

# RESOLUCIÓN GEOMÉTRICA DEL PÉNDULO DE WILBERFORCE

R. Caballero-Flores, V. M. Prida

Dpto. de Física, Universidad de Oviedo.

<https://www.unioviado.es/rafaelcaballero/>

La naturaleza nos muestra numerosos sistemas de osciladores acoplados como, por ejemplo, la molécula de agua que presenta una configuración triangular y tres modos normales de vibración. El movimiento de estos osciladores acoplados está caracterizado, en general, por una transferencia de energía entre sus grados de libertad que depende del acoplamiento entre ellos. El péndulo de Wilberforce es un conocido oscilador acoplado de dos grados de libertad. En este trabajo se presenta una nueva descripción geométrica del péndulo de Wilberforce que nos permitirá determinar el grado de acoplamiento  $\xi$  entre sus dos grados de libertad, y realizar un estudio de su movimiento en función de éste, esto es, haciendo que  $\xi$  sea un parámetro variable.

## 1. Descripción del péndulo de Wilberforce

El péndulo de Wilberforce [1, 2, 3] consta de un muelle helicoidal del que cuelga una pesa que, además de desplazarse verticalmente, puede girar en torno al eje longitudinal del muelle (Fig. 1). Su movimiento vibratorio es un movimiento compuesto por dos oscilaciones acopladas: la longitudinal del muelle  $z(t)$ , y la torsional de la pesa que cuelga  $\theta(t)$ .

Asumimos que la energía potencial de interacción entre estas oscilaciones acopladas viene dada por la función  $E_A = \frac{1}{2}\epsilon z\theta$ , donde  $\epsilon$  es el factor de acoplamiento. En general, en la literatura se presenta el estudio de oscilaciones débilmente acopladas en las que el factor de acoplamiento  $\epsilon$  es constante, y presenta un valor determinado que hace que el grado de acoplamiento sea pequeño ( $\xi \rightarrow 0$ ) [4, 5]. En este trabajo estudiaremos el movimiento del péndulo en función del factor de acoplamiento  $\epsilon$ , por lo que lo consideraremos como un parámetro variable.

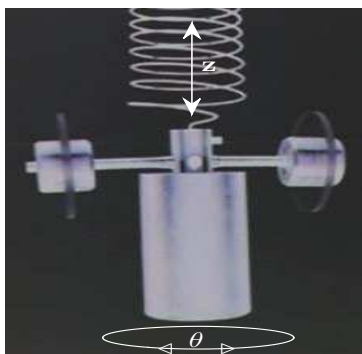


Figura 1: Grados de libertad del péndulo de Wilberforce: longitudinal ( $z$ ) y torsional ( $\theta$ ). Fuente: Imagen modificada del Instituto de Física, Universidade de Brasília. <http://www.fis.unb.br/>

Las ecuaciones de movimiento del sistema son [2]:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} z + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{m} \theta = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\delta}{I} \theta + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{I} z = 0, \quad (2)$$

donde  $m$  es la masa total del péndulo, incluida la masa efectiva del muelle;  $k$  la constante elástica de la oscilación longitudinal de frecuencia natural  $\omega_z^2 = k/m$ ;  $I$  el momento de inercia del sistema con respecto al eje  $z$  de simetría vertical; y  $\delta$  la constante elástica de la oscilación torsional de frecuencia natural  $\omega_\theta^2 = \delta/I$ .

Considerando las siguientes condiciones iniciales: posiciones  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $z(0) = z_0$ ; y velocidades  $\dot{\theta}(0) = 0$  y  $\dot{z}(0) = 0$ , la solución del sistema de ecuaciones diferenciales anterior es [3]:

$$\theta(t) = B \cos(\omega_1 t) + D \cos(\omega_2 t), \quad (3)$$

$$z(t) = B' \cos(\omega_1 t) + D' \cos(\omega_2 t), \quad (4)$$

donde  $B$ ,  $D$ ,  $B'$  y  $D'$  son constantes que dependen de las condiciones iniciales  $z_0$  y  $\theta_0$ , y de las frecuencias propias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  del movimiento vibratorio:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_z^2 + \omega_\theta^2 + \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}} \right], \quad (5)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_z^2 + \omega_\theta^2 - \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\epsilon^2}{mI}} \right], \quad (6)$$

