

Investigações em Ensino de Ciências - V18(1), pp. 107-126, 2013

**APRENDIZAGEM DOS CONCEITOS SOBRE CIRCUNFERÊNCIA NA PERSPECTIVA
DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS**
(Learning circumference concepts from the didactical situations theory perspective)

Valdir de Sousa Cavalcanti [valdirsc@hotmail.com]

Abigail Fregni Lins [bibilins2000@yahoo.co.uk]

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Estadual da Paraíba. Centro de Ciências e Tecnologia.
Campus I. Campina Grande/PB. 58429-500

Resumo

O estudo da circunferência, devido sua importância, é um dos conteúdos mais ressaltados no currículo da Geometria Analítica. Entretanto, a complexidade dos conceitos relacionados a esse tema, aliada a fragmentação do conteúdo, dificulta o pensar do aluno de transformar problemas geométricos em resolução de equações, sistemas ou inequações. Com isso, neste artigo apresentamos um relato parcial de uma pesquisa de mestrado, de caráter qualitativo, a qual teve como objetivo desenvolver e avaliar uma metodologia alternativa usando a composição de paródias musicais na tentativa de contribuir para a aprendizagem dos conceitos sobre circunferência. Para isso, realizamos um estudo de caso com 36 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública de Campina Grande, Paraíba. A pesquisa foi embasada e discutida à luz da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. Optamos pela técnica de triangulação para a análise dos dados, coletados a partir de entrevistas, questionários e lista de exercícios. Concluímos que o recurso composição de paródias favoreceu aos alunos melhor compreensão dos conceitos de centro, raio, corda e definição da equação geral da circunferência, assim como foram capazes de identificar as posições relativas que uma circunferência assume em relação à equação de uma reta e entre duas circunferências nos vários conceitos que as diferenciam. Portanto, podemos afirmar que a composição de paródia musical como recurso didático pode vir a contribuir com a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Palavras-chave: circunferência; ensino médio; situações didáticas.

Abstract

The circumference study, as its importance, it is one of the most relevant contents in the Analytical Geometry curriculum. However, the complexity of related concepts to this theme linked to the content fragmentation, it difficulties the students thinking of transforming geometrical problems into equations solution, systems or inequations. Within, in this article we present a partial report of a master research work, of qualitative mode, which aimed to develop and to evaluate an alternative methodology by using musical parody composition to the teaching of Mathematics in trying to contribute to the circumference concepts learning process. For that, we carried out a case study with 36 third year high school students of a public school from the city of Campina Grande, Paraíba. The research work was based and discussed on Brousseau Didactical Situation Theory. It was chosen triangulation technique for the data analyses, collected from interviews, questionnaires and a list of mathematical exercises. We concluded that the parody composition resource allowed the students better understand the concepts of center, ratio, cord and the definition of the general circumference equation, as they were capable to identify the relative positions which a circumference assumes in relation to an equation of a straight line and between two circumferences in the various concepts that differentiated them. Thus, we can state that the musical parody composition as a didactical resource can contribute to the learning of mathematical contents.

Keywords: circumference; high school; non-didactical situations.

Introdução

O presente artigo tem como objetivo central apresentar um relato parcial dos resultados da pesquisa *Composição de Paródias: um recurso didático para compreensão dos conceitos sobre circunferência*, desenvolvida como dissertação de mestrado, no Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, área de concentração Educação Matemática, realizada na Universidade Estadual da Paraíba e concluída no ano de 2011.

No ambiente educacional, a Matemática sempre foi considerada, por professores e alunos, como a disciplina mais difícil e a grande responsável pelo alto índice de reprovação e de evasão escolar (Ananias & Lins, 2010). Trata-se de um conhecimento visto de maneira acabada e descontextualizada. Com isso, percebemos a falta de interesse por parte dos alunos em relação à aprendizagem dos conteúdos matemáticos, principalmente no que diz respeito ao Ensino Médio (Cavalcanti & Lins, 2009). Como professores, estamos sempre nos deparando com situações referentes ao processo de ensino e aprendizagem, nos mais variados momentos, seja participando de programas de educação continuada ou atuando diretamente no ensino, contribuindo assim para formação de futuros cidadãos.

De acordo com Silva (2010), a prática pedagógica mais comum em Matemática parece ser ainda aquela em que o professor cumpre seu contrato ministrando aulas expositivas e aplicando exercícios aos alunos. Em suas aulas, o professor deve selecionar partes do conteúdo em que os alunos possam aprender e propor problemas cujos enunciados contêm os dados necessários e tão somente esses, cuja combinação racional aliada aos elementos das aulas permite encontrar a solução do problema. Os alunos, por sua vez, cumprem seu contrato, se bem ou mal compreendem a aula dada e conseguem resolver corretamente ou não os exercícios. Se isso não acontecer, o professor deverá ajudá-los, dirigindo seu trabalho através de indicações que esclareçam dúvidas dos alunos ou através de pequenas questões elementares que conduzam ao resultado.

Brousseau (1986) salienta que quanto mais o professor revela o que deseja e mais precisamente diz aos alunos aquilo que eles devem fazer, mais priva os alunos das condições necessárias à compreensão e à aprendizagem do conceito visado. Por outro lado, se os alunos aceitarem que o professor lhes ensine os resultados que eles devem produzir como respostas, sem ter eles feito as escolhas que caracterizam o saber, não irão aprender Matemática dessa forma, não se apropriando assim dos conhecimentos.

Retomando nosso tema circunferência, parte da Geometria Analítica, que segundo os PCN+ EM¹- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2002) a unidade *Geometria Analítica* tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do Ensino Médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações.

O aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos, de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e paralelo a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas

¹ PCN+ Ensino Médio foi lançado em 2002 com Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Essa publicação tem, entre seus objetivos centrais, o de facilitar a organização do trabalho da escola em termos da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, além de abrir um diálogo sobre o projeto pedagógico da escola e de apoiar o professor em seu trabalho. O texto traz elementos para a continuidade da formação profissional docente na escola.

e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente.

Sendo assim, mais importante que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é investir na garantia da compreensão que a Geometria Analítica propõe.

Ainda, segundo os PCN+, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1º e 2º graus, seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas. Além disso, conhecer uma forma de pensar em Matemática, entender o mundo do século XVII que deu origem ao cartesianismo. Todos estes fatores podem ser uma excelente oportunidade para que o aluno perceba o desenvolvimento histórico do conhecimento e como alguns momentos dessa história transformaram a Ciência e a forma de viver da humanidade.

O estudo da circunferência, devido sua importância, é um dos conteúdos mais ressaltados no currículo da Geometria Analítica. Entretanto, a complexidade dos conceitos relacionados a esse tema, aliada a fragmentação do conteúdo, dificulta o pensar dos alunos de transformar problemas geométricos em resolução de equações, sistemas ou inequações.

Partindo das constatações feitas em sala de aula sobre as dificuldades encontradas pelos alunos quanto ao uso de conceitos matemáticos, especialmente no que diz respeito à circunferência, tornou-se necessária iniciativa para a proposição e desenvolvimento de uma metodologia diferenciada no ensino da Matemática.

Com isso, a pesquisa teve como objetivo desenvolver e avaliar uma metodologia alternativa de ensino da Matemática usando a composição de paródias musicais na tentativa de contribuir para a aprendizagem de alunos do último ano do Ensino Médio. Sendo assim, a pergunta que norteou a mesma foi: *a composição de paródias musicais como recurso didático pode contribuir para a aprendizagem dos alunos acerca de conteúdos matemáticos?*

Para responder a pergunta acima e atender ao objetivo da pesquisa adotamos como recurso didático a composição de paródias musicais abordando em suas letras o conteúdo circunferência.

Paródia: conceitos e significados

No Aurélio (1996, p. 1272) a palavra paródia está registrada com os *significados* de “imitação cômica de uma composição literária; imitação burlesca; comédia satírica ou farsa em que se ridiculariza uma obra trágica ou dramática; arremedo”.

Já no dicionário eletrônico Houaiss² (2001) paródia vem definido como obra literária, teatral, musical, entre outros, que imita outra obra, ou os procedimentos de uma corrente artística, escola, com objetivo jocoso ou satírico; arremedo.

