E_D} \cdot s$$

ty:

$$\left(1 - \frac{3}{2.5\alpha_1} \cdot \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_D} \right) \approx 1.0$$

Denna beräkning utföres för två tvärsnitt:

* Under punktlasten

$$M = M_t^{\max}$$

w jämföres med tabell enligt svensk byggnorm

* Vid sprickmomentets maximum

$$M = M_r^{\max}$$

w jämföres med estetiskt uppskattat värde

12.6 BEGRÄNSNING AV SPRICKBREDDER

I BBK 79 anges tillåtna sprickbredder med hänsyn till miljöklass och armeringstyp. Vidare anges de värden på spricksäkerhetsfaktorn som skall användas vid bedömning av huruvida betongen spricker eller ej. Det bör då påpekas att kraven på sprickbredds begränsning betingas av armeringens korrosionsskydd.

Miljö	Armeringstyp			
	Korrosionskänslig		Föga korrosionskänslig	
	ζ	w_k	ζ	w_k
Obetydligt armeringsaggressiv miljö	Ingen begränsning		Ingen begränsning	
Måttligt armeringsaggressiv miljö	1,5	0,2	1,0	0,4
Mycket armeringsaggressiv miljö	2,0	0,1	1,5	0,2

Anm. Armeringstyp, se 4.5.2. Miljö, se 7.3.2.3.

Figur 12.2 Tillåtna sprickbredder enligt BBK

Vi måste alltså komplementera med krav på plattans ovansida. Vi har redan tidigare valt att sätta:

$$\zeta = 2,0$$

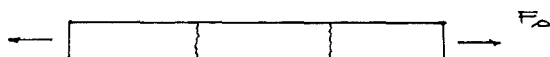
Nu gäller det bara att bestämma en tillåten (accepterad) sprickbredd på plattans ovansida:

$$w_k^E = 0,4 \text{ mm}$$

Detta värde gäller för betonggolv i industrilokaler. Värdet 0,4 mm är framtaget i samarbete med Sigurd Karlsson, Skanska konsulter, och grundar sig på de krav man bör ställa på betonggolv i industrilokaler.

Villkoret för att armeringen skall vara sprickfördelande är att den kraft som fodras för att ge flytning i armeringen är minst lika stor som den kraft som fodras för att spräcka betongen. Härigenom kan inte enstaka sprickor bli grova på

grund av att armeringen flyter, istället blir dragkraften så stor att betongen spricker på flera ställen varigenom den totala töjningen fördelas på flera fina sprickor i stället för på ett fåtal grova. Detta är den enkla regel som ligger till grund för minimiarmering i BBK 79.



Figur 12.3 Centrisk dragkraft

Sprickfördelning om:

$$F_D = \sigma_D \Delta_D \geq \Delta_{EFF} \cdot f_{ctk}$$

$$\Delta_D \geq \frac{\Delta_{EFF} \cdot f_{ctk}}{\sigma_D}$$

12.26

$$\sigma_D = f_{yk} \quad ; \quad \leq 400 \text{ MPa}$$

Δ_{EFF} = Effektiv betongarea

$$f_{ctk} = 1,5 \cdot f_{ctk}$$

Δ_D reduceras med 0,7 för platta på mark.

Man använder ett förhöjt värde på draghållfastheten främst på grund av den allmänna statistiska spridningen. Erfarenheter tyder på att denna synnerligen enkla modell ger ett relativt bra resultat.

13 EXEMPEL

GAMBRO LUND

FÖRUTSÄTTNINGAR:

Betong K40

$$W = 170 \text{ kg/m}^3$$

Flyttillsatsmedel

Armering: Centrisk nätarmering

Säkerhetsklass I

$$P_D = 60 \text{ kN}$$

$$q_D = 20 \text{ kN/m}$$

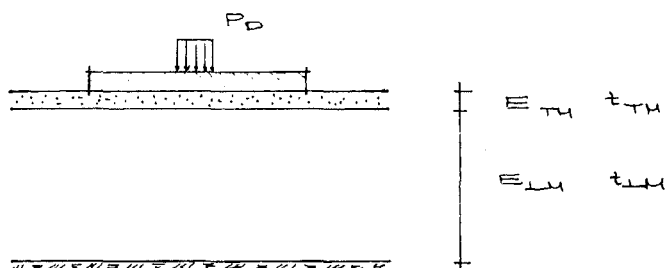
$$E_{LM} = 5.0 \text{ MPa}$$

$$t_{LM} = 2.0 \text{ m}$$

$$E_{TM} = 50.0 \text{ MPa}$$

$$t_{TM} = 0.15 \text{ m}$$

Gjutetapper: 25 x 6.0 m



Figur 13.1 Principfigur för modellen

HÅLLFASTHETSVÄRDEN:

$$E_c = 26.7 \text{ MPa}$$

$$f_{dt} = 455 \text{ MPa}$$

$$f_{cc} = 19.0 \text{ MPa}$$

$$f_{ct} = 1.30 \text{ MPa}$$

$$E_D = 190 \text{ GPa}$$

$$f_{ctk} = 1.95 \text{ MPa}$$

$$\rho_c = 0.20$$

UNDERGRUNDEN:

Enligt Beigler kan vi bestämma en elasticitetsmodul för skiktad jord.

$$\frac{1}{E_{\text{gm}}} = \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \sum_i^n \frac{h_{\text{TOT}}}{h_i E_i} + \frac{n-1}{E_n} \right\}$$

$$\rightarrow E_{\text{gm}} = 9.09 \text{ MPa}$$

Vi sätter $\nu = 0.33$

Härur kan både bäddmodul K och markmodul R beräknas

$$K = 1.3 \frac{E_{\text{gm}}}{h_{\text{TOT}}} \left(\frac{E_{\text{gm}}}{E_c} \right)^{\frac{1}{3}} = \dots = 5.50 \text{ MPa/m}$$

$$R = \frac{E_{\text{gm}}}{2(1-\nu^2)} = \dots = 8.12 \text{ MPa}$$

PLATTAN

Antag golvtjocklek $t = 120 \text{ mm}$

Antag centrisk nätarmering NPS 50 ...

Då fås:

$$D = \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} = \dots = 4.00 \cdot 10^9 \text{ Nmm}$$

$$\rightarrow D = 4.00 \text{ kNm}$$

LASTUTBREDNING

Punktlasten antas angripa på en yta av $100 \times 100 \text{ mm}$

$$\rightarrow a = 57 \text{ mm}$$

BESTÄMNING AV HUVUDARMERING

Denna beräkning baseras på teorin för det elastiska halvrummet

$$L = \sqrt[3]{\frac{R}{D}} = \dots = 0.92$$

$$\nu = \frac{a}{L} = \dots = 0.062$$

Diagram 7.3 ger då:

$$M_t^{\max} = 0.25P = 15.0 \text{ kNm/m}$$

$$d = 60 \text{ mm}$$

$$\bar{m} = \frac{M_t^{\max}}{bd^2 f_{cc}} = \dots = 0.219$$

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2\bar{m}} = \dots = 0.251$$

$$\Delta_D = \frac{f_{cc}}{f_{ot}} \omega b d = \dots = 628 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Armering: Nät NPs 50 8 s75

SPRICKFÖRDELANDE ARMERING

$$\Delta_D \cdot f_{dt} \geq \Delta_{EFF} \cdot f_{cth}$$

$$f_{dt} = 455 \text{ MPa}$$

$$A_{EFF} = 1000 \cdot \frac{120}{3} = 40000 \text{ mm}^2$$

$$f_{cth} = 1.5 \cdot 1.95 = 2.93 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow \Delta_D \geq 258 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Armering: nät NPs 50 6 s100 Minimiarmering

BERÄKNING AV SPRICKARMERINGEN

$$M_v^{\max} = 0.025P = 1.50 \text{ kNm/m}$$

(Här räknar vi med $\nu = 0.20$)

$$\bar{m} = \dots = 0.022$$

$$\omega = \dots = 0.022$$

$$\Delta_D = \dots = 56 \text{ mm}^2/\text{m}$$

→ Minimiarmering

ARMERING PÅ GRUND AV KRYMPNINGEN

Beräknas utifrån de punkter som står nämnda i dimensioneringsanvisningarna.

$$1. \quad l \approx \frac{2t \cdot \rho_{ctk}}{(g + q_{0,1}) \cdot \mu} \quad ; \quad \mu = 1.5$$

$$l = 13.7 \text{ m}$$

$$2. \quad \varepsilon_{\infty} = \frac{k_r \left(\frac{x}{1000} \right)^{1.7}}{1 + \frac{k_1}{50}} \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{\infty} = 0.71$$

$$3. \quad \varepsilon_{\infty} = 0.71\text{‰} \cdot 0.73 = 0.52\text{‰}$$

$$4. \quad \text{Relativa fuktigheten} = 50\% \rightarrow \varepsilon_{\infty} = 0.52\text{‰}$$

5. Grupp 1

$$6. \quad \Delta \varepsilon_{\text{dm}} = \frac{\varepsilon_{\infty}}{1 + \frac{k_2}{t \cdot \rho_0}}$$

$$\Delta \varepsilon_{\text{dm}} = 0.41\text{‰}$$

$$7. \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4E_0 I}}$$

$$\beta = 0.9$$

$$8. \quad M^* = - \frac{E_0 I \Delta \varepsilon_{\text{dm}}}{t}$$

$$M^* = -7.9 \text{ kNm/m}$$

$$9. \quad L^* = \sqrt{-\frac{2M^*}{g}}$$

$$L^* = 2.4 \text{ m}$$

$$10. \quad L = 2.4 - 1/0.9 = 1.3 \quad \rightarrow \quad \text{rad 5}$$

11. Styvt golvunderlag

$$w_p = \frac{4}{3} \Delta \varepsilon_{\text{dm}} L^* \frac{t + \rho_0 k}{t}$$

$$w_p = 1.3 \text{ mm}$$

$$12. \alpha_D = \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta \varepsilon_D \cdot l^2}{t} + \frac{gB}{k} \right)$$

