Res., Soc. Dev. 2019; 8(9):e33891302
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i9.1302

# Análise da Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci, uma abordagem num curso de formação inicial de professores

# Analysis of Didactic Engineering on the Fibonacci Generalized Sequence Complexification Model, an approach in an initial teacher training course

# Análisis de la Ingeniería Didáctica sobre el Modelo de Complejidad de la secuencia generalizada de Fibonacci, un enfoque en un curso de formación inicial de profesores

Recebido: 14/06/2019 | Revisado: 21/06/2019 | Aceito: 22/06/2019 | Publicado: 26/06/2019

**Renata Passos Machado Vieira**
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1966-7097
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
E-mail: re.passosm@gmail.com
**Francisco Evamar Barros**
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8568-7854
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
E-mail: fco.evamar@gmail.com
**Thamires Silva Aquino de Souza**
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4010-4731
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
E-mail: thamy.2019@gmail.com
**Ana Karine Portela Vasconcelos**
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1087-5006
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
E-mail: karine_portela@hotmail.com

**Resumo**

O presente trabalho trata-se de uma resenha de uma dissertação de mestrado acadêmico em ensino de ciências e matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceara, trazendo a aplicação de duas metodologias, sendo essas: uma de pesquisa - Engenharia Didática, e outra de ensino - Teoria das Situações Didáticas. Esta resenha divide-se em 3 tópicos: Metodologia e o Modelo de Fibonacci, Campo epistêmico-matemático, e Coleta

e Análise dos Dados. Contudo, o processo de complexificação da Sequência de Fibonacci, aplicado no curso de formação inicial de professores, é realizado através de uma transposição didática.
**Palavras-chave:** Complexificação; Engenharia Didática; Sequência de Fibonacci; Teoria das Situações Didáticas.

**Abstract**
The educational object is a review of an academic master's dissertation in science and mathematics education of the Federal Institute of Education, Science and Technology of the State of Ceara, bringing the application of two methodologies, being: Didactics, and other teaching - Theory of Didactic Situations. This review is divided into 3 topics: Methodology and the Fibonacci Model, Epistemic-Mathematical Field and Data Collection and Analysis. However, the process of Fibonacci sequence complexification, applied in the initial teacher training course, is carried out through didactic transposition.
**Keywords:** Complexity; Didactic Engineering; Fibonacci sequence; Theory of Didactic Situations.

**Resumen**
El presente trabajo se trata de una reseña de una disertación de maestría académica en enseñanza de ciencias y matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología del Estado de Ceara, trayendo la aplicación de dos metodologías, siendo éstas: una de investigación - Ingeniería Y en el caso de las mujeres. Esta reseña se divide en 3 tópicos: Metodología y el Modelo de Fibonacci, Campo epistémico-matemático y Recolección y Análisis de los Datos. Sin embargo, el proceso de complejización de la Secuencia de Fibonacci, aplicado en el curso de formación inicial de profesores, se realiza a través de una transposición didáctica.
**Palabras clave:** Complejidad; Ingeniería Didáctica; Secuencia de Fibonacci; Teoría de las Situaciones Didácticas.

## 1. Introdução

Publicada em 2018, Engenharia Didática sobre o modelo de complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais foi desenvolvido como dissertação do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática fornecido pelo Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará pela professora da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE), Rannyelly Rodrigues de Oliveira.

A dissertação foi dividida em seis capítulos. O primeiro, intitulado Introdução, é feita uma breve explanação do que se trata o trabalho, definindo a problemática e a justificativa da pesquisa. No segundo capítulo, intitulado Referencial Teórico, a autora faz um aparato dos referenciais estudados para a sua pesquisa, bem como algumas definições e esclarecimentos em torno das metodologias de ensino e pesquisa utilizadas. No terceiro capítulo, Campo Epistêmico-Matemático: a complexificação do Modelo de Fibonacci, são discutidos os teoremas e definições matemáticas desenvolvidos pela a autora neste trabalho, para que haja uma transposição didática no momento da experimentação. No quarto capítulo, Uma experiência didática: o Estudo da Complexificação do Modelo de Fibonacci no curso de Licenciatura, é realizada a experimentação em sala de aula, apoiada nas duas metodologias estudadas nesta pesquisa (de ensino, Engenharia Didática e de pesquisa, Teoria das Situações Didáticas), e então aplicada no curso de formação inicial de professores de matemática. No quinto capítulo, Análise e Discussão dos Dados, são analisados os dados coletados, observando se houve uma compreensão do ensino referente ao conteúdo matemático escolhido. Por fim, no sexto capítulo, Considerações Finais, é feita uma conclusão de todo o projeto desenvolvido.

