Dejan Trifunović *

INVESTICIONI IZBOR U USLOVIMA NEIZVESNOSTI PREGLEDNI ČLANAK

INVESTMENT CHOICE UNDER UNCERTAINTY (A REVIEW ESSAY)

APSTRAKT: *Skoro da ne postoji investicija čiji prinos je u potpunosti izvestan, već investitor svoje odluke donosi u uslovima neizvesnosti. Teorija očekivane korisnosti predstavlja osnovno analitičko sredstvo za opis izbora u uslovima neizvesnosti. Kritičari teorije smatraju da su pojedinci ograničeno racionalni i da teorija očekivane korisnosti nije ispravna. Kada su suočeni sa rizičnim odlukama, investitori se različito ponašaju u zavisnosti od stava prema riziku. Oni mogu da poseduju sklonost, odbojnost ili neutralnost prema riziku. Da bi se donela investiciona odluka potrebno je uporediti funkcije rasporeda prinosa. Postupak odlučivanja je jednostavniji ako se koriste samo očekivana vrednost i varijansa umesto funkcije rasporeda.*

KLJUČNE REČI: *Teorija očekivane korisnosti, stav prema riziku, stohastička dominacija, analiza očekivane vrednosti i varijanse, komparativna statika portfolio izbora.*

ABSTRACT: *An investment opportunity whose return is perfectly predictable, hardly exists at all. Instead, investor makes his decisions under conditions of uncertainty. Theory of expected utility is the main analytical tool for description of choice under uncertainty. Critics of the theory contend that individuals have bounded rationality and that the theory of expected utility is not correct. When agents are faced with risky decisons they behave differently, conditional on their attitude towards risk. They can be risk loving, risk averse or risk neutral. In order to make an investment decision it is necessary to compare probability distribution functions of returns. Investment decision making is much simpler if one uses expected values and variances instead of probability distribution functions.*

KEY WORDS: *theory of expected utility, attitude towards risk, stochastic dominance, mean-variance analysis, comparative statics of portfolio choice.*

1. UVOD

Cilj ovog rada je prikaz glavnih radova iz jedne od oblasti finansijske ekonomije (finansijske teorije). Od kada je dodeljena prva Nobelova nagrada za finansijsku teoriju, znatno je intenzivirana istraživačka aktivnost u ovoj oblasti. Za razliku od klasične mikroekonomske teorije koja se bavi izborom pojedinca kao

* Ekonomski fakultet u Beogradu, e-mail: Dejan@one.ekof.bg.ac.yu

potrošača, finansijska ekonomija se bavi izborom pojedinca kao investitora. Naime, svaki pojedinac poseduje određeno bogatstvo u sadašnjem trenutku i odlučuje o raspodeli svog dohotka za potrošnju i investiranje. Ako pretpostavimo da donosilac odluka živi samo u dva perioda i prima određeni dohodak u svakom od tih perioda, njemu na raspolaganju stoje tri alternative. Prvo, on može da troši tačno onoliko koliko zarađuje u svakom periodu i da uopšte ne investira. Drugo, on može da troši manje od iznosa koji zarađuje u prvom periodu i da deo koji ne troši investira da bi ostvario veću potrošnju u budućnosti. Treća mogućnost je da uzme zajam po osnovu dohotka koji će ostvariti u budućnosti i da dohodak iz oba perioda troši u sadašnjosti. U ovom radu pretpostavićemo da se pojedinac odlučuje za drugu alternativu. Kada se odluči na investiranje, investitor se suočava sa neizvesnim posledicama svojih odluka, tj. u trenutku investiranja nije poznato kakav će se prinos ostvariti. Teško je reći da postoji bezrizična aktiva koja donosi siguran prinos. Svako ulaganje nosi sa sobom određenu neizvesnost. Čak i kada bismo bili u stanju da na funkcionalan način predvidimo uticaj ekonomskih faktora na rezultate investicionog ulaganja, postoje brojni neekonomski faktori čiju pojavu nije moguće predvideti: politički faktori, elementarne nepogode, promene zakonodavnog sistema... U tom smislu, investitor može da očekuje da će se u budućnosti ostvariti određena kombinacija faktora, koji utiču na efekte njegovog ulaganja, sa određenom verovatnoćom. Ovu kombinaciju faktora i njima odgovarajuću verovatnoću nazvaćemo stanje prirode *(state of nature).*

Prvi model koji opisuje ponašanje u uslovima neizvesnosti jeste teorija očekivane korisnosti, koja predstavlja osnovu na koju se nadograđuju složeniji modeli. Eksperimentalni rezultati su ukazali na određene nedostatke teorije očekivane korisnosti, pa je stoga treći deo posvećen kritici očekivane korisnosti. Odluke investitora se razlikuju i zbog njihovog stava prema riziku. Stav prema riziku proučavamo u četvrtom delu. Koncept rastućeg rizika predstavlja sredstvo za analizu komparativne statike, dok su stohastička dominacija i analiza očekivane vrednosti i varijanse modeli za izbor investicionih alternativa. U osmom delu pokazujemo aspekte komparativne statike portfolio izbora u investicionom okruženju koje čine rizična i bezrizična aktiva, kao i u investicionom okruženju sa dve rizične aktive. Konačno, u devetom delu analiziramo funkciju tražnje za rizičnom imovinom.

2. TEORIJA OČEKIVANE KORISNOSTI

Švajcarski matematičar Danijel Bernuli se može smatrati prvim autorom koji je razmatrao teoriju očekivane korisnosti. Bernuli je konstruisao igru bacanja novčića u kojoj prvi igrač nudi drugom igraču nagradu čija je očekivana vrednost beskonačna (Bernoulli, 1738).

Igra ima sledeći tok. Pretpostavimo da Vam neko ponudi lutriju u kojoj možete da dobijete 2$ ukoliko se prilikom bacanja novčića pojavi »pismo«. Ukoliko se desi ovaj ishod posle prvog bacanja dobijate 2$ i igra se završava. Ukoliko se pojavi »glava« igra se nastavlja. Pri pojavljivanju »pisma« iz drugog bacanja, Vaša nagrada je 4$ i igra se završava. Ukoliko se i drugi put pojavi »glava«, baca se treći put. Pri realizaciji »pisma« iz trećeg pokušaja nagrada je 8$, itd. Očigledno je da nagrada koja se dobija u n-tom pokušaju iznosi $x=2^n$. Obeležimo sa $p(x)$ verovatnoću ostvarenja n-tog ishoda. Očekivana vrednost ove lutrije je beskonačna:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x \cdot p(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty . \tag{1}$$

Racionalan pojedinac će učestvovati u lutriji ukoliko je cena lutrijskog tiketa manja od očekivane vrednosti lutrije. Kako je očekivana vrednost lutrije beskonačna, bilo koja cena lutrijskog tiketa biće prihvatljiva! Ipak, teško da bi neko bio spreman da plati veliki iznos za učešće u ovoj igru. Postavlja se pitanje kako rešiti prethodni paradoks. Bernuli predlaže da se ne koristi očekivana vrednost, već da se koristi *očekivana korisnost*, pri čemu bi korisnost svakog n-tog ishoda bila određena prema logaritamskoj funkciji korisnosti $U=\ln x$.

Interesantno rešenje Sankt Petersburškog paradoksa bez pozivanja na funkciju korisnosti daje Seneti (1976). Odredimo da je maksimalna isplata fiksirana na nivou od 2^{n^*} (na primer 2^8). Očekivana vrednost igre je:

$$E(X) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \ldots + \frac{1}{2^{n^*}} \cdot 2^{n^*}\right) + 2^{n^*}\left(\frac{1}{2^{n^*+1}} + \frac{1}{2^{n^*+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n^*+i}} + \ldots\right) = n^* + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) = n^* + 1 , \tag{2a}$$

dok varijansu za ovu igru određujemo prema formuli $\sigma^2(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$. Dakle, potrebno je da odredimo $E(X^2)$

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 + \frac{1}{8} \cdot 8^2 + \ldots + \frac{1}{2^{n^*}} \cdot \left(2^{n^*}\right)^2 + \left(2^{n^*}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2^{n^*+1}} + \frac{1}{2^{n^*+2}} + \ldots\right) = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n^*} + 2^{n^*-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) =$$

$$=2+2^2+\ldots+2^{n^*}+2^{n^*}=2+2^2+\ldots+2^{n^*-1}+2 \cdot 2^{n^*}=2+2^2+\ldots+2^{n^*-1}+2 \cdot 2^{n^*+1}. \tag{2b}$$

Na osnovu ovog rezultata varijansa je $\sigma^2(X) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n^*}}^{n^*+1} 2^i - (n^*+1)^2 .$

Ukoliko $n^* \to \infty$, koeficijent varijacije[1], koji predstavlja meru finansijskog rizika, je beskonačan i nije racionalno učestvovati u ovoj igri ukoliko se traži veliki iznos za učešće.

---

[1] Koeficijent varijacije predstavlja količnik standardne devijacije i očekivane vrednosti.

Mnogo godina posle objavljivanja Bernulijevog članka, Džon fon Nojman i Oskar Morgenštern su definisali šest osnovnih aksioma i korišćenjem tih aksioma rigorozno izveli funkciju očekivane korisnosti (Hey, 1979). Suština njihove teorije je u tome da pojedinac ponderiše korisnost ishoda u svakom stanju prirode sa verovatnoćom ostvarenja tog stanja prirode i da sumira sve ove ponderisane vrednosti. Dakle, ako je korisnost pojedinca u i-tom stanju prirode u_i, a verovatnoća ostvarenja tog stanja prirode p_i, tada je očekivana korisnost $U=\Sigma^{n}_{i=1} u_i p_i$. Nobelovac Moris Ale je pokazao da se pojedinci često ne ponašaju u skladu sa očekivanom korisnošću i izveo je eksperiment koji potkrepljuje njegove tvrdnje (Mas-Colell et al, 1995) . Eksperiment koji je Ale sproveo je dobio naziv Aleov paradoks. Pretpostavimo da postoje tri moguće nagrade u lutriji: prva nagrada (2.500.000 \$), druga nagrada (500.000 \$), treća nagrada (0).

Ispitanicima se nude dva testa. Prvi test predstavlja izbor između lutrija[2] $L_1=(0,1,0)$ i $L'_1=(0.1,0.89,0.01)$, dok je drugi test izbor između lutrija $L_2=(0,0.11,0.89)$ i $L'_2=(0.1,0,0.90)$. Eksperimentalni rezultati pokazuju da većina ispitanika preferira L_1 u odnosu na L'_1 i L'_2 u odnosu na L_2. Međutim, moguće je pokazati da algebarskom transformacijom relacije $L_1>L'_1$ dobijamo $L_2>L'_2$. Obeležimo sa u_{25}, u_{05} i u_0 korisnost tri ishoda, tada $L_1>L'_1$ implicira:

$$u_{05}>(0.1)\ u_{25} + (0.89)\ u_{05} + (0.01)\ u_0. \tag{3a}$$

Dodavanjem (0.89) u_0 - (0.89) u_{05} obema stranama, dobijamo:

$$(0.11)\ u_{05} + (0.89)\ u_0 > (0.1)\ u_{25} + (0.9)\ u_0, \tag{3b}$$

na osnovu čega zaključujemo da treba da važi $L_2>L'_2$. Dakle, Aleov paradoks pokazuje da eksperimentalni rezultati ukazuju na to da se pojedinac ne ponaša uvek u skladu sa teorijom očekivane korisnosti. Ukoliko bi njegovo ponašanje bilo u skladu sa teorijom, on bi morao da preferira lutriju L_2 u odnosu na lutriju L'_2.