$$\alpha_D = 0.0058 \text{ rad}$$

13. ANTAG $\phi 8$ s70

$$Q_0 = 0.55 \cdot 10^{-2} \left(4 + 12.5 \frac{\phi}{s} \right)$$

$$l = 0.11 \text{ m}$$

$$14. \alpha_{u^*i} = \frac{0.58 M^* Q_0}{\Delta_D E_D (t_{\text{max}} - c)^2}$$

$$\alpha_{u^*i} = 0.0010 \text{ rad}$$

$$15. r = \frac{l}{1 + \frac{\alpha_D}{\alpha_{u^*i}}}$$

$$r = 0.15$$

$$16. w_D = w_P \cdot r$$

$$w_D = 0.19 \text{ mm} \quad \text{f\u00f6r NPs } \phi 8 \text{ s70}$$

SPRICKBREDDER

$$w = 1.7 \cdot \frac{\sigma_D}{E_D} \cdot D$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

s = 70 krympningen dimensionerande

$$\sigma_D = \frac{2M}{bd^2 (\alpha s)^2} (-\alpha s)$$

$$M_r = 1.50 \text{ kNm/m}$$

$$b = 1000 \text{ mm}$$

$$d = 60 \text{ mm}$$

$$\alpha = E_c/E = 7.49 \quad \text{Armering } \phi 8 \text{ c70}$$

$$s = A_D/A_{\text{eff}} = 0.018$$

$$\rightarrow \sigma_D = 45.0 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow w_u = 0.03 \text{ mm}$$

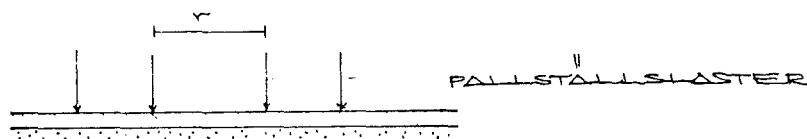
Under lasten f\u00e5s med:

$$M_t = 15.0 \text{ kNm/m}$$

$$\rightarrow \tau_D = 450 \text{ MPa} \quad < f_{D,t} = 455 \text{ ok!}$$

$$\rightarrow w_k = 0.27 \text{ mm}$$

SPRICKOR I TRUCKGÅNGAR



Figur 13.2 Generell lastfördelning vid truckgång.

På grund av lastfördelningen fås momentdiagram enligt kapitel 8

$$v = \frac{r}{4}$$

$r = 3.50 \text{ m}$; avståndet mellan punktlasterna

$$\rightarrow b = 3.80$$

Då fås enligt diagram 8.11:

$$M/P = 0.040$$

$$\rightarrow M = 2.40 \text{ kNm/m}$$

Armering:

$$\bar{m} = 0.035$$

$$\omega = 0.036$$

$$\Delta_D = 89.6 \text{ mm}^2/\text{m}$$

Armering: Minimiarmering

Sprickbredder:

$$w_k = 1.7 \cdot \frac{\sigma_D}{E_D} \cdot s$$

Med armering $\phi 8$ s70 fås:

$$\sigma_D = 64.0 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow w_k = 0.04 \text{ mm}$$

RESULTAT

Huvudarmering : NPs 50 ϕ 8s75
Sprickarmering : Minimiarmoring
Krymparmering : Nps 50 ϕ 8s70

ANMÄRKNING

Det kan nämnas att om vi hade valt den armering som i verkligheten använts, det vill säga NPs 50 6s100 hade vi erhållit följande sprickbredder:

Sprickor av last : 0.3 mm

Krympsprickor : 0.7 mm

Sprickor i truckgångar : 0.4 mm

I verkligheten är det här golvet hårt ansatt av sprickbildning.

14 SAMMANFATTNING

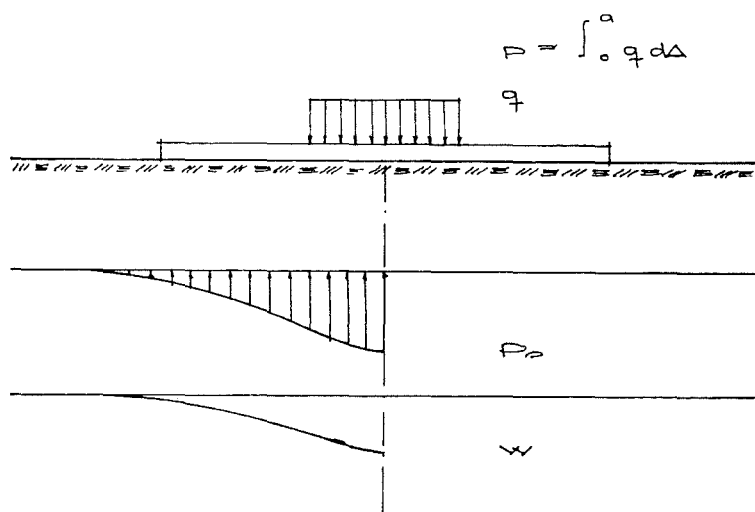
Detta examensarbetet behandlar betonggolv direkt på mark eller annat eftergivligt underlag såsom markisolering eller dylikt.