Aprofundando esse campo de significações para entender a paródia como recurso que mobiliza os alunos na direção da aprendizagem, recorremos a Sant’Anna (2003) que começa por redefinir paródia traçando uma breve história do termo e como modernamente se aprofunda o seu entendimento. Sant’Anna (2003, p.12) comenta:

O dicionário de literatura de Brewer, por exemplo, nos dá uma definição curta e funcional: “paródia significa uma ode que perverte o sentido de outra ode (grego: para- ode)”. Essa definição implica o conhecimento de que originalmente a ode era um poema para ser cantado. Por isto, Shipley, mais acuradamente, registraria que o termo grego paródia

²Usamos a versão eletrônica do dicionário. Com isso, não há referência de página da definição.

implicava a idéia de uma canção que era cantada ao lado de outra, como uma espécie de contracanto. A origem, portanto, é musical. Em literatura acabaria por ter uma conotação mais específica.

A paródia surge a partir de uma nova interpretação, da recriação de uma obra já existente e, em geral, consagrada. Seu *objetivo* é adaptar a obra original a um novo contexto, passando diferentes versões para um lado mais despojado, e aproveitando o sucesso da obra original para passar um pouco de alegria. Sendo assim, a paródia é a *criação* de um texto a partir de outro bastante conhecido, ou seja, com base em um texto consagrado alguém utiliza sua forma e rima para criar um novo texto cômico, irônico, humorístico, zombeteiro ou contestador, dando-lhe novo sentido.

A paródia, *em música*, seguiu sendo um estilo que tomou conta do novo método do século XVI, com o uso do *cantus firmus*³ que entrava em seu desuso sério da polifonia⁴ dos séculos XIV e XV. A partir de então o *cantus firmus* foi utilizado em raras ocasiões e começaram a se utilizar outras técnicas para compor, como a paródia. A paródia seguiu sendo prominente em certos estilos de música instrumental, primeiramente na música para teclados. Conforme a música evoluiu pelo início da fase Barroca, a paródia entrou na história da ópera e conta com inúmeros exemplos. Ironicamente, iniciam-se com interlúdios⁵ cômicos nas óperas dramáticas, chamados de *intermezzos*⁶.

De acordo com Bakhtin, citado por Carvalho (2008), cada um de nós encontra um mundo que já foi articulado, elucidado, avaliado de muitos modos diferentes, já falados por alguém. Nessa vertente, Bakhtin desenvolve uma reflexão original da questão da autoria, a qual gerou vários desdobramentos para a compreensão do papel do outro não só na interação verbal, mas também na comunicação estética. Como a aprendizagem se apoia na herança do que já estão instituídos, ao compor paródias os alunos tanto se apropriam de um mundo já elucidado por outro, como também o ressignificam, tornando-se coautores de suas interpretações. Nesse momento, a necessidade é de análise reflexiva do conteúdo para que ele seja utilizado adequadamente na produção da paródia, em consonância com a melodia (Carvalho, 2008).

Ao tentarem compor as paródias com conhecimentos adquiridos sobre circunferência, os alunos se defrontam com a necessidade de reler o conteúdo e retornar o que haviam aprendido e trabalhado em sala de aula durante as aulas expositivas sobre o estudo da circunferência. Nos momentos de estudo deles seria necessário se reunirem, planejarem, tomarem decisões, como por exemplo, o que mais de importante se deve saber sobre circunferência, quais os conceitos fundamentais da mesma e o que deveria estar presente na composição da paródia.

Contrato didático e teoria das situações didáticas

O contrato didático surge quando ocorre a relação professor-aluno-saber, interligado diretamente com o conteúdo específico a ser estudado, o objeto de ensino e aprendizagem em uma

³Na Música, um *cantus firmus* ("canto fixo", do Latim) era o uso de uma melodia já existente como base temática para um novo arranjo polifônico.

⁴*Polifonia*, em Música, é uma técnica compositiva que produz uma textura sonora específica, onde duas ou mais vozes se desenvolvem preservando um caráter melódico e rítmico individualizado em contraste à monofonia, onde só uma voz existe.

⁵Um *Interlúdio* na Música trata-se de uma pequena composição, geralmente para órgão de caráter improvisativo que ocorre entre outras peças musicais como hino, salmo ou cantata. No caso da peça ser orquestral, o interlúdio surge para preencher o intervalo entre dois atos (ópera).

⁶*Intermezzo* é uma peça musical tocada na metade de uma ópera, entre dois atos.

aula. Por essa razão, o contrato didático foi abordado na pesquisa, pois a preocupação deste trabalho foi com o conhecimento matemático, especificamente o conteúdo de circunferência. Segundo Brousseau (1986, p.51):

Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo, que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

O contrato didático manifesta-se principalmente quando é transgredido por um dos parceiros da relação didática. Em muitos casos, é preciso que haja a ruptura e a renegociação do mesmo para o avanço do aprendizado.

Para Silva (2010, p. 63), grande parte das dificuldades dos alunos é causada pelos efeitos do contrato mal colocado ou mal entendido que pode estabelecer um acordo entre professor e aluno, “o professor limita sua exigência à imagem que fez da capacidade do aluno e este, por sua vez, limita seu trabalho à imagem de si próprio que o professor lhe refletiu”.

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida na França, por Guy Brousseau, na década de 80, no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos em sala de aula interligando professor, aluno e o conhecimento matemático. O objeto de estudo dessa teoria é constituído por esses três elementos, os quais compõem o sistema didático:

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber construído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (BROUSSEAU, 1986, p. 8).

Outro aspecto fundamental, considerado em nossa pesquisa, foi à situação adidática que se refere à atividade proposta na pesquisa. Como parte essencial da situação didática, na situação adidática a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas imaginada, planejada e construída pelo professor a proporcionar condições favoráveis para a apropriação de um novo saber que se deseja ensinar. Para Brousseau (1986), uma situação adidática tem as seguintes características:

- (a) O professor escolhe atividades ou problemas de forma que o aluno possa aceitá-los e, ainda, que o leve a agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
- (b) A atividade ou problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às razões didáticas; e,
- (c) O professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) propostas.

O processo de ensino e aprendizagem ocorre por meio da devolução, significando transferência de responsabilidade: o professor propõe uma atividade e estimula o aluno a aceitá-la como desafio a resolver. A esse respeito, Brousseau (2008, p. 91) afirma que “a devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e o mesmo assume as consequências dessa transferência”. Neste processo, o professor prepara e estrutura a atividade, tendo controle sobre ela e não sobre o saber, com o objetivo de que o aluno possa vivenciá-lo, como um pesquisador na busca da solução de um problema. Na didática da Matemática, segundo Brousseau (1986, p. 51), “[...] o ensino é a devolução ao aluno de uma situação adidática e a aprendizagem é uma adaptação a esta situação”.

Sendo assim, a situação didática, em nossa pesquisa, se deu no ensino do conteúdo matemático circunferência, abordado em um primeiro momento pelo professor pesquisador por meio de aulas expositivas (definições, propriedades, exemplos) com a intenção de possibilitar a aprendizagem do conteúdo por parte dos alunos.

A situação adidática ocorreu em um segundo momento da pesquisa objetivando oportunizar aos alunos o aprofundamento dos conhecimentos sobre circunferência. Entramos com a devolução propondo a atividade de compor uma paródia musical, abordando em sua letra o conteúdo estudado em sala de aula de forma expositiva, tendo os alunos aceito o desafio de solucionar a atividade proposta. Assim, os alunos passaram a agir, falar sobre circunferência, sendo eles os atores principais da construção de seus conhecimentos, isto é, o ensino se deu por meio da devolução e a aprendizagem se deu com a realização da atividade proposta.

Brousseau (1986) elaborou uma tipologia das situações adidáticas com a finalidade de analisar o processo de aprendizagem da Matemática, sendo elas, situação de ação, de formulação e de validação, as quais são de responsabilidade do aluno. São situações nas quais os alunos, de forma individual e coletiva, trabalham e interagem com o problema proposto e uns com os outros, procurando respostas adequadas. Contudo, é importante ressaltar que as fases de ação, formulação e validação podem levar os alunos a construir resultados equivocados. Para evitar que o mesmo ocorra, faz-se necessário uma intervenção direta do professor, ou seja, a fase de institucionalização, fixando assim convencionalmente e de forma explícita o objeto matemático em questão. Brousseau (1986) considera que somente após esta fase o saber se torna oficial e disponível para a resolução de problemas matemáticos. A institucionalização faz parte da fase didática da situação.

