UDC 004.4'41: 004.942

The Convergence in Spatial Tasks

[1] Vladimir P. Kulagin
[2] Victor Y. Tsvetkov
[3] Maiya V. Maksimova

[1-3] MIEM HSE, Russia
Dr. (Technical), Professor
E-mail: kvp@miem.ru
[2]Dr. (Engineering), Dr. (Economics), Professor
E-mail: cvj2@list.ru
[3] PhD student
E-mail: cvj2@list.ru

Abstract. The article reveals the problem of convergence of direct and inverse problems in Earth Sciences, describes the features and application of these problems, discloses analytical features of direct and inverse problems. The convergence criteria and conditions for convergence were presented. This work is supported by the Grant of the Government of the Russian Federation for support of scientific research, implemented under the supervision of leading scientists in Russian institutions of higher education in the field "Space Research and Technologies" in 2011–2013.

Keywords: Earth sciences; direct problem; inverse problem; land surveying; photogrammetry; convergence; iterative calculations; coordinate transformation.

Введение. Вопросы сходимости решения задач остаются открытыми, особенно в пространственных задач. Пространственные задачи возникают при исследовании космического пространства и в области наук о Земле. Они связаны с решением обратных геодезических и фотограмметрических задач, а также с преобразованием координат в криволинейных системах. Наиболее часто эта задача встречается при решении прямых и обратных задач. Исследование сходимости позволяет определить устойчивость или неустойчивость метода решения задач, корректность алгоритмов и корректность вычислений и определить условия, при которых пространственные задачи могут решаться корректно.

Терминологический аспект. Понятие любого термина связывают с той областью, в которой он применяется и хорошо исследован. Хорошо исследованы вопросы сходимости рядов. Поэтому чаще всего это понятие связывают с этой область.

Менее исследованы вопросы сходимости решения задач. Поэтому анализ термина проведем именно для этой области. Для «сходимости» синонимом является «устойчивость». Со сходимостью связано понятие «точность», которое является ее коррелятом [1]. Чем выше сходимость, тем выше точность

Антонимом сходимости является «несходимость». Со несходимостью связано понятие «погрешность», которое является ее коррелятом. Чем выше несходимость, тем больше погрешность.

Сходимость является атрибутивной характеристикой. Она всегда соотносится с каким-то объектов или понятием. Например, сходимость ряда, сходимость алгоритма. Поэтому для определения сходимости важны терминологические отношения [2].

Причины отсутствия сходимости. Отсутствие сходимости или несходимость может быть обусловлены разными факторами. Это выбор функции аппроксимации при приближенных решениях или при редуцировании модели. Выбор метода влияет на сходимость и точность. Выбор алгоритма также влияет на сходимость и точность. Выбор программного средства или операционной среды влияет на сходимость и точность [3].

В науках о Земле на сходимость влияет расположение точек которое создает неустойчивость решения. В науках о Земле на сходимость влияет масштаб числовых величин и разница между максимальными и минимальными значениями числовых данных.

Последнее требует нормировки числовых значение и различных вспомогательных пересчетов.

На сходимость вычислений влияют грубые ошибки в исходных данных, которые требуют специальных методов анализа и отбраковки.

Поэтому при решении вычислительных задач необходим анализ сходимости решения и факторов, которые могут вызвать несходимость.

Виды сходимости. Выше отмечалось, что сходимость является атрибутивной характеристикой, то есть, связана с каким либо фактором. Наличие большого числа факторов создает разные виды сходимости.

Сходимость может зависеть от метода решения. В этом случае говорят о методической сходимости. При одном и том же методе можно выбрать разный алгоритм. Это дает основание говорить о сходимости алгоритма или об алгоритмической сходимости.

При одном и том же алгоритме различные наборы данных могут обеспечивать разный результат. Например, при обращении матриц матрицы могут быть слабо обусловлены из-за исходных наборов данных [3]. Это дает основание говорить о сходимости, обусловленной наборами данных или о неустойчивости вычислений, обусловленной исходными данными.

Сходимость может быть обусловлена выбором программных средств. Например, в прошлом применялись ЭВМ СМ 1800, которые использовали интерпретатор Бейсик. Этот интерпретатор имел большие ошибки округления и вычисление не простых задач всегда сопровождалось потерей точности и ошибками. Это дает основание говорить о сходимости вычислений для программного средства.