que por ser las soluciones de la ecuación bicuadrada siguiente ( $\omega^4 - b\omega^2 + c = 0$ ):

$$\omega^4 - (\omega_z^2 + \omega_\theta^2) \omega^2 + \left[ \omega_z^2 \omega_\theta^2 - \frac{\epsilon^2}{4mI} \right] = 0, \quad (7)$$

satisfacen las siguientes relaciones:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = b = \omega_z^2 + \omega_\theta^2, \quad (8)$$

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = c = \omega_z^2 \omega_\theta^2 - \frac{\epsilon^2}{4mI}. \quad (9)$$

En relación con la energía transferida entre los dos osciladores, ésta será pequeña o grande cuando lo sea en relación a la energía de cada uno de los osciladores desacoplados, esto es,  $E_\theta = \frac{1}{2} \delta \theta_0^2$  y  $E_z = \frac{1}{2} k z_0^2$ . Con ello en mente, se puede definir el parámetro adimensional  $\xi = \epsilon^2 / (k\delta)$ , que nos da cuenta del grado de acoplamiento entre ellos: fuerte, cuando  $\epsilon \rightarrow \epsilon_{max} = 2\sqrt{k\delta}$ , o bien  $\xi \rightarrow 4$ ; y débil, cuando  $\xi \rightarrow 0$ . El valor de  $\epsilon_{max}$  es aquel que hace que el parámetro  $c$  de la ecuación bicuadrada (Ec. (7)) sea nulo.

El objetivo de este trabajo es presentar un método geométrico que nos permita determinar el factor de acoplamiento  $\epsilon$ , y estudiar el movimiento del péndulo en función del grado de acoplamiento  $\xi$ . Una vez conocido  $\epsilon$ , podremos conocer la energía de acoplamiento  $E_A(t)$  y reproducir experimentalmente uno cualquiera de los dos modos normales de vibración del sistema.

## 2. Interpretación geométrica del movimiento

Las ecuaciones anteriores (8) y (9) tienen una interpretación geométrica muy útil que nos permite analizar físicamente el problema:

- i*) De acuerdo con la Ec. (8), las frecuencias naturales ( $\omega_z$  y  $\omega_\theta$ ) y las propias ( $\omega_1$  y  $\omega_2$ ) tienen igual suma de sus cuadrados:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_z^2 + \omega_\theta^2 = \phi^2. \quad (10)$$

Siempre es posible construir dos triángulos rectángulos que compartan la misma hipotenusa  $\phi = \sqrt{b}$ , inscritos en una circunferencia de igual diámetro  $\phi = \overline{\mathbf{AM}}$  (Fig. 2), a la que denominamos circunferencia de Wilberforce. Asimismo, denominamos triángulo natural al triángulo  $\mathbf{AIM}$ , con  $\mathbf{I}$  en la semicircunferencia superior y catetos  $\omega_z$  y  $\omega_\theta$ ; y triángulo propio, al triángulo  $\mathbf{ANM}$ , con  $\mathbf{N}$  en la semicircunferencia inferior y catetos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

- ii*) De acuerdo con la Ec. (9), las frecuencias naturales, las frecuencias propias y el factor