Para Brousseau (2008, p. 31), reconhecer a necessidade da institucionalização das situações surgiu da resistência dos professores em não intervir. Os professores, nesta lógica, precisam:

Dar conta da produção dos alunos, descreverem os fatos observados e tudo que estivesse vinculado ao conhecimento em questão; conferir um status aos eventos da classe vistos como resultados dos alunos e do processo de ensino; determinar um objeto de ensino e identificá-lo; aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e indicar quais poderiam ser reutilizadas.

Na teoria das situações didáticas as atividades principais do professor são a devolução e a institucionalização. Nela, os alunos têm papel principal e cabe ao professor a responsabilidade de dar início e finalizar o processo de ensino e aprendizagem. A seguir ilustração de como se deu nossa proposta didática a partir da Teoria das Situações Didáticas:

Quadro 1 – Contrato da Proposta Didática
Fonte: Adaptado de Araújo (2010)

Situação adidática	Atividade: Compor em Grupos, formados livremente, uma paródia usando músicas de sua escolha abordando em sua letra o conteúdo circunferência.
Ação	Os Grupos aceitam a atividade proposta na devolução e analisam a atividade buscando escolher a música para compor a paródia.
Formulação	Os Grupos, cada qual, discutem, refletem e falam sobre quais os conceitos referentes à circunferência estarão presentes na Letra da Paródia.
Validação	Os Grupos estudam o assunto, recorrem aos livros, cadernos, Internet e ao professor para que verifique algum erro conceitual.
Institucionalização	O professor organiza uma Lista de Exercícios e entrega aos alunos para ser respondida. Os alunos devolvem a lista para que o professor faça a correção.

Aspectos metodológicos

Para o desenvolvimento da pesquisa, optamos por uma abordagem qualitativa que segundo Ludke & André (1986) pode proporcionar uma compreensão mais ampla e profunda da realidade investigada. A pesquisa qualitativa não se preocupa com a quantificação dos dados, mas não a exclui, isto é, dependendo dos dados que possam interessar, poderão colaborar para a compreensão do fenômeno.

A modalidade de pesquisa qualitativa adotada na pesquisa foi estudo de caso, que segundo Bogdan & Biklen (1994, p. 89) “consiste na observação detalhada de um contexto, ou um indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico”. Os autores trazem o pressuposto de que a realidade pode ser vista a partir de diferentes perspectivas, não havendo uma única que seja a mais verdadeira.

A princípio o trabalho se deu com 100 alunos de quatro turmas do 3º ano do Ensino Médio sobre os conteúdos probabilidade, números complexos, polinômios e circunferência. Através de sorteio de escolha do conteúdo para cada Grupo, formados de 8 a 10 alunos em cada turma, foram produzidas doze paródias musicais no total. Por conta de um universo amplo de dados, optamos por considerar como sujeitos apenas 36 alunos das quatro turmas, os quais trabalharam o conteúdo circunferência, sendo este o único conteúdo sorteado em todas as turmas. Com isso, a pesquisa em questão se deu em uma escola pública da Rede Estadual de Ensino da Cidade de Campina Grande, Paraíba, em um universo de 36 sujeitos, sobre o conteúdo circunferência, sendo produzidas quatro paródias musicais pelos alunos.

Durante a coleta dos dados foram aplicados dois questionários com perguntas abertas e fechadas e realizadas duas Entrevistas. O *Questionário I* com o objetivo de traçar o perfil dos alunos em relação à aula de Matemática e o *Questionário II* para investigar se a composição das letras das paródias musicais contribuiu na resolução da *Lista de Exercícios*. A *Entrevista I*, não estruturada, objetivou cada Grupo descrever o envolvimento dos mesmos no processo de composição de suas paródias voltadas ao conteúdo circunferência abordado em sala de aula. A *Entrevista II*, semiestruturada, foi realizada ao final de todo o trabalho desenvolvido pelos alunos com o objetivo de aprofundar os dados obtidos pelos Questionários I e II. Dois alunos de cada Grupo, os quais mais dissertaram na Entrevista I sobre o trabalho realizado, foram selecionados para a Entrevista II. As entrevistas foram gravadas em vídeo e transcritas na íntegra. Ainda fizeram parte dos instrumentos da coleta *áudio* e *estúdio*. O áudio foi usado durante a apresentação das paródias e o estúdio para gravação das paródias musicais. Como último instrumento da coleta, os alunos dos quatro Grupos envolvidos na pesquisa responderam a uma *Lista de Exercícios* com questões voltadas ao conteúdo circunferência, abordadas nas paródias para que se investigasse o conhecimento matemático alcançado por eles.

A pesquisa ocorreu em dois momentos. A princípio, como já mencionado anteriormente, o conteúdo circunferência foi abordado pelo professor pesquisador nas quatro turmas do 3º ano do Ensino Médio por meio de uma metodologia convencional, isto é, aulas expositivas. No segundo momento, como forma de finalizar o conteúdo circunferência, foi proposta aos alunos dos quatro Grupos a atividade de compor, em grupos formados livremente, paródias usando músicas de sua escolha abordando em suas letras o conteúdo trabalhado em sala de aula. Formados os Grupos, os alunos partiram para a escolha da música e o Questionário I foi aplicado.

As paródias foram compostas pelos alunos e gravadas em CD, em um estúdio. Ao todo, os alunos tiveram um prazo de 47 dias para a realização do trabalho, incluindo composição, gravação e apresentação das paródias. No decorrer da realização do trabalho, os alunos tiveram aulas regulares dando sequência aos conteúdos programáticos do ano letivo. Durante o período da produção das paródias foi feito um pequeno acompanhamento por parte do professor pesquisador entre os quatro Grupos envolvidos na pesquisa para que fossem sanadas dúvidas, caso elas surgissem, isto é, o

professor atuou como mediador. Uma semana anterior às apresentações na Escola, a Lista de Exercícios foi entregue aos alunos. Cada Grupo devolveu sua Lista de Exercícios no dia das apresentações das paródias, quando se realizou a Entrevista I.

As apresentações se deram de acordo com o horário regular das aulas de cada turma. O Questionário II foi aplicado após as apresentações das paródias. Encerrando a coleta, foi agendada a Entrevista II, realizada com uma dupla de cada Grupo.

Para análise e organização dos dados, optamos pela técnica de triangulação que se refere ao uso de mais de um método para coletar dados em um estudo. Segundo Alves-Mazzotti & Gewandszajder (1999), uma forma de aumentar a credibilidade de uma pesquisa de abordagem qualitativa é triangular os dados, salientando a importância de diferentes procedimentos para a obtenção de dados. Araújo & Borba (2004, p. 35, 36) argumentam que:

[...] Triangulação em pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para a obtenção dos dados. Os principais tipos de triangulação são a de fontes e a de métodos. Quando checamos, por exemplo, as informações obtidas em uma entrevista com as atas de uma reunião sobre um mesmo assunto estão fazendo uma triangulação de fontes. Por outro lado, se observarmos o trabalho de um grupo de alunos e depois entrevistarmos seus componentes sobre o trabalho desenvolvido, realizamos uma triangulação de métodos. Fazendo assim, [...] promove uma maior credibilidade de sua pesquisa.