При решении нелинейных задач их часто редуцируют (упрощают), в частности линеаризуют. Необходимо различать эти понятия. Редуцирование может состоять в замене одной нелинейной модели другой или другими нелинейными моделями, а может состоять в замене нелинейной модели линейной. Степень редуцирования влияет на сходимость решения. Поэтому можно говорить о сходимости редуцирования и о сходимости линеаризации.

При решении прямой и обратной задачи может иметь место неоднозначность преобразований. Например, в науках о Земле прямое преобразование может происходить из пространства меньшей размерности в пространство большей размерности [4]. Обратное преобразование, наоборот связано с переходом из пространства большей размерности в пространство меньшей размерности. В этом случае можно говорить о сходимости преобразования пространств или о пространственной сходимости.

Сходимость достаточно детально изучена в области последовательностей и рядов. В этой области «сходимость» означает то, что бесконечная последовательность или сумма бесконечного ряда или несобственный интеграл имеют предел. В качестве критериев используют критерий Коши и Даламбера. По существу речь идет о сходимости ряда.

В прикладных науках говорят о сходимости результатов или о о сходимости результатов вычислений. В математике и статистике, а также в геостатистике [5, 6] говорят о поточечной сходимости. Поточечная сходимость — это последовательности функций на множестве. Это вид сходимости, при котором каждой точке данного множества ставится в соответствие предел последовательности значений элементов последовательности в этой же точке. Функция, определяемая таким образом, называется предельной функцией данной последовательности или её поточечным пределом, при этом говорится, что данная последовательность сходится поточечно к предельной функции. Именно на этом принципе строится метод интерполяции называемый «Кригингом»[7], который встроен в ряд ГИС типа ArcGis.

Поточечная сходимость является относительно слабым видом сходимости. Более сильный вид сходимости — равномерная сходимость: если функциональная последовательность сходится равномерно, то эта последовательность также сходится и поточечно, но не наоборот. Для того, чтобы поточечный предел последовательности функций был равномерным, должен выполняться критерий Коши.

В науках о Земле проблема сходимости возникает при решении обратной фотограмметрической засечки, обратной геодезической засечки, обратном преобразовании координат [8]. Кроме того проблема сходимости возникает при слабой обусловленности матриц уравнений. Сходимость тесно связана с точностью вычислений [9].

Например, фотограмметрия существует более 100 лет. Решение обратной фотограмметрической засечки (обратной задачи) осуществляют методов последовательных приближений на основе разложения нелинейных уравнений в ряд. Для такого решения требуются приближенные значения определяемых величин. При отсутствии этих величин (начальных приближений) задача не решается. Эмпирически установлено, что начальные приближения должны отличаться от истинных значений примерно на 5 %. Это обусловило технологические требования проведения работ при которых такие величины определяют.

С другой стороны при отсутствии начальных приближений вся технология работ становится неприемлемой. Это побудило разработку методов, которые не зависят от начальных приближений [10] и обеспечивают сходимость решения задачи при условиях при которых традиционные технологии обработки информации сходимость не обеспечивают. Это дает основание говорить об условной сходимости, или о технологической сходимости, обусловленной требованиями технологией измерения и обработки информации.

Обратные и прямые задачи. Само по себе решение прямой и обратной задачи может создавать проблему сходимости решений в этих задачах. Прямые и обратные задачи встречаются во многих науках. Прямые задачи связаны с получением неких величин на основе известной модели. Обратные задачи связаны с получением параметров модели на основе наблюдаемых данных. Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: геодезия, фотограмметрия, картография, математика, квантовая механика, астрономия, дистанционное зондирование Земли, спектральный анализ и др.

Прямые и обратные задачи необходимо решать при получении координатно-временной информации для решения задач мониторинга [11], при координатном обеспечении международной аэрокосмической системы глобального мониторинга [12, 13], при инженерно геодезических изысканиях [14] и многих других.

