Historias de Matemáticas
Hermite y la trascendencia de *e*

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación
G.I.E Pensamiento Matemático
ISSN 2174-0410

26 de abril de 2011

Resumen

Este artículo es en parte una traducción de los trabajos que llevó a cabo el francés Charles Hermite para determinar la trascendencia del número *e*, considerado éste como base de los logaritmos neperianos. Se han realizado algunas simplificaciones en dicha demostración para hacerla más asequible al lector. Se presenta además una introducción del número *e* a través de quien inventó su notación, Leonhard Euler.

1. El Origen del Número *e*

Si tuviéramos que destacar un matemático sobre todos los demás en cuanto a sus contribuciones para el desarrollo de nueva notación matemática, sin lugar a duda tendríamos que considerar al suizo Leonhard Euler. Una de sus precoces sugerencias la realizó siendo un joven de 21 años en la corte de San Petesburgo, cuando hizo uso de la letra *e* como valor 2,718..., que servía de base del sistema de logaritmos naturales. Este hecho ocurre en un manuscrito que Euler tituló *Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta*. Este manuscrito fue impreso por primera vez en 1862 como parte de la obra *Opera postuma mathematica et physica*. En este artículo Euler describe varios experimentos, considerando la letra *e* para representar el valor 2,718....

En una de las más de 200 cartas que Euler mantuvo con su amigo y confidente Christian Golbach fechada el 25 de Noviembre de 1731 (y publicada por primera vez en 1843), Euler resolvía la ecuación diferencial:

$$dz - 2z\,dv + \frac{z\,dz}{v} = \frac{dv}{v}$$

> *...si multiplicamos la ecuación anterior por* $e^{\ln v-2v}$*, o lo que es lo mismo,* $e^{-2v}v$ *(e representa el número, cuyo logartimo hiperbólico es igual a*

1), se obtiene

$$e^{-2v}v\,dv - 2e^{-2v}zv\,dv + e^{-2v}z\,dv = e^{-2v}dv,$$

que integrada resulta

$$e^{-2v}vz = Const. - \frac{1}{2}e^{-2v}$$

$$2vz + 1 = ae^{2v} \cdots$$

Pero la más temprana ocurrencia que Euler tuvo para considerar la letra e como representante del valor 2,718... se produjo en su *Mechanica*, en 1736. En el Vol.I, página 68 entre otras y también en el Vol.II, página 251 y en muchas de las 200 páginas siguientes. Traducimos aquí parte de lo extraido en el Vol.I, página 68, donde c representa la velocidad de un punto considerado:

Corolario II

171. Aunque en la ya mencionada ecuación la fuerza p no tiene lugar, su dirección todavía se mantiene, lo que la hace depender de la relación de los elementos dx y dy. Dada por lo tanto la dirección de la fuerza que se mueve a lo largo de un punto de la curva, uno puede, sólo con estos datos, derivar la velocidad de el punto en cualquier lugar. Se tendrá $\frac{dc}{c} = \frac{dy\,ds}{z\,dx}$ *o* $c = e^{\int \frac{dy\,ds}{z\,dx}}$*, donde e representa el número cuyo logaritmo hiperbólico es 1.*

El uso de la letra e como base de los exponentes imaginarios en expresiones analíticas que era totalmente novedoso para los matemáticos, sucedió en una disertación de Euler llamada *De summis serierum reciprocarum ex protestatibus numerorum naturalium ortarum*. En ella describe a s como el arco circular y desarrolla $\operatorname{sen} s$ con las ahora conocidas series infinitas. En la página 177, Euler sin dar explicación alguna, representa la expresión exponencial para $\operatorname{sen} s$ y el límite fundamental para e^z.