Beläggningsen, det vill säga golvet, antas statistiskt sett fungera som en platta på elastiskt underlag. Två typer av belastning kan förekomma:

- * Koncentrerade laster från truckhjul eller från till exempel lastuppställningar. Sådana laster ger böjande moment i plattan. Jämnt utbredda laster ger däremot inga påkänningar i plattan.
- * Krympning och temperaturändring ger i huvudsak upphov till dragspänningar i plattan då denna vill kontrahera. Om krympning och temperaturändring är ojämnt fördelade genom plattans tjocklek uppkommer även böjningspåkänningar så kallade välvningsspänningar.

Traditionellt utformas betongbeläggningar som oarmerade eller svagt sprickarmerade plattor. Några konstruktionsberäkningar utförs i praktiken relativt sällan. Man väljer platttjockleken erfarenhetsmässigt och fogindelar plattan vanligen så tätt att inverkan av krympning och temperaturminskning blir obetydlig.

Den metod att analysera problemet som vi använder bygger helt på den lineära elasticitetsteorin. Man antar då att både plattan och bädden har lineärt elastiska egenskaper. Detta är en grov förenkling men man får göra dylika övervägningar för att överhuvudtaget kunna lösa problemet.



p_s = Markreaktionstryck

w = Deformation

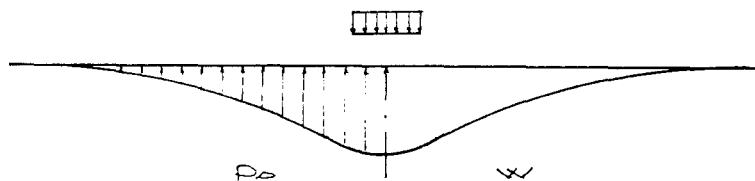
Figur 14.1 Fördelning av markreaktionstryck och deformation under plattan

Problemet är nu att p_s inte är känd men det kan erhållas ur sambandet mellan last och deformation för marken. För att etablera sambandet mellan p_s och w används antingen Winklerbäddsteorin eller elastiska halvrumsteorin.

WINKLERBÄDD

Markreaktionstrycket antas här vara proportionellt mot markens deformation. Teorin gäller exakt för istäcke på vatten. 1884 presenterades det enklaste fallet, punktlast på istäcke, av Herz. Metoden är i allmänhet tillämpbar på tunna beläggningar på elastiska lager.

Proportionalitetskonstanten k brukar benämnas bäddmodul. Markreaktionstryck- och nedböjningsfördelningen är likformiga, det vill säga:



Figur 14.2 Fördelning av markreaktionstryck och deformation under plattan enligt teorin för Winklerbädd

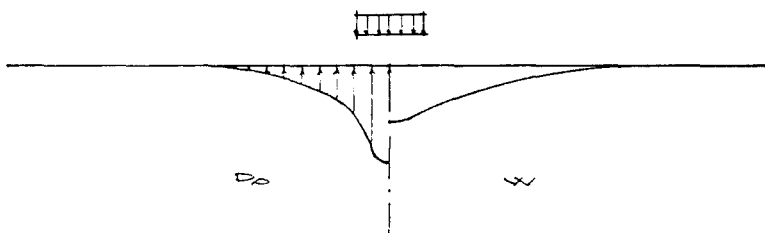
Schleicher har bland annat behandlat fallet med konstant lastutbredning på en cirkelyta.

ELASTISKT HALVRUM

Här antar vi förutom att plattan är lineärt elastisk även att marken har lineärt elastiska egenskaper. Sambandet mellan markreaktionstrycket och nedböjningen blir mera komplicerat än tidigare. Med vår metod behöver man inte explicit bestämma detta samband. Kortfattat kan vi säga att både markreaktionstryck och nedböjning kan utvecklas i Besselse-rier, detta bygger på lösningen av Navier-Stokes ekvationer för vissa speciella randvillkor.

Markreaktionstryckets och nedböjningens utvecklingar utgör sedan indata i plattekvationen. Om sedan lasten också utvecklas på samma sätt kan vi entydigt bestämma Besselkoefficienterna, då kan både nedböjningen och markreaktionstryck beräknas. Ur den förstnämnda följer också momenten.

