View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

El modelo de barras: una estrategia para resolver problemas de enunciado en Primaria

Sergio Urbano Ruiz, Universidad Camilo José Cela, España
José Antonio Fernández Bravo, Universidad Camilo José Cela, España
María Pilar Fernández Palop, Universidad Camilo José Cela, España

Resumen: *Una de las mayores dificultades a que se enfrentan los alumnos de Primaria en Matemáticas es la resolución de problemas. En Singapur se desarrolló en los años 80 una estrategia conocida como Modelo de Barras. Sus tres variantes, el modelo Todo-Parte, el modelo de Comparación y el modelo Antes-Después otorgan al Modelo de Barras la posibilidad de ser aplicados en un amplio espectro de problemas de enunciado. Además, prepara el camino para que el alumno sea capaz de asimilar con más facilidad y naturalidad el álgebra en etapas educativas posteriores. En este trabajo se muestran las tres variantes del Modelo de Barras con varios ejemplos de aplicación.*

Palabras clave: *modelo de barras, educación, primaria, problemas, matemáticas*

Abstract: *One of the biggest difficulties that Primary students face in Mathematics is problem solving. A strategy known as The Bar Model was developed in Singapore in the 1980's. Its three variables (The Part-Whole Model, The Comparison Model and The Before-and-After Model) grant The Bar Model the possibility of being applied to a wide range of formulation problems. Besides, it paves the way for the student to assimilate algebra in an easier and more natural way in later educational stages. This paper shows the three Bar Model variables and several examples of its use.*

Keywords: *Bar Model Method, Education, Primary, Problems, Mathematics*

Introducción

Existe una extensa producción investigadora en cuanto a la resolución de problemas mediante métodos heurísticos en Matemáticas. Aunque muchas veces la definición del término "problema" en el ámbito educativo puede parecer evidente, existen multitud de diferentes significaciones no equivalentes. En algunos casos no se ofrece definición alguna (Villagrán, Guzmán, Pavón y Cuevas, 2002; Blanco Nieto, 1993), en otros la definición carece de profundidad (como en Castro Martínez, 2008) y en otras ocasiones el concepto de problema se trata con mayor seriedad y considerando los matices que tiene: para empezar, la cualidad que hace de un ejercicio un problema es subjetiva (Fernández Bravo, 2010). En cuanto a este trabajo, la definición de problema que se ajusta a nuestras necesidades se podría parecer a "ejercicio en el que para hallar la respuesta se requiere la manipulación aritmética de los datos presentes en el enunciado".

En cuanto a la resolución de problemas, tomando una definición no excesivamente rigurosa, una de las fuentes más recurrentes, tanto por pionera como por aceptada, es la teoría de Polya al respecto, que se puede resumir en entendimiento, diseño, implantación y visión retrospectiva (Santos, 1996). Aunque como estrategia general pueda ser aplicada de forma consciente o inconsciente, implícita o explícita por parte de los profesores de Matemáticas a la hora de enseñar a sus alumnos a resolver problemas, es demasiado generalista y por tanto es muy difícil para todos los alumnos aplicarla con buenos resultados. Beagle (1979, a través de Castro, 2008) reconoce que la diversidad tanto de problemas como de estudiantes hace impracticable la aplicación de una o unas pocas estrategias de resolución de problemas en Matemáticas para su enseñanza por el común de estudiantes.

Desde un punto de vista menos formal, algunas estrategias utilizadas en el aula suelen incluir la representación pictórica del problema siempre que sea posible (como recomienda Schoenfeld, 1985) o la búsqueda de palabras clave en el enunciado que puedan indicar al alumno cómo deben operar

Revista Internacional de Ciencia, Matemáticas y Tecnología
Volumen 3, Número 1, 2016, <http://sobrelaeducacion.com>, ISSN 2386-8791
© Global Knowledge Academics S. Urbano Ruiz, J. A. Fernández Bravo, Mª P. Fernández Palop. Todos los derechos reservados. Permisos: soporte@gkacademics.com

los datos. La polisemia, la sinonimia y la imprecisión del lenguaje natural hacen que esta estrategia sea muy propensa a errores, y por tanto poco fiable.

En cualquier caso, en la literatura es frecuente encontrar métodos muy generales (como la lista de Polya) o tan específicos que tienen un reducido ámbito de aplicación, de modo que se convierten más bien en algoritmos (por ejemplo, el cálculo del área de un polígono complejo mediante la descomposición del mismo en polígonos más simples).

En la educación española figura la resolución de problemas como un objetivo primordial de la educación matemática (Castro, 2008), para lo cual se promulga la utilización de estrategias sencillas como el ensayo y error, la simplificación del problema, el análisis del enunciado y la validación de la solución calculada. Algunas de estas estrategias, si bien no carentes de validez, nuevamente adolecen de una generalidad que impide una aplicación concreta a cada problema, por no hablar de la última, que no se puede considerar estrategia para resolver un problema ya que parte de que el alumno ha obtenido la solución al mismo.

Cabe preguntarse cómo encaran los libros de texto de Matemáticas de Primaria en España esta particular dificultad. Fernández, Caballero y Fernández (2013) nos informan de las cuatro editoriales de uso más común en la Comunidad de Madrid (SM, Anaya, Edelvives y Santillana). Haciendo un análisis superficial de los libros de texto de 6º de primaria de esas cuatro editoriales (con contenidos correspondientes a la ley en vigor en 2013, la LOE), vemos cómo en dos de ellas no existen medidas específicas para enseñar a los alumnos a enfrentarse a un problema. Esto significa que la editorial deja esta tarea enteramente en manos del profesor. En las otras dos, por contra, se ofrece al estudiante una estrategia en cada unidad, a menudo (aunque no siempre) aplicable solo a los problemas de dicha unidad. Algunas de dichas estrategias son:

- Buscar las respuestas posibles, elaborando una lista y eliminando aquellos valores que no cumplan las condiciones del enunciado.
- Utilizar un dibujo para representar la situación.
- Estudiar casos más sencillos. Con esto se refieren a aplicar una especie de inducción informal, empezando con casos con números sencillos para, después de haber identificado una regla de formación, aplicar ésta al caso del enunciado.
- Ensayo y error.
- Comprobar la solución.

Es importante hacer notar que, si bien éstas y otras estrategias pueden ser muy útiles y un adulto las aplicará más o menos inconscientemente para resolver problemas de este nivel, las indicaciones que ofrecen estos libros nunca orientan al alumno hacia cómo saber qué operaciones debe realizar con los datos. Además, estas estrategias son sumamente dispares y la inmensa mayoría tienen un ámbito de aplicación muy reducido (por ejemplo, no mezclar nunca unidades de medida distintas en los cálculos, descomponer una figura en polígonos de área conocida, buscar datos en varios gráficos).