En este punto soy capaz de expresar todas las raíces de los factores de la siguiente expresión infinita

$$S - \frac{S^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{S^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{S^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} - \frac{S^9}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9} - \&c.$$

Esta expresión es equivalente a esta $\frac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$*, donde e representa el número cuyo logaritmo es igual a 1, y, como* $e^z = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$*, donde n representa un número infinito, la expresión infinita se reduce a esta:*

$$\frac{\left(1 + \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Se puede encontrar un desarrollo más sistemático en su obra *Introductio in analysin infinitorum*, Vol.I, Lausanne 1748, donde la letra i hace referencia a un número infinitamente grande:

...Sustituyendo tenemos

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

y

$$\operatorname{sen} v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$$

En el capítulo anterior vimos que

$$\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$$

e representa la base de los logaritmos hiperbólicos; expresando para z primero $+v\sqrt{-1}$*, y después* $-v\sqrt{-1}$*, tendremos:*

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

y

$$\operatorname{sen} v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

De estos se deducen como se reducen al seno y coseno de arcos reales las expresiones exponenciales imaginarias. Para ello

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \operatorname{sen} v$$
$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1} \operatorname{sen} v$$

Si en la fórmula para $e^{+v\sqrt{-1}}$ se sustituye v por π, entonces resulta la famosa fórmula $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$, que indica la "extraña" relación entre π y e. Euler estableció esta relación en forma logarítmica y generalizada en su obra *De la Controverse entre Mrs.Leibnitz* & *Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires*, Real Academia de Historia de las Ciencias y Bellas Artes, 1749, Berlin 1751, donde en la página 168 hace referencia a:

...esta fórmula $\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\operatorname{sen}\varphi$, *cuyos logaritmos están incluidos en la siguiente fórmula general*

$$\ln(\cos\varphi + \sqrt{-1}\cdot\operatorname{sen}\varphi) = (\varphi + p\pi)\sqrt{-1},$$

donde p indica cualquier número entero par, o positivo o negativo o incluso cero. De esto deducimos...

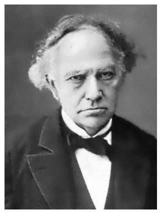
$$\ln -1 = (1+p)\pi\sqrt{-1} = q\pi\sqrt{-1},$$

considerando q cualquier número entero impar. Por lo tanto se puede tener:

$$\ln -1 = \pm\pi\sqrt{-1};\ \pm 3\pi\sqrt{-1};\ \pm 5\pi\sqrt{-1};\ \pm 7\pi\sqrt{-1};\ \&c.$$

ISSN 2174-0410

2. Charles Hermite (1822-1901)



Charles Hermite

Tras la muerte de Cauchy, Charles Hermite se erigió en lider indiscutible de las matemáticas francesas. Recogió el testigo de Gauss y Cauchy sobre Aritmética y Análisis. Pudo adentrarse en los trabajos de Wierstrass y Riemman sobre Funciones Abelianas y en los de Kronecker y Smith acerca de las misteriosas relaciones que surgían entre la Teoría de Números y las funciones elípticas.

Siendo el sexto de siete hijos de Ferdinand y Madeleine Hermite, nació el 24 de Diciembre de 1822. Tenía antepasados tanto franceses como alemanes ya que el pequeño pueblo donde nació, Dieuze, en el distrito de Lorraine, fue una vez reclamado tanto por Francia como por Alemania. Sin embargo, el futuro matemático siempre se consideró así mismo como francés. Su padre, un hombre de fuertes inclinaciones hacia el arte que había estudiado ingeniería en sus tiempos de juventud, era un comerciante de ropas en Dieuze. Se trataba de un negocio de la familia de su mujer, a quien más tarde confiaría con el fin de dar rienda suelta y dedicarse por entero a sus inquietudes artísticas. En torno a 1829, trasladaron su negocio a la ciudad de Nancy.

Ni Ferdinand ni Madeleine mostraron nunca gran interés por la educación de sus hijos, quienes únicamente asistieron al Collège de Nancy. Sin embargo su hijo Charles continuó con sus estudios en Paris, primero en el Collège Henri IV, más tarde llamado Collège Napoleon, y después, en 1840/1, en el famoso Lycée Louis-le-Grand, donde recibió clases de Richard, el mismo instructor que había supervisado el trabajo de Galois tan sólo hacía quince años. Richard le llamó "un petit Lagrange" (un pequeño Lagrange), porque el joven Hermite pasaba la mayoría de su tiempo leyendo clásicos de Lagrange como *Traité sur la résolution des équiations numériques*. Ajeno a los estudios de Ruffini y Abel, intentó probar la imposibilidad de resolver ecuaciones de quinto grado por medio de radicales. Los dos primeros trabajos de investigación de Hermite, se publicaron en las *Nouvelles annales de mathématiques*, siendo aún estudiante.