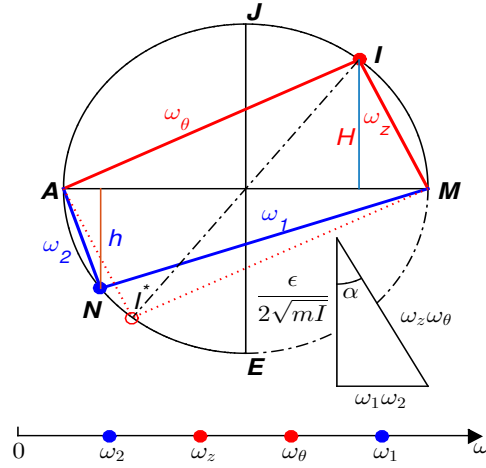


Figura 2: Circunferencia de Wilberforce que circunscribe al triángulo natural (rojo) de catetos  $\omega_z$  y  $\omega_\theta$ , y al triángulo propio (azul) de catetos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Triángulo de acoplamiento de Wilberforce de catetos  $\frac{\epsilon}{2\sqrt{mI}}$  y  $\omega_1\omega_2$ , e hipotenusa  $\omega_z\omega_\theta$ . Segmento graduado que indica la ordenación de las frecuencias naturales (rojo) y propias (azul):  $\omega_2 < \omega_z < \omega_\theta < \omega_1$ .

de acoplamiento  $\epsilon$  están relacionadas mediante la siguiente relación pitagórica:

$$\omega_z^2\omega_\theta^2 = \omega_1^2\omega_2^2 + \frac{\epsilon^2}{4mI}. \quad (11)$$

Podemos definir, por tanto, el triángulo rectángulo, al que denominaremos triángulo de acoplamiento de Wilberforce (Fig. 2), de catetos  $\frac{\epsilon}{2\sqrt{mI}}$  y  $\omega_1\omega_2$ , e hipotenusa  $\omega_z\omega_\theta$ . De acuerdo con lo establecido anteriormente, el valor máximo del factor de acoplamiento,  $\epsilon_{max}^2 = 4mI\omega_z^2\omega_\theta^2 = 4k\delta$ , es aquel que hace que el parámetro  $c$  de la ecuación bicuadrada sea nulo ó  $\omega_2 = 0$ , y se corresponde, para valores de  $z$  y  $\theta$  dados, con la máxima energía de acoplamiento  $E_A^{max} = \sqrt{k\delta}z\theta$  entre los dos osciladores, que, por razones físicas, está acotada.

iii) De acuerdo con la Ec. (9), el área del triángulo natural  $\mathbf{AIM}$  ( $A_n = \omega_z\omega_\theta/2$ ) es mayor que la del triángulo propio  $\mathbf{ANM}$  ( $A_p = \omega_1\omega_2/2$ ):

$$A_n^2 - A_p^2 = \frac{\epsilon^2}{16mI} > 0. \quad (12)$$

Relaciones geométricas sencillas indican que el punto  $\mathbf{N}$  pertenece al arco  $\widehat{\mathbf{AI}^*}$ , y no al  $\widehat{\mathbf{I}^*\mathbf{E}}$ , con  $\overline{\mathbf{I}^*\mathbf{I}}$  una cuerda diametral. Así, dados unos valores determinados de las frecuencias naturales, siendo, por ejemplo<sup>1</sup>,  $\omega_z < \omega_\theta$ , se tiene que una de las frecuencias propias es mayor

<sup>1</sup> Nada cambiaría en nuestro razonamiento si  $\omega_z > \omega_\theta$ . En este caso el punto  $\mathbf{I}$  estaría en el segundo cuadrante y  $\mathbf{N}$  en el cuarto.

que cualquiera de las dos naturales, y, la otra, menor. En nuestro caso, como  $\omega_1 > \omega_2$ , se tiene que<sup>2</sup>  $\omega_2 < \omega_z < \omega_\theta < \omega_1$ , como se indica en el segmento graduado (Fig. 2).

A partir de la Ec. (11) y teniendo en cuenta las áreas de los triángulos rectángulos natural  $A_n = \omega_z \omega_\theta / 2 = \phi H / 2$ , y propio  $A_p = \omega_1 \omega_2 / 2 = \phi h / 2$ , es posible obtener una relación que nos permite conocer, de forma general, el factor de acoplamiento  $\epsilon$ :

$$\epsilon^2 = (H^2 - h^2) 4mIb, \quad (13)$$

siempre que se conozcan las frecuencias propias, que se pueden medir experimentalmente, y se determinen con una regla las alturas respecto a las hipotenusas de los triángulos natural ( $H$ ) y propio ( $h$ ) (Fig.2).