3. KRITIKA TEORIJE OČEKIVANE KORISNOSTI

Teorija očekivane korisnosti pretpostavlja da su pojedinci savršeno racionalni i da se ponašaju u skladu sa određenim aksiomima. Postavlja se pitanje da li je u praksi zaista tako? Kaneman i Tverski smatraju da su pojedinci ograničeno ra-

2 Lutrije prikazujemo tako što dajemo verovatnoće ostvarenja prve, druge i treće nagrade, respektivno. Ovde koristimo nešto drugačiju notaciju za lutrije nego u ostalom delu teksta. Lutriju ćemo uobičajeno obeležavati sa $L=(x,p,y,q)$, gde se ishod x ostvaruje sa verovatnoćom p, a ishod y sa verovatnoćom q.

cionalni i u nizu eksperimenata dokazuju ovo tvrđenje (Kahneman, 2003). Ovi autori smatraju da pojedinci većinu odluka zasnivaju na intuiciji. Ako su pojedinci, zaista, ograničeno racionalni, teorija očekivane korisnosti nema empirijsku podlogu. U tom smislu Kaneman i Tverski (1979) predlažu prospekt teoriju kao alternativu teoriji očekivane korisnosti. Prospekt teorija pripada modelima nelinearnih verovatnoća. Naime, očekivana korisnost je $U=\Sigma^{n}{}_{i=1} u_i p_i$, gde je korisnost koju ostvaruje pojedinac u i-tom stanju prirode, a p_i verovatnoća ostvarenja i-tog stanja prirode. Kod prospekt teorije ne govori se o očekivanoj korisnosti, već o vrednosti *(V)* koju pojedinac dodeljuje svakom prospektu (lutriji). Teorija analizira prospekte (lutrije) tipa $L=(x,p;y,q)$, gde se ishod x ostvaruje sa verovatnoćom p, ishod y sa verovatnoćom q i ishod 0, sa verovatnoćom 1-p-q, pri čemu je $p+q1$. Prospekt je *striktno pozitivan* ukoliko su svi njegovi ishodi pozitivni, odnosno $x,y>0$ i $p+q=1$, a *striktno negativan* ako su svi njegovi ishodi negativni. Prospekt je *regularan* ukoliko nije ni striktno pozitivan ni striktno negativan.

Za regularan prospekt vrednost je $V=(x,p;y,q)=\pi(p)v(x)+\pi(q)v(y)$, gde su p i q verovatnoće ostvarenja prvog i drugog stanja prirode, respektivno, a $v(x)$ i $v(y)$ predstavljaju vrednosti ishoda lutrije u ova dva stanja prirode, pri čemu je $\pi(\bullet)$ nelinearna funkcija. Dakle, vrednost svakog ishoda se ponderiše sa nelinearnom funkcijom $\pi(\bullet)$.

Reverzibilnost preferencija predstavlja još jedan nedostatak teorije očekivane korisnosti (Fishburn, 1988). Neka L_1 i L_2 predstavljaju dve lutrije i neka su ekvivalenti lutrije[3] $c(L_1)$ i $c(L_2)$, respektivno. Dakle, $c(L_1)$ predstavlja najmanji iznos za koji je pojedinac spreman da ustupi pravo na učešće u lutriji L_1. Reverzibilnost preferencija nastaje ukoliko važi:

$$L_1 \succ L_2 \quad \text{i} \quad c(L_1) < c(L_2) \tag{4}$$

Reverzibilnost preferencija ukazuje da pojedinac preferira L_1 u odnosu na L_2, ali da je spreman da proda pravo na učešće u lutriji L_1 za manji iznos nego pravo na učešće u lutriji L_2. Reverzibilnost preferencija nastaje u situaciji kada se pojedincima nudi izbor između dve lutrije od kojih jedna ima veliku verovatnoću ostvarenja srednjeg iznosa dobitka (lutrija L_1), dok druga ima malu verovatnoću ostvarenja velikog iznosa dobitka (lutrija L_2, koju ćemo nazvati novčana lutrija). Pojedinci obično biraju lutriju L_1, ali ekvivalent lutrije je veći za novčanu lutriju (L_2). Slovic i Lihtenštajn (1983) objašnjavaju ovaj fenomen tako što smatraju da

3 Ovaj pojam ćemo kasnije detaljnije analizirati. Za sada konstatujmo da ekvivalent lutrije predstavlja neki iznos sigurnog dohotka koji daje istu korisnost kao i lutrija. U nešto drugačijoj interpretaciji ekvivalent lutrije pokazuje najmanji iznos za koji je pojedinac spreman da proda pravo na učešće u lutriji.

pojedinci pri izboru između lutrija obraćaju najveću pažnju na verovatnoću, dok pri vrednovanju ekvivalenta lutrije u prvom planu imaju iznos koji je moguće dobiti ili izgubiti u lutriji. Akteri koji pokazuju reverzibilnost pri proceni ekvivalenta lutrije polaze od potencijalnog dobitka koji koriguju naniže za verovatnoću i iznos mogućeg gubitka. Proces korekcije je obično neprecizan i procena ekvivalenta lutrije je pod velikim uticajem potencijalnog dobitka. Ovaj fenomen uzrokuje da je ekvivalent lutrije veći za L_2. Greter i Plot (1979) daju nekoliko objašnjenja za reverzibilnost preferencija, čime nastoje da pokažu da eksperimentalni uslovi nisu dobra aproksimacija realnosti.

Netranzitivnost ili cikličnost preferencija predstavlja situaciju u kojoj $L_1 \geq L_2$ i $L_2 \geq L_3$ implicira $L_3 \geq L_1$. Tverski (1969) eksperimentalno pokazuje da preferencije ispitanika ispoljavaju netranzitivnost. Jedan od aksioma teorije očekivane korisnosti je tranzitivnost, pa je samim tim i deskriptivna verodostojnost teorije očekivane korisnosti dovedena u pitanje. Eksperiment ispituje postojanje netranzitivnosti pri izboru između lutrija. Sve lutrije imaju isplatu x\$ sa verovatnoćom p i 0\$ sa verovatnoćom q=1-p. Lutrije u tabeli 1 su konstruisane tako da očekivana vrednost raste sa porastom verovatnoće i opada sa porastom isplate.

Tabela 1. *Netranzitivnost lutrija*

lutrije	p	x	očekivana vrednost $(p \cdot x)$
L_1	7/24	5,00	1,46
L_2	8/24	4,75	1,58
L_3	9/24	4,50	1,69
L_4	10/24	4,25	1,77
L_5	11/24	4,00	1,83

Ispitanicima je ponuđen izbor između lutrija (L_1,L_2), (L_2,L_3), (L_3,L_4), (L_4,L_5), kao i između ekstremnih lutrija (L_1,L_5). Pri izboru između sličnih lutrija ispitanici su preferirali lutrije sa većom isplatom (dimenzija 1), tako da je $L_1 > L_2 > L_3 > L_4 > L_5$. Sa druge strane, pri izboru između ekstremnih lutrija ispitanici su preferirali lutriju sa većom očekivanom vrednošću (dimenzija 2) $L_5 > L_1$.

4. STAV PREMA RIZIKU

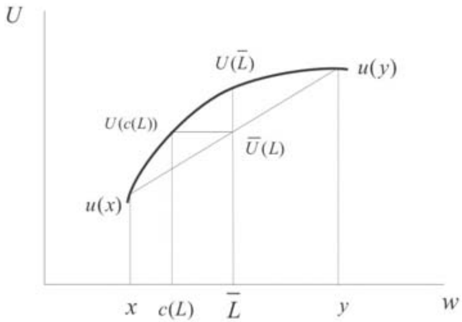
Sledeći aspekt izbora pojedinca u uslovima neizvesnosti predstavlja stav prema riziku. Ovim problemom su se prvi bavili Fridman i Sevidž (1948), koji su grafički prikazali funkciju korisnosti koja je konkavna u slučaju odbojnosti prema riziku i konveksna u slučaju sklonosti prema riziku. Pretpostavimo da se pojedinac suočava sa lutrijom L koja daje ishod x sa verovatnoćom p i ishod y sa verovatnoćom $q\equiv 1-p$, pri čemu je $x<y$. Očekivana korisnost lutrije L je:

$$E[U(L)] \equiv \overline{U}(L) = p \cdot u(x) + (1-p) \cdot u(y) \ . \tag{5}$$

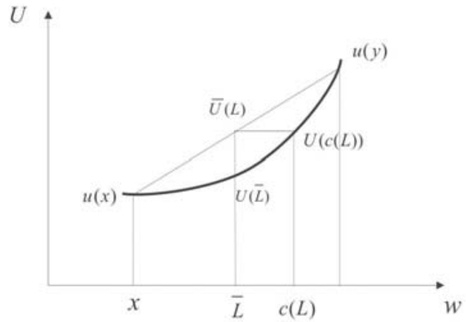
Očekivana vrednost lutrije L je:

$$E(L) \equiv \overline{L} = p \cdot x + (1-p) \cdot y \ . \tag{6}$$

Ukoliko važi $U(L)<U(L)$ kažemo da je pojedinac *odbojan ka riziku* (slika 1.A). Suprotno, ukoliko važi $U(L)>U(L)$, pojedinac je *sklon ka riziku* (slika 1.B). Dohodak koji daje istu korisnost kao i lutrija *(certainty equivalent)*[4] $c(L)$ je određen relacijom $U(c(L))>U(L)$. Koristeći prethodnu definiciju za stav pojedinca prema riziku možemo utvrditi poređenjem $c(L)$ i L. Razmotrimo sliku 1, gde je na horizontalnoj osi prikazan iznos dohotka w, a na vertikalnoj korisnost U. Ukoliko je $c(L)<L$, pojedinac je odbojan ka riziku i L-$c(L)$ predstavlja iznos premije osiguranja, koji je akter spreman da plati da bi izbegao lutriju. Suprotno, ukoliko je $c(L)>L$, pojedinac je sklon ka riziku i maksimalan iznos koji je spreman da plati da bi učestvovao u lutriji (cena lutrijskog tiketa) iznosi $c(L)$-L. Funkcija korisnosti na slici *1A* je konkavna, a na slici *1B* je konveksna.



Slika 1.A. *Odbojnost prema riziku*



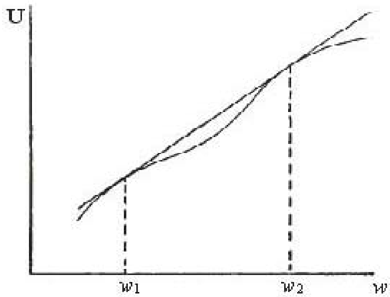
Slika 1.B. *Sklonost prema riziku*

Prethodno prikazana grafička analiza nije u stanju da objasni empirijski verifikovan fenomen da pojedinci sa niskim dohotkom istovremeno kupuju osiguranje i učestvuju u lutriji. Funkcija korisnosti koja bi opisivala ovakvo ponašanje

[4] U daljem tekstu ekvivalent lutrije.

morala bi da bude konkavna u jednom intervalu i konveksna u drugom. Ovu funkciju su Fridman i Sevidž nazvali funkcija korisnosti sa dve prevojne tačke *(Double Inflection Utility Function)* (slika 2).