En 1842, Hermite fue admitido en el prestigiosísimo École Polytechnique, ocupando un modesto puesto 68 en los exámenes de acceso debido a su dificultad con la geometría. Tras su primer año se le retiró el permiso para seguir allí, ya que se le diagnosticó un defecto congénito en su pie derecho, lo que significó que necesitara de un bastón para poder caminar. Debido a la intervención de gente influyente, la decisión pudo ser desestimada pero bajo unas condiciones que Hermite consideró inaceptables. Como resultado, pasó del École Polytechnique a conformarse con uno de los Ecoles d'Applications para realizar una carrera académica, realizando los exámenes de acceso en 1847. A lo largo de su carrera, Hermite adquirió cierta animadversión por los exámenes, por lo que desde el punto de vista pedagógico prefería utilizar vías alternativas a la de los exámenes finales.

Fue su trabajo sobre funciones elípticas lo que le sirvió para ser considerado como un experto en análisis. Tendría poco más de treinta años cuando Jacobi había comenzado a investigar las funciones inversas obtenidas de las integrales hiperelípticas, cuyas propiedades esenciales eran aún desconocidas. Entre

ISSN 2174-0410

otros logros, Hermite generalizó el Teorema de Abel sobre la división del argumento de las funciones elípticas al caso de las hiperelípticas. A comienzos de 1843 Hermite escribió a Jacobi sobre lo que había estudiado, lo que impresionó gratamente a este último. Jacobi le contestó:

> *No ceje en su empeño, Señor, si alguno de sus descubrimientos coincide con antiguos resultados mios. Como usted debe comenzar donde yo terminé, habrá irremediablemente ciertas coincidencias. En el futuro, si me hace el honor de comunicarme sus progresos, sólo me quedará aprender de ellos.*

De este modo Hermite comenzó a enviar periódicamente sus resultados, publicándolos a menudo en el *Crelle's Journal* entre otras publicaciones. Cuando finalmente retomó la teoría de funciones elípticas tras un periodo en el que había tratado con mayor afinidad la teoría de números, consiguió llegar con exito a una síntesis de las teorías de Abel y Jacobi en su "magnun opus"[1], *Sur quelques applications des functions elliptiques*[2], la cual hizo su aparición en 1877. Poco después de 1880 comenzó a dar clases sobre los estudios de Weierstrass, y podría decirse que este hecho hizo calar en él las ideas del gran berlinés. Los libros de texto que Hermite escribió durante esta época fueron ampliamente utilizados y apreciados.

En 1848 Hermite llegó a ser tutor orientador y examinador de admisiones en el École Polytechnique. Dos años más tarde sería elegido miembro de la Academia de Paris. En 1862 promocionó al puesto de profesor, y a examinador de graduación el siguiente año. En 1869 llegó a ser profesor de análisis en el École Polytechnique, combinando este puesto con el mismo en la Sorbona. La siguiente cita de Haddamard ofrece una idea del trabajo de Hermite como profesor:

> *No considero que aquellos que nunca le escucharan puedan darse cuenta de cuan magnífica fue la enseñanza de Hermite, rebosante de entusiasmo por la ciencia, que parecía tomar vida en su voz y cuya belleza nunca dejó de comunicarnos, ya que así lo sentía en lo más hondo de su ser.*

Aunque tan sólo después de siete años dejó su puesto en el École Polytechnique en 1876, continuó en la Sorbona durante otros veintiun años.

Bajo la influencia de Cauchy, Hermite se convirtió en un devoto católico tras haber haber enfermado de viruela en 1856. Su filosofía matemática fue influenciada por el idealismo platónico. Consideraba que los matemáticos nunca inventan nada pero que a veces se les concede la virtud de descubrir la armonía del mundo matemático que existe independientemente de la razón humana. Hadamard en sus recuerdos de antiguas conferencias impartidas por Hermite decía:

> *Cuando era un joven estudiante, alguna feliz circunstancia me permitía visitar al maestro de forma asidua durante algunos minutos. Al*

[1] Del latín "magnun opus" u "opus magnun"; *Gran obra*.
[2] *Sobre varias aplicaciones de funciones elípticas*.