En Singapur, sin embargo, en los años 80 se desarrolló un método muy versátil para la resolución de problemas de enunciado. Singapur existe como estado independiente desde 1965. Con una educación fraccionada, dirigida por cuatro corrientes educativas diferentes (malasia, china, tamil e inglesa), se embarcó en 1979 en la confección de un riguroso estudio (conocido como el Informe Goh) cuyo objetivo sería la identificación de las fortalezas y debilidades del sistema educativo de entonces, con el fin de implementar uno nuevo más fuerte. Hoy en día, los alumnos de primaria singapurenses, herederos del New Education System nacido en aquellos años pueden presumir de que sus puntuaciones se sitúan entre las más altas del mundo en las pruebas TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) y en el prestigioso informe PISA (*Programme for International Student Assessment*).

El primero, TIMSS, se dirige en primaria a alumnos de 4º curso cada cuatro años. Según el informe que recoge los resultados de la prueba de 2011 (Martin, Mullis, Foy y Stanco, 2012), Singapur consiguió la segunda mejor puntuación del mundo, con 583 puntos. España, por su parte, logró una discreta puntuación de 482 puntos, por debajo tanto de la media de la OCDE (522 puntos) como de la media mundial (491 puntos).

Por su parte, las pruebas PISA se realizan cada tres años, y se aplica a estudiantes de 15 años (que en España cursan 3º de ESO). La última vez que se celebró fue en 2012. En esta ocasión, según el estudio publicado por la OCDE en 2013, Singapur obtuvo la mejor puntuación del mundo como país (la región de Shanghai superó su puntuación, pero no es un país), llegando a los 573 puntos. España nuevamente se tuvo que conformar con 484 puntos, 10 puntos por debajo de la media de la OCDE.

Una de las características que distinguen al sistema educativo singapurense y que pueden explicar en parte su éxito en las pruebas internacionales es la estrategia concebida con el Informe Goh y perfeccionada desde entonces, conocida con el nombre de modelo de barras (en inglés, *bar model method*).

El modelo de barras es una estrategia para representar gráficamente los datos de un problema de enunciado. Este método ayuda a comprender las relaciones entre los datos suministrados en el enunciado con los datos que se piden en el problema, de modo que facilita al alumno la comprensión de las operaciones que debe realizar para resolverlo.

Es un método extensivamente utilizado en su país de origen, hasta el punto de que es prácticamente imposible encontrar un alumno de 6º de primaria en Singapur a quien no se haya enseñado previamente este modelo.

El modelo de barras

Para poder resolver un problema, lo importante es la visualización de los datos de que disponemos y de su manejo para dar una respuesta correcta, desprovista de cualquier información superflua que el enunciado pueda ofrecer. Pensemos en el enunciado siguiente:
"Andrés planea hacer un viaje en moto para visitar a su primo. Cuando ya ha recorrido las cuatro quintas partes del viaje, para a tomar un café. Mientras está tomando el café, calcula que le quedan por recorrer 30 kilómetros. ¿A qué distancia vive el primo de Andrés?"

En un problema como éste no es importante si Andrés va en moto o si parte de su casa. De hecho, desde un punto de vista formal, en el fondo ni siquiera nos importa cuántos kilómetros recorre Andrés. Lo que nos importa es calcular un número igual a cuatro quintas partes de sí mismo más 30 unidades. Obviamente, no se puede esperar que un alumno de primaria haga una abstracción así. Sin embargo, un cierto nivel de abstracción es necesario si hemos de buscar un método que permita resolver este problema. Y aún más si a ese método se le pide la versatilidad necesaria para poder ser utilizado en un abanico más amplio de problemas.

El modelo de barras cumple los requisitos anteriores. En el fondo, la inmensa mayoría de los problemas de enunciado (sobre todo si se excluyen problemas más específicos como los problemas de geometría o probabilidad, que implican la aplicación de unos procedimientos específicos) se basan en la manipulación aritmética de los datos que se proporcionan. Es a este tipo de problemas de enunciado al que está dirigido el método.

Cabo, Moreno y Bazán (2007) explicitan los pasos a seguir para aplicar el modelo de barras, en una lista similar a la ofrecida por Polya:

- Leer con atención el problema completo.
- Identificar los sujetos del problema.
- Dibujar una barra unidad para cada uno de ellos.
- Leer el problema de nuevo, haciendo paradas en cada dato numérico del enunciado.
- Etiquetar las barras unidad con los datos suministrados por el enunciado.
- Identificar la cantidad desconocida que constituye la pregunta del problema y etiquetarla.
- Realizar las operaciones correspondientes y escribir el resultado en el gráfico.
- Redactar, como una oración completa, la solución del problema.

El núcleo del método consiste en la representación de barras (rectángulos) que representan las cantidades involucradas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas. La representación gráfica del enunciado es clave. Según Ho y Lowrie (2014) dibujar diagramas representando las relaciones entre cantidades ayuda en el entendimiento y la resolución de problemas que no tienen porqué ser gráficos.

Otra parte crucial de este método es el etiquetado, pues se deben escribir etiquetas en cada barra o parte de ella con los valores que representan, y (esto es fundamental) con una interrogación los valores desconocidos.

Al disponerlos gráficamente, los datos conocidos y desconocidos se organizan de relativamente pocas formas diferentes, lo que facilita al alumno la identificación de la operación que corresponde a cada una de ellas. El mayor problema del método generalista de Polya es que no indica al alumno qué operación debe hacer con los datos, y lógicamente no es factible que un método absolutamente general pueda orientar al alumno en este sentido. De hecho, el no identificar la operación que los alumnos deben realizar con los datos es un problema muy común, puesto de manifiesto entre otros por Englard (2010). En esas situaciones, o bien los alumnos buscan palabras clave en el enunciado que traducir en operaciones, a veces de forma incorrecta, o bien simplemente realizan una operación más o menos al azar. Mediante el modelo de barras se minimiza esta dificultad. Además, etiquetar los datos desconocidos ayuda al alumno a no olvidarse de responder el problema en su totalidad. Por ejemplo, en el problema "si tenemos el triple de cuentas blancas que de cuentas rojas y en total tenemos 44 cuentas, ¿cuántas cuentas blancas tenemos?" un estudiante puede calcular que hay 11 cuentas rojas y dar por respondido el problema cuando no es así. Éste es un error muy común, característico de los problemas de múltiples pasos. Sin embargo, al tener que poner etiquetas en todas las barras, el estudiante es más consciente de que todavía queda otro valor que calcular, que en el anterior ejemplo es precisamente el que pide el problema.