Una vez conocido  $\epsilon$ , podremos conocer la energía de acoplamiento  $E_A(t) = \frac{1}{2}\epsilon z \theta$  en cualquier instante, y reproducir experimentalmente uno cualquiera de los dos modos normales de vibración del péndulo<sup>3</sup>, determinados a partir de las relaciones entre las condiciones iniciales  $z_0 = f_i(\epsilon, \theta_0)$ .

Una segunda relación, también de interés para nuestro análisis geométrico, entre la circunferencia y el triángulo de Wilberforce, es la siguiente:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_z \omega_\theta} = \frac{A_p}{A_n} = \frac{h}{H}, \quad (14)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo opuesto del cateto  $\omega_1 \omega_2$  (Fig. 2).

### 3. Estudio del movimiento en función del acoplamiento

La circunferencia de Wilberforce (Fig. 2) nos permite hacer un estudio detallado del movimiento del péndulo en función del parámetro  $\xi = \frac{\epsilon^2}{k\delta}$ . El movimiento del péndulo será periódico cuando las frecuencias naturales  $\omega_z$  y  $\omega_\theta$  sean parecidas, por lo que en nuestro análisis prestaremos atención a la situación en la que **I** se encuentre en el entorno de **J**, lo que geoméricamente se traduce en que  $H \rightarrow \phi/2$ , y físicamente en que  $\frac{2\omega_z \omega_\theta}{\omega_z^2 + \omega_\theta^2} \rightarrow 1$ .

Es importante reseñar que el movimiento del péndulo será también periódico cuando el factor de acoplamiento sea máximo,  $\epsilon = \epsilon_{max}$ , y cuando las condiciones iniciales cumplan las relaciones  $z_0 = f_i(\epsilon, \theta_0)$  mencionadas anteriormente, que se corresponden con los dos modos normales de vibración. Esta última situación no está contemplada en la circunferencia de Wilberforce.

---

<sup>2</sup> En la situación en la que no haya acoplamiento entre los dos osciladores, esto es,  $\epsilon = 0$ , se tiene que **N**  $\equiv$  **I**<sup>\*</sup>,  $\omega_2 = \omega_z$ ,  $\omega_1 = \omega_\theta$ , y los dos triángulos (el propio y el natural) tienen la misma área.

<sup>3</sup> Tantos como grados de libertad tenga el sistema.



## Acoplamiento fuerte

De forma análoga a como hemos procedido en el caso de acoplamiento débil, de acuerdo con la Ec. (13), un aumento de  $\xi$  (dado por un aumento de  $\epsilon$ ) produce una disminución de  $h$ , lo que se traduce, geoméricamente, en que el punto  $\mathbf{N}$  se acerca al punto  $\mathbf{A}$  (Fig. 4), y el triángulo propio disminuye su área  $A_p$ . En el caso límite, cuando el acoplamiento es máximo, esto es, cuando  $\epsilon = \epsilon_{max} = 2\sqrt{k\delta}$ , o bien  $\xi = 4$ , tenemos que  $\mathbf{N} \equiv \mathbf{A}$ , y el cuadrilátero birrectángulo inscrito  $\mathbf{IMNA}$  se transforma en un triángulo rectángulo escaleno  $\mathbf{IMA}$ .

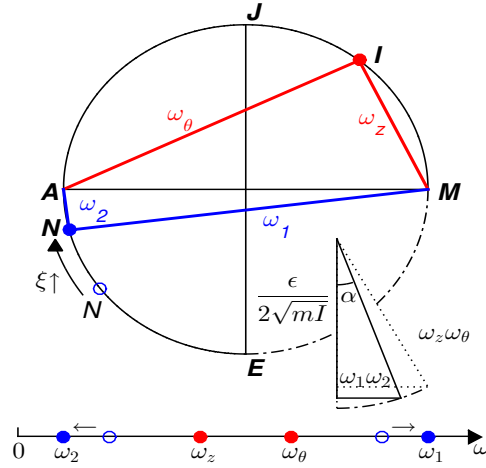


Figura 4: Variación geométrica de la solución de Wilberforce cuando el acoplamiento aumenta ( $\xi \uparrow$ , o bien  $\alpha \downarrow$ ):  $\mathbf{N}$  se acerca al punto  $\mathbf{A}$ .

