UDC 681.3

Estimated Quality of Multistage Process on the Basis of Probabilistic Approach with Continuous Response Functions

[1] Yuri B. Tebekin
[2] Olga V. Avseeva

[1] Voronezh Institute of Government Communications, Branch of Academy of Federal Protection Service of the Russian Federation
2, Minskaya St., Voronezh, 394000
lecturer
E-mail: tebekin.67@mail.ru
[2] Voronezh State University of Engineering Tecnologies
19 Revolution Av., Voronezh, 394000
PhD (Technical), associate professor
E-mail: olga-avseeva@mail.ru

Abstract: The article is devoted to the problem of the quality management for multiphase processes on the basis of the probabilistic approach. Method with continuous response functions is offered from the application of the method of Lagrange multipliers.
Keywords: probability; quality management; operation; optimization.

Введение

Для многостадийных процессов управление качеством можно рассматривать с точки зрения раздельного управления качеством каждой из стадий. Раздельное управление качеством на каждом этапе позволяет не только более гибко распределять ресурсы, необходимые для проведения мероприятий, но и выделить приоритетные направления развития проекта, реализация которых позволит существенно улучшить одну или несколько вероятностей качественного завершения стадии процесса.

Вложение огромных ресурсов во всю технологическую цепочку может приблизить искомую вероятность практически к единице, однако целесообразность такого вложения может оказаться сомнительной вследствие невыгодного соответствия стоимости проводимых мероприятий средне- и долгосрочному прогнозу прибыли. Следовательно, необходимо опираться на экономически обоснованные ограничения по затратам на мероприятия по повышению вероятности отдельных стадий процесса.

Оценку качества отдельно взятой операции можно интерпретировать, как вероятность безошибочного выполнения данной операции (или относительное количество качественно проведенных операций). В [1] был сформулирован вероятностный подход к оценке качества в мелкосерийном производстве. Согласно данному подходу целью управления качеством является достижение вероятностей выпуска качественных изделий, не меньших некоторого порогового значения, при минимальных затратах на проведение соответствующих мероприятий.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс, состоящий из n последовательных операций. Будем полагать, что для каждой операции можно определить имеющуюся на данный момент вероятность ее безошибочного выполнения p_i^0.

Считая операции независимыми в совокупности и используя теорему умножения вероятностей, выберем в качестве критерия качественного завершения всей последовательности операций произведение вероятностей для каждой операции

$$\prod_{i=1}^{N} p_i^0 \to \max \qquad (1)$$

Вероятность качественного выполнения каждой операции может быть увеличена путем проведения некоторых мероприятий. Например, такими мероприятиями могут быть замена устаревшего оборудования, обучение сотрудников и т.п. Однако идеальное значение такого критерия, равное единице, может быть достигнуто только в случае, когда все вероятности будут равны 1, что не является практически достижимым. Поэтому предлагается выбрать некоторое пороговое значение вероятности качественного завершения процесса $p_{пред}$, близкое к единице, и путем управления вероятностями отдельных процессов достигнуть этого порогового значения, то есть перевести целевую функцию в разряд ограничений.

Управление вероятностями осуществляется при помощи проведения ряда мероприятий, повышающих качество выполнения операции.

Вероятность качественного выполнения каждой операции может быть увеличена путем проведения некоторых мероприятий, которые условно можно разделить на две группы [1]:

- мероприятия, «единица» проведения которых увеличивает соответствующую вероятность на одну и ту же, не зависящую от начального значения величину, до достижения теоретического предела (единица). К таким мероприятиям можно отнести (при определенных оговорках) обучение и тренаж персонала, уменьшение напряженности труда (путем, например, сокращения рабочего времени или уменьшения нормы выработки), и ряд других. Такие мероприятия будем называть мероприятиями с условно-линейным откликом;
- мероприятия, «единица» проведения которых увеличивает соответствующую вероятность на величину тем меньшую, чем ближе эта вероятность к единице. К таким мероприятиям можно отнести повышение цены ресурсов, расширение инструментальных компонент, и ряд других. Такие мероприятия будем называть мероприятиями с асимптотическим откликом.

Каждое мероприятие требует некоторого количества затрат на его проведение. Таким образом, вероятность качественного выполнения операции представляет собой функцию от величины вложенных средств c.