Otra faceta fundamental en la aplicación del modelo de barras radica en la reducción a la unidad. El alumno debe identificar las partes de las barras que son "unitarias" y que nos permiten hacer comparaciones con otras partes o con otras barras, y así identificar relaciones entre unos valores y otros. Esto es especialmente importante cuando las cantidades involucradas son fracciones, como veremos más adelante. Por ejemplo, si en el enunciado se habla de un quinto de una cantidad desconocida, se debe proceder dibujando una barra que representa el total, dividirla en cinco partes (que serán las barras unidad) y coloreando o sombreando una de ellas.

Además, las barras deben representar lo más fielmente posible la situación descrita en el enunciado. Esto en ocasiones significa que deben cumplir varias condiciones a la vez, con lo que el alumno puede haber dibujado en primera instancia unas barras para cumplir la primera condición del enunciado pero no una segunda. En ese caso, debe dibujarse una nueva versión de las barras para adecuarse a la situación. Por ejemplo, después de dibujar dos barras que representan números cuya suma es cierta cantidad, el enunciado además dice que uno de los números es el triple que el otro. Siendo muy improbable que por azar las barras cumplan esta segunda condición, el alumno deberá dibujar una segunda versión del modelo, en el que además una de las barras es el triple de grande que la otra.

Por otro lado, precisamente por la necesidad de comparar fragmentos y buscar unidades comunes en distintas barras es especialmente importante que las barras tengan tamaños realistas. Ésta es una condición especialmente difícil de cumplir cuando hay que dibujar una barra cuya longitud se desconoce, como nos muestra Cheong (2002). En la medida de lo posible, sin embargo, para aplicar correctamente el modelo de barras es conveniente ser consciente de que la representación debe ser precisa y que las barras deben respetar las proporciones entre unas y otras, pues de lo contrario podrían llevar a conclusiones erróneas o hacer más difíciles de percibir las relaciones entre unidades.

Existen tres formas de aplicar el modelo de barras, pero todas comparten la misma filosofía. Es importante señalar que el mismo problema puede ser resuelto correctamente de diferentes formas, esto es, no necesariamente cada problema trae asociado un único modelo.

También es notable el hecho de que los nombres de las tres formas de aplicar el modelo de barras no figuran más que en la literatura científica que describe el modelo, pero no en los propios libros de texto de Singapur.

Para la presentación de las tres variantes del Modelo de Barras se han elegido enunciados pertenecientes a conjuntos muy dispares de ejercicios. En algunos casos pertenecen a libros de texto de Singapur, en otros casos se encuentran en libros de texto españoles, y finalmente otros se encuentran haciendo sencillas búsquedas por Internet (en castellano y en inglés). En ningún caso se han copiado literalmente, pues los nombres de los personajes involucrados en los enunciados han sido alterados para “españolizarlos”.

Los ejercicios han sido seleccionados en base a dos criterios fundamentales. El primero de ellos es la simplicidad, pues este trabajo tiene por objetivo la presentación del Modelo de Barras y no el uso del mismo con técnicas útiles para resolver problemas complicados (lo cual ciertamente es un tema adecuado para futuros trabajos de investigación). No obstante, y tanto por no aburrir al lector como para no ocultar la potencia de la aplicación del Modelo de Barras en problemas (sencillos) de múltiples pasos, se ha optado frecuentemente por la selección de éstos últimos antes que por problemas demasiado lineales.

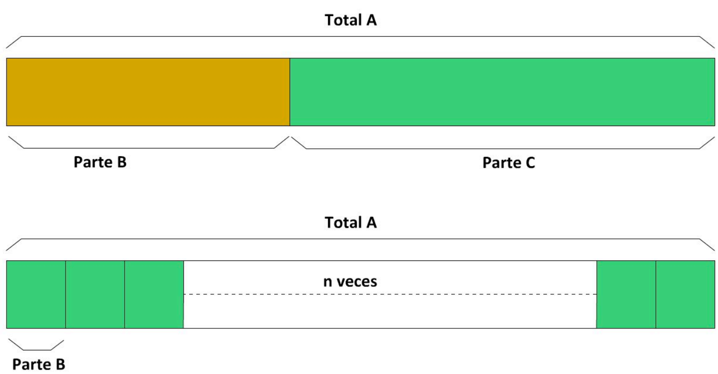
El segundo es la adecuación a los modelos presentados. Como veremos, cada uno de los modelos permite la resolución de una forma directa de problemas que cumplen una serie de características. Esto no significa que cualquier problema que no cumpla esas características no pueda ser resuelto, sino que es posible que para su resolución haga falta manipular los modelos de formas que, como acabamos de mencionar, caen fuera del objetivo que este trabajo pretende cubrir.

Modelo Todo-Parte (Whole-Part)

Esta primera tipología se utiliza para representar situaciones en las que existe un total y varias partes que componen ese total.

Lo que tiene que hacer el alumno es representar los datos conocidos como barras consecutivas, conformando una barra más grande que representa el total. Así, dependiendo de la forma del enunciado, podemos tener dos tipos básicos de representación de problema. Éstos vienen reflejados en la figura 1.

Figura 1: Tipologías de modelo Todo-Parte



Fuente: Elaboración propia, 2015.

La primera de las tipologías (la barra superior en la Figura 1) correspondería a un ejercicio en el que se hay tres cantidades involucradas, dos de ellas son las partes y la tercera es el total. Las operaciones necesarias para resolver el ejercicio serán sumas o restas En función de lo que pida el enunciado, el alumno puede conocer la operación que debe realizar, ya que:

A=B+C

B=A-C

C=A-B

Y estas operaciones son independientes de la forma en que esté redactado el enunciado. Por ejemplo, este modelo se puede utilizar en los siguientes problemas:

“Entre Juan y Luis tienen 50 canicas. Juan tiene 15 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Luis?”

“Juan tiene 15 canicas, y Luis tiene 35 canicas. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?”

En cuanto al segundo tipo (representado en la barra inferior de la Figura 1), implicará para su resolución multiplicaciones y divisiones. Típicamente, en el enunciado se indica que alguna cantidad es n veces otra. Nuevamente, en función del valor pedido en el enunciado, las operaciones serán las siguientes:

A=n x B
B=A : n
n=A : B

Como ejemplos de ejercicios para los que es apto este modelo tendríamos los siguientes:

"En una clase hay 30 alumnos, y cada uno de ellos trae al recreo 5 canicas. ¿Cuántas canicas hay entre todos los alumnos?" (A=n x B).