> *momento, causaba una profunda impresión en nosotros, no sólo con sus métodos, sino con su entusiasmo y amor por la ciencia. En nuestras breves pero productivas conversaciones, a Hermite le gustaba dirijirse a mi diciendo "El que se desvía del camino de la Providencia se bloquea". Estas eran las palabras de un hombre profundamente religioso. Pero un ateo como yo le comprendía perfectamente, especialmente cuando en otras ocaciones añadía "En matemáticas nuestro papel es mas de sirvientes que de maestros".*

La vida familiar de Hermite refleja su posición de privilegio dentro del mundo matemático francés. Su mujer era hermana del matemático Joseph Bertrand, y una de sus hijas se casó con Emile Picard, quien se encargó de recopilar y publicar sus obras tras su muerte. Durante su época en el École Polytechnique, Hermite dedicó un gran esfuerzo a trabajar con los estudiantes a todos los niveles. En contraste con Weierstrass, le daba un gran valor a la intuición y no consideraba necesario utilizar demasiado rigor en la enseñanza de materias elementales.

En investigación, Hermite llevó a cabo formidables progresos en análisis, lo que le convirtió en especialista en la materia. Como ejemplo, la solución de la ecuación general cuadrática había sido conocida desde tiempos inmemoriables. Las soluciones de las ecuaciones cúbicas y cuárticas en términos similares a la anterior habían sido elaboradas durante el Renacimiento italiano. Cuando Galois demostró la imposibilidad de resolver mediante métodos algebraicos comunes la ecuación general de quinto grado (o quíntica), este hecho pareció dejar por zanjado el asunto. Sin embargo, Hermite demostró que la ecuación general quíntica, podía ser resuelta mediante el uso de funciones modulares elípticas.

Pero el resultado por el que Hermite es más conocido, es la demostración de la trascendencia del número e (considerado éste último como base de los logaritmos naturales) o lo que es lo mismo, la imposibilidad de que resulte ser la raíz de una ecuación polinomial con coeficientes enteros. Los Números Trascendentales habían sido estudiados ya por Lioville, quien había demostrado que tales números existían, además de demostrar que e no podía resultar ser la raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes racionales, pero hasta Hermite, no se había demostrado que ninguna de las constantes aparecidas de forma natural resultara ser trascendental. De hecho el método usado por Hermite en el caso de e publicado en 1873 sirvió unos años después (en 1882) mediante ciertas adaptaciones a Carl Louis Ferdinan von Lindemann, un matemático menor si lo comparamos con Hermite, para demostrar la trascendencia de π. Este hecho fue sin duda alguna la única ocasión en que las ideas de Hermite fueron desarrolladas por otros.

Hermite fue galardonado en gran cantidad de ocasiones con honores académicos tanto en Francia, convirtiéndose en Gran Oficial de la Legión de Honor, como en el extranjero, llegando a serle otorgado por ejemplo la Gran Cruz de la Estrella Polar de Suecia. A los setenta años, gozaba de admiración por toda Europa, reflejada en su reputación, no sólo como el más longevo de los matemáticos franceses, sino también por su costumbre de mantener una vasta red de correspondencia con los líderes matemáticos de su época. En investigación sus intereses fueron amplios. Fue fundamentalmente un estudioso del álgebra y el análisis más que de la geometría, aunque por ejemplo le encantaba la geometría de números de Minkowski. Sin embargo, al igual que el matemático británico Sylvester, con el que compartía correspondencia más asiduamente, nunca asimiló completamente la profundidad de ideas desarrolladas en la Alemania del siglo XIX, nación abanderada de la geometría durante este siglo. Hermite murió el 14 de Enero de 1901, a la edad de setenta y ocho años.