A Figura a seguir apresenta a triangulação dos dados, baseado nos instrumentos que utilizamos para a coleta:

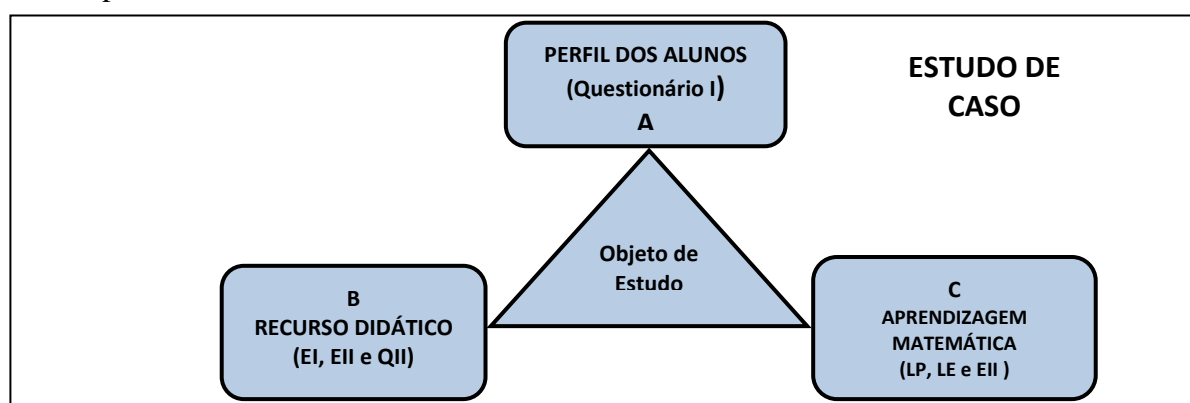


Figura 1: Triangulação de Dados
Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003)

Conforme mostra a Figura 1, o Vértice A visou traçar o perfil dos sujeitos com relação à aula de Matemática. A coleta dos dados se deu por meio do *Questionário I*. O mesmo constou de doze perguntas, dez objetivas e duas subjetivas. Vértice B visou trazer a fala dos alunos sobre suas visões em relação ao fazer as letras ou o compor as letras, isto é, em relação ao recurso didático adotado nas aulas, composição de paródias musicais. Para isso, a coleta dos dados se deu por meio das *Entrevistas I não estruturada*, *Entrevista II semiestruturada* e o *Questionário II*. O terceiro vértice, Vértice C, visou apresentar o entendimento que os alunos mostraram nas letras prontas das paródias e na resolução da Lista de Exercícios, isto é, a aprendizagem matemática dos alunos. Para isso, a coleta dos dados se deu através da *Lista de Exercícios*; das *Letras das Paródias* e da *Entrevista II semiestruturada*.

O fechamento de cada vértice do triângulo se deu como Comentários, consistindo da análise de todos os elementos trazidos por cada vértice. Após este, como Discussão, fechou-se o estudo de caso. Os vértices se deram como categorias, sendo elas: Perfil dos Alunos, Recurso Didático e Aprendizagem Matemática. Dentro de cada categoria foram criadas algumas subcategorias, mostradas na Figura 2:

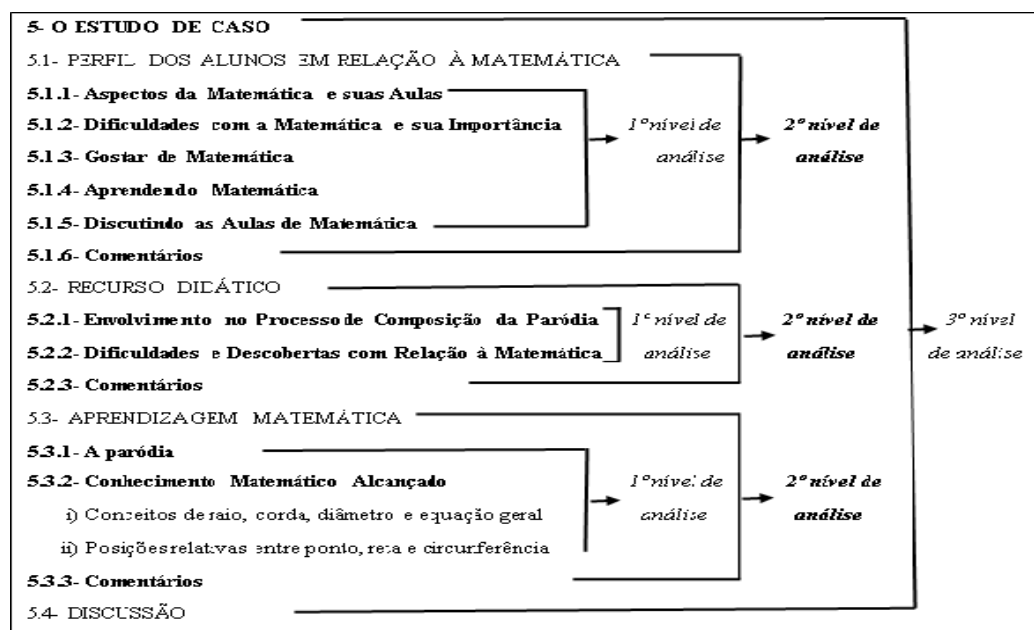


Figura 2: Esboço das categorias e subcategorias

Fonte: Estrutura adaptada de Lins (2003).

Analizando um dos grupos

Como mencionado anteriormente, foi um Grupo de cada turma que trabalhou o conteúdo circunferência, denominados Grupos A, B, C e D. Discutiremos aqui *apenas o Grupo C, com relação à categoria Aprendizagem Matemática*, isto é, seção 5.3 mostrada na Figura 2, compreendendo as subcategorias *Paródia* e *Conhecimento Matemático Alcançado*, isto é, ao que os alunos aprenderam e entenderam sobre o conteúdo circunferência, o qual faz parte da Geometria Analítica.

Paródia

A Paródia composta pelos alunos do Grupo C foi inspirada na música Thriller, um dos grandes sucessos de Michel Jackson:

*Circunferência os conceitos temos que aprender
São apenas três, três simples e fáceis condições
A igual a B, não pode existir o termo C
E a equação $D^2 + E^2 - 4AF > 0$*

Refrão { *Circunferência é fácil demais
Aprendendo as equações, condições e posições
Circunferência é fácil demais
Depois que se aprende ela é fácil, fácil
Demaaais!!!*

*As equações, de diferentes formas vão ter
São apenas duas, duas simples e fáceis equações
Temos a geral, obtidas através da reduzida
E a reduzida, termos subtraídos ao quadrado igual ao raio,
Ao raio ao quadrado.*

*Para classificar as posições da circunferência
Precisamos descobrir as coordenadas do centro e do raio*

Do ponto e do raio

*As posições de diferentes pontos vão ter
Se são tangentes, externas e secantes da reta a...
Ou pertencentes, externo e secante da reta a...
Ou são tangentes, secante ou podem não se interceptar, entre duas...*

*Circunferência é fácil demais
Aprendendo as equações, condições e posições
Circunferência é fácil demais
Depois que se aprende ela é fácil, fácil
Demaaaais!!!*

Observamos que os alunos compreenderam os conceitos pertinentes à circunferência, como mostra a *primeira parte* da letra. Os alunos entenderam que para uma equação representar uma circunferência ela deve obedecer três condições. Observamos no *refrão* da letra que para os alunos o conteúdo circunferência se tornou fácil, aprendendo as equações, condições e posições relativas da circunferência.

Com relação às equações da circunferência os alunos demonstraram compreensão, como mostra a *letra como um todo*. Os alunos entenderam que para encontrar a equação normal ou geral da circunferência é preciso primeiro encontrar a equação reduzida, isto é, a geral é obtida através da reduzida, assim como a equação reduzida é obtida por meio do quadrado da distância do centro a um ponto qualquer pertencente à circunferência, resultando no raio ao quadrado, isto é, $d^2(c, p) = r^2$. Os alunos entenderam que ao trabalhar as posições relativas da circunferência se faz necessário conhecer as coordenadas do centro e o valor do raio.

Os alunos compreenderam que as posições relativas da reta em relação à circunferência podem ser tangente, externa ou secante; que o ponto em relação à circunferência pode pertencer ser externo ou interno; que a posição relativa entre duas circunferências pode ser tangente, ou seja, existe um ponto comum entre elas; pode ser secante, isto é, existem dois pontos comuns às circunferências. Por último, compreenderam que as circunferências podem não se interceptarem, isto é, não existem pontos comuns entre elas.

Observamos que a letra apresenta um erro de escrita matemática e conceitual ao se referir à posição do ponto em relação à circunferência. Na *antepenúltima passagem* da *última estrofe*, a letra traz, *pertencente, externo e secante da reta a...*, quando o correto é *pertencente, externo e interno do ponto a...*

No que se refere às dificuldades encontradas por todos os Grupos na composição da paródia musical e descobertas com relação à Matemática, percebemos que os alunos elegeram como principal dificuldade o trabalhar em grupo. Também foi mencionado como dificuldade o encontrar um estúdio para gravação da paródia e o transpor o conteúdo matemático na Letra da Paródia. Foi possível observar a preocupação dos alunos na escolha das palavras corretas e com a melodia da música escolhida. Observamos ainda que o Grupo C não encontrou nenhuma dificuldade durante a realização do trabalho e a letra da paródia composta por eles contemplou o conteúdo circunferência na sua íntegra.