"Cada alumno de una clase trae al recreo 5 canicas. En total se han reunido 150 canicas. ¿Cuántos alumnos tiene la clase?" (n=A : B).

"En una clase de treinta alumnos, cada uno de ellos trae al recreo la misma cantidad de canicas. Si en total se han reunido 150 canicas, ¿cuántas canicas ha traído cada alumno?" (B=A : n).

Como ejemplo de resolución completa, tomemos el siguiente enunciado: "Hoy, un museo ha recibido 300 visitantes, de los que una cuarta parte han sido adultos y el resto niños. El precio por adulto es de 3€, mientras que cada niño paga 1€. ¿Cuánto ha recaudado hoy el museo?"

El indicio que apunta a que este problema es susceptible de ser resuelto mediante el modelo Todo-Parte es el hecho de que se habla de una cantidad total (el número de visitantes del museo) que se descompone en varias partes (adultos y niños).

El modelo de barras se aplicaría, pues, mediante el siguiente procedimiento. En primer lugar, se dibuja una barra para representar el total de visitantes del museo, etiquetándolo convenientemente. En segundo lugar, se divide en cuatro partes, pues una cuarta parte corresponde a los adultos (cada cuarto sería nuestra barra unidad). Se etiquetan igualmente cada una de estas partes, tal y como podemos ver en la figura 2.

Figura 2: Aplicación del modelo Todo-Parte

Fuente: Elaboración propia, 2015.

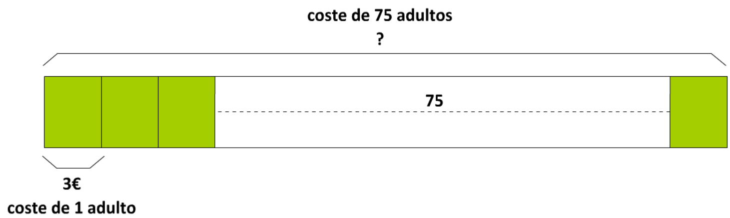
Esta configuración de datos debe dar la siguiente información al alumno que tiene que resolver el problema:

- La barra unidad es el número de adultos. Debe distinguirse entre una unidad (un visitante) y una barra unidad, que es un conjunto de unidades relacionado con diferentes magnitudes del problema (conocidas o desconocidas) que utilizaremos para relacionar unas cantidades y otras.
- El número de adultos es el número de visitantes dividido entre 4, y el número de niños se puede hallar de dos formas: o bien como el número de adultos multiplicado por 3, o bien como la diferencia entre 300 y el número de adultos.

Como vemos, la potencia del modelo radica en que no importa la redacción del problema, pues los datos se ven representados de forma que el alumno puede reconocer (si es necesario y al principio, aunque no es la opción deseable, de memoria) la operación que relaciona unos valores y otros. En este caso, el total es la suma de las partes, y una de las partes es igual al total menos la otra parte.

En un problema de varios pasos como el anterior, sin embargo, no hemos terminado. Una vez calculados cuántos adultos y cuántos niños visitaron el museo, es necesario calcular cuánto dinero se recaudó por cada grupo. Aplicando de nuevo el método anterior, se muestra otra posible relación entre valores: la división de una cantidad conocida entre un número desconocido de otras cantidades menores, como se muestra en la figura 3.

Figura 3: Aplicación del modelo Todo-Parte (II)



Fuente: Elaboración propia, 2015.

Para esta segunda parte del ejercicio, el modelo Todo-Parte demuestra que la relación entre la cantidad que se nos pide y el dato que conocemos es que la primera es igual a 75 veces la segunda, luego la cantidad recaudada por los adultos asciende a 225€. Haciendo una barra semejante se consigue calcular el dinero recaudado por los niños. Evidentemente, un alumno de últimos cursos de primaria quizá no necesite acudir al modelo de barras para esta segunda parte, pero en cualquier caso el ejemplo pone de manifiesto que es un modelo útil para resolver problemas de muy diversas dificultades.

Por tanto, a la vista de los modelos que habría dibujado, el alumno podría redactar la resolución del ejercicio de la siguiente forma:

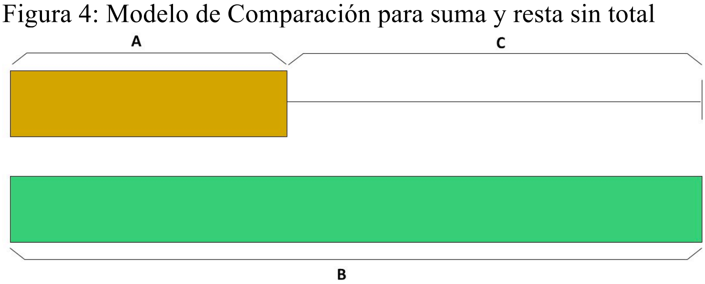
"*Una unidad es la cuarta parte del total, así que es igual a 300 personas :4=125 personas.*
Como hay una unidad de adultos, hay 125 adultos.
Como hay tres unidades de niños, el número de niños es 3x125=225.
Por cada adulto se ganan 3€ y hay 125 adultos, así que se ganan 125x3€=225€ por los adultos.
Cada niño paga 1€ y hay 225 niños, así que se ganan 225€ por los niños.
En total, el museo ha recaudado hoy 225€+225€=450€".

Nótese la importancia de la última oración, que contiene la respuesta a la pregunta del enunciado en forma de oración completa.

Modelo de Comparación

El segundo tipo se aplica en situaciones en las que la mejor estrategia consiste en comparar dos situaciones distintas. Para cada una de las situaciones, el alumno debe dibujar una barra, de modo que tendrá dos barras alineadas con longitudes diferentes. Cuando además el problema involucra la suma de las dos barras, es decir, el total de las cantidades, se dibuja un segmento vertical a la derecha de ambas barras. Como en el modelo Todo-Parte, es muy importante etiquetar adecuadamente todos los elementos dibujados. En la Figura 4 podemos ver los casos de suma y resta para el caso en que el total no está involucrado.

Figura 4: Modelo de Comparación para suma y resta sin total



Fuente: Elaboración propia, 2015.