Markreaktionstryck och nedböjning är inte likformiga, det vill säga



Figur 14.3 Fördelning av markreaktionstryck och deformation under plattan enligt teorin för elastiskt halvrum

Här blir marktrycket mera koncentrerat till mitten. Momentfördelningen blir i stora drag mycket lik momentfördelningen vid Winklerbädd. Denna teori anses stämma bättre än Winklerbädden genom att den tar hänsyn till att deformationen i en punkt inte enbart beror av belastningen (markreaktionstrycket) i den aktuella punkten utan beror av belastningen över hela plattan, avvägt med hjälp av en influensfunktion.

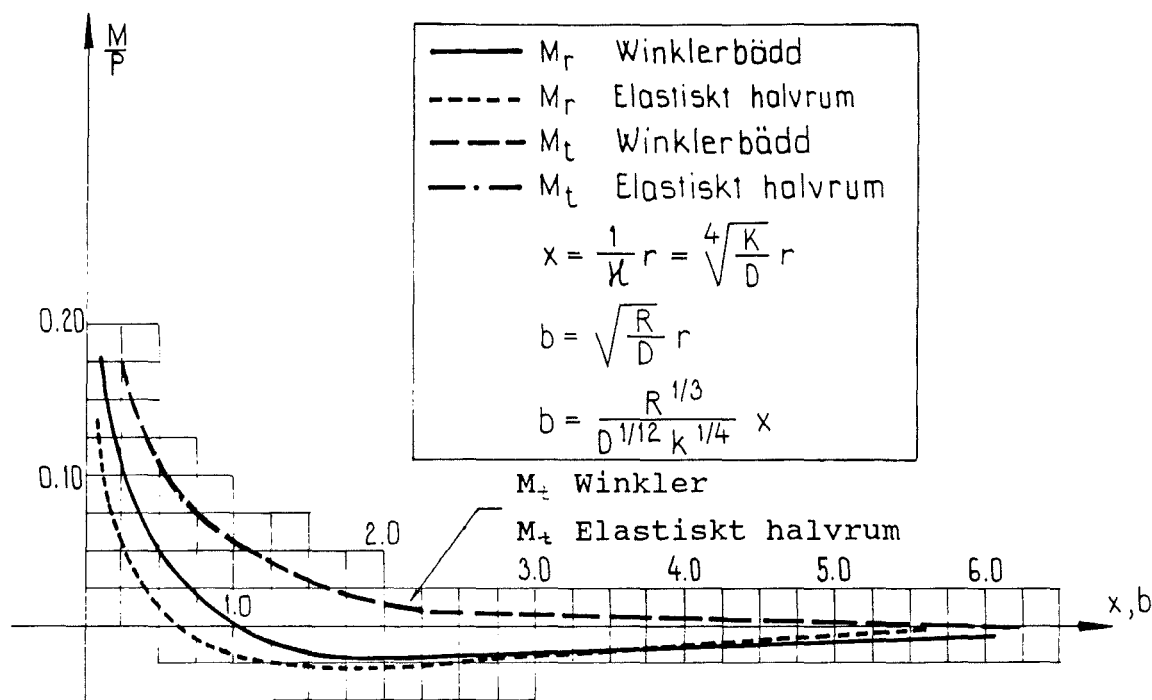


Diagram 14.1 M / P som funktion av x och b för både Winklerbädd och elastiskt halvrum

De momentfördelningar som vi har tagit fram gäller för oändlig platta det vill säga plattans radie är mycket större än lastens radie. En ändlig platta får praktiskt taget samma lösning utom i kantzonen om plattans radie är större än tre gånger den elastiska styvhetsradien.

Ur momentdiagrammen framgår att det radiella momentet växlar tecken på ett visst avstånd från lastpunkten, detta orsakar dragspänningar på ovansidan av plattan, vilket oftast leder till sprickbildning där.

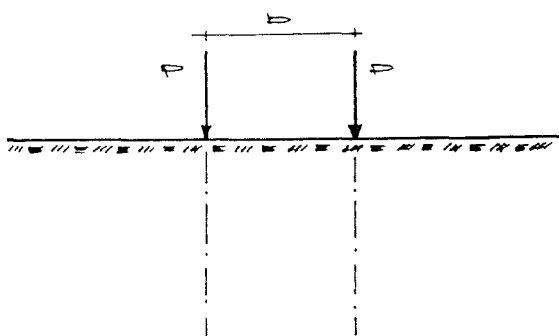
Momentamplituden är oberoende av både plattstyvhet och undergrundens beskaffenhet, detta medför att man kan armeringsberäkna plattorna på vanligt vis. Ett visst moments läge, till exempel maxmomentets läge, beror av plattstyvhet och undergrundens egenskaper.