## 2. Metodologias e o Modelo de Fibonacci

A priori é apresentando o público alvo da pesquisa, sendo esta desenvolvida com os discentes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE) - campus Fortaleza por oferecer formação inicial para professores de Matemática. Após uma análise da matriz curricular deste curso, visando selecionar a disciplina que mais se adequasse para a aplicação e desenvolvimento dessa proposta de trabalho, foi então definida a História da Matemática. Os livros adotados nesta disciplina, explanam o conteúdo de Sequência de Fibonacci de modo superficial, destacando a biografia do autor desta sequência e ausentando as suas relações matemáticas. Baseada neste argumento, a autora definiu este fato como sendo a sua problemática e justificativa da pesquisa, sempre focada em sua pergunta norteadora: "como desenvolver um estudo sobre o processo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci, de modo a realizar situações didáticas que oportunizem a investigação de seus teoremas e suas propriedades, explorando sua representação complexa numa perspectiva epistemológica, no que diz respeito à sua origem e evolução histórica?" (p. 17).

Res., Soc. Dev. 2019; 8(9):e33891302
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i9.1302

Os objetivos específicos são assegurados durante a pesquisa, sendo eles: Investigar os teoremas e propriedades inerentes: aos números Gaussianos de Fibonacci e suas relações recorrentes n-dimensionais, Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci, Quaternions Complexos de Fibonacci e Octonions de Fibonacci; Estudar representações polinomiais do modelo de Fibonacci na variável complexa; Explorar, em situações de ensino, representações matriciais, a extensão para índices inteiros e a fórmula de Binet para a classe dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci; e, apresentar o desenvolvimento histórico-evolutivo, isto é, epistemológico-matemático, da Sequência de Fibonacci inerente ao seu processo de complexificação, através da proposição de situações-problema em sala de aula.

Apoiada em uma vasta literatura dividida entre as áreas de Matemática Pura e Ensino, sendo algumas desenvolvidas pela a própria autora, foram realizadas a fim de ocorrer uma transposição didática do modelo complexo de Fibonacci. Assim, um estudo relacionado ao processo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci, explorando através de situações didáticas, as representações complexas oriundas do modelo de Fibonacci, promovendo uma compreensão do desenvolvimento do campo epistêmico-matemático nos números de Fibonacci. Para atingir tal objetivo, são considerados os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos ligados à uma vertente francesa da Didática da Matemática, organizando-os de acordo com uma metodologia de ensino de Artigue, conhecida como Engenharia Didática, em associação com uma metodologia de pesquisa de Brousseau, conhecida como Teoria das Situações Didáticas. Os aspectos epistemológicos evidenciados na pesquisa são referentes à evolução do Modelo de Fibonacci, os aspectos cognitivos estão associados ao processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos, e os didáticos à transformação do conteúdo a ser ensinado.

Em seguida, Oliveira retrata que a metodologia de ensino, Engenharia Didática desenvolvida por Artigue, é uma proposta a qual são realizadas situações didáticas observando o processo de ensino e aprendizagem, permitindo o professor ter as suas produções utilizadas como pesquisa de um objeto matemático. A Engenharia Didática é dividida em quatro fases, sendo elas conceituadas da seguinte forma: A Análise Preliminar – é onde será analisada a didática e a epistemologia do conteúdo abordado, identificando as variáveis didáticas potenciais, onde essas serão reveladas e manipuladas nas fases posteriores. A Análise a priori – é feito um estudo dos contextos, objetivos e hipóteses dos alunos, determinando como as escolhas realizadas conseguem monitorar os comportamentos dos discentes. A Experimentação – coloca-se em execução todo o escopo construído durante as fases anteriores. Análise a posteriori e validação – nesta será validado se todo o procedimento obteve êxito ou se foi houve falha em alguma das fases. A metodologia de pesquisa aplicada, é baseada na Teoria das Situações Didáticas, caracterizada segundo a autora, "como um conjunto de situações elaboradas para fins didáticos" (p. 30).