La anterior disposición pone de manifiesto las siguientes relaciones entre las cantidades:

A=B-C
B=A+C
C=B-A

Por ejemplo, esta versión del Modelo de Comparación se utilizaría en problemas similares a los siguientes:

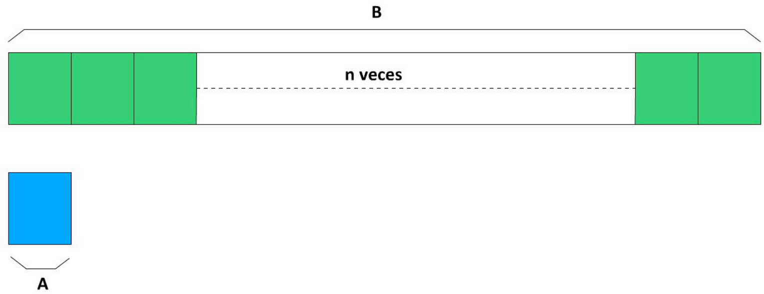
"Luis tiene 15 canicas. Juan tiene 12 canicas más que Luis. ¿Cuántas canicas tiene Juan?" (B=A+C).

"Luis tiene 15 canicas, y 12 canicas menos que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?" (B=A+C).

"Luis tiene 15 canicas y Juan tiene 27. ¿Cuántas canicas más tiene Juan que Luis?" (C=B-A).

También es aplicable este modelo a situaciones en las que una de las cantidades es un múltiplo de la otra, lo cual dará lugar a operaciones de producto o división. Estas situaciones se reflejan en la Figura 5.

Figura 5: Modelo de Comparación para producto y división sin total



Fuente: Elaboración propia, 2015.

En este caso, las operaciones que extraemos del modelo son las siguientes:

B=n x A

A=B:n

n=B:A

Los problemas a los que aplicar el modelo anterior serían similares a los siguientes:

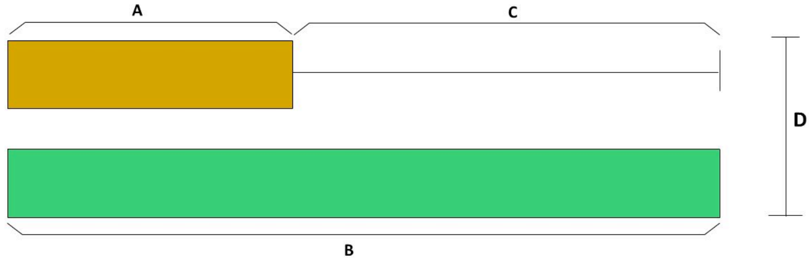
"Una planta crece 2 centímetros cada día. ¿Cuántos centímetros habrá crecido en una semana? (B=n x A)

"Una planta ha crecido 14 centímetros en una semana. ¿Cuántos centímetros crece cada día, si suponemos que cada día crece lo mismo?" (A=B:n)

"Una planta que crece 2 centímetros al día ha crecido 14 centímetros. ¿Cuántos días ha tardado en crecer esa cantidad?" (n=B:A).

Sin embargo, cuando el total también forma parte del enunciado, ya sea como dato o como incógnita, el alumno debe representar el problema, como antes comentábamos, con el total como un segmento vertical. En estos casos, cuando hablamos de un problema en el que aplicar el modelo de Comparación para producto y división con total, es interesante comprobar que se puede utilizar igualmente el modelo de Todo-Parte para el producto y división. En cambio, el modelo de Comparación para suma y resta con total (Figura 6) no es tan fácilmente traducible a un modelo Todo-Parte. Para ello se requeriría el uso de técnicas no tan básicas que caen fuera del alcance de este trabajo.

Figura 6: Modelo de Comparación para suma y resta con total



Fuente: Elaboración propia, 2015.

Las operaciones que nos conducirán a dar valor a A, B, C o D serán las siguientes:

D=A+B

A=D-B

B=D-A

C=B-A

Podemos aplicar esta forma a los siguientes enunciados:

"En una clase de 35 alumnos hay 14 chicos. ¿Cuántos chicos menos que chicas hay? ¿Cuántas chicas hay?" (C=B-A; B=D-A).

"En una clase en la que hay 14 chicos hay 7 chicas más que chicos. ¿Cuántos alumnos tiene la clase?" (B=D-A; D=A+B).

"En una clase en la que hay 21 chicas hay 7 chicos menos que chicas. ¿Cuántos alumnos tiene la clase?" (A=D-B; D=A+B).

Cabe destacar la necesidad de hacer un análisis previo de los números involucrados. El alumno debe decidir cuál de las dos cantidades es más grande, lo cual solamente puede saber o bien de forma directa si en el enunciado figuran las dos cantidades o porque el enunciado lo indica más veladamente, indicando que una de las cantidades es n unidades mayor o menor que la otra. No hacer este análisis podría dar lugar a una representación que lleva a confusión, pues podría representarse una cantidad con una barra mayor que la de otra cantidad, cuando el valor es en realidad menor.

Existe una última combinación de incógnitas que, si bien se puede resolver, tiene una complejidad mayor que los ejemplos anteriores. Correspondería a un problema como el siguiente:

"En una clase de 35 alumnos hay 7 chicas más que chicos. ¿Cuántos chicos hay? ¿Cuántas chicas hay?". Este caso requeriría la utilización de otras formas de manipular los datos, que quedan fuera del ámbito de este artículo.

Consideremos, como ejemplo de puesta en práctica del modelo, el siguiente problema:

"Aarón y Beatriz tienen cada uno un puesto de polos para recaudar dinero para el viaje de fin de curso. Empiezan con el mismo número de polos, pero a lo largo del día Aarón vende 25 polos y Beatriz vende 31. Si Aarón termina con el doble de polos que Beatriz, ¿cuántos polos tenían al principio?"