Muchos de los principales matemáticos franceses de finales del siglo XIX recibieron clases de Hermite. Entre ellos puede destacarse Appel, Borel, Darboux, Hadamard, Jordan, Painlevé, y Poincaré.

3. Introducción a la demostración

La investigación que Hermite llevó a cabo para probar la trascendencia de e se desarrolló en una memoria de no más de una treintena de páginas. Esta memoria puede ser dividida fundamentalmente en tres partes. En las dos primeras partes, se muestran dos demostraciones de la trascendencia de e, aunque Hermite admite que la segunda es la más rigurosa de las dos. En la tercera, Hermite obtiene aplicando el método sugerido en la segunda demostración, las siguientes aproximaciones para e y e^2:[3]

$$e = \frac{58291}{21444}; \quad e^2 = \frac{158452}{21444}$$

La traducción que aquí se presenta, muestra aún con alguna omisión, la parte referida anteriormente como la segunda de la memoria. Desde el momento que la demostración apareció publicada por primera vez, se han realizado muchas simplificaciones, por lo que ahora uno raramente, si no es nunca, puede valorar la existencia e importancia de esta demostración. Sin embargo, el llamado *Teorema de Hermite* es aún asociado al hecho de que e es un número trascendental.

La siguiente sección pretende mostrar una traducción lo más fiel posible de la investigación realizada por Hermite con su puño y letra.

4. El Teorema de Hermite y la trascendencia de e

... Pero, como un caso más general, tomamos

$$F(z) = (z - z_0)^{\mu_0}(z - z_1)^{\mu_1} \cdots (z - z_n)^{\mu_n}$$

para cualquier valor entero cualquiera que sean los exponentes, integrando ambos miembros de la identidad

$$\frac{d\,[e^{-z}F(z)]}{dz} = e^{-z}[F'(z) - F(z)],$$

[3]La fracción da el valor de $e = 2,718289$, siendo la cifra de seis decimales correcta $e = 2,718282$. La corrección del error numérico fué puntualizado por Picard, en su publicación *Oeuvres de Charles Hermite* donde aumenta la precisión de esta aproximación.

ISSN 2174-0410

se obtiene

$$e^{-z}F(z) = \int e^{-z}F'(z)\,dz - \int e^{-z}F(z)\,dz,$$

de la cual resulta que[4]

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} e^{-z}F'(z)\,dz$$

Ahora la fórmula

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\mu_0}{z-z_0} + \frac{\mu_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{\mu_n}{z-z_n}$$

lleva a la siguiente descomposición,

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = \mu_0 \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_0}dz + \mu_1 \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_1}dz + \cdots$$

$$\cdots + \mu_m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_n}dz, \ldots$$

...Demostraremos que es siempre posible determinar dos integrales polinómicas de grado n, $\theta(z)$ y $\theta_1(z)$, tales que representando una de las raíces $z_0, z_1, \ldots, z_n$ por la letra ζ, se llega a la siguiente relación[5]:

$$\int \frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz = \int \frac{e^{-z}F(z)\theta_1(z)}{f(z)}dz - e^{-z}F(z)\theta(z)$$

...E incluso, si se expresa $\theta(z,\zeta)$ en lugar de $\theta(z)$, para enfatizar la presencia de ζ, tenemos[6]

$$\theta(z,\zeta) = z^n + \theta_1(\zeta)z^{n-2} + \theta_2(\zeta)z^{n-3} + \ldots + \theta_n(\zeta)$$

De esto se deduce, para el polinomio $\theta_1(z)$, la fórmula

$$\frac{\theta_1(z)}{f(z)} = \frac{\mu_0\theta(z_0,\zeta)}{z-z_0} + \frac{\mu_1\theta(z_1,\zeta)}{z-z_1} + \cdots + \frac{\mu_n\theta(z_n,\zeta)}{z-z_n}.$$

...Es suficiente considerar las integrales entre los límites z_0 y Z en la relación

$$\int \frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz = \int \frac{e^{-z}F(z)\theta_1(z)}{f(z)}dz - e^{-z}F(z)\theta(z),$$

[4]Donde Z representa cualquiera de las raíces $z_0, z_1, \cdots, z_n$

[5]$f(z) = (Z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_n)$. La demostración de esta afirmación se hace en en detalle en el texto de Hermite pero aquí está omitida