Таким образом, получим следующую оптимизационную задачу

$$c(p) \to \min \qquad (2)$$

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \geq p_{пред} \qquad (3)$$

$$p_i^0 \leq p_i \leq 1, \qquad i = 1,\ldots,n. \qquad (4)$$

Решение задачи в случае непрерывных функций отклика

Исследуем задачу при различных видах зависимости вероятности качественного выполнения операции от количества вложенных средств. Рассмотрим мероприятия с условно-линейным откликом. Зависимость вероятности p_i качественного выполнения i-й операции от количества вложенных средств c_i можно изобразить графически (рис.1).

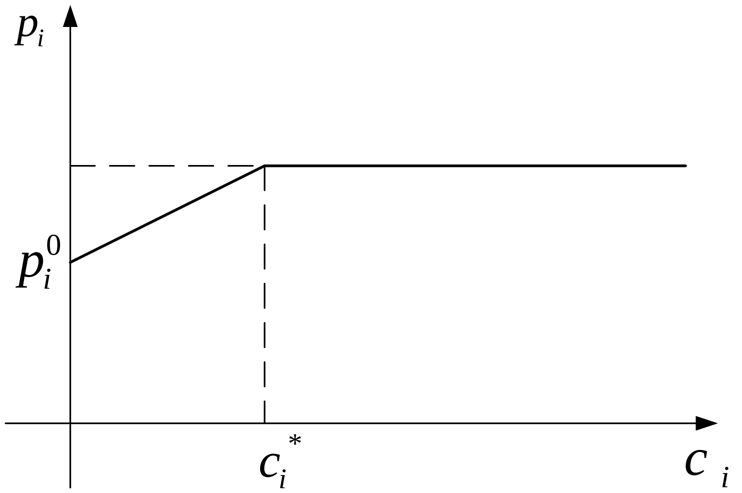

Рис. 1. Зависимость вероятности от вложенных средств
при линейной функции отклика

Таким образом, зависимость вероятности от c_i представляется уравнением

$$p_i(c_i) = p_i^0 + \frac{1-p_i^0}{c_i^*} \cdot c_i \quad \text{при} \quad c_i \in [0, c_i^*]. \tag{5}$$

Тогда обратная функция имеет вид

$$c_i(p_i) = \frac{c_i^*}{1-p_i^0} \cdot (p_i - p_i^0) \qquad \text{при} \quad p_i \in [p_i^0, 1]. \tag{6}$$

График этой функции схематично изображен на рисунке 2.

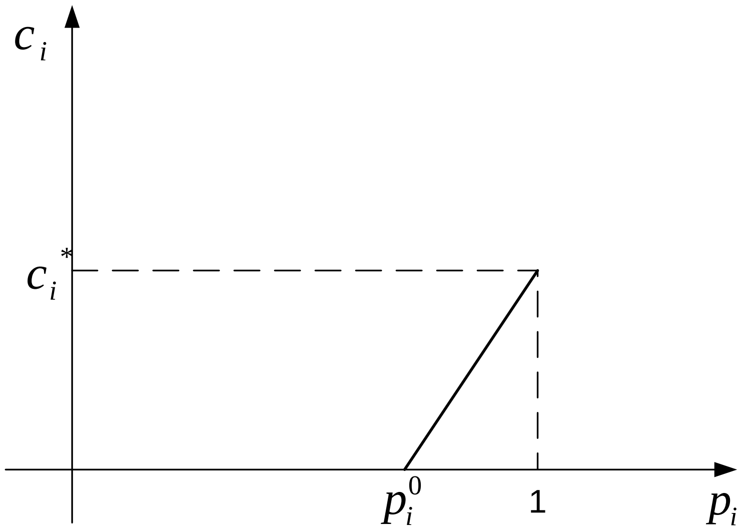

Рис. 2. Вид обратной функции при линейном отклике

Необходимо, чтобы вероятность качественного проведения всех операций была не меньше некоторого заданного предельного значения $p_{пред}$.

Используя теорему умножения вероятностей, получаем неравенство

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \geq p_{пред}. \tag{7}$$

Складывая стоимости мероприятий по всем операциям, получим общую стоимость всех мероприятий по обеспечению качества

$$c(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i(p_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^*}{1-p_i^0}(p_i - p_i^0). \tag{8}$$

В соответствии с поставленной целью необходимо определить минимальные затраты, при которых обеспечивается достижение предельной вероятности. То есть приходим к следующей задаче.