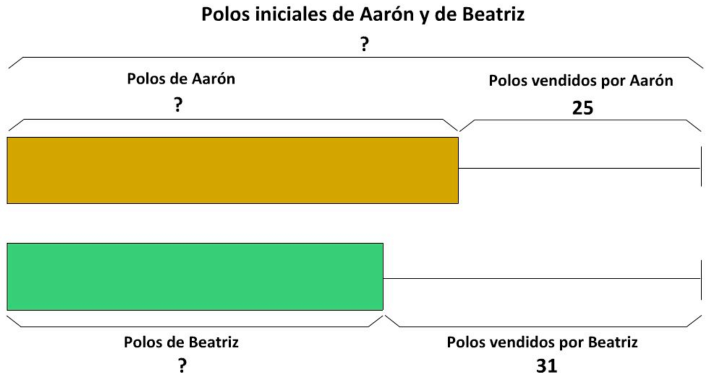
En este caso, aunque también existe un total (los polos que hay al principio), que podemos decir que se descompone en dos partes (los polos de Aarón y los de Beatriz), este problema no se puede resolver (al menos no de forma sencilla) mediante el uso del modelo Todo-Parte. De poderse aplicar, sería a traves de alguna de las siguientes tres formas:

1. Un total inicial dividido en dos partes iguales. Al desconocerse todos los elementos del modelo y no reflejar el resto de datos del enunciado, claramente descartamos esta opción.
2. Un total final (el de después de vendidos los polos) dividido en tres unidades (una para los polos de Beatriz y dos para los de Aarón). En este caso desconocemos también todas las cantidades involucradas y seguimos sin utilizar el resto de datos del enunciado.
3. Un total inicial dividido en tres unidades (una para los polos de Beatriz y dos para los de Aarón) más otros dos bloques, uno de tamaño 25 y otro de tamaño 31 (que son los polos vendidos por Aarón y Beatriz, respectivamente). Este modelo utiliza todos los datos y además los representa fielmente, pero no coincide con los modelos básicos de modelo Todo-Parte que hemos visto anteriormente y por tanto su resolución no es directa.

Por supuesto, es lícito que un alumno intente, por ensayo y error, aplicar modelos hasta dar con el que le permite resolver el problema. Con la práctica, si recibe instrucción en este método, desarrollará la habilidad de comprender cuál es el modelo más adecuado a cada ocasión.

Planteamos la situación. Dos barras iguales representando los polos con que empiezan, a las que se quitan las partes correspondientes a los polos vendidos.

Figura 7: Modelo de Comparación. Paso 1



Fuente: Elaboración propia, 2015.

La Figura 7 muestra la situación para la primera parte del enunciado, en la que se dan los datos del número de polos vendidos. Pero no cumple la segunda, en la que Aarón tiene el doble de polos que Beatriz. Esto significa que debemos reescalar las barras coloreadas para que la superior (la de Aarón) sea el doble de grande que la inferior (la de Beatriz).

El modelo mostrado por la Figura 8 sí representa con más fidelidad la situación mostrada por el enunciado. Para resolverlo, debemos identificar el bloque unidad, que es el número de polos de Beatriz. Además, por comparación entre la barra superior de polos vendidos y la barra inferior, esa unidad equivale al número de polos vendidos por Beatriz menos el número de polos vendidos por Aarón.

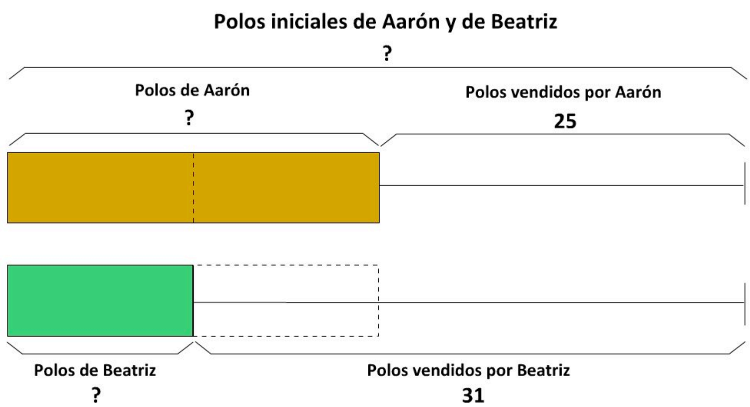
El alumno podría redactar la solución del problema de la forma siguiente:

"*Una unidad es igual a la cantidad de polos vendidos por Beatriz menos la cantidad de polos vendidos por Aarón, así que la unidad es 31-25=6. Beatriz ha terminado con 6 polos.*

El número inicial de polos de Beatriz es igual a la unidad más 31, así que es 6+31=37.

Por tanto, tanto Aarón como Beatriz comenzaron con 37 polos cada uno."

Figura 8: Modelo de Comparación. Paso 2



Fuente: Elaboración propia, 2015.

Modelo Antes-Después

Este último tipo de modelo se aplica cuando la situación a que se refiere el enunciado implica un estado anterior y uno posterior, dándose algunos datos en ambos estados. Para enunciados simples, el modelo no tiene ninguna diferencia con el modelo de Comparación o incluso con el Todo-Parte.

Por ejemplo, el problema siguiente: "Andrés tiene 20€. Se gasta 5€ en un bocadillo. ¿Cuánto dinero tiene ahora Andrés?" se modelizaría mediante una barra de 20€ para la situación "antes" y dos barras, una de 5€ y otra desconocida para la situación "después", siendo el total de las barras de ambas situaciones idénticas. Es claramente la aplicación del modelo de Comparación. También se puede dibujar una barra que representa la cantidad inicial de 20€, dividida en dos partes, una de las cuales corresponde al dinero gastado en el bocadillo y la otra al dinero restante. Estaríamos aplicando el modelo Todo-Parte.

Sin embargo, para enunciados más complejos este modelo se nutre de los anteriores en el sentido de que el alumno representará dos grupos de barras (una para antes y otra para después), que según cómo estén ofrecidos los datos seguirán el modelo Todo-Parte o el modelo de Comparación. El alumno deberá buscar datos comunes en ambas situaciones para poder completar estas barras y aplicar lo que ya sabe de los modelos anteriores para resolver el problema.

La estrecha relación que guarda con los dos modelos ya mostrados hace que de hecho no siempre se considere un modelo propiamente dicho. Al fin y al cabo, muchos problemas resolubles mediante este modelo se pueden resolver también mediante el modelo de Comparación (comparando dos barras, una para el estado "antes" y otra para el "después"), con lo cual el modelo Antes-Después tiene un cierto carácter superfluo.

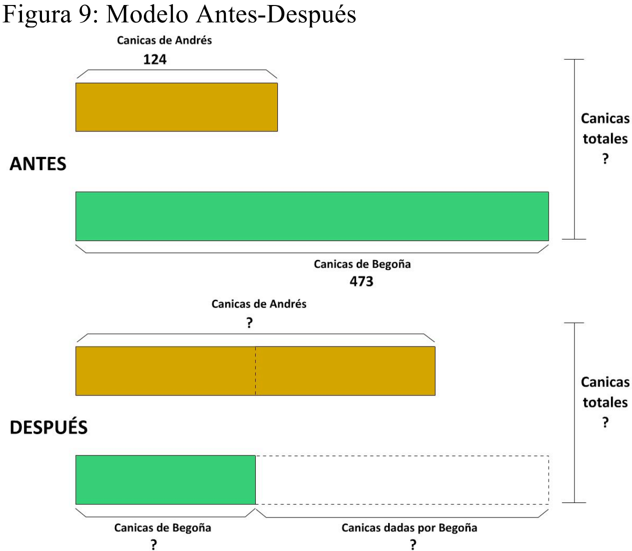
El siguiente ejemplo es un problema correspondiente a 4º de Primaria.