Då plattan befinner sig i bruksgränstillståndet (stadium II) är brottlinjeteorin inte relevant men då plattan befinner sig i brottgränstillståndet (stadium III) kan både brottlinjeteorin och elasticitetsteorin användas. Vi föredrar dock att använda den senare metoden på grund av att den följer deformationshistorien bättre. Sprickor uppkommer praktiskt taget alltid och dessa kan man inte armera bort utan endast begränsa, detta görs genom att sprickfördelade armering används. Sprickor i överkant uppkommer direkt av lasten då denna överskrider ett visst värde, P som beräknas på basis av BBK 79.

Vi har även studerat samverkan mellan två punktlaster, det vill säga en lastkombination av formen :

$$P = P_0 \delta(\bar{x} - \bar{x}_1) + P_0 \delta(\bar{x} - \bar{x}_2)$$

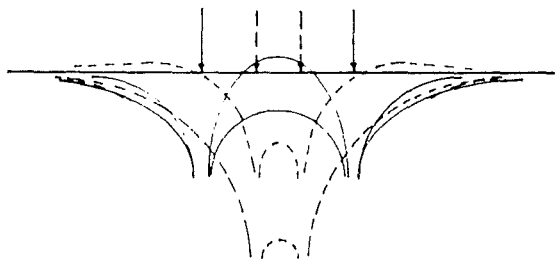
$\delta(\bar{x}) =$ Diracs deltafunktion



Figur 14.4 Samverkan mellan två punktlaster

Beräkningarna baseras på elastiska halvrumsteorin. Lösningarna det vill säga nedböjningskurvor och momentdiagram presenteras utförligt i kapitel 8.

Två laster med ett inbördes avstånd $b \gg 13$ kan behandlas var för sig. Beroende på det inbördes avståndet erhålls olika momentfördelningar mellan lasterna.



Figur 14.5 Principiell momentfördelning under två samverkande punktlaster

Vi ser speciellt att då avståndet mellan lasterna ökar erhålls efter ett tag en teckenändring hos det radiella momentet mellan lasterna. Detta moment, M_r ändrar tecken då $b = 1.8$. M_r^{\max} uppkommer då för $b = 4.0$, då gäller att $M_r^{\max} = 0.4P$, vilket är dubbelt så stort som det maximala radiella momentet som fås då enbart en last studeras. Efter att M_r^{\max} uppnåtts flackar momentkurvan av mellan lasterna och den separeras så småning om i två toppar.

KRYMPNING

De faktorer som är viktigast för krympningens förlopp och storlek hos en betongplatta är:

- * Betongsammansättningen
- * Konstruktionens dimensioner som har inflytande på uttorkningshastigheten

Vi gör en uppdelning av plattorna beroende på uttorkningsmöjligheterna. De olika uttorkningsmöjligheterna ger upphov till skillnader i krympningen i över- och underytan så kallad differenskrympning. Denna differenskrympning ger upphov till en krökning hos plattan vilket kan leda till hörn- och kantresningar. För att undvika eller reducera dessa fenomen bör vi tänka på följande:

- * Välj tunnast möjliga golv, därför att differenskrämpningen är tjockleksberoende.
- * Försök undvika att golvet har, eller genom sprickbildning får, momentfria kanter och hörn. Gjutskarvar och partier med rördragning eller andra tjockleksreduktioner utgör potentiella ställen för sprickbildning.
- * Välj betong med låg vattenhalt efter bearbetning, detta uppnås på något av följande sätt:
 - Grov ballast
 - Styv konsistens
 - Vakuumbehandling

De rena dragkrafterna som uppstår i plattan används för att dimensionera fackindelningen på ett sådant sätt att sprickbildningen hålls på en rimlig nivå.

15 BETECKNINGAR

A	Armeringsarea	mm ² /m
A, B..	Konstanter	
a	Lastradie	m
b	Bredd	m
b	Dimensionslös radie	
ber(x)	Kelvinfunktioner	
bei(x)		
ker(x)		
kei(x)		
c	Täckande betongskikt + 0.5 x armeringsdiametererna	m
d	Effektiv höjd	m
D	Plattstyvhet	Nm
D _o	Materialmatris	
divū	$(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \bar{u}$	
E	Elasticitetsmodul	MPa
E _d	Betongens deformationsmodul	MPa
E _{ck}	Betongens karakteristiska elasticitetsmodul	MPa
E _o	Markens elasticitetsmodul	MPa
E _o	Armeringens elasticitetsmodul	MPa
E _B	Plattans elasticitetsmodul	MPa
E _o m	Skiktad jords elasticitetsmodul	MPa
F	Centrisk dragkraft i golvet	N
f _{cbt}	Dimensionerande böjdraghållfasthet betong	MPa
f _{cc}	Dimensionerande tryckhållfasthet betong	MPa
f _{ct}	Dimensionerande draghållfasthet betong	MPa
f _{ctk}	=1.5f _{ctk}	
f _{ot}	Dimensionerande draghållfasthet stål	MPa
f _o	Övergångstal mot omgivningen	m/s
f _y	Armeringens flytspänning	MPa
f _{0.2}	Armeringens 0.2-gräns	MPa
g	Golvets egentyngd	N/m
gradφ	$(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial z}) \phi$	
h _m	Uttorkningstid till maximal krökning	s