Físicamente, un aumento de  $\xi$  produce, manteniendo constante la hipotenusa  $\omega_z\omega_\theta$ , una disminución de  $\omega_2$  ( $\leftarrow$ ), un aumento de  $\omega_1$  ( $\rightarrow$ ), y una disminución de la base del triángulo de acoplamiento  $\omega_1\omega_2$  (Fig. 4). En el caso límite, cuando  $\epsilon = \epsilon_{max}$ , tenemos que el triángulo de acoplamiento se reduce a un segmento (con  $\omega_2 = 0$ ), sólo existe un modo de vibración de frecuencia  $\omega_1 = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\theta^2}$ , y las ecuaciones de movimiento (3) y (4) se transforman en:

$$\theta(t)_{\epsilon_{max}} = B_{\epsilon_{max}} \cos(\omega_1 t) + (\theta_0 - B_{\epsilon_{max}}), \quad (17)$$

$$z(t)_{\epsilon_{max}} = B'_{\epsilon_{max}} \cos(\omega_1 t) + (z_0 - B'_{\epsilon_{max}}), \quad (18)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $B_{\epsilon_{max}} + D_{\epsilon_{max}} = \theta_0$ , y  $B'_{\epsilon_{max}} + D'_{\epsilon_{max}} = z_0$  [6].

Las ecuaciones anteriores indican que tanto  $\theta(t)$  como  $z(t)$  no oscilan en torno a la posición de equilibrio inicial, no presentan modulación de la amplitud y, por tanto, no hay transferencia de energía entre los dos osciladores acoplados (Fig. 5, paneles izquierdos).

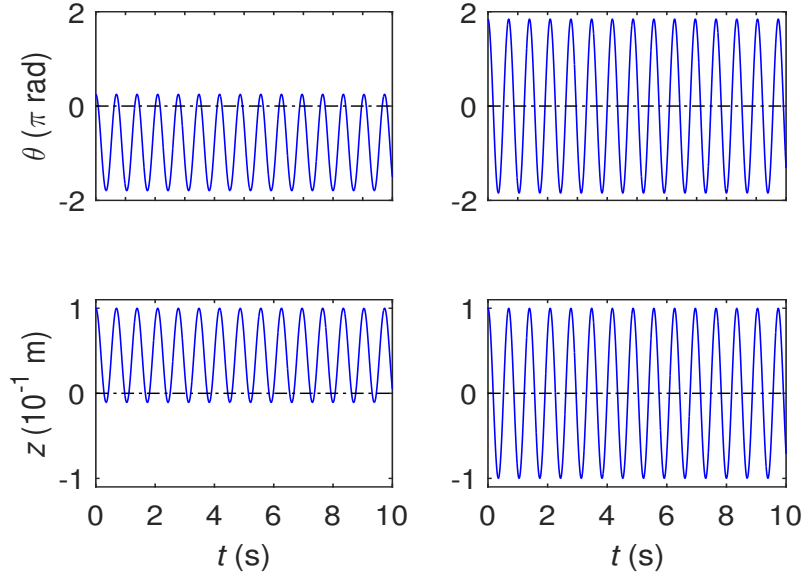


Figura 5: Posición de la pesa  $\theta(t)$  y  $z(t)$  cuando el acoplamiento es máximo  $\epsilon_{max} = 2\sqrt{k\delta}$ , y las condiciones iniciales:  $z_0 = 0,1$  m y  $\theta_0 = \pi/4$  rad (paneles izquierdos); y  $z_0 = 0,1$  m y  $\theta_0 = \frac{z_0 m}{I} \sqrt{\frac{\delta}{k}}$  rad (paneles derechos).