[6]Se demuestra en el texto que $\theta_i(\zeta)$ es un polinomio de grado i en ζ, teniendo por funciones integrales con coeficientes las raíces $z_0, z_1, \ldots, z_n$.
$\theta_i(\zeta)$ para $i = 1$ no debe confundirse con $\theta_1(z)$, mencionado en el texto en relación con $\theta(z)$.

y por lo tanto obtener la ecuación

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}dz &= \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)\theta_1(z)}{f(z)}dz \\
&= \mu_0\theta(z_0,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_0}dz \\
&+ \mu_1\theta(z_1,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_1}dz \\
&+ \cdots \\
&+ \mu_n\theta(z_n,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)}{z-z_n}dz.
\end{aligned}$$

Usamos esta ecuación en particular en el caso

$$\mu_0 = \mu_1 = \cdots = \mu_n = m;$$

en este caso si se expresa

$$m\theta(z_i, z_k) = (ik)$$

y se considera ζ sucesivamente igual a $z_0, z_1, \cdots, z_n$, y las anteriores expresiones se convierten evidentemente en

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^{m+1}(z)}{z-z_i}dz &= (i0)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_0}dz \\
&= (i1)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_1}dz \\
&+ \ldots \\
&+ (in)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f^{m}(z)}{z-z_n}dz.
\end{aligned}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Pero para el caso general, debemos demostrar aún el siguiente teorema.

Sean Δ y δ los determinantes

$$\begin{vmatrix}
\theta(z_0,z_0) & \theta(z_1,z_0) & \cdots & \theta(z_n,z_0) \\
\theta(z_0,z_1) & \theta(z_1,z_1) & \cdots & \theta(z_n,z_1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\theta(z_0,z_n) & \theta(z_1,z_n) & \cdots & \theta(z_n,z_n)
\end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\
{z_0}^2 & {z_1}^2 & \cdots & {z_n}^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
{z_0}^n & {z_1}^n & \cdots & {z_n}^n
\end{vmatrix};$$

entonces [7] $\Delta = \delta^2$

[7] Una demostración simple y corta de esta afirmación se presenta en el texto.

ISSN 2174-0410

Consideremos ahora

$$\varepsilon_m = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots m} \int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\, dz,$$

$$\varepsilon_m^i = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots m-1} \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_i}\, dz,$$

la relación demostrada anteriormente

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\, dz = m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0}\, dz + m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1}\, dz + \ldots$$

$$\ldots + m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n}\, dz$$

se transforma de forma simple en

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^1 + \ldots + \varepsilon_m^n,$$

y la relación

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^{m+1}(z)}{z - \zeta} dz &= m(z_0, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0} dz \\
&= m(z_1, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1} dz \\
&+ \ldots \\
&+ m(z_n, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n} dz
\end{aligned}$$

considerando ζ igual sucesivamente a $z_0, z_1, \ldots, z_n$, nos da la siguiente expresión, que representaremos por S_m, a saber

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{m+1}^0 &= \theta(z_0, z_0)\varepsilon_m^0 + \theta(z_1, z_0)\varepsilon_m^1 + \ldots + \theta(z_n, z_0)\varepsilon_m^n, \\
\varepsilon_{m+1}^1 &= \theta(z_0, z_1)\varepsilon_m^0 + \theta(z_1, z_1)\varepsilon_m^1 + \ldots + \theta(z_n, z_1)\varepsilon_m^n, \\
&\cdots \\
\varepsilon_{m+1}^n &= \theta(z_0, z_n)\varepsilon_m^0 + \theta(z_1, z_n)\varepsilon_m^1 + \ldots + \theta(z_n, z_n)\varepsilon_m^n.
\end{aligned}$$