Hari Markovic (1952) kritikuje pristup Fridmana i Sevidža (F-S hipoteza). Slika 2. prikazuje F-S funkciju korisnosti. Pojedinac sa bogatstvom w_1 se može smatrati siromašnim, a pojedinac sa bogatstvom w_2 bogatim. Pojedinac sa dohotkom manjim od w_1 kao i pojedinac sa dohotkom većim od w_2 neće učestvovati u lutriji, jer je funkcija korisnosti konkavna u tom intervalu. Sa druge strane, osoba sa bogatstvom u intervalu (w_1,w_2) će učestvovati u lutriji koja nudi podjednaku mogućnost dobitka i gubitka u iznosu od $0.5(w_2-w_1)$, jer je funkcija korisnosti konveksna na tom nivou dohotka. Markovic smatra da je nerealna implicitna pretpostavka F-S hipoteze, da bogati i siromašni pojedinci ne učestvuju u lutriji, a da učestvuju samo oni sa srednjim nivoom dohotka. U cilju dolaženja do ispravnog oblika funkcije korisnosti, Markovic sprovodi eksperiment u kome pokazuje da funkcija korisnosti ima tri prevojne tačke.



Slika 2. *Fridman-Sevidžova funkcija korisnosti*

Nastavljajući analizu svojih prethodnika, Prat (1964) definiše meru apsolutne odbojnosti prema riziku, koja je kasnije korišćena u nebrojeno mnogo članaka iz finansijske ekonomije. Neka lutrija L ima kao ishod slučajnu promenljivu[5] X i pretpostavimo da se radi o fer lutriji, tako da je $E(X)=0$.Varijansa promenljive X je σ^2_x. Pojedinac raspolaže sa početnim bogatstvom u iznosu od w. Ekvivalent lutrije (*certainty eqivalent*) obeležimo sa $c(w+X)$[6]. Kako je pojedinac indiferentan između lutrije i ekvivalenta lutrije imamo:

[5] Za razliku od prethodnog razmatranja u kome je lutrija imala dva ishoda x i y, ovde je ishod lutrije slučajna promenljiva X. Dakle, u ovom slučaju lutrija ima mnogo više mogućih ishoda.

[6] Pojedinac raspolaže sa početnim dohotkom u iznosu od w, pa je ekvivalent lutrije $c(w+X)$ umesto $c(L)$.

$$E[(U(w+X))]=U(c(w+X)). \tag{7}$$

Razlika w-$c(w+X)$ predstavlja maksimalan iznos koji je pojedinac spreman da plati da bi izbegao lutriju. Mera koju je predložio Prat upravo koristi prethodni koncept, tako da $\pi=w-c(w+X)$ predstavlja meru apsolutne odbojnosti ka riziku.

Koristeći Tejlorovu teoremu možemo da predstavimo $U(w+X)$ kao:

$$U(w+X)=U(w)+U'(w)[(w+X)-w]+1/2\cdot U''(w)\cdot[(w+X)-w]^2+\dots \tag{8}$$

Uzimajući očekivanu vrednost obe strane i zanemarujući izvode trećeg i višeg reda imamo sledeću aproksimaciju:

$$E[U(w+X)]\approx E[U(w)]+U'(w)\cdot E(X)+1/2\cdot U''(w)\cdot E(X-0)^2. \tag{9}$$

Imajući u vidu da je $E(X)=0$ i da je $E(X-0)^2=E[X-E(X)]^2=\sigma^2_x$, dobijamo:

$$E[U(w+X)]\approx U(w)+1/2\cdot U''(w)\cdot\sigma^2_x. \tag{10}$$

Kako je $c(w+X)=w-\pi$, razvijanjem $U(w-\pi)$ pomoću Tejlorove formule, sledi da je:

$$U(c(w+X))=U(w-\pi)\approx U(w)+U'(w)\cdot[(w-\pi)-w]+\dots \tag{11a}$$

Zanemarujući članove od trećeg nadalje, dobijamo približnu vrednost:

$$U(c(w+X))\approx U(w)+U'(w)\cdot(-\pi). \tag{11b}$$

Prema (7) imamo da je $E[(U(w+X))]=U(c(w+X))$, odnosno:

$$U(w)+1/2\cdot U''(w)\cdot\sigma^2_x = U(w)+U'(w)\cdot(-\pi) \tag{12}$$

$$\pi=-(1/2)\sigma^2_x\frac{U''(w)}{U'(w)}. \tag{13}$$

Pošto je $(1/2)\sigma^2_x$ konstanta, $A(w)=-(U''(w)/U'(w))$ predstavlja meru apsolutne odbojnosti prema riziku, poznatu i kao Erou-Pratov (Arrow-Pratt) koeficijent. Ukoliko je $U'(w)>0$ i pojedinac je odbojan ka riziku ($U''(w)<0$), Erou-Pratov koeficijent je pozitivan. Ukoliko je pojedinac sklon ka riziku (U''(w)>0), tada je $A(w)$<0, dok je u slučaju neutralnosti prema riziku $A(w)$=0. Relativnu odbojnost prema riziku pokazuje procentualna premija osiguranja $\pi_p=(w-c(w+X))/w$, gde je π_p procenat bogatstva koji je investitor spreman da plati da bi izbegao lutriju. Iz poslednje jednakosti sledi da je $c(w+X)=w(1-\pi_p)$. Promenimo definiciju za X, tako da sada ova slučajna promenljiva predstavlja prinos na jedan investirani dolar. Neka je $E(X)=1$, a varijansa promenljive X je σ^2_x. Prema tome, ukoliko investiramo iznos od w, dobijamo prinos u iznosu od wX. Primenom Tejlorove formule dobijamo da je mera relativne odbojnosti prema riziku $R(w)=-(wU''(w)/U'(w))$.

U isto vreme nezavisno od Prata, Kenet Erou (1965) je korišćenjem drugačijeg postupka došao do istog rezultata. Erou je, takođe, pretpostavio da funkcija korisnosti koja bi realno opisivala stav prema riziku mora da poseduje svojstvo da apsolutna odbojnost prema riziku opada sa povećanjem dohotka i da relativna odbojnost prema riziku raste sa povećanjem dohotka.

Stiven Ros (1981) kritikuje pristup Eroua i Prata i smatra da njihov koeficijent predstavlja meru lokalne odbojnosti prema riziku (Erou-Pratov koeficijent je definisan za jedan nivo dohotka). Ros predlaže upotrebu globalne mere odbojnosti prema riziku, tj. pojedinac A je odbojniji ka riziku od pojedinca B ako je za svaki nivo dohotka pojedinac A odbojniji ka riziku od pojedinca B. Međutim, za razliku od Erou-Pretovog koeficijenta, koji meri i odbojnost i sklonost ka riziku, Rosov koeficijent meri samo odbojnost prema riziku, tj uvek je $U''(w)<0$. Dakle, za dva pojedinca A i B, sa funkcijama korisnosti U_A i U_B kažemo da je pojedinac sa funkcijom korisnosti U_A odbojniji ka riziku od pojedinca sa funkcijom korisnosti U_B u Erou-Pratovom smislu ($U_{A \supseteq AP} U_B$) ukoliko važi:

$$-\frac{U_A''}{U_A'} \geq -\frac{U_B''}{U_B'}. \tag{14}$$

Ros daje sledeću definiciju odbojnosti ka riziku.

Definicija 1. Pojedinac sa funkcijom korisnosti U_A je strogo odbojniji ka riziku od pojedinca sa funkcijom korisnosti U_B ($U_A \supseteq U_B$) ako i samo ako $(\exists\lambda)(\forall w_1, w_2)$:

$$\frac{U_A''(w_1)}{U_B''(w_1)} \geq \lambda \geq \frac{U_A'(w_2)}{U_B'(w_2)} \quad \text{ili} \quad \frac{U_A''}{U_B''} \geq \lambda \geq \frac{U_A'}{U_B'}. \tag{15}$$

Pojedinac sa funkcijom korisnosti U_A je odbojniji ka riziku od pojedinca sa funkcijom korisnosti U_B ako je za svaki nivo dohotka pojedinac A odbojniji ka riziku od pojedinca B.

Ekonomski anali br 167, oktobar 2005. - decembar 2005.

Vezu između dve definicije pokazuje sledeća teorema.

Teorema 1. Ako je $U_A \supseteq U_B$ tada je $U_{A \supseteq AP} U_B$, ali suprotno ne važi.

Dokaz. Implikacija sledi direktno iz definicije Rosovog koeficijenta odakle imamo:

$$\frac{U_A''}{U_B''} \geq \frac{U_A'}{U_B'} \Rightarrow^{7} \frac{U_A''}{U_A'} \leq \frac{U_B''}{U_B'} \Rightarrow -\frac{U_A''}{U_A'} \geq -\frac{U_B''}{U_B'}.$$

Pokažimo da suprotno ne važi za klasu eksponencijalnih funkcija. Ako je $U_A=-e^{-aw}$ i $U_B=-e^{-bw}$, za $a>b$, tada je $U_{A \supseteq AP} U_B$, ali:

$$\frac{U_A'(w_2)}{U_B'(w_2)} = \frac{a}{b} \cdot e^{(b-a) \cdot w_2} \quad \text{i} \quad \frac{U_A''(w_1)}{U_B''(w_1)} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot e^{(b-a) \cdot w_1}. \tag{16}$$

Za dovoljno veliko w_1-w_2 imamo da je $U_A''(w_1)/U_B''(w_1)<U_A'(w_2)/U_B'(w_2)$ što je u suprotnosti sa $U_A \supseteq U_B$.

Poseban problem predstavlja stav prema riziku u multivarijantnom slučaju (Richard, 1975). Suština je u sledećem. Pretpostavimo da postoje četiri moguća ishoda i da važi $x_0<x_1$ i $y_0<y_1$. Lutrija L_1 nudi izbor »sve ili ništa«, jer nudi ishode (x_0,y_0) i (x_1,y_1) sa podjednakom verovatnoćom, dok lutrija L_2 nudi jedan dobar i jedan loš ishod $((x_0,y_1)$ i $(x_1,y_0))$ sa podjednakom verovatnoćom. U ovom kontekstu pojedinac je multivarijantno odbojan prema riziku ukoliko preferira L_2 u odnosu na L_2.

Erou i Prat su definisali meru odbojnosti ka riziku za slučaj kada funkcija korisnosti zavisi samo od jedne promenljive - dohotka. Pored prethodno opisanog problema, u multivarijantnom slučaju cilj je i da se uporedi stav prema riziku za dva pojedinca *A* i *B* čije funkcije korisnosti zavise od više promenljivih: $u_{A(\underline{w})}$ i $u_{B(\underline{w})}$, gde je $\underline{w}$ *n* dimenzionalni vektor koji pokazuje raspoloživu količinu svakog od *n* dobara. Ovim problemom su se bavili Kilstrom i Mirman[8], Dankan[9] i Levi. U daljem tekstu izlažemo pristup čiji su autori Haim i Azriel Levi (1991).