Минимизировать функцию (8) при ограничениях

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \geq p_{пред} \tag{9}$$

$$p_i^0 \leq p_i \leq 1, \qquad i = 1,...,n. \tag{10}$$

Данная задача представляет собой задачу минимизации линейной функции с нелинейными ограничениями.

Для решения задачи составим функцию Лагранжа. Для этого перепишем ограничения в виде

$$-\prod_{i=1}^{n} p_i \leq -p_{пред} \tag{11}$$

$$p_i \leq 1, \qquad i = 1,...,n. \tag{12}$$

Левое неравенство ограничений (10) можно отбросить, т.к. оно автоматически выполняется при выполнении неравенства (9).

С учетом неравенств (11), (12) функция Лагранжа будет иметь вид

$$L(p_1,..., p_n; \lambda_1,..., \lambda_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^*}{1-p_i^0}(p_i - p_i^0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1-p_i) + \lambda_{n+1}(p_{пред} - \prod_{i=1}^{n} p_i). \tag{13}$$

Необходимыми условиями экстремума являются условия Куна-Таккера:

$$\frac{c_i^*}{1-p_i^0} - \lambda_i - \lambda_{n+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_j = 0, \qquad i = 1,...,n, \tag{14}$$

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \geq p_{пред} \tag{15}$$

$$\lambda_i (1-p_i) = 0, \qquad i = 1,...,n \tag{16}$$

$$\lambda_{n+1}(p_{пред} - \prod_{i=1}^{n} p_i) = 0 \tag{17}$$

$$\lambda_i \geq 0, \qquad i = 1,...,n+1. \tag{18}$$

Исследуем полученную систему. Поскольку целевая функция является линейной, то наименьшее значение она достигает на границе области, определяемой условиями (9), (10).

При $\lambda_{n+1} = 0$ из уравнений (17) получаем, что $\lambda_i \neq 0$, $i = 1,...,n$. Тогда решением системы будет $p_i = 1$, $i = 1,...,n$.

При $\lambda_{n+1} \neq 0$ из уравнения (17) имеем $p_{пред} = \prod_{i=1}^{n} p_i$, т.е. условие (9) выполняется как равенство. Приравнивая к нулю различные комбинации множителей Лагранжа λ_i, $i = 1,...,n$, получим конечное число (не более чем $1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k$) решений системы (14)-(18).

В остальных случаях система несовместна.

Вычисляя значения целевой функции в полученных точках, находим наименьшее. Это и будут искомые значения вероятностей качественного выполнения операций, получаемые при минимальных затратах.

Таким образом, при условии линейной зависимости вероятностей от вложенных средств задача может быть решена аналитически без применения численных методов.

Рассмотрим теперь случай асимптотического отклика. Предположим, что зависимость вероятности качественного завершения операции от стоимости мероприятия описывается показательной функцией (без ограничения общности будем полагать в качестве основания экспоненту) (рис. 3).

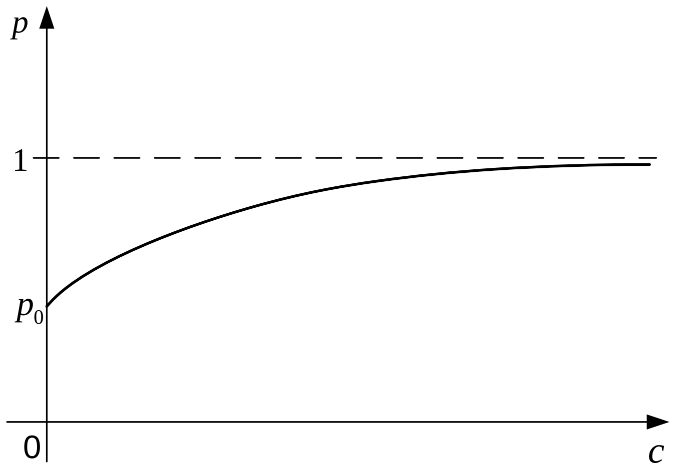

Рис. 3. Асимптотическая функция отклика

И описывается зависимостью вида

$$p(c) = 1 - (1 - p_0)e^{-\alpha c} \tag{19}$$

где $\alpha > 0$ - коэффициент, характеризующий кривизну функции.