Si ahora, se construye a su vez $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$, se determina a partir de estas, expresiones para $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \ldots, \varepsilon_m^n$ en términos de $\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_1^n$ lo que expresaremos como sigue.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_m^0 &= A_0\varepsilon_1^0 + A_1\varepsilon_1^1 + \ldots + A_n\varepsilon_1^n, \\
\varepsilon_m^1 &= B_0\varepsilon_1^0 + B_1\varepsilon_1^1 + \ldots + B_n\varepsilon_1^n, \\
&\cdots \\
\varepsilon_m^n &= L_0\varepsilon_1^0 + L_1\varepsilon_1^1 + \ldots + L_n\varepsilon_1^n,
\end{aligned}$$

y el determinante de esta nueva sustitución, siendo igual al producto de determinantes de las sustituciones parciales, será $\delta^{2(m-1)}$. Esto nos lleva a reemplazar $\varepsilon_1^0\varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_1^n$, por sus valores lo que nos dará expresiones para las cantidades ε_m^i adecuadas a nuestro propósito. Estos valores son fácilmente obtenidos como se verá.

Para este propósito, aplicamos la fórmula general

$$\int e^{-z}F(z)\,dz = -e^{-z}\gamma(z),$$

tomando

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-\zeta}$$

que resulta

$$\begin{array}{rcccc|ccc|ccc} F(z) & = & z^n & + & \zeta & z^{n-1} & + & \zeta^2 & z^{n-2} & + & \ldots \\ & & & + & p_1 & & + & p_1\zeta & & & \\ & & & & & & & p_2 & & & \end{array}$$

Se puede ver fácilmente que $\gamma(z)$ será una expresión integral de z y ζ, totalmente similar a $\theta(z,\zeta)$, tal que si se representa por $\Phi(z,\zeta)$ se tiene

$$\Phi(z,\zeta) = z^n + \varphi_1(\zeta)z^{n-1} + \varphi_2(\zeta)z^{n-2} + \ldots + \varphi_n(\zeta),$$

donde $\varphi_i(\zeta)$ es un polinomio en ζ de grado i, en el que el coeficiente de ζ^i es la unidad... y en analogía a la forma $\theta(z,\zeta)$, demuestra que el determinante

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0,z_0) & \Phi(z_1,z_0) & \cdots & \Phi(z_n,z_0) \\ \Phi(z_0,z_1) & \Phi(z_1,z_1) & \cdots & \Phi(z_n,z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi(z_0,z_n) & \Phi(z_1,z_n) & \cdots & \Phi(z_n,z_n) \end{vmatrix}$$

también es igual a δ^2. Por consiguiente, concluimos de la expresión

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}f(z)}{z-\zeta}\,dz = e^{z_0\Phi(z_0,\zeta)} - e^{-Z\Phi(Z,\zeta)},$$

considerando $\zeta = z_i$, el valor deseado

$$\varepsilon_1^i = e^{z_0\Phi(z_0,z_i)} - e^{-Z\Phi(Z,z_i)}.$$

Consecuentemente tenemos las expresiones dadas para ε_m^i.

Sean

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= A_0\Phi(Z,z_0) + A_1\Phi(Z,z_1) + \ldots + A_n\Phi(Z,z_n), \\ \mathfrak{B} &= B_0\Phi(Z,z_0) + B_1\Phi(Z,z_1) + \ldots + B_n\Phi(Z,z_n), \\ &\cdots \\ \mathfrak{L} &= L_0\Phi(Z,z_0) + L_1\Phi(Z,z_1) + \ldots + L_n\Phi(Z,z_n), \end{aligned}$$

y sean $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{L}_0$ los valores obtenidos para $Z = z_0$; se obtiene

$$\varepsilon_m^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{-Z}\mathfrak{A}$$

$$\varepsilon_m^1 = e^{-z_0}\mathfrak{B}_0 - e^{-Z}\mathfrak{B}$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon_m^n = e^{-z_0}\mathfrak{L}_0 - e^{-Z}\mathfrak{L}.$$