Definišimo vektor rizika (lutriju) $\underline{L}$ tako da je $\underline{L}=\underline{x}$ sa verovatnoćom p i $\underline{L}=-\underline{x}$ sa verovatnoćom $1-p$, gde je $\underline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$[10]. Pretpostavimo da pojedinac ima inicijalnu potrošačku korpu $\underline{w}$. Ukoliko je ispunjen aksiom monotonosti, tada za bilo koje $\underline{x}$ važi:

7 Ova implikacija proizilazi iz činjenice da uvek važi $U''(w)<0$.

8 Kihlstrom, R.E. and L.J. Mirman, 1974., Risk Aversion with Many Commodities, *Journal of Economic Theory*, 8, 361-388.

9 Duncan, T, 1977., A Matrix Measure of Multivariate Local Risk Aversion, *Econometrica*, 45, 895-903.

10 U ovoj lutriji potrošač može da poveća ili da umanji raspoloživu količinu svakog od dobara za *x*.

$$u(\underline{w}+\underline{x}) > u(\underline{w}) > u(\underline{w}-\underline{x}) \,. \tag{17}$$

Uslov (17) očigledno važi za $x_i \geq 0$, za $i=1,2,\ldots,n$ sa striktnom nejednakošću za makar jednu vrednost.

Naredna teorema uspostavlja vezu između standardne premije za rizik i premije za rizik u multivarijantnom slučaju (za dokaz videti Levi and Levi, 1991).

Teorema 2. Neka su $u_A(\underline{w})$ i $u_B(\underline{w})$ dve funkcije korisnosti. Obeležimo sa $\underline{L}$ vektor rizika (lutriju) i sa $\underline{\pi}_A$ i $\underline{\pi}_B$ vektore premija za rizik[11] koji su u skladu sa $u_A(\underline{w})$ i $u_B(\underline{w})$, respektivno. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

(I) Pojedinac sa funkcijom korisnosti $u_A(\underline{w})$ pokazuje veću odbojnost ka riziku od pojedinca sa funkcijom korisnosti $u_B(\underline{w})$.

(II) $u_A(\underline{w}-\underline{\pi B}) \geq u_A(\underline{w}-\underline{\pi A})$ za svako $\underline{w}$ i $\underline{L}$.

Dakle, teorema 2 pokazuje da je pojedinac koji je odbojniji prema riziku ($u_A(\underline{w})$) spreman da plati veću premiju za rizik.

5. RASTUĆI RIZIK (INCREASING RISK)

Videli smo na koji način je moguće rangirati pojedince prema njihovom stavu prema riziku. Sledeći problem sa kojim se suočavamo je na koji način rangirati investicione alternative. Svakako da treba izabrati investiciju koja daje veću očekivanu vrednost i ima manju varijansu od druge investicije (ako zanemarimo diversifikaciju). Ako dve investicije imaju istu očekivanu vrednost investitor će se opredeliti za onu sa manjom varijansom. Poslednja ideja je navela Rotšilda i Stiglica (1970) da analiziraju promenu distribucije verovatnoće tako da se povećava disperzija, ali da se ne menja očekivana vrednost *(Mean Preserving Increase in Spread-MPIS)*. Rotšild i Stiglic daju definiciju za MPIS koju nazivaju integralni uslovi *(integral conditions)*. U narednom izlaganju razmatramo prinos na investicione alternative, pa obeležimo prinos slučajnom promenljivom *R*.

Formalno, raspored *F* je manje rizičan od rasporeda *G* ukoliko važe sledeća dva uslova:

$$T(b) = \int_a^b \left[G(r) - F(r)\right] \cdot dr = 0 \tag{18}$$

---

11 Vektor premije za rizik pokazuje koliki iznos svakog dobra je potrošač spreman da žrtvuje da bi izbegao lutriju.

$$T(c) = \int_a^c [G(r) - F(r)] \cdot dr \geq 0 \text{, za } a \leq c \leq b \text{ .} \tag{19}$$

Pokažimo da prvi uslov implicira jednakost očekivanih vrednosti. Koristeći parcijalnu integraciju i uzimajući da je $u=G(r)-F(r)$ i $dw=dr$ dobijamo:

$$\int_a^b [G(r) - F(r)] \cdot dr = r \cdot [G(r) - F(r)] \Big|_a^b - \int_a^b r \cdot d[G(r) - F(r)]. \tag{20}$$

Znamo da je $G(b)=F(b)=1$ i $G(a)=F(a)=0$, pa desna strana izraza (20) postaje[12]:

$$-\int_a^b r \cdot d[G(r) - F(r)] = -\int_a^b r \cdot [g(r) - f(r)] \cdot dr = -(\mu_G - \mu_F) = 0 \Rightarrow \mu_G = \mu_F \text{ .} \tag{21}$$

gde su μ_G i μ_F očekivane vrednosti za rasporede G i F.

Drugi uslov pokazuje da je funkcija $G(r)$ dobijena od funkcije $F(r)$ transferom verovatnoće iz centralnog dela rasporeda ka krajevima.

Pokažimo vezu koncepta rastućeg rizika i Pratove definicije premije za rizik (Levy, 1992). Pretpostavimo da imamo dve investicije čiji prinosi su R_A i R_B sa funkcijama gustine f i g, respektivno. Slučajne promenljive R_A i R_B imaju istu očekivanu vrednost. Definišimo premiju za rizik koja je u skladu sa ovim funkcijama gustine, gde je w početni iznos dohotka:

$$E_f U(w + R_A) = U(w + E(R_A) - \pi_f) \text{ , } E_g U(w + R_B) = U(w + E(R_B) - \pi_g) \text{ .} \tag{22}$$

Pretpostavimo da je prema MPIS g rizičnije od f. Rotšild i Stiglitc (1970) smatraju da pojedinac koji je odbojan ka riziku preferira raspored f odakle sledi $E_f U(w+R_A) \geq E_g U(w+R_B)$. Kako je $E(R_A)=E(R_B)$, poslednja nejednakost je ispunjena ako je $\pi_f < \pi_g$. Dakle, Rotšild-Stiglicova definicija rizika i Erou- Pratova definicija su ekvivalentne.

Dajamond i Stiglitc (1974) su razvili alternativni koncept kojim se vrši transformacija funkcije rasporeda tako da se poveća disperzija, ali da se ne menja očekivana korisnost referentnog investitora (investitora A). Integralne uslove u ovom slučaju možemo da napišemo kao:

$$\int_a^b u_A'(r) \cdot [G(r) - F(r)] \cdot dr = 0 \tag{23}$$

$$\int_a^c u_A'(r) \cdot [G(r) - F(r)] \cdot dr \geq 0 \text{ , za } a \leq c \leq b \tag{24}$$

gde je $u_{A'(r)}$ granična korisnost.

12 Prvi izvod funkcije rasporeda predstavlja funkciju gustine.

Izraz (23) pokazuje da je za investitora *A*, koga ćemo tretirati kao referentnog investitora, očekivana korisnost ista za rasporede *F* i *G*. Izraz (24) sugeriše da je raspored *G* dobijen od rasporeda *F* transferom verovatnoće iz centralnog dela ka krajevima (raspored *G* je rizičniji). Dajamond i Stiglic analiziraju kako ova promena funkcije rasporeda utiče na očekivanu korisnost investitora *B* koji je odbojniji ka riziku od investitora *A*. Posle određenih transformacija dobija se da je $\int_a^b u_B(r)dG(r)<\int_a^b u_B(r)dF(r)$. Interpretacija prethodnog rezultata je sledeća. Ukoliko je funkcija rasporeda *G* dobijena od funkcije *F* transferom verovatnoće iz centralnog dela ka krajevima rasporeda (*G* je rizičnije od *F*), i ako je očekivana korisnost za referentnog investitora (investitor *A* u našem slučaju) ista za oba rasporeda, tada će investitor koji je odbojniji ka riziku od referentnog investitora (investitor *B*) preferirati raspored *F* u odnosu na raspored *G*. Drugim rečima, raspored *G* je rizičniji od rasporeda *F* za investitora *B*.

Jedna od mogućih primena koncepta rastućeg rizika predstavlja analiza optimalnog nivoa štednje (Rotschild and Stiglitz, 1971). Na primer, pretpostavimo da imamo dve funkcije rasporeda za prinos *F* i *G*, tako da *G* ima veću disperziju od *F*, dok su im očekivane vrednosti iste. Postavlja se pitanje kako će pojedinac reagovati na rastući rizik pri zameni rasporeda *F* rasporedom *G*. On može da odluči da smanji štednju ako se suočava sa rastućim rizikom ili da poveća štednju da bi obezbedio minimum životnog standarda u budućnosti. Rotšild i Stiglitc pokazuju da će pojedinac koji ima konstantnu relativnu odbojnost ka riziku $U(w)=w^{1-y}/1-y$, gde je y koeficijent relativne odbojnosti prema riziku[13], povećati štednju ako je $y>1$. Sa druge strane, ako je $y<1$ pojedinac će štedeti manje ako je suočen sa funkcijom rasporeda R_B. Druga primena se odnosi na portfolio izbor. Pri primeni koncepta rastućeg rizika na portfolio izbor koristimo kvadratnu funkciju korisnosti[14]. Kvadratna funkcija poseduje svojstvo rastuće apsolutne odbojnosti prema riziku[15], pa je logično da povećanje rizičnosti prinosa dovede do smanjenja tražnje za rizičnom imovinom i povećanja tražnje za bezrizičnom imovinom.

U narednom izlaganju analiziramo povećanje negativne asimetrije rasporeda, ali prethodno definišimo pozitivnu i negativnu asimetriju. Razmatraćemo dve investicije *A* i *B* sa prinosima R_A i R_B, pri čemu je $E(R_A)=E(R_B)=0$.

Investiciju čija je funkcija gustine prikazana na slici 3A (investicija *A*), karakteriše veća verovatnoća nastanka gubitka, ali je iznos potencijalnog gubitka manji. Sa druge strane, verovatnoća nastanka dobitka je manja, dok je ekstremni

13 Imamo da je $u'(w)=w^{-\gamma}$ i $u''(w)=-\gamma w^{-1-\gamma}$ odakle sledi $R(w)=-w(-\gamma w^{-1-\gamma})w^{\gamma}=\gamma$.

14 O kvadratnoj funkciji korisnosti će biti više reči kasnije. Za sada, recimo da ova funkcija ima oblik $U(R)=a+bR+cR^2$.

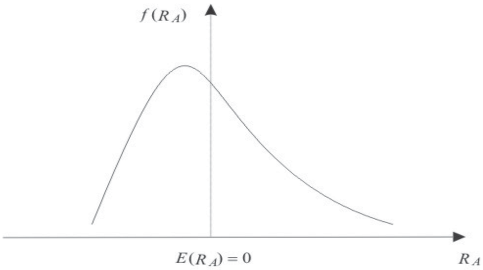
15 Odbojnost prema riziku raste sa porastom w pa je $A'(w)>0$.

dobitak veći. Obrnuto važi za investiciju čija je funkcija gustine prikazana na slici 3B (investicija *B*). Kada razmatramo rizik, pre svega mislimo na ekstremne gubitke. Investicija *A* ima gubitke čiji je iznos limitiran, dok je mogući ekstremni gubitak veći u slučaju investicije *B*. Investitor koji je odbojan prema riziku će preferirati investiciju *A*.

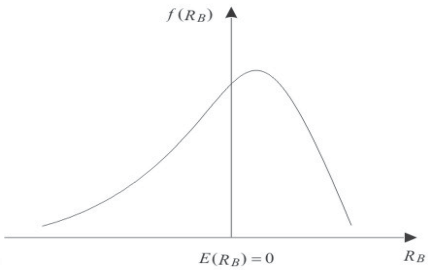
Asimetrija raspodele verovatnoće se izražava trećim centralnim momentom:

$$M_3 = E[R - E(R)]^3 \tag{25}$$

Treći stepen zadržava predznak odstupanja realizovanih ishoda slučajne promenljive od očekivane vrednosti. Za investiciju *A* sa funkcijom gustine $f(R_A) M_3$ je pozitivno, dok je za investiciju *B* sa funkcijom gustine $f(R_A) M_3$ negativno (Bodie, Kane and Markus, 2002).