Nessa teoria são criadas situações-problema envolvendo o conteúdo matemático e analisando o obstáculo epistemológico dos discentes. Este obstáculo é oriundo de uma possível dificuldade do estudante durante a transmissão do conhecimento. Assim, o docente deverá criar estratégias de ensino para que este fator seja resolvido, contribuindo para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

Durante a pesquisa, foi realizada ainda uma transposição didática, sendo esta uma transformação do conteúdo teórico com o conteúdo a ser ensinado. Isto se dá através de recortes nos conteúdos matemáticos, destacando as partes mais importantes para o processo de investigação histórica e epistemológica do Modelo de Fibonacci. É importante notar nesta pesquisa, a contribuição de um contrato didático, considerando-o como uma negociação entre o professor e o aluno referentes as atividades em jogo, relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem. A autora relata que o contrato didático nem sempre se concretiza, havendo uma ruptura em determinados casos, por isso é interessante que os alunos e professores conheçam o seu papel e responsabilidades.

O Modelo de Fibonacci é apresentado ainda, de maneira a instigar o processo histórico da sequência. Alguns aspectos matemáticos tais como: fórmula de Binet, número de ouro, polinômio característico, relação de convergência e representação geométrica, são relatadas neste trabalho.

**3. Campo epistêmico-matemático**

Para o processo inicial de investigação do campo matemático de estudo, a autora apresenta a complexificação, ou seja, a inserção da parte imaginária desde o modelo unidimensional ao modelo n-dimensional da sequência de Fibonacci, com o objetivo de observar o crescimento dimensional do modelo de Fibonacci que tem como fórmula recursiva, $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ para $n\in\mathbb{N}$, com os valores iniciais $f_0=0$ e $f_1=1$ e, ao passo em que apresenta os modelos, a autora insere a unidade imaginária como etapa final de cada modelo apresentado.

Como forma de explorar todas as representações da sequência de Fibonacci, Oliveira também apresenta as representações matriciais e a fórmula de Binet para os polinômios bivariados de uma variável, duas variáveis e logo em seguida esses polinômios são discutidos

Res., Soc. Dev. 2019; 8(9):e33891302
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i9.1302

com a inserção da unidade imaginária, tais conceitos fazem parte do foco do trabalho que é a complexificação da sequência de Fibonacci.

Para encerrar a parte da pesquisa dedicada ao estudo do campo epistêmico-matemático, a autora apresenta os quaternions que são representados primeiramente com os escalares reais e logo após é feita a inserção da unidade imaginária para os quaternions terminando assim a complexificação da sequência de Fibonacci, o que permite para a autora apresentar alguns teoremas que tratam da extensão para os inteiros, representações matriciais, polinômios bivariados e  os quaternions com ênfase no estudo da variável complexa dentro da sequência.

Para a autora alguns estudos foram importantes para o desenvolvimento da sequência de Fibonacci, autores como Brother (1965) tratam da expansão para os inteiros enquanto Pethe e Horadam (1986) se preocupam com os números gaussianos de Fibonacci estabelecendo relações de identidade e Berzsenyi (1977) desenvolve a forma complexa da referida sequência. Para King (1963) a sequência de Fibonacci tem sua gênese no problema matemático proposto por Leonardo Pisano que tratava de coelhos Imortais, a saber Fibonacci foi um matemático italiano que em 1902 escreveu Liber Abbaci trabalho que aborda dentre outros conteúdos álgebra, aritmética na parte de multiplicação e divisão de inteiros, proporções e resolução de problemas. Para descrever o problema dos coelhos fibonacci cita a reprodução de pares de coelhos durante um ano em que em que a cada mês cada par de coelho dá luz a um novo par, vale lembrar que essa contagem começa com apenas um par de coelho, o problema também é bem claro em dizer que os coelhos não morrem durante o ano. É possível esquematizar o que a autora descreve como problema de Fibonacci através de uma tabela (Ver Tabela 1).