Conhecimento matemático alcançado

A Matemática presente nas respostas dos alunos foi discutida na subcategoria *conhecimento matemático alcançado*, tendo como fontes as perguntas 2.1, 3 e 4 da EII (Entrevista II) e a LE (Lista de Exercícios).

A pergunta 2.1 da EII diz respeito à compreensão sobre o conteúdo abordado na paródia. Um dos alunos do Grupo afirmou que:

Sujeito 1 (Grupo C): *melhorou, ficou mais fácil de fixar, encaixar uma questão. Você faz a música, aí associa a música ao conteúdo, desde que a música seja bem elaborada.*

Para os alunos, fazer uma paródia tem que saber e entender o conteúdo, para tanto recorreram aos cadernos, livros e Internet para estudar os vários conceitos, definições e fórmulas do conteúdo circunferência:

A pergunta 3 da EII diz respeito à resolução da Lista de Exercícios. De acordo com as falas dos alunos, observamos que a resolução da Lista foi o mais difícil do trabalho. Os alunos do Grupo C encontraram dificuldade na resolução de algumas questões. Segundo eles, algumas questões estavam difíceis. Entretanto, os alunos afirmaram ter conseguido resolver toda a Lista de Exercícios. De acordo com os alunos, a resolução da Lista foi compartilhada por todos os integrantes do Grupo e as dúvidas que surgiram foram sanadas por eles próprios:

Sujeito 1 (Grupo C): *A Lista ia sendo passada de mão em mão ... a gente ia resolvendo aos poucos ... e as dúvidas surgidas a gente tirava uns com os outros ... ia pesquisando no livro e ia conseguindo encontrar as soluções ... foi um pouco difícil resolver a Lista, mas conseguimos.*

A pergunta 4 da EII diz respeito ao trabalho como um todo. Os alunos usaram os mais variados adjetivos para expressar a alegria, o prazer e a satisfação de ter trabalhado, discutido, estudado e aprendido Matemática, em especial, circunferência usando a paródia musical como recurso didático:

Sujeito 1 (Grupo C): *foi prazeroso ... foi satisfatório conseguir elaborar o trabalho e ver que o resultado ficou bom ... a satisfação de ver as pessoas reconhecerem o trabalho e a aprendizagem que a gente adquiriu ... eu nunca pensei que fosse possível fazer um trabalho desse dentro da Matemática, pois Matemática é uma coisa muito restrita à sala de aula ... muito fechada.*

A Lista de Exercícios compreendeu 8 questões:

- 01) Determine o centro e raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2(x - y) + 1$.
- 02) Determine as coordenadas do centro da circunferência que passa pelos pontos A (5; 4), B(-2; 3) e C(5; 3).
- 03) Qual a posição relativa entre as circunferências de equações $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$.
- 04) Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 5x + 4y + k = 0$, sabendo que ela determina uma corda no eixo X de comprimento 3, calcule k.
- 05) Num sistema cartesiano ortogonal, determine m para que a reta $y = mx + 2$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - x - y = 2$.
- 06) A reta s, de equação $x + 2y + k = 0$, é exterior à circunferência, $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 19 = 0$. Determine o valor de k.
- 07) Escreva a equação geral da circunferência de centro C(-2; 4) e tangente à reta $3x + 4y = 0$.
- 08) Determine a equação da reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ e que passa pelo ponto A (1; 1).

Figura 3: Lista de Exercícios sobre Circunferência
Fonte: Elaborado pelo autor

A Lista de Exercícios foi dividida em dois blocos. O primeiro bloco contendo as questões 1, 2 e 4 que tiveram como objetivo investigar a compreensão dos conceitos de centro, raio, corda e a definição da equação geral da circunferência. As questões 3, 5, 6, 7 e 8, referentes ao segundo bloco, tiveram como objetivo investigar se os alunos sabiam identificar as posições relativas que uma circunferência assume em relação à equação de uma reta e entre duas circunferências, assim como os vários conceitos que as diferenciam.

A questão 1 foi: *Determine o centro e raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2(x - y) + 1$.*

A questão oferece a equação normal ou geral da circunferência, na qual os alunos precisaram interpretar, a partir dos termos da equação, o par ordenado que corresponda ao centro da circunferência e que a distância desse centro a um ponto qualquer pertencente à circunferência, determina o raio. Na análise da questão, esperávamos que os alunos conseguissem aplicar os conceitos de centro e raio, cuja compreensão dos mesmos foi retratada na letra da paródia musical. A seguir a resolução feita pelo Grupo C para essa questão foi:

1) $x^2 + y^2 = 2(x - y) + 1$
 $x^2 + y^2 = 2x - 2y + 1$
 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$

Calc. do raio
 $a^2 + b^2 - r^2 = -1$
 $1^2 + (-1)^2 - r^2 = -1$
 $1 + 1 - r^2 = -1$
 $(-r^2 = -3) \cdot (-1)$
 $r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$

Calc. do Centro
 $-2a = -2$
 $(-1) \cdot (-1) \Rightarrow 2a = 2$
 $a = \frac{2}{2} = 1$

$-2b = 2$
 $b = \frac{2}{-2} = -1$
 $C(1, -1)$

Figura 4: Resolução da Questão 1 da Lista de Exercícios

Fonte: Dados Obtidos na Pesquisa

Observamos que o Grupo demonstrou compreensão dos conceitos de centro e raio, atingindo o objetivo da questão proposta. Percebemos que o primeiro passo foi encontrar as coordenadas do par ordenado que represente o centro da circunferência, entendendo que não é possível encontrar o valor do raio sem conhecer as coordenadas do centro.

A questão 2 foi: *Determine as coordenadas do centro da circunferência que passa pelos pontos A (5; 4), B(-2; 3) e C(5; 3).*

A questão estimula a interpretação, o aluno tem a possibilidade de interpretar os conteúdos fundamentais para a resolução da questão proposta. Os conteúdos que são interpretados por meio da descrição da questão são: distância entre dois pontos; equidistâncias; conceitos de centro e raio; produtos notáveis e sistema de equação. Esperávamos na resolução da questão que os alunos percebessem que os pontos dados estão interligados ao centro da circunferência, ou seja, que a distância do centro a qualquer um dos três pontos dados, define o raio da circunferência. Portanto, as três distâncias são iguais. A seguir a resolução feita pelo Grupo C:

2) A(5, 4), B(-2, 3) e C(5, 3)
 P(a, b) é o centro da circunferência, então, temos: $d_{PA} = d_{PB} = d_{PC}$

$d_{PA} = d_{PB}$
 $(\sqrt{(a-5)^2 + (b-4)^2})^2 = (\sqrt{(a+2)^2 + (b-3)^2})^2$
 $(a-5)^2 + (b-4)^2 = (a+2)^2 + (b-3)^2$
 $a^2 - 10a + 25 + b^2 - 8b + 16 = a^2 + 4a + 4 + b^2 - 6b + 9$
 $-10a + 25 - 8b + 16 = 4a + 4 - 6b + 9$
 $-20a - 4a - 8b + 6b = 4 + 9 - 25 - 16$
 $-24a - 2b = -28$
 $-12a - b = -14 \quad (1)$

$d_{PA} = d_{PC}$
 $(\sqrt{(a-5)^2 + (b-4)^2})^2 = (\sqrt{(a-5)^2 + (b-3)^2})^2$
 $a^2 - 10a + 25 + b^2 - 8b + 16 = a^2 - 10a + 25 + b^2 - 6b + 9$
 $-8b + 16 = -6b + 9$
 $-8b + 16 = -6b + 9$
 $(-2b = -7) \cdot (-1)$
 $2b = 7$
 $b = \frac{7}{2}$

Substituindo $b = \frac{7}{2}$ em (1):
 $-12a - \frac{7}{2} = -14$
 $-12a = -14 + \frac{7}{2} = -\frac{21}{2}$
 $(-12a = -\frac{21}{2}) \cdot (-1)$
 $12a = \frac{21}{2}$
 $14a = 21 + a = \frac{24}{2} = \frac{3}{2}$

Logo: $P(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$

Figura 5: Resolução da Questão 2 da Lista de Exercícios

Fonte: Dados Obtidos na Pesquisa

Observamos que o Grupo descreveu as equidistâncias dos pontos dados na questão com relação ao centro da circunferência, assim como demonstrou entendimento do conceito de raio ao aplicar a definição da distância entre dois pontos, conteúdo estudado anteriormente, base central para a resolução da questão. Portanto, o Grupo C resolveu a questão e trabalhou os conceitos de centro e de raio, lembrando para tanto de conteúdos anteriores e atingindo o objetivo proposto na questão.