Slika 3.A. *Pozitivna asimetričnost*



Slika 3.B. *Negativna asimetričnost*

Menezes, Gejs i Tresler (1980) razmatraju jedan poseban oblik transformacije funkcije rasporeda tako da očekivana vrednost i varijansa ostanu nepromenjene, ali da se poveća negativna asimetrija. Naime, investitori preferiraju pozitivnu asimetriju rasporeda i imaju averziju prema negativnoj asimetriji, tako da povećanje negativne asimetrije rasporeda predstavlja povećanje rizičnosti prinosa na investicije. Ova transformacija predstavlja kombinaciju dve jednostavnije transformacije: transformacije koja povećava disperziju i ne menja očekivanu vrednost i transformacije koja smanjuje disperziju i ne menja očekivanu vrednost. U skladu sa ovim razmatranjima, za pojedinca koji ima pozitivan treći izvod funkcije korisnosti kažemo da ima odbojnost prema negativnoj asimetriji.

6. KONCEPT STOHASTIČKE DOMINACIJE

Koncept stohastičke dominacije predstavlja analitičko sredstvo za rangiranje dve investicione alternative. Ideja kod ovog pristupa je da se izvrši poređenje funkcija rasporeda. Hanoh i Levi (1969), Hadar i Rasel (1969) su prvi autori koji su se bavili stohastičkom dominacijom. Prikazaćemo osnovne ideje koncepta na sledećem primeru (Elton et al, 2003).

Prinosi i njihove verovatnoće za dve investicije su prikazani u sledećoj tabeli:

Tabela 2. *Prinosi i verovatnoće za investicije A i B*

Investicija A		Investicija B	
R_A	verovatnoća	R_B	verovatnoća
12	1/3	11	1/3
10	1/3	9	1/3
8	1/3	7	1/3

Na osnovu tabele nije moguće doneti zaključak koju alternativu izabrati. Moguće je da prinos na investiciju *B* bude 11%, dok na investiciju *A* može da bude 10% ili 8%. Sledeća tabela u kojoj prikazujemo funkcije rasporeda pomaže u rešavanju ove dileme.

Tabela 3. *Funkcije rasporeda za investicije A i B*

Prinos	Funkcije rasporeda	
R	*A*	*B*
7	0	1/3
8	1/3	1/3
9	1/3	2/3
10	2/3	2/3
11	2/3	1
12	1	1

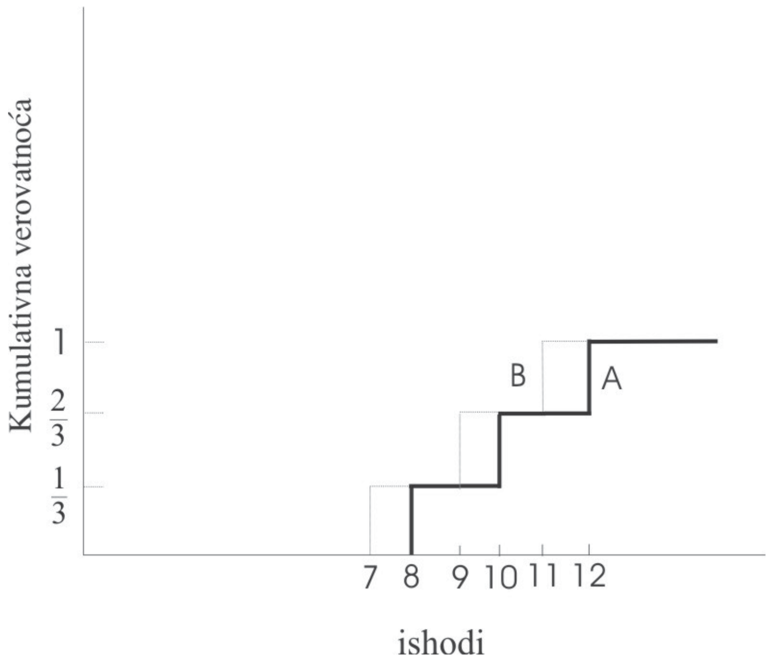
Iz tabele uočavamo da je kumulativna verovatnoća ostvarenja nekog prinosa uvek veća za investiciju *B*, na osnovu čega zaključujemo da je verovatnoća ostvarenja nižeg prinosa veća za investiciju *B*. Dakle, investicija *B* je rizičnija pa će investitor koji preferira više u odnosu na manje izabrati investiciju *A*. U ovom primeru investicija *A* dominira nad investicijom *B* prema prvostepenoj stohastičkoj dominaciji. Na slici 4 dve funkcije rasporeda se ne seku i *A* se ne nalazi iznad *B*.

Sada ćemo formalno dokazati prethodnu ilustraciju u kontinuelnom slučaju[16].

[16] O stohastičkoj dominciji smo više pisali u prethodnom radu gde smo dali dokaz za prvostepenu, drugostepenu i trećestepenu dominaciju u diskretnom i kontinuelnom slučaju i analizirali različite varijante modela. (D. Trifunović, 2005., Koncept stohastičke dominacije u rangiranju investicionih alternativa, *Ekonomski anali*, br. 164).

Teorema 3. Investicija *A* sa funkcijom rasporeda $F(r)$ je preferirana u odnosu na investiciju *B* sa funkcijom rasporeda $G(r)$ ako:

1. Investitori preferiraju više u odnosu na manje, $U'(r)>0$ i
2. $F(r)\leq G(r)$ za svako *r* i $F(r)<G(r)$ za najmanje jednu vrednost.



Slika 4. *Prvostepena stohastička dominacija*

Dokaz. Investicija *A* je preferirana u odnosu na investiciju *B* ako je očekivana korisnost za investiciju *A* veća od očekivane korisnosti za investiciju *B*, što je očigledno iz prethodne tabele. Očekivane korisnosti za investicije *A* i *B* su:

$$\overline{U}_A = \int_a^b u(r)dF(r) \quad \text{i} \quad \overline{U}_B = \int_a^b u(r)dG(r) \ , \qquad (26)$$

gde su *a* i *b* najmanja i najveća vrednost koju mogu da imaju promenljive u funkcijama rasporeda *F* i *G*. Da bi investicija *A* bila preferirana u odnosu na investiciju *B* mora da važi:

$$\int_a^b u(r)dF(r) - \int_a^b u(r)dG(r) > 0 \ . \qquad (27)$$

U daljem dokazivanju koristimo metod parcijalne integracije, odakle imamo:

$$\int_a^b u(r)d\left[F(r)-G(r)\right]=u(r)\cdot\left[F(r)-G(r)\right]_a^b-\int_a^b u'(r)\left[F(r)-G(r)\right]\cdot dr \quad (28)$$

Kako važi $F(b)=G(b)=1$ i $F(a)=G(a)=0$, investicija A je preferirana u odnosu na investiciju B ako je poslednji izraz pozitivan, odnosno ako je integral negativan. Prema pretpostavci važi $u'(r)>0$, pa je integral negativan ako je $F(r)\leq G(r)$. Da bi vrednost integrala bila različita od nule, striktna nejednakost mora da važi bar za jednu vrednost.

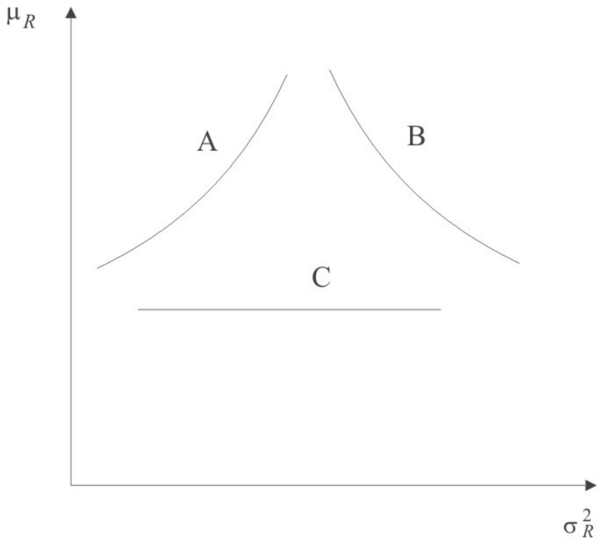
7. ANALIZA OČEKIVANE VREDNOSTI I VARIJANSE (MEAN-VARIANCE ANALYSIS)

Koncept stohastičke dominacije vrši rangiranje investicija pomoću funkcije rasporeda. Međutim, postavlja se pitanje da li je potrebno koristiti celu funkciju rasporeda ili možemo da koristimo parametre koji opisuju funkciju rasporeda? Tvorci portfolio teorije, Hari Markovic i Džejms Tobin smatraju da su nam potrebna smo dva parametra koja opisuju raspored prinosa na investiciju: očekivana vrednost ($E(R)\equiv\mu_R$) i varijansa σ^2_R. U skladu sa ovom idejom konstruiše se funkcija korisnosti koja zavisi samo od očekivane vrednosti i varijanse $U(\mu_R,\sigma^2_R)$. Investitor koji je odbojan ka riziku preferiraće, uz veću očekivanu vrednost, i manju varijansu, tako da njegove preferencije možemo da prikažemo pomoću krive indiferentnosti.

Investitor preferira veću očekivanu vrednost u odnosu na manju tako da je parcijalni izvod funkcije korisnosti po očekivanoj vrednosti pozitivan $\partial U/\partial\mu_R>0$. Ako je pojedinac odbojan (sklon) ka riziku tada je parcijalni izvod po varijansi manji (veći) od nule $\partial U/\partial\sigma^2_R<(>)0$, dok je za neutralnost prema riziku parcijalni izvod po varijansi jednak nuli. Ako krive indiferentnosti prikažemo u koordinatnom sistemu gde je očekivana vrednost na vertikalnoj osi, a varijansa na horizontalnoj, tada će krive indiferentnosti biti pozitivnog (negativnog) nagiba za pojedinca koji je odbojan (sklon) ka riziku, odnosno biće horizontalne u slučaju neutralnosti prema riziku (slika 5).

Međutim, kritičari ovog pristupa smatraju da takve krive indiferentnosti nije moguće konstruisati. Karl Borč (1969) je konstruisao kontraprimer u kojem je pokazao da se krive indiferentosti u ravni očekivane vrednosti i varijanse svode na jednu tačku. Dejvid Beron (1977), međutim, pokazuje na primeru kvadratne funkcije korisnosti da Borčov kontraprimer narušava aksiom monotonosti[17].

[17] Podsetimo se da aksiom monotonosti pretpostavlja da pojedinac preferira veći dohodak u odnosu na manji, tj. funkcija korisnosti je rastuća $u'(\bullet)>0$.