Обе задачи часто представляется в виде отображения между метрическими пространствами. Линейная прямая и обратная задача может быть описана в следующем виде. Обратная задача

$$A\,X_o = B_в; \quad (1)$$

где A — линейный оператор (часто матрица), описывающий явные отношения между данными X и параметрами модели B. Индекс «о» при данных $X_о$ означает «опорные» (такой термин принят в науках о Земле) или «эталонные» величины. Индекс «в» при параметрах модели $B_в$ означает «вычисляемые».

Прямая задача имеет вид

$$X_в = A^{-1} B; \quad (2)$$

где A^{-1} — линейный оператор, обратный оператору A, описывающий явные отношения между параметрами модели и данными X.

Часто обратные задачи являются некорректно поставленными задачами. Напомним, что корректно поставленными задачами называют такие, решение которых имеет три свойства: существует, единственно и устойчиво. Термин «устойчиво» ассоциируют с термином сходимость. Из трёх условий в обратных задачах наиболее часто нарушается условие сходимости.

Применительно пространственным задачам прямая задача трактуется следующим образом. Известна прямая связь между пространством модели и реальным пространством, задаваемая оператором прямой связи α. По известным параметрам модели точкам пространства модели B (пространства $R1$) необходимо вычислить параметры $X_в$ точек реального пространства (пространства $R2$)

$$X_в = \alpha\, B \quad (3)$$

Для этого случая имеет место отображение

$$\varphi\,(R1) \rightarrow R2 \quad (4)$$

Применительно к пространственным задачам обратная задача трактуется следующим образом. Имеется обратная связь между пространством модели (пространством R1) и реальным пространством (пространством R2), задаваемая оператором обратной связи *A*. По известным параметрам *X* пространства R2 необходимо вычислить параметры *B* точек пространства R1

$$A\ X = B_{в};\ (5)$$

Для этого случая имеет место отображение $\varphi^{-1}\ (R2) \rightarrow R1$ (6)

Если имеет место сходимость, то $A^{-1} = \alpha$ и

$$A\ \alpha = I\ (7)$$

I – единичная матрица или условная единица.

В теоретико-множественном описании это дает

$\varphi\ \varphi^{-1}\ (R1) \rightarrow R1$ (8)

и $\varphi\ \varphi^{-1} = \varphi^{-1}\ \varphi$ (9)

Выражения (7-9) определяют условие сходимости.

Если задача нелинейная, то применяют редуцирование модели

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots + \varphi_n$ (10)

либо редуцирование обратного оператора

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots A_n\ (11)$$

Здесь $\varphi_i\ A_i$ ($i=0\ldots..n$) набор преобразований.

Поскольку выражения (10, 11) представляют собой классический ряд, то это дает основание оценивать сходимость, используя принципы Даламбера или Коши.

Для сложных нелинейных зависимостей проблематично использовать простые разложения, поэтому сходимость обеспечивают эмпирически.

Для нелинейных задач при упрощении $A=A_0$ выражение (7) преобразуется в

$$A_0\ \alpha = I + \partial I (12)$$

Применяя преобразование, заменяют *A* на ряд типа (11). При этом возможны два подхода: увеличение числа членов разложения или видоизменение функции, по которой разлагают оператор А.

Увеличение числа членов рядов (10, 11) равнозначно проведению итеративных вычислений. Главная задача – минимизировать ∂I до уровня допустимой технологической погрешности. В этом случае необходимо проводить оценки используя статистические методы [8].

Выше говорилось о пространстве модели реальном. Но можно все рассуждения отнести к преобразованиям координат. Все итерационные методы практически являются реализацией ряда (10).

Например, для преобразования координат пункта из одной системы отсчета в другую чаще всего применяют формулы преобразования Гельмерта (Friedrich Robert Helmert) по семи параметрам. Данный способ является итерационным. Разработан он был для приемоиндикаторов, работающих от ГНСС GPS, и хорошо зарекомендовал себя при решении задачи преобразования координат из системы Пулково 42 (СК 42) в систему WGS 84 и наоборот. Он принадлежит к способам преобразования с использованием 7 параметров, так как использует три параметра взаимного линейного ориентирования, три параметра углового взаимного ориентирования и масштабный множитель, учитывающий разницу в расстояниях на поверхностях эллипсоидов.