Тогда обратная функция будет иметь вид

$$c(p) = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1-p}{1-p_0} \quad \text{или} \quad c(p) = \ln\left(\frac{1-p_0}{1-p}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{20}$$

Стоимость выполнения всех n операций будет равна

$$C(p) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1-p_i^0}{1-p_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} = \ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i^0}{1-p_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} \tag{21}$$

Поскольку $\ln$ является строго возрастающей функцией на всей области определения, то вместо функции (21) будем рассматривать

$$C'(p) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i^0}{1-p_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} \tag{22}$$

Таким образом, приходим к следующей оптимизационной задаче:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i^0}{1-p_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} \to \min \tag{23}$$

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \geq p_{пред} \tag{24}$$

$$p_i^0 \le p_i \le 1, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{25}$$

Для решения задачи, как и в случае линейного отклика, воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа в данном случае будет иметь вид

$$\mathrm{L}(\mathrm{p}_1,\dots,p_n;\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-p_i^0}{1-p_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-p_i) + \lambda_{n+1}(p_{пред} - \prod_{i=1}^{n} p_i) \tag{26}$$

Запишем условия Куна-Таккера:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-p_j^0}{1-p_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} \cdot \frac{1}{\alpha_i(1-p_i)} - \lambda_i - \lambda_{n+1}\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} p_j = 0, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{27}$$

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \ \ge p_{пред} \tag{28}$$

$$\lambda_i(1-p_i) = 0, \qquad i = 1,\dots,n \tag{29}$$

$$\lambda_{n+1}(p_{пред} - \prod_{i=1}^{n} p_i) = 0 \tag{30}$$

$$\lambda_i \ge 0, \qquad i = 1,\dots,n+1. \tag{31}$$

Исследуем данную систему. Из уравнений (27) следует, что $p_i \ne 1$ для $i = 1,\dots,n$. Следовательно, в уравнениях (29) $\lambda_i = 0$, $i = 1,\dots,n$. Тогда λ_{n+1} отлично от нуля и из (30) получаем $p_{пред} = \prod_{i=1}^{n} p_i$, т.е. условие (28) выполняется как равенство. В результате система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-p_j^0}{1-p_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} \cdot \frac{1}{\alpha_i(1-p_i)} - \lambda_{n+1}\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} p_j = 0, \quad i - 1,\dots,n. \\ \prod_{j=1}^{n} p_j = p_{пред} \end{cases} \tag{32}$$

Или после преобразований и исключения λ_{n+1}

$$\begin{cases} \left(\alpha_1(1-p_1)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\ne 1}}^{n} p_j\right)^{-1} = \left(\alpha_2(1-p_2)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\ne 2}}^{n} p_j\right)^{-1} = \dots = \left(\alpha_n(1-p_n)\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\ne n}}^{n} p_j\right)^{-1} \\ \prod_{j=1}^{n} p_j = p_{пред} \end{cases} \tag{33}$$

Решая полученную систему численно, получим искомые значения вероятностей.

Примечания:

1. Поваляев А.Д., Кравец О.Я., Абсатаров Р.А. Управление распределенными организационными системами на основе вероятностного подхода к оценке качества // Информационные технологии моделирования и управления. Межд. сб. науч. трудов. Вып. 15. 2004, С. 76–82.

УДК 681.3

Оценка качества многостадийного процесса на основе вероятностного подхода при непрерывных функциях отклика

[1] Юрий Борисович Тебекин
[2] Ольга Владимировна Авсеева

[1] Воронежский институт Правительственной Связи, филиал Академии ФСО России
394000. г. Воронеж, ул. Минская, 2
Преподаватель
E-mail: tebekin.67@mail.ru
[2] Воронежский Государственный Университет Инженерных Технологий
394000, г. Воронеж, пр-т Революции, 19
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: olga-avseeva@mail.ru

Аннотация: Статья посвящена исследованию задачи управления качеством многостадийных процессов на основе вероятностного подхода. Предложены методы решения задачи при непрерывных функциях отклика с применением метода множителей Лагранжа.

Ключевые слова: вероятность; управление качеством; операция; оптимизация.