$H(z)$	Hankelfunktioner	
i	Komplexa enheten	
I	Plattans tröghetsmoment	m^4
$I(z)$	Modifierad Besselfunktion	
$J(z)$	Besselfunktion	
k_i	Volymslast	N/m^3
k	Integrationsvariabel	
$K(z)$	Associerad modifierad Besselfunktion	
k	Bulkmodul	
k	Bäddmodul	N/m
k	Konstant (diagram)	
k_∞	Diffusionskonstant	m/s
K_{\pm}	Betongens hållfasthetsklass	
l	Längd av osprucket, sammanhängande golvparti	m
l_e	Den ekvivalenta friliggande armering-längden i sprickområdet till följd av vidhäftningsnedbrytningen	m
L	Golvdal som lyfter sig från underlaget	m
L	Styvhetsradie	m
L^*	Hjälpvärde	m
\bar{m}	Relativt moment	
M	Kompressionsmodul	MPa
M	Moment	Nm
M^*	Moment som erfordras för att precis upphäva krökningen till följd av differenskrömpningen	Nm/m
M_{cr}	Sprickmoment	Nm
M_{end}	Dimensionerande sprickmoment	Nm
M^{max}	Maxmoment	Nm
P	Diskret last	N
P_{crd}	Dimensionerande spricklast	N
p, δ	Tryckkurva, grundtryck	MPa
q	Last per ytenhet	N/m
r_p	Krökningsradie	m
R	Markmodul	MPa
$R(k)$	Influensfunktion för skjuvspänningen	

RH	Relativa fuktigheten	
r, φ, z	Polära koordinater	
$\text{rot } \bar{u}$	$(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial z}) \times \bar{u}$	
s	Avstånd mellan armeringsstänger	m
S_0	Integraler som beräknas, resultatet blir serier.	
S_1		
S_2		
S_3		
S_{m}	Sprickavståndets medelväg	m
t	Plattjocklek	m
U_r, U_φ, U_z	Potentialfunktioner	
\bar{u}	Förskjutningar	m
V	Tvärkraft	N
w	Sprickbredd	m
w_k	Karakteristisk sprickbredd	m
w	Plattans nedböjning	m
w_0	Sprickbredd, oarmerat golv	m
w_p	Sprickbredd, armerat golv	m
W	Vattenhalt	kg/m
w(k)	Influensfunktion för nedböjningen	
x	Dimensionslös radie	
x, y, z	Karakteristiska koordinater	
Y(z)	Associerad Besselfunktion	
α	Elasticitetsmodulförhållande	
α	Vinkeländring	rad
α_p	Vinkeländring i oarmerat tillstånd	rad
$\alpha_{M,i}$	1/2 · vinkeländringen i armerad fog som utsätts för momentet M	
β	Hjälpvärde	1/m
$\Gamma(x)$	Gammafunktionen	
γ	Eulers konstant	
ε	Töjning	
ε_{∞}	Krympning efter oändligt lång tid	
$\Delta \varepsilon_{DM}$	Maximal skillnad mellan krympningen i över- och underyta, differenskrympning	

$\Delta \varepsilon_D$	Differensskrympning, allmänt värde	
$\Delta \varepsilon_{gr}$	Böjdragbrottöjningen	
α	Styvhetsradie	m
α_1	Vidhäftningskonstant	
α_2	Töjningsfördelningskoefficient	
λ	Lames konstant	
μ	Lames konstant	
ν	Relativ lastradie	
ν	Friktionskoefficient	
ν	Poissons tal	
ν_D	Poissons tal för mark	
ν_B	Poissons tal för plattan	
ρ	Geometriskt armeringsinnehåll	
ρ	Armeringsandelen av hela tvärsnittet	
σ	Spänningar	MPa
σ_0	Grundtryck	MPa
σ_a	Armeringspåkänning	MPa
σ_{pr}	Spricklastspänning	MPa
σ_{z1}	Aktuell dragspänning betong	MPa
σ_{z2}	Lokal dragspänning i överytan hos btg	MPa
τ	Skjuvspänningar	MPa
τ_{+1}	Lerans odränerade skjuvhållfasthet	MPa
ϕ	Armeringsdiameter	m
ϕ	Miljöfaktor	
ϕ	Armeringens diameter	m
ψ_i	Konstanter	
$\psi(x)$	Psi-funktionen	
ω	Mekaniskt armeringsinnehåll	
Δ	Laplace operator	
∇	Nabla operator	