"Andrés tiene 124 canicas y Begoña tiene 473. Begoña da algunas de sus canicas a Andrés, de forma que ahora Andrés tiene el doble de canicas que Begoña. ¿Cuántas canicas ha dado Begoña a Andrés? ¿Cuántas canicas tiene ahora Andrés?"

El alumno sabe que tiene que aplicar el modelo Antes-Después porque el enunciado presenta dos situaciones separadas en el tiempo y nos da algunos datos para cada una de ellas. Podemos decir que el ámbito de aplicación de este método es algo más restringido que el de los dos modelos anteriores.

Empezamos representando dos juegos de barras, uno para la situación "antes" (en la que Andrés tiene 124 canicas y Begoña tiene 473) y otro para el "después" (en la que Andrés tiene el doble de canicas que Begoña). Esta representación aparece en la figura 9.

Figura 9: Modelo Antes-Después



Fuente: Elaboración propia, 2015.

Para el caso "antes" hemos optado por un modelo de comparación con total, aunque perfectamente podríamos haber aplicado el modelo Todo-Parte, pues en este caso ambos son equivalentes.

No necesitamos calcular todos los interrogantes, pero evidentemente no podemos calcular nada en el "después" sin saber cuántas canicas tenemos en total. Así pues, del modelo "antes", aplicando el modelo de Comparación para la suma con total, obtenemos la cantidad total de canicas. Esta cantidad es idéntica al total de canicas en el modelo "después" (pues en ningún momento se pierden o se dan canicas a terceros). Este dato y la aplicación del modelo de Comparación para la situación "después" nos permitirá conocer la cantidad final de canicas de ambos.

Una posible redacción del problema sería la siguiente:

"*El número total de canicas que tienen al principio Andrés y Begoña es 124 + 473 = 597.*

Como solamente se dan canicas entre ellos, al final tienen entre los dos la misma cantidad, 597 canicas. De esta cantidad, cada unidad es un tercio, así que la unidad es 597 canicas : 3=199 canicas.

Esta cantidad es el número de canicas de Begoña al final.

La cantidad de canicas de Andrés son dos unidades, así que 199x2=398.

Si Begoña tenía al principio 473 canicas y al final tiene 199, es que ha dado 473 canicas - 199 canicas = 274.

En resumen, Begoña da a Andrés 274 canicas. Andrés termina con 398 canicas."

Es muy interesante hacer notar que es difícil representar fielmente las barras de acuerdo a los datos y mucho más a los resultados. Por ejemplo, las canicas de Begoña "después" se han representado como menores que el número de canicas de Andrés "antes", lo cual a la vista de los resultados no es cierto. También es mucho menor la cantidad en que ha aumentado la barra de Andrés al recibir las canicas de Begoña que la propia barra indicando esa cantidad de canicas, contigua a la barra de canicas de Begoña "después", cuando deberían haber sido iguales. Sin embargo, en este caso tales imprecisiones no nos han impedido alcanzar la solución correcta, y es que aunque lo deseable sería que el modelo fuese un fiel reflejo de los datos del enunciado, a veces es muy difícil y puede ser incluso demasiado pedir para el alumno que así sea. Las dificultades en dibujar las barras proporcionadamente se ponen de manifiesto por Cheong (2002), quien afirma que, aunque efectivamente la solución puede no verse alterada, las proporciones entre las barras tienen que ser lo suficientemente bien respetadas como para que se puedan obtener deducciones válidas entre las partes conocidas y las desconocidas. En nuestro ejemplo, al aplicarse modelos de suma y resta no ha existido necesidad de respetar la proporción, no así si se hubieran utilizado modelos de producto o división. En cualquier caso, una estrategia de ensayo y error es siempre aceptable para representar correctamente el problema.

Conclusiones

Es importante recalcar que los tres modelos descritos en este trabajo no compiten entre sí por ser la mejor estrategia para ayudar a resolver problemas. Los tres son variantes del mismo método, cada una de las cuales es aplicable a un conjunto de problemas propio (salvando algunas intersecciones, es decir, problemas que se pueden resolver indistintamente a través de al menos dos de las tres variantes).

Puede, además, existir otra confusión en cuanto al uso del Modelo de Barras, y es que no sirve ni para entender el enunciado del ejercicio ni para resolver las operaciones que es necesario realizar para resolverlo. Fundamentalmente es una forma de estructurar visualmente las ideas del alumno con el fin de ayudarle a reconocer cuáles son esas operaciones que debe realizar (lo cual no es poca ayuda para él).

El trabajo de investigación llevado a cabo en Singapur para desarrollar este método tiene una enorme aplicación a la enseñanza en primaria. Además, numerosos estudios como por ejemplo Ho y Lowrie (2014) y Thirunavukkarasu y Senthilnathan (2014) muestran los beneficios del aprendizaje de esta estrategia de resolución de problemas de cara a la adquisición de herramientas matemáticas más potentes, en particular el Álgebra. No en vano, el uso del símbolo "?" para señalar datos desconocidos es un paso previo al uso de incógnitas, y las operaciones que los niños realizan a partir de los modelos son realmente ecuaciones.

No es, por otra parte, un método extremadamente fácil de dominar e implica dificultades que pueden llevar a error, como indica Cheong (2002). El entrenamiento que el profesor necesita para enseñar a sus alumnos a aplicar el Modelo de Barras no es desdeñable, ni siquiera para la resolución de problemas sencillos como los mostrados en este trabajo. Existen ciertas técnicas más elaboradas para, a partir de los modelos ya vistos, resolver problemas más complejos pero esto requiere mucha más práctica, estudio y paciencia por parte del profesor.

Por otra parte, no se debe considerar que las tres distintas estrategias de aplicación del modelo de barras son unas mejores que otras, sino que más bien cada una se puede aplicar en unas situaciones y no en otras, dependiendo del enunciado. No obstante, ya hemos hecho notar la existencia de situaciones en las que más de un método es procedente, con similar dificultad de aplicación.