Slika 5. *Krive indiferentnosti: A - odbojnost ka riziku B – sklonost ka riziku i C - neutralnost prema riziku*

Cijang (1972) pokušava da reši Borčov paradoks uvođenjem preferencija prema pozitivnoj asimetriji rasporeda. Cijang, dalje, pokazuje da nagib krive indiferentnosti mora biti manji od 45^0. Ovaj zaključak važi i za funkcije korisnosti sa osobinama koje je definisao Erou[18] u koje spadaju eksponencijalna funkcija, funkcija sa konstantnom elastičnošću i logaritamska funkcija. Odgovarajući na članak Cijanga, Borč daje podrobnije objašnjenje svog kontraprimera (Borch, 1974). Razmotrimo sledeće lutrije:

Lutija L_1 ima ishode:	*Lutija L_2*, ima ishode:	*Lutija L_3*, ima ishode:
0 sa verovatnoćom 0.5	-2 sa verovatnoćom 0.2	0 sa verovatnoćom 0.5
2 sa verovatnoćom 0.5	3 sa verovatnoćom 0.8	4 sa verovatnoćom 0.5.
$E(L_1)=1$ $Var(L_1)=1$	$E(L_2)=2$ $Var(L_2)=4$	$E(L_3)=2$ $Var(L_3)=4$

Ukoliko su za nekog pojedinca lutrije L_1 i L_2 ekvivalentne, jer se parovi očekivanih vrednosti i varijansi ({1,1} i {2,4}) nalaze na istoj krivi indiferentnosti, ponudimo mu lutriju L_3. Lutrija L_3 je bolja od lutrije L_1 i trebalo bi da bude atraktivnija i od lutrije L_2. Međutim, lutrije L_2 i L_3 imaju iste parove očekivanih vrednosti i varijansi {2,4}. Ako koristimo argumentaciju o preferenciji ka pozitivnoj

18 Erou je smatrao da funkcija korisnosti treba da poseduje svojstvo opadajuće apsolutne i rastuće relativne odbojnosti prema riziku (Arrow, 1965).

asimetriji moguće je pronaći logiku u prethodnom primeru. Lutrija L_2 ima negativnu asimetriju i manje je atraktivna od simetrične lutrije L_3.

Borč tvrdi da je moguće formirati sličan kontraprimer u kome bi lutrije L_1 i L_2 imale ekvivalentna prva tri centralna momenta, tako da se nađu na istoj krivi indiferentnosti, a zatim formirati lutriju L_3 koja ima ista prva tri centralna momenta kao i lutrija L_1, ali koja bi bila superiorna u odnosu na L_2. Borč, takođe, pokazuje da za gama raspored ne važi preferencija ka pozitivnoj asimetriji.

Biervag (1974) kritikuje Cijangovu tvrdnju da krive indiferentnosti moraju imati nagib manji od 45°. Neka a_f predstavlja ukupan iznos investiran u bezrizičnu aktivu, a a_R ukupan iznos investiran u rizičnu aktivu. Bezrizična aktiva ima nulti prinos. Inicijalno ulaganje a_f+a_R donosi prinos na portfolio $r_p=a_f+ra_R$ na kraju perioda, pri čemu stopa prinosa na rizičnu aktivu ima funkciju rasporeda $F(r)$ sa očekivanom vrednošću μ_R i varijansom σ^2_R. Očekivana vrednost i standardna devijacija prinosa portfolija su $E(r_p)=\mu_p=a_f+\mu_R a_R$ i $\sigma_p=\sigma_R a_R$. Očekivanu korisnost možemo prikazati kao funkciju samo ova dva parametra $U(\mu_p,\sigma_p)=E[u(R)]$.

Razmotrimo nagib krive indiferentnosti. Prvo odredimo ukupni izvod $U(\mu_p,\sigma_p)$ po a_R:

$$U_{\mu_p}\cdot\left[\frac{d\alpha_f}{d\alpha_R}+\mu_R\right]+U_{\sigma_p}\cdot\sigma_R=0\,. \tag{29}$$

Nagib krive indiferentnosti je:

$$\frac{d\mu_p}{d\sigma_p}=-\frac{U_{\sigma_p}}{U_{\mu_p}}=\frac{\mu_R}{\sigma_R}+\frac{1}{\sigma_R}\cdot\frac{d\alpha_f}{d\alpha_R}\,. \tag{30}$$

Izraz da_f/da_R je negativan jer su rizična i bezrizična aktiva u određenoj meri supstituti. Međutim, ukoliko je μ_R dovoljno veliko u odnosu na σ_R nagib krive indiferentnosti može biti veći od 45°.

U narednom izlaganju analiziramo različite oblike funkcija korisnosti koje se koriste u investicionoj analizi i njihove karakteristike (Danthine and Donaldson, 2002). Prvo prikazujemo kvadratnu funkciju, koja je najviše korišćena, ali i najviše kritikovana, zatim funkciju korisnosti za slučajnu promenljivu sa normalnim rasporedom da bismo, na kraju, analizu proširili na funkcije korisnosti različitih oblika.

U mikroekonomskoj i finansijskoj teoriji se često analizira kvadratna funkcija korisnosti. Ako sa R obeležimo prinos, a sa a,b i c proizvoljne parametre ova funkcija se može predstaviti u obliku:

$$U(R)=a+b\cdot R+c\cdot R^2\,. \tag{31}$$

Pogodna osobina kvadratne funkcije korisnosti je mogućnost da se korisnost izrazi kao funkcija očekivane vrednosti i varijanse. Očekivana korisnost kvadratne funkcije je:

$$E\left[U(R)\right]=a+b\cdot E(R)+c\cdot E(R^2)\,. \tag{32}$$

Zamenjujući $E(R^2)=\sigma^2_R+[E(R)]^2$, dobijamo da funkcija korisnosti kvadratnog oblika zavisi samo od prva dva centralna momenta distribucije verovatnoće:

$$E\left[U(R)\right]=a+b\cdot\mu_R+c\cdot\mu_R^2+c\cdot\sigma_R^2\,. \tag{33}$$

Kriva indiferentnosti koja opisuje kvadratnu funkciju korisnosti je skup:

$$\left\{\sigma_R^2,\mu_R \mid E\left[U(R)\right]=a+b\cdot\mu_R+c\cdot\mu_R^2+c\cdot\sigma_R^2=k\right\}\text{, za dati nivo korisnosti } k. \tag{34}$$

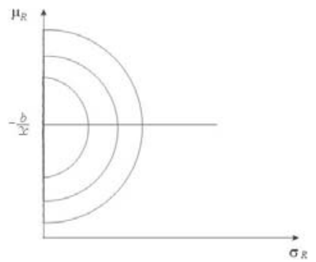
Podelimo izraz za krivu indiferentnosti sa c i dodajmo levoj i desnoj strani $b^2/4c^2$:

$$\mu_R^2+\sigma_R^2+\frac{b}{c}\cdot\mu_R+\frac{b^2}{4\cdot c^2}=\frac{k}{c}-\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4\cdot c^2} \tag{35a}$$

$$\sigma_R^2+\left(\mu_R+\frac{b}{2\cdot c}\right)^2=\frac{k}{c}-\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4\cdot c^2} \tag{35b}$$

Na ovaj način smo dobili jednačinu kružnice poluprečnika $\sqrt{k/c-a/c+b^2/4c^2}$, sa centrom u (0,-b/2c). Relevantan deo krive indiferentnosti je onaj koji ispunjava aksiom monotonosti ($U'(R)>0$), odnosno deo za koji krive indiferentnosti imaju pozitivan nagib.

Ukoliko ne koristimo kvadratnu funkciju, a želimo da izrazimo korisnost samo u funkciji prva dva centralna momenta, potrebno je da slučajna promenljiva R ima normalan raspored. Pretpostavimo da R ima normalan raspored sa parametrima μ_R i σ^2_R: $f(R)=N(R,\mu_R,\sigma^2_R)$.



Slika 6. *Krive indiferentnosti za kvadratnu funkciju korisnosti*

Predstavimo slučajnu promenljivu R u standardizovanom normalnom obliku $Z=(R-\mu_R)/\sigma_R \sim N(Z,0,1)$. Iz poslednjeg izraza imamo da je $R=\sigma_R Z+\mu_R$, odakle određujemo očekivanu korisnost:

$$E(U(R)) = \int_a^b u(r)\cdot f(r)\cdot dr = \int_a^b u(\sigma_R \cdot Z + \mu_R)\cdot N(Z;0,1)\cdot dz\ . \tag{36}$$

Na ovaj način smo pokazali da korisnost zavisi samo od očekivane vrednosti i standardne devijacije.

Tobin (1958) je smatrao da su krive indiferentnosti za svaku dvoparametarsku funkciju raspodele verovatnoće konveksne. Feldštajn (1969), osporava ovu Tobinovu tvrdnju i pokazuje da krive indiferentnosti ne moraju da budu nužno konveksne za lognormalnu raspodelu verovatnoće koja pripada familiji dvoparametarskih funkcija raspodele verovatnoće. Funkcija raspodele verovatnoće za lognormalni raspored ima oblik:

$$f(r) = \frac{1}{(2\cdot\pi)^{0,5}\cdot s\cdot r}\cdot e^{-(\ln r - m)^2/2\cdot s^2}, \tag{37}$$

gde je m očekivana vrednost za $ln\ r$, a s^2 varijansa za $ln\ r$. Vezu između (m,s^2) i očekivane vrednosti i varijanse za R (μ_R,σ^2_R) pokazuju sledeće relacije:

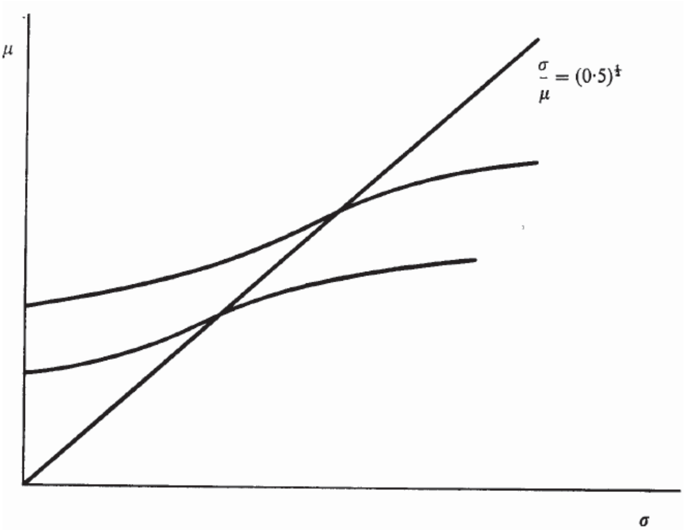
$$\mu_R = e^{m+0,5\cdot s^2} \quad \text{i} \quad \sigma_R^2 = \left(e^{m+0,5\cdot s^2}\right)^2\cdot\left(e^{s^2}-1\right). \tag{38}$$

Pretpostavimo da je funkcija korisnosti logaritamskog oblika $U(r)=\ln r$, tako da je očekivana korisnost $E(U(R))=m=\int \ln r\, f(r)\, dr$. Logaritmujući prvu jednačinu iz (38) dobijamo da je $m=\ln \mu_R(-1/2)s^2$. Iz druge jednačine imamo $\sigma^2_R/\mu^2_R=e^{s^2}-1$ odnosno $s^2=\ln((\sigma^2_R/\mu^2_R)+1)$. Kombinujući ove rezultate dobijamo $E(U(R))=m=\ln\mu_R-(1/2)\ln((\sigma^2_R/\mu^2_R)+1)$. Implicitnim diferenciranjem dobijamo da je:

$$sign\frac{d^2\mu_R}{d(\sigma_R^2)^2} = sign\left[1-2\cdot\frac{\sigma_R^4}{\mu_R^4}-\frac{\sigma_R^2}{\mu_R^2}\right] = sign\left[1-2\cdot k^4-k^2\right], \tag{39}$$

gde je $k=\sigma_R/\mu_R$ koeficijent varijacije. Uvedimo smenu $k^2=t$ i dobijamo kvadratnu jednačinu $1-2t^2-t$. Jedini pozitivan koren je $t=1/2$, odakle je $k=1/\sqrt{2}$.