16 LITTERATURHÄNVISNINGAR

- (1) Abramowits, Stegum (ed) Handbook of Mathematical Funktions with formulas Graphs and Mathematical Tables, Nation Beauru of Standards Appl. Mech. Series 55, June
- (2) Aven mfl.(red): Handboken Bygg del A och K Liber Stockholm 1985
- (3) Bazant Z: Theory of creep and Shrinkage in Concrete Structures.Mechanics today vol.2 New York 1975
- (4) Bergström,SG, Fromen,E and Linderholm,S: Investigation of Wheel Load Stresses in Concrete Pavements. Cement och betonginstitutet,Handl.No 13, Stockholm 1949
- (5) Bergström SG: Stämpbelastade cirkulära plattor på elastiskt underlag, Betong 1946:1
- (6) Bestämmelser för betongkonstruktioner, Statens betongkommite, BBK 79 Stockholm 1979
- (7) Bergström,SG: Temperature Stresses in concrete pavements, CBI,Handl.No.14,Stockholm 1950
- (8) Betonghandbok konstruktion, Svensk Byggtjänst Stockholm 1983
- (9) Bousoinesq HJ: Application des potentieles a l etude de l'equioibre et du mouvment des solides elastiques Paris 1885
- (10) Burmeister DM: The General Theory of Stresses and Displacements in, Layerd systems I Joum. Appl. Physics vol 16 febr. 1945

- (11) Buö, F,O: Flytande golv samt betonggolv på mark, CBI rapport nr 7309 1973
- (12) Chen WF: Plasticity in Reinforced Concrete New York 1982
- (13) Comite du Europeen du Beton: Bullentin D information, No 35 Paris Mars 1962
- (14) Cradshteyn, Ryzhik : Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press 1980
- (15) Dugar Yan S.M: Theory of Plates and Shells, Erevan 1964
- (16) Eibl.J Juanyi C: Stude zum Trag-und Vervomungsverhalten von Stahlbeton.Deutcher Aussurs fur Stahlbeton, Heft 260 Berlin 1936
- (17) Fagerlund G: Golv på mark utan fuktskador, BPA Byggproduktion AB och Svenska Riksbyggen; Handling 32 Stockholm
- (18) Frölich O K: Druckverteilung in Baugrunde, Wien 1934
- (19) Hogg A HA: Equilibrium of a thin plate symmetrically loaded, resting on an elastic foundation of infinite depth, Philosophical Magazine Ser.1 Vol. 25 March 1938
- (20) Holl DL: Equilibrium of a Plate,Symmetrically Loaded, on a Flexible Subgrade, Iowa State coll. Journ of science, July 1938, Vol.12, No4.
- (21) Holl DL: Thin Plates on Elastic Foundation. Proc.5th inf. congr. Appl. Mech. Cambridge Mars 1938
- (22) Holmberg Å: Cirkulära plattor med jämt fördelad last på elastiskt underlag,Betong 1946:1

- (23) Holmberg Å: Cylindriska skal och flytande balkar, Nomogram för beräkning, Betong 1948:1
- (24) Jensen JF mfl: Jernbetongplader med hjørnelast, ABK Danmarks Tekniske Højskole, Serie 1 No.68 1981
- (25) Losberg A: Design methods for Structurally Reinforced Concrete Pavements, CTH handlingar 250 Göteborg 1961
- (26) Mroz A: Mathematical Models of inelastic Material Behaviour. Solid Mechanics Division. University of Waterloo, Waterloo 1973
- (27) Odemark N: Undersökning av elasticitetsegenskaperna hos olika jordarter samt teori för beräkning av beläggningar enligt elasticitetsteorin, Statens väginstytut medelände 77 Stockholm 1949
- (28) Park R, Gamble WL: Reinforced Concrete Slabs, Wiley Wiley 1980
- (29) Provisoriska trafikbestämmelser, Statens vägverk TB124 Stockholm 1979
- (30) Råde, Westergren: BETA Mathematics Handbook, Studentlitteratur LUND 1988
- (31) Spangler HG: Stresses in the Corner Region of Concrete Pavements, Iowa Engineering Experimental Station Bullentin 157 Ames, Iowa 1942
- (32) Terazawa K: On the Elastic Equilibrium of Semi-Infinite Solides. Joun. coll Science. Imp. Univ. Tokyo xxxvii Art 7 Dec. 1916
- (33) Terzaghi K, Peck RB : Soil Mechanics in Engineering Practice, Wiley 1948 Timmoshenko S Goodier JN: Theory of Elasticity 3 uppl. New York 1973

- (34) Timoshenko, Woinowsky, Krieger: Theory of Plates and Shells, New York 1959
- (35) Watson GN : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge 1944
- (36) Westergaard HM: Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analyses, Public roads vol.7 No.2 April 1926
- (37) Winkler E: Die Lehre von Elasticität und Festigkeit Prag 1867
- (38) Winter, Urquart, O'Rourke, Nilson: Design of Concrete Structures, MC Graw Hill 1954
- (39) Wittman ED : Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete, Martinlis Nijhoff Haag 1982
- (40) Wästlund G, och Bergström,SG: Preliminärt förslag till dimensioneringsföreskrifter för flygfältsbeläggningar av betong, CBI Stockholm 1947, Stencilled report