A autora segue demonstrando algumas identidades da sequência a partir do modelo recursivo, tais propriedades permitem ao leitor uma série de informações acerca da SF que traçam o caminho desde a recorrência à inserção da unidade imaginária, tais demonstrações precedem a discussão sobre o modelo gaussiano de Fibonacci com ênfase em demonstração de mais teoremas, a autora define de maneira objetiva um número gaussiano, explicando que os números de Fibonacci permitem uma representação complexa, e apresenta a estrutura de um números gaussiano como:

> Os números de Fibonacci permitem uma representação complexa. Nesse contexto, podem ser citados os Inteiros Gaussianos e apresentam os números gaussianos de Fibonacci e suas relações recorrentes. Todavia, vale destacar que, segundo Jordan (1965), os números $Gf_0 = i \ e \ Gf_1 = 1$ Gaussianos de Fibonacci são escritos na forma: tendo como $Gf_n = f_n + f_{n-1} \cdot i$ valores iniciais,além disso, admitem a recorrência e,

Res., Soc. Dev. 2019; 8(9):e33891302
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i9.1302

$Gf_n = Gf_{n-1} + Gf_{n-2},\ n > 1$ também vale a igualdade $Gf_n = f_n + f_{n+1} \cdot i$. (OLIVEIRA, p. 48, 2018)

**Tabela 1 – Esquematização da reprodução de coelhos imortais.**

| Mês | Pares de coelhos que | | | Total de pares de coelhos |
|---|---|---|---|---|
| | Não reproduzem | Reproduzem | Nascem | |
| 1º | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2º | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3º | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 4º | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 5º | 1 | 2 | 2 | 5 |
| 6º | 2 | 3 | 3 | 8 |
| 7º | 3 | 5 | 5 | 13 |
| 8º | 5 | 8 | 8 | 21 |
| 9º | 8 | 13 | 13 | 34 |
| 10º | 13 | 21 | 21 | 55 |
| 11º | 21 | 34 | 34 | 89 |
| 12º | 34 | 55 | 55 | 144 |

Fonte: Oliveira (2018)

Porém vale mencionar que a autora não se aprofunda em explicar a gênese dos números gaussianos por não ser o foco do trabalho, apenas os define e explica sua em um breve relato que se trata de números na sua forma complexa e segue usando demonstrações para algumas propriedades para os gaussianos de Fibonacci com representações matriciais e a extensão para os números negativos como índice.

Na próxima sessão de sua dissertação, ainda sobre o campo matemático de estudo, Oliveira descreve os números bidimensionais de Fibonacci e algumas de suas identidades, com a seguinte definição: $G(0,0) = 0,\ G(1,0) = 1,\ G(0,1) = i\ e\ G(1,1) = 1 + i$, ao todo a autora apresenta 11 identidades para os números bidimensionais e suas respectivas demonstrações, o objetivo dessa sessão é construir argumentos necessários para apresentar o crescimento n-dimensional da SF, na sessão seguinte, é apresentado o mesmo argumento, para os termos tridimensionais. A autora tem o cuidado de tratar dos termos bidimensionais e tridimensionais apresentando ao todo 18 identidades que permitem uma sequência no trabalho de estender a sequência de Fibonacci para dimensões superiores com os suportes adequados da segunda e terceira dimensão.