Es importante señalar que el modelo no resuelve el problema. Es el alumno el que utiliza el modelo para representar los datos del problema. Por tanto, para aplicarlo correctamente es necesario que el alumno **comprenda** el problema. Esta habilidad previa, la comprensión lectora del enunciado, es un requisito para poder aplicar el Modelo de Barras con éxito pero el propio modelo de barras poco puede ayudar al alumno en ese aspecto. Es por esto que el profesor tiene otro frente abierto muy importante a la hora de enseñar al alumno a resolver problemas de enunciado, y que no se puede dejar de lado por el mero uso del Modelo de Barras en el aula.

Además, existe un efecto presente en determinados alumnos de secundaria, que son reticentes a emplear ecuaciones para plantear problemas y prefieren deducir las operaciones a realizar a partir del enunciado, resolviendo así el problema. ¿Ocurriría lo mismo, pero además aplicado a sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyos problemas se podrían resolver mediante el modelo de barras?

Aunque Singapur ha exportado su método a otros países, en España es prácticamente desconocido. En tiempos en los que los vaivenes políticos influyen de forma notable (y en general, negativamente) en las normativas de educación, podría ser interesante la adopción de nuevas técnicas con el objetivo de mejorar los resultados internacionales más bien discretos de que hace gala el sistema educativo español (Mullis, Martin, Foy y Arora, 2012; OECD, 2012, OECD, s.f.).

En particular, la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa, que entró en vigor en el sistema educativo español en el curso 2014-2015 en los cursos impares de Primaria, nace con vocación de mejorar dichos resultados y así lo explicita en su preámbulo. Sin embargo, los libros de texto no parecen hacerse eco de esta pretensión y continúan con estructuras similares a las de las ediciones para la ley anterior y sin la inclusión de métodos novedosos como el que presentamos en el presente artículo.

A pesar de ello, no todo el peso del cambio recae sobre los libros, ni siquiera sobre la Ley. Son al menos tres los frentes que se deben abrir para la implantación de una metodología novedosa:

- Los libros de texto, como hemos dicho antes, deben incluirla para fomentar su uso.
- Los profesores deben recibir formación en el área para poder emplearla adecuadamente en su labor diaria.
- En tercer lugar, y el más importante de todos, la metodología debe estar presente en los planes de estudio de las etapas que se encargan de formar a los futuros profesores. Este punto es crítico debido a que es la forma más eficaz de dar a conocer una nueva metodología al grueso del cuerpo de profesores. En España, la formación del profesorado, una vez obtenido el título universitario, no fomenta especialmente la difusión de metodologías innovadoras. Por esto es muy importante que estas medidas se tomen mientras el profesor se está formando en la Universidad.

Singapur es un estado con un grado de intervencionismo muy elevado comparado con España. Allí, los libros de texto son aprobados por el Ministerio de Educación previamente a su uso. Además, la formación y seguimiento del profesorado son muy estrictos. Ambas circunstancias han facilitado fuertemente la implantación del Modelo. En España, por muchas razones (entre otras, por poseer una mayor población, por la cesión de competencias a las Comunidades Autónomas, etc) el camino para este tipo de innovaciones es, desgraciadamente, mucho más lento y difícil.

REFERENCIAS

Ban Har, Y. (2011a). *Primary Mathematics (Standards Edition) Textbook 6A.* Singapore: Marshall Cavendish Education.

— (2011b). *Primary Mathematics (Standards Edition) Textbook 6B.* Singapore: Marshall Cavendish Education.

Blanco Nieto, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*(25), pp. 49-60.

Cabo, M., Moreno, G., y Bazán, A. (2007). *Método gráfico de Singapur: Solución de problemas, 1.* Madrid: Santillana.

Cheong, Y. K. (2002). The model method in Singapore. *The Mathematics Educator, 6*(2), pp. 47-64.

Castro Martínez, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. Paper presentado en Investigación en educación matemática XII.

Collars, C., Lee, K. P., Hoe, L. N., Leng, O. B., & Seng, T. C. (2009*). Shaping Maths. Coursebook 2nd Edition 6A.* Singapore: Marshall Cavendish Education.

— (2009). *Shaping Maths. Coursebook 2nd Edition 6B.* Singapore: Marshall Cavendish Education.

Englard, L. (2010). RAISE THE BAR. *Teaching children mathematics, 17*(3), pp. 156-165.

Fernández Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid: Mayéutica-Educación Ed.

Fernández Palop, P., Caballero García, P. A., y Fernández Bravo, J. A. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas? *Números*(83), pp. 131-148.

Ho, S. Y. y Lowrie, T. (2014). The model method: Students' performance and its effectiveness. *The Journal of Mathematical Behavior, 35,* pp. 87-100.

Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2009). *My Pals are Here! Maths 2nd Edition 6A.* Singapore: Marshall Cavendish Education.

— (2009). *My Pals are Here! Maths 2nd Edition 6B.* Singapore: Marshall Cavendish Education.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE, 10 de diciembre de 2013, pp. 97858-97921.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (s. f.). TIMSS 2011. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Recuperado de http://www.mecd.gob.es/inee/estudios/timss0.html el 1 de abril de 2015

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 International Results in Mathematics: TIMSS & PIRLS International Study Center and International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

OECD (2013). PISA 2012 Results in Focus: Secretary-General of the OECD.

— (s.f.). PISA FAQ. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/pisafaq.htm

Santos Trigo, L. (1996). Principios y Métodos de Ia Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. México D.F., México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando: Academic Press Inc.

Thirunavukkarasu, M. y Senthilnathan, S. (2014). Effectiveness of bar model in enhancing the learning of Mathematics at primary level. *International Journal of Teacher Educational Research, 3*(1), pp. 15-22.

Villagrán, M. A., Guzmán, J. I. N., Pavón, J. M. L. y Cuevas, C. A. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema, 14*(2), pp. 382-386.

SOBRE EL AUTOR

Sergio Urbano Ruiz: Nacido en Madrid en 1978. Licenciado en Matemáticas en 2002. Desde entonces ha alternado profesionalmente entre la docencia y la informática (en el área de programación). Ha impartido clases de Matemáticas en ESO y Bachillerato, y a nivel universitario ha trabajado en ESNE (Madrid) en la enseñanza de Matemáticas y programación en los grados de Diseño y Desarrollo de Videojuegos y Diseño Gráfico Multimedia. En programación, ha participado en proyectos educativos para las Comunidades de Madrid y de Andalucía, y más tarde en el sector del gambling online. Actualmente se encuentra en proceso de doctorado en el área de Educación, labor que simultanea con la docencia en el Colegio Nova Hispalis (Madrid) y en ESNE.