У способа Гельмерта есть одна разновидность, называемая способом Бурсы-Вольфа (Bursa-Wolf). Она предполагает разворот осей другой пространственной прямоугольной геодезической системы. Поэтому в матрице углов поворота знаки элементов противоположны тем, что в способе Гельмерта.

Отсутствие точных параметров сдерживало широкое применение способа Гельмерта. Поэтому в своё время были разработаны альтернативные высокоточные способы преобразования координат, которые не учитывали линейные и угловые элементы взаимного ориентирования или учитывали их опосредованно. К числу таких относится регрессионный способ преобразования.

В настоящее время идут работы по выбору адекватных систем преобразования координат, но общие принципы остаются в рамках данного подхода, либо число членов ряда (итерации) либо видоизмененные функции преобразования.

Выводы. Решение задачи сходимости и ее исследование важно при проведении многих вычислительных процессов и требует более пристального внимания, поскольку является теоретическим обоснованием многих геодезических расчетов. В области пространственных задач решение задачи сходимости связано с преобразованием криволинейных координат и эта проблема до настоящего времени также не решена.

Примечания:

1. Tsvetkov V.Ya. Framework of Correlative Analysis // European Researcher, 2012, Vol.(23), № 6-1, p. 839-844.

2. Тихонов А.Н., Иванников А.Д., Цветков В. Я. Терминологические отношения // Фундаментальные исследования. 2009. № 5. С. 146-148.

3. Кулагин В.П. Тензорные методы анализа и синтеза сложных вычислительных систем. Московский государственный институт электроники и математики. М., 1998. 102 с.

4. Геодезия, картография, геоинформатика, кадастр: Энциклопедия. В 2-х т. /Под ред. А.В. Бородко, В.П. Савиных. М.: ООО «Геодезкартиздат», 2008. Т. I. 496 с.

5. Цветков В.Я. Геостатистика // Геодезия и аэрофотосъемка. 2007. №3. С. 174–184.

6. Цветков В.Я., Зайцева О.В. Геостатистика как инструмент управления // Геодезия и аэрофотосъемка. 2007. №5. С. 134–137.

7. Кужелев П.Д. О применении геостатистики в науках о Земле // Международный научно-технический и производственный журнал «НАУКИ О ЗЕМЛЕ». 2012. №4. С. 77-81.

8. Цветков В.Я., Шлапак В.В. Современные методы получения геодезической информации. // Инженерные изыскания. 2013. № 4. С. 14-17.

9. ГОСТ Р ИСО 5725-1-2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 1. Основные положения и определения.

10. Цветков В.Я. Решение обратной фотограмметрической засечки при дополнительных условиях// Геодезия и аэрофотосъемка. 1998. № 2. С. 94-98.

11. Савиных В.П. Система получения координатно-временной информации для решения задач мониторинга // Международный научно-технический и производственный журнал «Науки о Земле». 2012. Выпуск 03. С. 5–10.

12. Егоров В.М., Цветков В.Я. Координатное обеспечение международной аэрокосмической системы глобального мониторинга // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2012. № 4. С. 34-37.

13. Tsvetkov V.Ya. Global Monitoring // European Researcher, 2012, Vol.(33), № 11-1, p. 1843–1851.

14. Максимова М.В. Преобразования координат при инженерно-геодезических изысканиях // Инженерные изыскания. 2013. № 2. С. 18-21.

УДК 004.4'41: 004.942

О сходимости в пространственных задачах

[1] Владимир Петрович Кулагин
[2] Виктор Яковлевич Цветков
[3] Майя Владимировна Максимова

[1-3] МИЭМ НИУ ВШЭ, Россия
[1] доктор технических наук, профессор
E-mail: kvp@miem.ru
[2] Доктор технических наук, доктор экономических наук, профессор
E-mail: cvj2@mail.ru
[3] соискатель
E-mail: cvj2@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена проблема сходимости решения прямой и обратной задачи в области наук о Земле. Показаны особенности и применение этих задач. Раскрываются аналитические особенности прямой и обратной задач. Описаны критерии сходимости и условия для ее осуществления. Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования по направлению «Космические исследования и технологии» 2011–2013 гг.

Ключевые слова: науки о Земле; прямая задача; обратная задача; геодезия; фотограмметрия; сходимость; итеративные вычисления; преобразования координат.