Com a definição e identidades definidas para a segunda e terceira dimensão concluídas, Oliveira segue para a definição n-dimensional da SF, a autora apresenta um quadro que mostra as definições dadas até então sobre os números uni, bi e tridimensionais, como base para as próximas definições que compreendem os números hipercomplexos na forma

Res., Soc. Dev. 2019; 8(9):e33891302
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i9.1302

$G(n, n_1, n_2, \ldots, n_n)$ para n variáveis. Um resumo para a forma uni, bi e tridimensional da SF pode ser observada no quadro a seguir:

**Tabela 2 – Identidades uni, bi e tridimensionais para os números complexos de Fibonacci.**

| Identidades para os números complexos de Fibonacci | | |
|---|---|---|
| **Unidimensionais** | **Bidimensionais** | **Tridimensionais** |
| $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$ <br> $\sum_{i=0}^{n} Gf_{2i+1} = f_{2n+2} + (f_{2n+3} - 1)i$ | $\sum_{i=0}^{n} G(2i+1, m) = f_{2n+2} \cdot f_{m+1} + (f_{2n+3} - 1) f_m i$ | $\sum_{i=0}^{n} G(2i+1, m, p) = f_{2n+2} \cdot f_{m+1} \cdot f_{p+1} + (f_{2n+3} - 1) f_m \cdot f_{p+1} i + (f_{2n+3} - 1) f_{m+1} \cdot f_p j$ |
| $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$ <br> $\sum_{i=1}^{n} Gf_{2i} = (f_{2n+1} - 1) + (f_{2n+2} - 1)i$ | $\sum_{i=1}^{n} G(2i, m) = (f_{2n+1} - 1) f_{m+1} + (f_{2n+2} - 1) f_m i$ | $\sum_{i=1}^{n} G(2i, m, p) = (f_{2n+1} - 1).f_{m+1} \cdot f_{p+1} + (f_{2n+2} - 1).f_m \cdot f_{p+1} i + (f_{2n+2} - 1) f_{m+1} \cdot f_p j$ |
| $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$ <br> $\sum_{i=1}^{n} Gf_i = (f_{n+2} - 1) + (f_{n+3} - 2)i$ | $\sum_{i=1}^{n} G(i, m) = (f_{n+2} - 1) f_{m+1} + (f_{n+3} - 2) f_m i$ | $\sum_{i=1}^{n} G(i, m, p) = (f_{n+2} - 1) f_{m+1} f_{p+1} + (f_{n+3} - 2) f_m f_{p+1} i + (f_{n+3} - 2) f_{m+1} f_p j$ |
| $\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$ | $\sum_{i=1}^{n} G(i, m)^2 = [(1 - f_{n+1} \cdot f_{n+2}) f_m^2 + f_n \cdot f_{n+1} f_{m+1}^2] + (f_{n+1}^2 + f_n \cdot f_{n+2} - 1) f_m f_{m+1} i$ | $\sum_{i=1}^{n} [G(i, m, p)]^2 = A + (f_n \cdot f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)(B.i + C.j) + (f_{n+1} \cdot f_{n+2} - 1)(D.i.j + E.j^2),$ <br> $para: A = (f_m^2 + f_n \cdot f_{n+1} \cdot f_{m+1}^2 - f_{n+1} \cdot f_{n+2} \cdot f_m^2) \cdot f_{p+1}^2,$ <br> $B = f_m \cdot f_{m+1} \cdot f_{p+1}^2,\ C = f_{m+1}^2 \cdot f_p \cdot f_{p+1}$ <br> $D = 2.f_m \cdot f_{m+1} \cdot f_{p+1} \cdot f_p,\ E = f_{m+1}^2 \cdot f_p^2.$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$<br>$\sum_{i=0}^{5} Gf_{n+i} = 4.Gf_{n+4}$ | $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m).$ | $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p) = 4.G(n+4,m,p).$ |
| $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$<br>$\sum_{i=0}^{9} Gf_{n+i} = 11 Gf_{n+6}$ | $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m).$ | $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p) = 11.G(n+6,m,p).$ |

Fonte: (OLIVEIRA, p.77, 2018)

Esta tabela mostra o comportamento da sequência a partir da inserção de outras variáveis e mais de uma componente imaginária, segundo a autora esse processo é importante para a generalização da SF, ela faz uma análise através de propriedades desde a definição dos valores iniciais, a mesma discussão é feita acerca dos polinômios bivariados, ou seja, os polinômios que possuem em sua estrutura, duas variáveis.