Drugi izvod menja znak u $k=1/\sqrt{2}$, pa su krive indiferentnosti konveksne ukoliko je $0<k<1/\sqrt{2}$ i konkavne za $k>1/\sqrt{2}$ (slika 7). Krive indiferentnosti su konkavne desno od prave linije koja polazi iz koordinatnog početka, tako da se u ovom intervalu sa povećanjem rizika traži sve manja kompenzacija u vidu dodatnog prinosa. Drugim rečima, Feldštajnov dokaz pokazuje da u delu u kome su krive indiferentnosti konkavne odbojnost prema riziku opada sa povećanjem rizika!



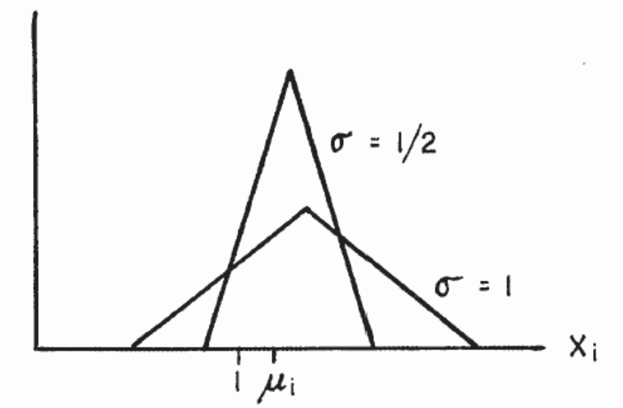
Slika 7. *Krive indiferentnosti za lognormalan raspored*

U opštem obliku definišimo funkciju korisnosti kao $U(w{+}E(R))$, gde je R prinos, a w iznos početnog bogatstva. Pretpostavimo da je $E(R){=}0$. Primenom Tejlorove formule dobijamo:

$$U(w+E(R)) = U(w) + E(R)\cdot U'(w) + \frac{E(R)^2}{2!}\cdot U''(w) + \frac{E(R)^3}{3!}\cdot U'''(w) + \frac{E(R)^4}{4!}\cdot U''''(w) + \ldots \quad (40)$$

$$U(w+E(R)) = U(w) + \frac{E[R-E(R)]^2}{2!}\cdot U''(w) + \frac{E[R-E(R)]^3}{3!}\cdot U'''(w) + \frac{E[R-E(R)]^4}{4!}\cdot U''''(w) + \ldots \quad (41)$$

Ovaj izraz zavisi od n centralnih momenata. Međutim Semjuelson (1970) je pokazao da ukoliko prinos ima funkciju raspodele verovatnoće koja odgovara kompaktnoj ili malo rizičnoj funkciji raspodele, važnost centralnih momenata raspodele verovatnoće posle varijanse je znatno manja nego važnost prva dva momenta. Kompaktnost rasporeda Semjuelson definiše tako da ukoliko varijansa teži nuli raspodela verovatnoće konvergira ka sigurnoj vrednosti. Slika 8. ilustruje kompaktnost raspodele. Ukoliko $\sigma \rightarrow 0$ raspodela verovatnoće se grupiše u okolini μ.



Slika 8. *Kompaktnost raspodele verovatnoće*

Sa praktičnog aspekta, da bi raspodela bila kompaktna potrebno je da cene akcija nisu podložne velikim oscilacijama, pa se neizvesnost u pogledu prinosa smanjuje u malim vremenskim intervalima. Osim u slučaju velikih berzanskih poremećaja (kakav se desio 1987) može se tvrditi da je Semjuelsonova pretpostavka ispunjena (Bodie, Kane and Markus, 2002).

Svi do sada korišćeni metodi izbora pretpostavljali su kontinuelnost preferencija. Ako investitor ima leksikografske preferencije ka sigurnosti, u smislu da je za njega najvažnije da minimizira verovatnoću da prinos na investiciju R padne ispod nekog unapred određenog nivoa R_L, potrebno je koristiti drugačiji model rangiranja (Roy, 1952). Model koji uvažava ovakve preferencije je *Safety-First* model. Kriterijum za investicioni izbor kod ovog modela može se prikazati kao min $P(R<R_L)$, gde je $P(\bullet)$ je verovatnoća.

Još jedan model koji se koristi za investicioni izbor predstavlja maksimiziranje geometrijske sredine (Jean, 1980). U kontinuelnom slučaju izraz za geometrijsku sredinu možemo da razvijemo upotrebom Tejlorove teoreme. Posle ove transformacije dolazimo do zaključka da se logaritam geometrijske sredine može predstaviti kao funkcija n centralnih momenata.

8. PORTFOLIO IZBOR – KOMPARATIVNA STATIKA

Investitor retko ulaže u jedan finansijski instrument, već obično investira u skup finansijskih instrumenata koji se naziva portfolio. Najprostiji portfolio se sastoji od dva instrumenta od kojih jedan predstavlja rizičnu, a drugi bezrizičnu aktivu. Bezrizična aktiva je teorijski koncept, jer je skoro nemoguće naći aktivu koja ne nosi nikakav rizik. Obično se kao aproksimacija bezrizične aktive uzimaju obveznice trezora SAD kao najsigurniji oblik investiranja. S obzirom da rizična aktiva inkorporira određeni rizik, ona mora da daje i veći prinos u odnosu na bezrizičnu aktivu. Iako smo konstatovali da pojedinac obično investira u portfolio, može se desiti da je u određenim situacijama, doduše vrlo retkim, optimalno investirati u samo jedan instrument. U tom smislu kažemo da ulaganje samo u rizičnu ili samo u bezrizičnu aktivu predstavlja granični optimum, dok ulaganje u obe vrste aktive predstavlja unutrašnji optimum (Arrow, 1965).

Komparativna statika analizira promenu optimalnog izbora pojedinca pri promeni jedne varijable dok ostale varijable ostaju nepromenjene. Pri tome se ne bavimo dinamikom, tj, načinom uspostavljanja novog optimuma, već samo poredimo dva optimalna izbora. Šta se dešava sa portfolio alokacijom investitora koji ulaže u rizičnu i bezrizičnu aktivu ako se promeni njegov dohodak? Pretpostavimo da postoje rizična i bezrizična aktiva. Kas i Stiglic (1972) pokazuju da se ulaganje u rizičnu aktivu povećava sa povećanjem dohotka ako postoji opadajuća apsolutna odbojnost prema riziku. Ovo pokazujemo u sledećoj teoremi.

Teorema 4. Ukoliko postoje dve aktive, jedna rizična i jedna bezrizična, ukupno ulaganje u rizičnu aktivu se povećava, ostaje nepromenjeno ili se smanjuje sa povećanjem početnog bogatstva ukoliko postoji opadajuća, konstantna ili rastuća apsolutna odbojnost prema riziku.

Ukupno ulaganje u rizičnu aktivu obeležimo sa α_R. Stopa prinosa na rizičnu aktivu u stanju prirode θ je $R_?$, a stopa prinosa na bezrizičnu aktivu je R_f. Početno bogatstvo investitora obeležimo sa w_0, a finalno bogatstvo u stanju prirode θ sa w_θ. Koeficijent apsolutne odbojnosti prema riziku je $A(w_\theta)$=-(U''/U'). Teorema tvrdi da kada je da_R/dw_0>(=)(<)0 tada je $A'(w_\theta)$<(=)(>)0.

Dokaz. Finalno bogatstvo investitora u stanju prirode θ je[19] $w_?=w_0r_f+\alpha_R(r_\theta-r_f)$. Uslov prvog reda za maksimum očekivane korisnosti je:

$$E[u'(w_\theta)\cdot(r_\theta - r_f)] = 0\,. \tag{42}$$

Implicitno diferencirajući (42) dobijamo:

$$\frac{d\alpha_R}{d\,w_0} = \frac{r_f\cdot E[U''(w_\theta)\cdot(r_\theta - r_f)]}{-E[U''(w_\theta)\cdot(r_\theta - r_f)^2]}\,. \tag{43}$$

Imenilac je uvek pozitivan prema uslovu drugog reda, tako da znak izraza (43) zavisi od znaka brojioca:

$$E[U''(w_\theta)\cdot(r_\theta - r_f)] = -E[A(w_\theta)\cdot U'(w_\theta)\cdot(r_\theta - r_f)] =$$

$$= E[(A(w^*) - A(w_\theta))\cdot U'(w_\theta)\cdot(r_\theta - r_f)] - A(w^*)\cdot E[U'(w_\theta)\cdot(r_\theta - r_f)]\,, \tag{44}$$

gde je $w^*=w_0r_f$.

---

[19] $\alpha_f r_f+\alpha_R r_\theta=(w_0-\alpha_r)r_f+\alpha_R r_?=w_0 r_f+\alpha_R(r_\theta-r_f)$.

Prema uslovu prvog reda $A(w^*)E[U'(w_?)(r_?-r_f)]=0$, pa se poslednji izraz može napisati kao:

$$E[(A(w^*) - A(w_\theta)) \cdot U'(w_\theta) \cdot (r_\theta - r_f)]. \tag{45}$$

Ako je $A'(\bullet)>0$, kada je $r_\theta>r_f$ tada je $A(w^*)<A(w_\theta)$, dok je za $r_\theta>r_f$ $A(w^*)>A(w_\theta)$. Dakle, za $A'(\bullet)>0$ brojilac je negativan.

Slično, ako je $A'(\bullet)<0$, kada je $r_\theta>r_f$ tada je $A(w^*)<A(w_\theta)$, dok je za $r_\theta>r_f$ $A(w^*)>A(w_\theta)$, tako da je brojilac pozitivan, dok je za $A(w^*)=A(w_\theta)$ brojilac jednak nuli.

Erou (1965) je na sličan način pokazao da je dohodna elastičnost tražnje za bezrizičnom aktivom (novcem) veća od jedan ako postoji rastuća relativna odbojnost prema riziku, odnosno manja od jedan ako postoji opadajuća relativna odbojnost prema riziku.

Promena stope prinosa na bezrizičnu aktivu predstavlja sledeći elemenat komparativne statike. Pretpostavljajući da su investitori odbojni prema riziku, Fišburn i Porter (1976) pokazuju da povećanje prinosa na bezrizičnu aktivu dovodi do smanjenja ulaganja u rizičnu aktivu ako postoji konstantna ili rastuća apsolutna odbojnost prema riziku. U slučaju opadajuće apsolutne odbojnosti prema riziku nije moguće nedvosmisleno odrediti promenu ponašanja investitora. U ovom slučaju moguće je i da povećanje prinosa na bezrizičnu aktivu dovede do povećanja ulaganja u rizičnu aktivu. Poslednji elemenat komparativne statike u investicionom okruženju koje čine rizična i bezrizična aktiva predstavlja promena funkcije rasporeda prinosa na rizičnu aktivu (Kira and Ziemba, 1980). Ako izvršimo promenu funkcije rasporeda, tako da novi raspored dominira nad starim prema prvostepenoj stohastičkoj dominaciji, dolazimo do zaključka da će investitor povećati ulaganje u rizičnu aktivu.