A questão 3 foi: *Qual a posição relativa entre as circunferências de equações $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$.*

A questão descreve a equação geral de duas circunferências. Geometricamente, sabemos que elas podem se interceptarem em um ponto, dois pontos ou não se interceptarem. Esperávamos na resolução da questão que os alunos percebessem que para chegar à posição relativa entre as duas circunferências existem duas maneiras: através da distância entre os centros e comparadas às medidas dos raios ou através da resolução do sistema formado pelas duas equações algébricas que representam as circunferências. O Grupo C apresentou a resolução por meio do sistema de equações:

Handwritten solution for Question 3:

$$\begin{aligned} &3) \quad x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0 \\ &\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0 \cdot (-1) \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ -x^2 - y^2 + 2x + 8y - 8 = 0 \end{cases} \\ &\hline &8y - 8 = 0 \\ &8y = 8 \\ &y = \frac{8}{8} = 1 \end{aligned}$$

Then, solving for x:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ &x^2 + 1^2 - 2x = 0 \\ &x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Delta = b^2 - 4ac \\ &\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &\Delta = 4 - 4 \\ &\Delta = 0 \end{aligned}$$

Since $\Delta = 0$, the circles are tangent at the point $(1, 1)$.

Figura 6: Resolução da questão 3 da Lista de Exercícios

Fonte: Dados obtidos na pesquisa

Observamos nesta solução que o método da adição adotado na resolução do sistema permitiu de imediato aos alunos encontrarem o valor da ordenada do ponto que representa o centro da circunferência, ou seja, o valor da variável y. Ao substituir o valor da ordenada encontrada em uma das equações do sistema, os alunos se depararam com uma equação do segundo grau. O valor do delta da equação é suficiente para conhecer a posição relativa entre as circunferências, como mostrada pelos alunos na resolução. Como o valor do delta foi igual a zero, os alunos deduziram que as circunferências se interceptam em um ponto, ou seja, são tangentes. Ressaltamos que a resolução do sistema apontou a tangência como posição relativa e o ponto onde elas se interceptam, porém o Grupo não especificou se a tangência era externa ou interna.

A questão 4 foi: *Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 5x + 4y + k = 0$, sabendo que ela determina uma corda no eixo X de comprimento 3, calcule k.*

A questão contempla a possibilidade dos alunos interpretarem o conceito de corda, assim como encaminha os alunos a busca de conteúdos estudados anteriores, necessários a resolução da questão. Esperávamos que os alunos demonstrassem nessa questão entendimento das definições da equação geral da circunferência, Teorema de Pitágoras, distância do ponto a reta e os conceitos de centro e raio.

Esperávamos ainda que os alunos não se envolvessem apenas com a representação algébrica da circunferência, mas que tivessem entendido que ao associar cada circunferência a uma equação fosse possível estudar as suas propriedades geométricas. A seguir a resolução feita pelo Grupo C:

4) $x^2 + y^2 + 5x + 4y + k = 0$ Comprimento 3; calcular k

$\Delta = -2a = 5$
 $\boxed{a = -\frac{5}{2}}$ Então: $c(\frac{5}{2}, -2)$ $d.c. O_x = \frac{1-2}{1} = -1$

$B = -2b = 4$
 $b = \frac{4}{-2} = -2$

temos:
 $r^2 = (1,5)^2 + 2^2$
 $r^2 = 2,25 + 4$
 $r^2 = 6,25$
 $r = \sqrt{6,25}$
 $r = 2,5$

$k = a^2 + b^2 - r^2$
 $k = (-\frac{5}{2})^2 + (-2)^2 - (2,5)^2$
 $k = \frac{25}{4} + 4 - 6,25$
 $k = \frac{25 + 16 - 25}{4} = \frac{16}{4} = 4$ Logo: $k = 4$

Figura 7: Resolução da Questão 4 da Lista de Exercícios

Fonte: Dados Obtidos na Pesquisa

Observamos no desenvolvimento da questão que os alunos precisaram interpretar a partir dos termos x e y da equação geral da circunferência, o par ordenado que correspondesse às coordenadas do centro da circunferência. Percebemos que os alunos interpretaram geometricamente a corda, ou seja, os dois pontos que a circunferência intercepta sobre o eixo x . Observamos ainda que os alunos, ao traçarem as medidas do raio e do comprimento que a corda determina sobre o eixo x , resultaram num triângulo retângulo, no qual fizeram uso do Teorema de Pitágoras para encontrar a medida do raio da circunferência. Por fim, substituíram os valores encontrados nos termos da equação da circunferência encontrando o valor de k . Percebemos que o Grupo demonstrou compreensão tanto dos conceitos referentes à circunferência como as definições referentes a conteúdos anteriores necessários a resolução da questão.

A questão 5 foi: Num sistema cartesiano ortogonal, determine m para que a reta $y = mx + 2$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - x - y = 2$.

Nessa questão os alunos precisaram identificar conteúdos que não são referências diretas à posição relativa da reta e a circunferência, mas que são necessários ao desenvolvimento da questão. O enunciado apresenta a equação da reta na forma reduzida. Os alunos representaram a equação na forma geral, pois foi preciso usar a definição da distância do ponto à reta para solucionar a questão. A seguir a resolução feita pelo Grupo C para essa questão:

5) $mx - y + 2 = 0$
 $d.c. = r$

$c(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - r^2 = -2$
 $r^2 = 2 + \frac{1}{2}$
 $r^2 = \frac{5}{2}$
 $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$|m \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
 $|\frac{m}{2} + \frac{3}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
 $|\frac{m+3}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
 $\frac{m+3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
 $m+3 = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$
 $m = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - 3$

$m = 2\sqrt{5} - 3$

Figura 8: Resolução da Questão 5 da Lista de Exercícios

Fonte: Dados Obtidos na Pesquisa

Observamos que o Grupo apresentou as coordenadas do centro da circunferência, porém não demonstrou como as encontrou. Quanto ao raio da circunferência, o Grupo demonstrou não apresentar dificuldade para encontrá-lo. Entretanto, observamos que o Grupo apresentou dificuldade

em relação à aplicação da definição da distância do ponto a reta. Percebemos que o Grupo lembrou a definição, porém na substituição dos valores das variáveis houve uma pequena confusão, ou seja, observamos na equação geral da reta que os coeficientes das variáveis a e b são m e -1 respectivamente, o Grupo substituiu na definição por 1 e 1 . Percebemos ainda que o Grupo demonstrou compreensão na definição de módulo ao usar corretamente sua definição para resolver a equação modular. Em virtude do erro de substituição na definição da distância, o Grupo obteve acerto parcial na questão.

A questão 6 foi: A reta s , de equação $x + 2y + k = 0$, é exterior à circunferência, $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 19 = 0$. Determine os valores de k .

A presente questão aborda a posição relativa entre reta e circunferência, em especial, a reta é externa a circunferência. Para o entendimento da questão, foi necessária a busca de conteúdos matemáticos anteriores como distância entre ponto e reta e inequação modular. Esperávamos que os alunos interpretassem esses conteúdos anteriores de modo significativo para compreensão da questão. A seguir a resolução feita pelo Grupo C:

6) $x + 2y + k = 0$
 Se a reta é exterior
 Logo: $d_{cs} > r$
 temos $\frac{|1(-4) + 2(2) + k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} > 1$
 $|k| > \sqrt{5}$
 Conclusão: $k > \sqrt{5}$ ou $k < -\sqrt{5}$

$x^2 + y^2 + 8x + 4y + 19 = 0$
 $-2a = 8 \Rightarrow a = -4$
 $-2b = -4 \Rightarrow b = 2$
 $C(-4, 2)$
 $a^2 + b^2 - r^2 = 19$
 $(-4)^2 + 2^2 - r^2 = 19$
 $16 + 4 - r^2 = 19$
 $-r^2 = 19 - 20$
 $(-r^2 = -1) \cdot (-1)$
 $r^2 = 1$
 $r = \sqrt{1}$
 $r = 1$

Figura 9: Resolução da Questão 6 da Lista de Exercícios

Fonte: Dados Obtidos na Pesquisa

Observamos que o Grupo conseguiu transpor significados aos conteúdos matemáticos anteriores presente na resolução da questão. Observamos também na questão anterior, ou seja, questão cinco que o Grupo cometeu um pequeno erro, ao substituir os dados na definição da distância entre ponto e reta, o que nos leva a ratificar que o erro cometido não foi por falta de domínio da definição. Essa mesma definição, como podemos observar, foi usada pelo Grupo com êxito na presente questão. No tocante à circunferência, o Grupo apresentou compreensão dos conceitos de centro e raio na resolução da questão.