Teniendo en cuenta que  $\left. \frac{B'}{B} \right|_{\epsilon_{max}} = \frac{I}{m} \sqrt{\frac{k}{\delta}}$  [3], se tiene que:

$$z(t)_{\epsilon_{max}} = \frac{I}{m} \sqrt{\frac{k}{\delta}} (\theta(t)_{\epsilon_{max}} - \theta_0) + z_0, \quad (19)$$

donde se observa que  $\theta(t)$  y  $z(t)$  sí oscilarán en torno a la posición de equilibrio cuando las condiciones iniciales cumplan la relación  $z_0 = \frac{I\theta_0}{m} \sqrt{\frac{k}{\delta}}$  (Fig. 5, paneles derechos). En esta situación, los dos osciladores vibran con igual frecuencia  $\omega_1 = \sqrt{\omega_z^2 + \omega_\theta^2}$ , en fase ya que  $sgn(z_0) = sgn(\theta_0)$ , y lo hacen, en términos de energía, como lo harían dos osciladores desacoplados de constantes elásticas efectivas:  $k' = k + \frac{m\delta}{I}$  y  $\delta' = \delta + \frac{Ik}{m}$ ; energías efectivas:  $E_\theta = \frac{1}{2}\delta'\theta_0^2$  y  $E_z = \frac{1}{2}k'z_0^2$  (con  $\omega_1^2 = k'/m = \delta'/I$ ); y energía total:  $E = E_z + E_\theta$ , manteniéndose constante la energía de cada grado de libertad.

### Resonancia: $\mathbf{I} \equiv \mathbf{J}$

La situación de resonancia también tiene su reflejo en la circunferencia de Wilberforce (Fig. 6). Por un lado, se tiene que la igualdad de las frecuencias naturales ( $\omega_z = \omega_\theta = \omega_r$ ) hace que  $\mathbf{I} \equiv \mathbf{J}$  y que el triángulo natural aumente su área  $A_n$ , y, por otro, un aumento de  $\xi$  hace que  $\mathbf{N}$  se acerque al punto  $\mathbf{A}$ . Cuando el acoplamiento es máximo  $\epsilon = \epsilon_{max}$ , se tiene que  $\mathbf{N} \equiv \mathbf{A}$  y el cuadrilátero birrectángulo inscrito  $\mathbf{JMNA}$  se transforma en un triángulo rectángulo isósceles  $\mathbf{JMA}$ .

En la situación de resonancia y acoplamiento débil  $\xi \rightarrow 0$ , análogamente, tenemos que



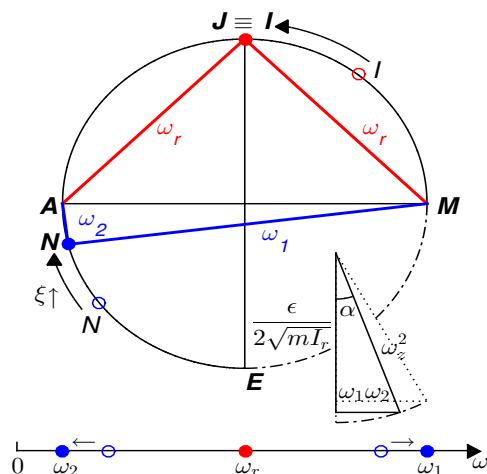


Figura 6: Variación geométrica de la solución de Wilberforce en resonancia cuando el acoplamiento aumenta ( $\xi \uparrow$ , o bien  $\alpha \downarrow$ ):  $\mathbf{I} \equiv \mathbf{J}$  y  $\mathbf{N}$  se acerca al punto  $\mathbf{A}$ .

$\mathbf{N} \simeq \mathbf{E}$  y el cuadrilátero birrectángulo inscrito  $\mathbf{JMNA}$  (no dibujado en la Fig. 7 para mayor claridad) se transforma en un cuasicuadrado  $\mathbf{JMNA}$ .