U daljem izlaganju razmatramo investiciono okruženje koje se sastoji od dve rizične aktive. Ponovo je prvi elemenat komparativne statike promena dohotka. Obeležimo prinos na akciju *A* slučajnom promenljivom R_A, a prinos na akciju *B* slučajnom promenljivom R_B. Kira i Ziemba (1980) pokazuju koje uslove treba da ispuni funkcija korisnosti da bi sa povećanjem dohotka investitor smanjio ulaganje u investiciju sa prinosom R_A. Dalje, ako izvršimo transformaciju funkcije rasporeda prinosa na investiciju *A*, tako da novi raspored dominira nad starim prema prvostepenoj stohastičkoj dominaciji, tada će se povećati ulaganje u investiciju *A* (Hadar and Seo 1988, 1990). Na kraju, izvršimo transformaciju funkcije rasporeda za slučajnu promenljivu R_A, tako da se novi raspored dobije od starog transferom verovatnoće sa krajeva ka centralnom delu rasporeda. Ova transformacija se naziva smanjenje disperzije koje ne menja očekivanu vrednost *(mean preserving contraction)*. Hadar i Seo (1988, 1990) pokazuju da se posle ove transformacije povećava ulaganje u investiciju sa prinosom R_A.

9. TRAŽNJA ZA RIZIČNOM IMOVINOM

Za portfolio kažemo da je efikasan ukoliko ne postoji druga kombinacija sa istim (ili višim) očekivanim prinosom i nižim rizikom ili ako ne postoji portfolio sa istim (ili nižim) rizikom i višim očekivanim prinosom. Koristeći se prethodnom logikom izvodimo model tražnje za rizičnom imovinom tako da se funkcija tražnje za njom dobija na sličan način kao i standardna funkcija tražnje u teoriji potrošača – maksimiziranjem funkcije cilja uz ograničenje, odnosno minimiziranjem funkcije cilja uz ograničenje. Ovde minimiziramo varijansu za dati nivo očekivanog prinosa (Levy, 1973, 1977). Potrebno je pronaći vektor $\alpha'=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ (gde je α_i iznos investiran u instrument *i*) koji minimizira varijansu portfolija za bilo koji dati nivo očekivane vrednosti. Očekivana vrednost portfolija na kraju godine je:

$$E[W_1] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(1 + E(R_i)\right) + \left(w_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \cdot \left(1 + r_f\right) = w_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot E(R_i) + \left(w_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \cdot r_f \,. \quad (46)$$

Varijansa prinosa portfolija je $\sigma^2(W_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ j>1}}^{n} \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \sigma_{ij}$, gde je w_0 investitorovo bogatstvo na početku perioda, W_1 - investitorovo bogatstvo na kraju perioda, α_i - iznos koji je investiran u *i*-ti instrument, $E(R_i)$ - očekivana stopa prinosa na *i*-ti instrument, σ^2_i - varijansa stope prinosa na *i*-ti instrument, σ_{ij} -kovarijansa stopa prinosa na instrumente *i* i *j* i r_f-bezrizična stopa prinosa.

Da bismo rešili problem formirajmo Lagranžovu funkciju, za zadati nivo očekivane vrednosti $E[W_1]$:

$$L = \sigma(W_1) + \lambda \cdot \left[E(\overline{W}_1) - w_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot r_i - \left(w_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \cdot r_f \right] = \sigma(W_1) + \lambda \cdot \left[r_p - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot r_i - \left(w_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \cdot r_f \right] . \quad (47)$$

Poslednji izraz proizilazi iz činjenice da je $E[W_1]=w_0+r_p$, gde je r_p prinos na portfolio.

Funkcija tražnje koja se dobija rešavanjem (47) može se prikazati u obliku jednačine Sluckog sa efektom supstitucije i dohodovnim efektom. Ova funkcija tražnje služi za analiziranje postojanja komplementarnosti odnosno supstitutabilnosti dva finansijska instrumenta. Levi pokazuje da postojanje supstitutabilnosti ili komplementarnosti zavisi od koeficijenta korelacije. Ako se dva instrumenta nalaze u pozitivnoj korelaciji oni su supstituti, dok su u slučaju negativne korelacije ovi instrumenti komplementi.

10. ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazali smo neke od elemenata finansijske ekonomije. Ova oblast sve više dobija na značaju. Danas su istraživanja uglavnom orijentisana u pravcu asimetričnih informacija na finansijskom tržištu. U ovom pristupu istraživači nastoje da utvrde da li postoji mogućnost postojanja jake forme efikasnosti finansijskog tržišta. U najuticajnijem radu iz ove oblasti Grosman i Stiglic[20] su pokazali da nije moguće postojanje jake forme efikasnosti u smislu da cena finansijske aktive reflektuje sve insajderske informacije. Takođe je interesantno pitanje da li insajdersko trgovanje može da poveća društveno blagostanje. Jedan od najboljih članaka koji razmatra ovo pitanje je Lelandov članak[21] u kojem se pokazuje da pod određenim uslovima insajdersko trgovanje povećava društveno blagostanje. Ovo pitanja spadaju u posebnu oblast i njima ćemo se, verovatno, baviti u nekom narednom radu.

LITERATURA

Arrow, Kenneth, 1965, *The Theory of Risk Aversion*, in Collected Papers of Kenneth. J. Arrow, 1984., *Individual Choice under Certainty and Uncertainty,* Oxford, Basil Blackwell.

Baron, David, 1977, On The Utility Theoretic Foundations of Mean-Variance Analysis, *The Journal of Finance*, 32 (5), 1683-1697.

Bierwag, G., O., 1974, The Rationale of the Mean-Standard deviation Analysis: Comment, *American Economic Review*, 64 (3), 431-433.

Bodie, Z., A. Kane and A. Markus, *Investments, 2002,* New York, McGraw-Hill.

Borch, Karl, 1969, A Note on Uncertainty and Indifference Curves, *Review of Economic Studies,* 36, 1-4.

__________, 1974, The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment, *American Economic Review*, 64 (3), 428-430.

Bernoulli, Daniel, 1738, Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk, *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, as translated and reprinted in 1954, *Econometrica*, 22, 23-36.

Cass, David and Joseph Stiglitz, 1972, Risk Aversion and Wealth Effects on Portfolios with Many Assets, *Review of Economic Studies*, 39 (3), 331-354.

Danthine, Jean-Pierre and John, Donaldson, 2002, *Intermediate Financial Theory,* New Jersey, Prentice-Hall.

[20] Grossman, Sanford and Joseph Stiglitz, 1980, On the Impossibility of Informationally Efficent Markets, *American Economic Review,* 70 (3), 393-408.

[21] Leland, Hayne, 1992., Insider Trading: Should it Be Prohibited ?, *Journal of Political Economy*, 100 (4), 859-887.

Diamond, Peter and Joseph Stiglitz, 1974, Increases in Risk and in Risk Aversion, *Journal of Economic Theory*, 8 (3), 337-60.

Elton, Edwin, Martin Gruber, Stephen Brown and William Goetzman, 2003, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, New York, John Wiley & Sons.

Feldstein, Martin, 1969, Mean – Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection, *Review of Economic Studies*, 36, 5-12.

Fishburn, Peter and Burr Porter, 1976, Optimal Portfolios with One Safe and One Risky Asset, *Management Science,* 22 (10), 1064-1073.

Fishburn, Peter, 1988, *Nonlinear Preference and Utility Theory*, Wheatsheaf Books, Brighton.

Friedman, Milton and Leonard Savage, 1948, The Utility Analysis of Choices involving Risk, *The Journal of Political Economy*, 56, 279-304.

Grether, David and Charles Plott, 1979, Economic Theory of Choice and the Preference Reversal Phenomenon, *American Economic Review,* 69 (4), 623-638.

Hanoch, Giora and Haim Levy, 1969, The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk, *Review of Economic Studies,* 36, 335-346.

Hadar, Josef and William Russell, 1969, Rules for Ordering Uncertain Prospects, *American Economic Review*, 59 (1), 25-34.

__________, and Tae Kun Seo, 1988, Asset Proportions in Optimal Portfolios, *Review of Economic Studies*, 55, 459-468.

__________, and __________, 1990, The Effects of Shifts in a Return Distribution on Optimal Portfolios, *Intenational Economic Review*, 31 (3), 721-736.

Hey, John, 1979, *Uncertainty in Microeconomics*, Martin Robertson & Company, Oxford.

Jean, William, 1980, The Geometric Mean and Stochastic Dominance, *The Journal of Finance*, 35 (1), 151-158.

Kahneman, Daniel and Amos Tversky, 1979, Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk, *Econometrica*, 47 (2), 263-291.

Kahneman, Daniel, 2003, Maps of Bounded Rationality: Psychology for Behavioral Economics, *American Economic Review*, 93 (5), 1449-1475.

Kira, D and William Ziemba, 1980, The Demand for a Risky Asset, *Management Science*, 26 (11), 1158-1165.

Levy, Haim, 1973, The Demand for Assets under Conditions of Risk, *The Journal of Finance,* 27 (1), pp. 79-96.

__________, 1977, The Demand for Assets under Conditions of Risk: Reply, *The Journal of Finance,* 32 (3), 930-932.

__________., 1992, Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis, *Management Science*, 38 (4), 555-593.

__________, and Azriel Levy, 1991, Arrow Pratt Measures of Risk Aversion: The Multivariate Case, *International Economic Review*, 32 (4), 891-898.

Machina, Mark, 1987, Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved, *Journal of Economic Perspectives,* 1 (1), 121-154.

Markowitz, Harry, 1952, The Utility of Wealth, *Journal of Political Economy*, 60, 151-158.

Mas-Colell, Andreu, Michael Winston and Jerry Green, 1995, *Microeconomic Theory,* New York, Oxford University Press.

Menezes, C., C., Geiss and J. Tressler, 1980, Increasing Downside Risk, *American Economic Review,* 70 (5), 921-932.

Pratt, John, 1964, Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica,* 32 (2), 122-136

Richard, Scott, 1975, Multivarite Risk Aversion, Utility Independence and Separable Utility Functions, *Management Science*, 22 (1), 12-21.

Ross, Stephen, 1981, Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 49 (3), 621-639.

Rotschild, Michael and Joseph Stiglitz, 1970, Increasing Risk I: A Definition, *Journal of Economic Theory*, 2 (3), 225-243.

____________, and________, 1971, Increasing Risk II: it's economic consequences, *Journal of Economic Theory*, 3 (1), 66-84.

Roy, A., D., 1952, Safety First and the Holding of Assets, *Econometrica*, 20 (3), 431-449.

Samuelson, Paul, 1970, The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higer Moments, *Review of Economic Studies*, 37, 537-543.

Senneti, John, 1976, On Bernoulli, Sharpe, Financial Risk and the St. Petersburg Paradox, *The Journal of Finance,* 31 (3), 960-962.

Slovic, Paul and Sarah Lichtenstein, 1983, Preference Reversals: A Broader Perspective, *American Economic Review,* 73 (4), 596-605.

Tobin, James, 1958, Liquidity Preference as Behavior towards Risk, *Review of Economic Studies,* 25, 65-86.

___________., 1969, Comment on Borch and Feldstein, *Review of Economic Studies,* 36, 13-14.

Tsiang, S., C., 1972, The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money, *American Economic Review,* 62, 354-371.

Tversky, Amos, 1969, Intransitivity of Preferences, *Psychological Review*, 76, 31-48.