A questão 7 foi: Escreva a equação geral da circunferência de centro $C(-2; 4)$ e tangente à reta $3x + 4y = 0$.

A questão teve por finalidade explorar a tangência entre reta e circunferência, portanto, esperávamos que os alunos mostrassem compreensão nas definições da equação reduzida e geral da circunferência. A seguir a resolução feita pelo Grupo C para a questão:

7) $d_{cs} = r$
 $r = \frac{|3(-2) + 4(4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$
 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4$
 $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$

Figura 10: Resolução da Questão 7 da Lista de Exercícios

Fonte: Dados Obtidos na Pesquisa

Como podemos observar os alunos encontraram o raio da circunferência por meio da distância do centro da circunferência à reta. Por fim, substituíram os valores do centro e do raio na equação reduzida e ao desenvolver os produtos notáveis foi obtida a equação geral da circunferência. O Grupo não apresentou dificuldade em relação aos conteúdos matemáticos anteriores, ou seja, distância entre ponto e reta e produtos notáveis. Portanto, o Grupo apresentou compreensão à definição da equação da circunferência presente na questão.

A questão 8 foi: *Determine a equação da reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$ e que passa pelo ponto A (1; 1).*

A questão abordou a tangência entre reta e circunferência, direcionando os alunos à busca de conteúdos matemáticos anteriores: A seguir a resolução feita pelo Grupo C:

Handwritten solution for Question 8:

Left side (Circle parameters):

$$8) x^2 + y^2 + 4x + 2y - 8 = 0$$

$$-2a = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$-2b = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$C(-2, -1)$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = -8$$

$$(-2)^2 + (-1)^2 - r^2 = -8$$

$$4 + 1 - r^2 = -8$$

$$-r^2 = -8 - 4 - 1$$

$$(-r^2 = -13) \cdot (-1)$$

$$r^2 = 13$$

$$r = \sqrt{13}$$

Right side (Tangent line):

A (1, 1)

$$Y - Y_0 = m(X - X_0)$$

$$Y - 1 = m(X - 1)$$

$$mX - Y - m + 1 = 0$$

$$d_{C, r} = \frac{|-2m + 1 - m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{13}$$

$$4m^2 + 12m + 7 = 0$$

$$\Delta = 144 - 144$$

$$\Delta = 0$$

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

Logo: $-\frac{3}{2} X - Y + \frac{3}{2} + 1 = 0$

Substituindo

$$(3X - 2Y + 5 = 0) \cdot (-1)$$

$$3X + 2Y - 5 = 0$$

Figura 11: Resolução da Questão 8 da Lista de Exercícios

Fonte: Dados Obtidos na Pesquisa

Observamos que o Grupo apresentou de forma clara o desenvolvimento da questão e os conteúdos matemáticos anteriores usados para sua resolução. Entre os conteúdos matemáticos anteriores, fizeram uso da equação da reta, distância entre ponto e reta e coeficiente angular da reta. Os alunos iniciaram a resolução da questão por encontrarem as coordenadas do centro e o valor do raio, tomando como referência os termos x e y da equação da circunferência. Os alunos demonstraram entendimento na aplicação da definição da distância entre o ponto e reta ao encontrar o valor do coeficiente angular da reta. Consideramos que o Grupo demonstrou compreensão das definições propostas pela questão.

Analisando as oito questões referentes à Lista de Exercícios, o Grupo C apresentou compreensão dos conceitos de centro, raio, corda e definição da equação geral da circunferência, assim como foi capaz de identificar as posições relativas que uma circunferência assume em relação à equação de uma reta e entre duas circunferências nos vários conceitos que as diferenciam. Apenas na questão 5 o Grupo C apresentou um erro parcial, não relacionado ao conteúdo circunferência, mas sim em conteúdo matemático anteriormente estudado.

Apesar de não discutido neste artigo, houve erros parciais e totais nas questões referentes à Lista de Exercícios pelos Grupos A, B e D. O Quadro 2 a seguir ilustra de forma sucinta os resultados:

Quadro 2 – Análise das questões da Lista de Exercícios

Fonte: Dados obtidos na pesquisa

Questão	Acerto Parcial	Acerto Total	Erro	Não respondida
01	Grupos A e D	Grupos B e C		
02		Grupos A, B e C		Grupo D
03	Grupo A	Grupos B, C e D		
04	Grupo A	Grupo C		Grupos B e D
05	Grupos A, B e C			Grupo D
06	Grupo B	Grupo C	Grupo A	Grupo D
07		Grupos A, B e C	Grupo D	
08	Grupos A e D	Grupos B e C		

De modo geral, considerando-se o universo das 32 resoluções analisadas, sendo oito questões por Grupo e quatro respostas por questão, observamos que o percentual de erro apresentado na resolução das questões da Lista de Exercícios foi mínimo, ou seja, 6%. Já o percentual de questões não respondidas foi de 16 %, consequência da falta de interação entre os integrantes do Grupo D, conforme constatado na Entrevista II. Entretanto, o percentual de acerto foi expressivo, isto é, 78 %, dos quais 47 % de acerto total e 31 % de acerto parcial das questões.

Considerações finais

Ao propormos, na devolução, a atividade de compor uma paródia musical, nossa intenção foi provocar uma ruptura do contrato didático baseado na prática pedagógica por meio de aulas expositivas e inserir os alunos em uma situação adidática. De acordo com Brousseau (1986), o contrato didático visa fundamentalmente à aquisição de saberes pelos alunos. Os resultados da pesquisa apontam que ao realizar a atividade proposta, os alunos não demonstraram dificuldade em adaptar-se à ruptura, apenas alguns, Grupo D, encontraram dificuldade de trabalhar de forma conjunta, isto é, provocar encontros fora dos horários de aula. De acordo com Brousseau (1986), o contrato didático existe em função do aprendizado do aluno e muitos têm dificuldade em adaptar-se a essa ruptura de contrato. Se o contrato didático for mal interpretado pelo professor, ou pelo aluno, poderá levar ao fracasso escolar ao invés de uma aprendizagem que tenha sentido e significado.

No âmbito de uma situação adidática, então, o aluno age de formas distintas em diferentes momentos. Segundo a tipologia das situações adidáticas, elaboradas por Brousseau (1986), os alunos envolvidos na pesquisa vivenciaram a situação de ação ao aceitarem a atividade na devolução. Ao discutirem, falarem e refletirem sobre quais os conceitos presentes na letra da composição da paródia vivenciaram a situação de formulação. Por fim, ao recorrerem aos livros, cadernos, Internet e ao professor, se deu a situação de validação. Portanto, a atividade proposta na devolução estimulou os alunos a aceitá-la, levando-os a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio, como ressalta Brousseau (1986).

O conhecimento sobre circunferência presente na Letra da Paródia do Grupo C, discutido neste artigo, ocorreu por meio da devolução com o significado de transferência de responsabilidade,

ou seja, o professor estimulou os alunos a aceitarem a atividade proposta como desafio a solucioná-la. A esse respeito, Brousseau (2008, p. 91) afirma que “a devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e o mesmo assume as consequências dessa transferência”. Neste processo, o professor pesquisador elaborou a atividade tendo o controle sobre ela e não sobre o saber, o que objetivou aos alunos vivenciá-lo como um pesquisador na busca da solução de um problema. Para Brousseau (1986, p. 51), na didática da Matemática, “[...] o ensino é a devolução ao aluno de uma situação adidática e a aprendizagem é uma adaptação a esta situação”.

Os alunos dos Grupos A, B, C e D se preocuparam em escolher palavras corretas, demonstrando estarem cientes da importância da validação dos conceitos presentes nas letras das paródias por eles compostas. No modo tradicional de ensino da Matemática não percebemos essa preocupação por parte dos alunos, pois a apresentação de um conceito é feita de forma direta, ou seja, parte da definição com uma sequência de exemplos e uma Lista de Exercícios. Desta forma, os saberes matemáticos são comunicados aos alunos de maneira pronta (Araújo, 2010). Nas situações adidáticas, de modo contrário, procura-se um ambiente científico de investigação, no qual os alunos possam refazer alguns passos estabelecidos pelos pesquisadores e cientistas (Freitas, 2010).