Como o crescimento dimensional proposto no trabalho necessita da inserção da variável complexa, a autora propõe um estudo relacionado ao modelo da SF, na variável complexa, o que sugere um crescimento dimensional complexo, ou seja, a inserção da unidade imaginária *i*, representa a primeira expansão complexa dos números da sequência, porém como esses números também podem sofrer crescimento dimensional, Oliveira demonstra algumas propriedades também para os quaternions de Fibonacci e os Octonions de Fibonacci, assim a autora encerra o campo epistêmico- matemático onde o MF foi mostrado da sua forma mais simples e o crescimento dimensional apresentou um processo evolutivo no que tange o estudo matemático desenvolvido na pesquisa.

## 4. Coleta e Análise dos Dados

O capítulo cinco, dedicado à análise e discussão dos dados da pesquisa, consiste em apresentar as informações coligidas na etapa de experimentação da Engenharia Didática. Nesse sentido, ao longo dessa seção é evidenciada a última fase da ED, a saber, análise a priori e validação. Assim, são descritas as observações significativas referentes ao s momentos de aplicação que foram organizadas segundo as fases da TSD.

Inicialmente, a autora recorda que um dos objetivos da pesquisa foi "investigar as representações generalizadas da SF numa abordagem complexa" (OLIVEIRA, p. 176, 2018). Sendo assim, é ilustrado o processo de complexificação da sequência de Fibonacci que vai

Res., Soc. Dev. 2019; 8(9):e33891302
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i9.1302

desde a sequência generalizada polinomial de Fibonacci, passando pelos números gaussianos até a álgebra quarteniônica e os octonions de Fibonacci.

Prosseguindo, no momento de realização didática dessa pesquisa, a autora selecionou os Polinômios Bivariados Complexos de Fibonacci (PBCF). As atividades foram compostas por questões norteadoras e tinham como finalidade trabalhar a validade de propriedades e teoremas referentes à SF, bem como possibilitar a compreensão do processo de complexificação do modelo de Fibonacci no contexto da classe do PBCF.

Nesse sentido, a pesquisadora relata que o momento de experimentação se deu com a aplicação de cinco situações problemas. Os dados coligidos, foram organizados segundo as etapas da TSD, a saber ação, formulação e validação. Na primeira situação problema, foi requisitado dos participantes da pesquisa o estabelecimento de uma relação entre as sequências de Fibonacci e dos PBCF. Nas fases de ação e formulação os estudantes realizaram a comparação entre os termos das duas sequências, no intuito de estabelecer uma relação de recorrência para a classe dos PBFC. Na etapa de validação, os estudantes verificaram o seu modelo por meio da determinação de um termo dessa sequência.

Dando continuidade, na segunda situação-problema é apresentada é apresentada aos alunos uma matriz e propõe-se que os expliquem as funções e propriedades dessa matriz, inclusive seu comportamento para as ordens quadradas. Na etapa de ação os estudantes identificaram que a matriz exibida se tratava de uma matriz tridiagonal, no momento de formulação foi possível conjecturar uma relação para o determinante dessa matriz. Para a validação de suas hipóteses os estudantes utilizaram o método da indução matemática como estratégia de prova.

A terceira situação-problema, tinha como objetivo designar uma fórmula variante de Binet para a classe dos PBCF. Nos momentos em que se deu a ação foi realizada a escrita da fórmula, bem como a formulação de uma hipótese. Partindo da formulação elaborada, os alunos recorreram ao método da indução, para validar o teorema em questão. Na quarta situação-problema foi elaborado de modo que os estudantes pudessem ter uma perspectiva histórica em que os pesquisados manifestaram "uma perspectiva histórica e evolutiva do MF, a partir da inserção das variáveis x, y e da unidade imaginária i, além de considerar os PBCF com uma extensão da SF na sua forma complexa" (OLIVEIRA, p.185, 2018).

Por fim, a última situação-problema tinha como finalidade argumentar e deduzir qualquer propriedade da SF, relacionando-a com a sequência dos PBCF. Os estudantes investigaram algumas propriedades, dentre as quais se destacou uma forma de extensão aos inteiros. Nesse sentido, na fase de ação os alunos consideram a fórmula de binet e sua variante

Res., Soc. Dev. 2019; 8(9):e33891302
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i9.1302

e na formulação estabeleceram uma hipótese para a escrita da fórmula. A validação se deu com a verificação e descrição de alguns casos particulares.