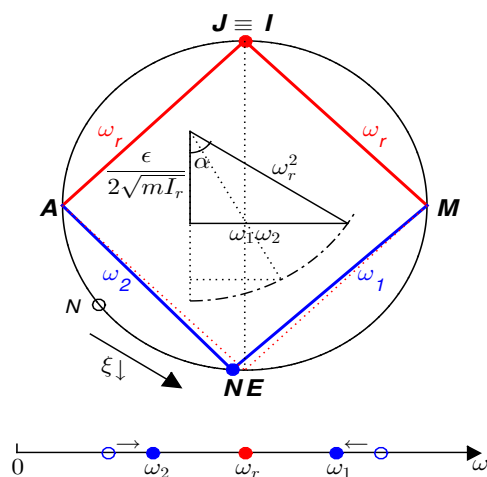


Figura 7: Variación geométrica de la solución de Wilberforce en resonancia cuando el acoplamiento disminuye ( $\xi \downarrow$  ó  $\alpha \uparrow$ ):  $\mathbf{I} \equiv \mathbf{J}$  y  $\mathbf{N}$  se acerca al punto  $\mathbf{E}$ .

Obsérvese que en esta situación, la frecuencia de batimiento  $\omega_b = \omega_1 - \omega_2$  se hace mínima y se puede demostrar, teniendo en cuenta que  $\omega_b \ll \omega_r$  y linealizando las ecuaciones (5) y

(6), que:

$$\omega_{1r}|_{\xi \rightarrow 0} \simeq \omega_r + \frac{\omega_b}{2}, \quad (20)$$

$$\omega_{2r}|_{\xi \rightarrow 0} \simeq \omega_r - \frac{\omega_b}{2}, \quad (21)$$

con  $\omega_b = \frac{\epsilon}{2\omega_r\sqrt{mL_r}}$ , la frecuencia de batimiento en función de las variables del problema,  $\epsilon$  e  $I$ .

## 4. Conclusiones

En este estudio del péndulo de Wilberforce se ha presentado una descripción geométrica que nos ha permitido determinar el factor de acoplamiento  $\epsilon$ , *a priori* desconocido, a partir de los datos experimentales del movimiento del péndulo, y estudiar dicho movimiento en función del grado de acoplamiento  $\xi$ .

Una interfaz Matlab (GUI) y el boletín de una práctica de laboratorio están disponibles, libre y gustosamente, para los lectores interesados [7]. En la GUI se reproduce teóricamente el movimiento del péndulo en función de sus parámetros y de las condiciones iniciales. Dicha interfaz será de gran ayuda en las asignaturas de Mecánica y Técnicas Experimentales para determinar experimentalmente el factor de acoplamiento, y observar los fenómenos de pulsación, resonancia y modos normales de vibración.

## Referencias

- [1] L. R. WILBERFORCE, *On the vibrations of a loaded spiral spring*. Philos. Mag. 38, 386 (1894).
- [2] R. E. BERG, T. S. MARSHALL, *Wilberforce pendulum oscillations and normal modes*. Am. J. Phys. 59, 32 (1991).
- [3] ÁNGEL FRANCO GARCÍA, Departamento de Física Aplicada I. Universidad del País Vasco. <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/wilberforce/wilberforce.html>
- [4] M. MEWES, *The Slinky Wilberforce pendulum: A simple coupled oscillator*. Am. J. Phys. 82, 3 (2014).
- [5] E. DEBOWSKA, S. JAKUBOWICZ, Z. MAZUR, *Computer visualization of the beating of a Wilberforce pendulum*. Eur. J. Phys. 20, 89–95 (1999).

- [6] R. CABALLERO FLORES, V. M. DE LA PRIDA PIDAL, *Resolución analítica del péndulo de Wilberforce*. Revista Española de Física, 33–2 (2019).
- [7] RAFAEL CABALLERO FLORES, Departamento de Física. Universidad de Oviedo. <https://www.unioviado.es/rafaelcaballero/rsef-ref/>