Com relação à compreensão do conteúdo circunferência, os alunos do Grupo C afirmaram com unanimidade que o trabalho de composição da paródia musical melhorou a compreensão do conteúdo circunferência. Segundo os alunos, precisaram rever o assunto, estudar os conceitos por meios de livros, cadernos, pesquisarem na Internet, isto é, puderam rever e aprofundar os conhecimentos do conteúdo já estudado de forma expositiva. Puderam ainda refletir sobre quais conceitos entrariam na letra da paródia, tendo a oportunidade de falar e discutir sobre Matemática, ou seja, foram os principais atores da construção de seu conhecimento a partir do trabalho proposto, caracterizando uma situação adidática, segundo Brousseau (1986).

Em relação à construção e resgate dos conceitos relacionados à circunferência, percebemos que os alunos quando compõem uma paródia musical do seu conhecimento criam uma ideia de fenômenos que não são comuns e escreve palavras distantes do seu repertório coloquial, o que corrobora Carvalho (2008) que aponta a composição da paródia musical como uma estratégia alternativa para trabalhar conceitos considerados pelos alunos de difícil apreensão.

Sobre o erro conceitual apresentado na Letra da Paródia do Grupo C, fez-se e faz-se importante, pois pode ser trabalhado em sala de aula, tendo como ponto de partida o texto elaborado pelos alunos, o que facilitará a identificação das dúvidas que os mesmos apresentam como argumenta Carvalho (2008), ou seja, será feita a situação de institucionalização.

A Lista de Exercícios mostrou ser a parte mais difícil do trabalho. As dificuldades apresentadas na resolução de algumas questões foram sanadas entre os próprios integrantes do Grupo C. Desta forma, os alunos aprenderam uns com os outros e perceberam que quando ensinam também aprendem. Apesar de não discutido neste artigo, com relação aos Grupos A, B e D houve erros parciais e totais nas questões referentes à Lista de Exercícios.

A busca por conteúdos matemáticos anteriores, não relacionados diretamente à circunferência, foi importante para levar os alunos a interpretar de forma significativa o conteúdo circunferência, principalmente conteúdos aprendidos no Ensino Fundamental. O Grupo C demonstrou compreensão dos conceitos abordados na Lista e entendeu que não é possível encontrar a medida do raio de uma circunferência sem conhecer as coordenadas do seu centro. A compreensão dos conceitos de centro e raio por parte dos alunos foi satisfatório. O Grupo interpretou a questão quatro da Lista geometricamente o que demonstra interpretar a mesma de modo significativo e não apenas algebricamente. O Grupo demonstrou ainda compreensão aos conceitos referentes à circunferência e aos conteúdos matemáticos anteriores necessários à resolução da questão. Como também demonstrou compreensão da definição da distância do ponto a

reta, inequação modular, coeficiente angular da reta e equação geral da reta. No tocante a circunferência, o Grupo apresentou compreensão dos conceitos de centro e raio e da definição da equação da circunferência. Com isso, os alunos compreenderam o conceito de posição relativa entre reta e circunferência.

O Grupo C, assim como os alunos dos demais Grupos, expressou sentimentos positivos como alegria, prazer e satisfação em ter discutido, estudado e aprendido Matemática por meio da composição da paródia musical. No olhar dos alunos, o trabalho os aproximou mais da Matemática, principalmente para aqueles que apresentavam dificuldade ou não gostavam de Matemática. Para os alunos, a aprendizagem adquirida sobre o conteúdo circunferência no trabalho ocorreu de forma espontânea e prazerosa. Mesmo o Grupo D tendo dificuldade na resolução da Lista de Exercícios, mostrou-se favorável à metodologia adotada, conforme constatado na Entrevista II.

Quanto à situação de institucionalização, de responsabilidade do professor, nosso trabalho se deu por meio da Lista de Exercícios, mostrando bom desempenho dos alunos nas compreensões dos conceitos e definições pertinentes à circunferência. Brousseau (1986) considera que somente após a institucionalização o saber se torna oficial e estará disponível para a resolução de problemas matemáticos, enquanto para Chevallard (2001, p. 219) “inversamente a devolução, a institucionalização consiste em dar um estatuto cultural para as produções dos alunos, atividades, linguagem e conhecimentos”.

A Teoria das Situações Didáticas modela o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos em sala de aula interligando o professor, aluno e o *conhecimento matemático*. Sobre este construto teórico acreditamos que a atividade proposta proporcionou aos alunos vivenciarem o significado de transferência de responsabilidade pelo seu processo de ensino e aprendizagem.

Sendo assim, a Teoria das Situações Didáticas é um referencial para a Educação Matemática, pois enfatiza a importância das noções mobilizadas pelos alunos na construção dos seus conhecimentos matemáticos, como também do trabalho do professor, o qual se alicerça na criação de condições para que o aluno se aproprie dos conteúdos matemáticos (Araújo, 2010).

Dos resultados obtidos, após as análises realizadas, percebemos indícios de que a composição de paródia musical atribuiu melhoras na aprendizagem do conteúdo circunferência. Portanto, podemos afirmar que a composição de paródia musical como recurso didático pode vir a contribuir com a aprendizagem de alunos acerca de conteúdos matemáticos.

Quanto às contribuições que nossa pesquisa possa vir a trazer para a comunidade científica da Educação Matemática, acreditamos ser esta no campo da metodologia de ensino, mais precisamente, das estratégias didáticas, objetivando o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A pesquisa como um todo, isto é, a discussão na íntegra das quatro composições de paródias compostas pelos 36 alunos, ou seja, pelos Grupos A, B, C e D, se encontra em Cavalcanti (2011).

Referências

Alves-Mazzoti, A. J. & Gewandsznajder, F. (1999). *O método nas ciências naturais e sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo. Pioneira.

Araújo, P. B. (2010). *Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra*. Dissertação de Mestrado. PEPeM. São Paulo: PUC.

- Ananias, E. F. & Lins, A. F. (2010). *O calendário e o Jogo de dominó: aspectos cognitivos sobre o cálculo mental na educação matemática*. In: XIV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Campo Grande /MS: UFMS.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto. Porto Editora.
- Borba, M. C. & Araújo, J. (2004). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte. Autêntica.
- Brasil. (2002). *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias Matemática*. Brasília. MEC.
- Brousseau, G. (2008). *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo. Ática.
- Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*, V.7. N.2, p. 33-115.
- Carvalho, V. F. (2008). *O processo de construção de paródias musicais no ensino de biologia na EJA*. Dissertação de Mestrado. PPGECEM. Belo Horizonte: PUC.
- Cavalcanti, V. S. (2011). *Composição de Paródias: um recurso didático para compreensão de conceitos de circunferência*. Dissertação de Mestrado. PPGECEM. Campina Grande: UEPB.
- Cavalcanti, V. S. & Lins, A. F. (2009). *Cantando a Matemática: uma abordagem didática para o Ensino Médio*. In: XIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Goiânia/GO: UFG.
- Chevallard, Y. (2001). Esboço da Teoria das Situações Didáticas. In: Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón J. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre. Artmed Editora.
- Ferreira, A. B. H. (1996). *Novo dicionário da língua portuguesa*. (pp.1272). Rio de Janeiro. Nova Fronteira.
- Freitas, J. L. M. (2010). *Teoria das Situações Didáticas*. In: Machado, S. D. A. *Educação Matemática: (uma nova) introdução*. (pp.77- 111). São Paulo. EDUC.
- Houaiss, I. A. (2001). *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*. Versão 1.0. Rio de Janeiro. Editora Objetiva.
- Lins, A. F. (2003). *Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education: The Case of Cabri and Excel*. Tese de Doutorado (PhD). Bristol: University of Bristol.
- Lüdke, M. & André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: Ed. Pedagógica e Universitária – EPU.
- Sant’anna, A. R. (2003). *Paródia, paráfrase & Cia*. São Paulo: Ática.
- Silva, B. A. (2010). *Contrato Didático*. In: Machado, S. D. A. *Educação Matemática: (uma nova) introdução*. (pp.49- 75). São Paulo. EDUC.

Recebido em: 09.10.12

Aceito em: 13.08.13