Isto posto, a pesquisadora realizou uma categorização dos momentos de resolução das cinco situações problemas. A tabela apresentada esquematiza as fases de ação, formulação e validação que foram realizadas pelos estudantes e além disso, expõe a institucionalização realizada pelo professor que se deu com a generalização e formulação das propriedades e teoremas em que é possível verificar o êxito decorrente do processo da construção dos conceitos trabalhados.

Logo em seguida, a autora apresenta a validação da pesquisa que se deu internamente, tendo em vista um número pequeno de alunos e considerando apenas as produções realizadas em sala de aula. Nesse sentido, é feita uma comparação entre as fases de análise a priori e posteriori. Além disso, Oliveira evidencia que foram encontrados alguns obstáculos epistemológicos e cognitivos, tais obstáculos foram superados com a troca de informação entre os estudantes e com a intervenção realizadas pelo professor.

A autora encerra o capítulo mostrando alguns depoimentos dos educandos que verificam que os objetivos propostos para a pesquisa foram alcançados. Não obstante, segundo Oliveira (2018, p.190) “pode-se compreender que foi oportunizado aos professores de Matemática em formação inicial, através de uma abordagem com o viés didático da TSD, o desenvolvimento de um raciocínio inferencial e de uma concepção epistemológica do ensino de HM”. Desse modo, percebe-se a importância da pesquisa no sentido de promover uma compreensão epistemológica, histórica e matemático-evolutiva dos Polinômios Complexos Bivariados Complexos de Fibonacci.

## 5. Considerações Finais

Oliveira desenvolve um estudo sobre o processo matemático de generalização do Modelo de Fibonacci, realizando situações didáticas oportunizando a investigação de seus teoremas e suas propriedades, explorando ainda a sua representação matricial e complexa numa perspectiva epistemológica, em relação a sua origem e evolução histórica.

No campo matemático, a autora desenvolveu o modelo de Fibonacci de modo que evidenciasse a evolução dimensional da sequência, mesmo que não tenha mostrado já nessa parte, as situações didáticas propostas posteriormente, ficou claro que a intenção dessa parte da pesquisa era do desenvolvimento matemático com enfoque na Engenharia Didática, mais precisamente na fase de análise preliminar.

ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i9.1302

De um modo geral Oliveira dedicou muito do seu trabalho para a fase preliminar, sendo que tornou a divisão da ED desproporcional do ponto de vista da metodologia de pesquisa, porém completa do ponto de vista matemática e da metodologia de ensino, as fases de análise a priori, validação e análise a porteriori, foram bem divididas no trabalho e o fato do campo matemático de estudo ter ficado extenso mostrou que a autora decidiu aliar o ensino com uma base matemática robusta, requisitos essenciais na formação científica de um professor de matemática que busca na pesquisa o desenvolvimento da função docente.

Vale salientar que durante o processo de validação da metodologia de pesquisa utilizada (ED), houve apenas a validação interna, visto que a quantidade de alunos utilizados para a coleta de dados é considerada pequena. Além disso, pode-se destacar a limitação do tempo de aplicação, dois anos referentes ao curso de mestrado, sendo o grande obstáculo para não realizar uma validação externa, tornando a pesquisa mais completa e aprimorada.

Um outro fator limitante foi o fato do semestre de aplicação da pesquisa ser no início do curso de formação inicial de professores, assim os alunos tornaram-se um tanto que limitados apenas aos passos indutivos matemáticos, não avançando em outros aspectos matemáticos, considerados até então importantes para a evolução da pesquisa.

**Referências**

Oliveira, R. R. de. (2018). *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes n-Dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais.* Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará.

**Porcentagem de contribuição de cada autor no manuscrito**

Renata Passos Machado Vieira – 28%

Francisco Evamar Barros – 27%

Thamires Silva Alves Aquino de Souza – 25%

Ana Karine Portela Vasconcelos - 20%