En estas fórmulas, Z representa cualquiera de las cantidades $z_0, z_1, \ldots, z_n$, ahora si se desea afirmar el resultado para $Z = z_k$, se expresará por un lado por $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k, \ldots, \mathfrak{L}_k$, y por otro lado por $\eta_k^0, \eta_k^1, \ldots, \eta_k^n$, los valores que asumen estos en este caso para los coeficientes $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{L}$, y las cantidades $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \ldots, \varepsilon_m^n$. De este modo se obtienen las ecuaciones

$$\eta_k^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{z_k}\mathfrak{A}_k$$

$$\eta_k^1 = e^{-z_0}\mathfrak{B}_0 - e^{z_k}\mathfrak{B}_k$$

$$\ldots$$

$$\eta_k^n = e^{-z_0}\mathfrak{L}_0 - e^{z_k}\mathfrak{L}_k$$

lo que nos lleva a la segunda demostración ya mencionada de la imposibilidad de tener una expresión de la forma

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_1}N_1 + \ldots + e^{z_n}N_n = 0,$$

donde tanto los exponentes $z_0, z_1, \ldots, z_n$, como los coeficientes $N_0, N_1, \ldots, N_n$ son considerados números enteros.

Obsérvese en primer lugar, que ε_m^i puede llegar a ser más pequeño que cualquier cantidad dada para un valor suficientemente grande de m. Para la exponencial e^{-z} esta será siempre positiva, resultando como se sabe,

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = F(\xi)\int_{z_0}^{Z} e^{-z}\,dz = F(\xi)(e^{z_0} - e^{Z}),$$

siendo $F(z)$ cualquier función, y ξ una cantidad tomada entre z_0 y Z, límites estos de la integral. Tomando ahora

$$F(z) = \frac{f^m(z)}{z - Z_i},$$

se obtiene la expresión

$$\varepsilon_m^i = \frac{f^{m-1}(\xi)}{1 \cdot 2 \cdots m-1}\,\frac{f(\xi)}{\xi - z_i}(e^{-z_0} - e^{-Z}),$$

lo que demuestra la propiedad antes mencionada. Ahora, se obtiene de las ecuaciones

$$\eta_1^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{z_1}\mathfrak{A}_1,$$

$$\eta_2^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{z_2}\mathfrak{A}_2,$$

ISSN 2174-0410

$$\dots$$
$$\eta_n^0 = e^{-z_0}\mathfrak{A}_0 - e^{z_n}\mathfrak{A}_n,$$

la siguiente relación

$$e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \dots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n =$$
$$= e^{-z_0}(e^{z_1}N_1 + e^{z_2}N_2 + \dots + e^{z_n}N_n) - (\mathfrak{A}_1 N_1 + \mathfrak{A}_2 N_2 + \dots + \mathfrak{A}_n N_n).$$

Si se sustituye la condición

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_1}N_1 + \dots + e^{z_n}N_n = 0$$

en la anterior expresión, se llega a

$$e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \dots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n = -(\mathfrak{A}_0 N_0 + \mathfrak{A}_1 N_1 + \dots + \mathfrak{A}_n N_n).$$

Sin embargo, se asume que $z_0, z_1, \dots, z_n$ son enteros, al igual que las cantidades $\theta(z_i, z_k)$, $\Phi(z_i, z_k)$ y consecuentemente también $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$. Entonces tenemos un número

$$\mathfrak{A}_0 N_0 + \mathfrak{A}_1 N_1 + \dots + \mathfrak{A}_n N_n,$$

que disminuye indefinidamente con $\eta_1^0, \eta_1^1, \dots, \eta_1^n$ cuando m decrece; a esto se le añade que para cierto valor de m y para todos los valores mayores,

$$\mathfrak{A}_0 N_0 + \mathfrak{A}_1 N_1 + \dots + \mathfrak{A}_n N_n = 0,$$

y como de igual manera se obtienen las expresiones

$$\mathfrak{B}_0 N_0 + \mathfrak{B}_1 N_1 + \dots + \mathfrak{B}_n N_n = 0,$$
$$\dots$$
$$\mathfrak{L}_0 N_0 + \mathfrak{L}_1 N_1 + \dots + \mathfrak{L}_n N_n = 0.$$

la relación

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_1}N_1 + \dots + e^{z_n}N_n = 0$$

establece que el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{A}_1 & \cdots & \mathfrak{A}_n \\ \mathfrak{B}_0 & \mathfrak{B}_1 & \cdots & \mathfrak{B}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{L}_0 & \mathfrak{L}_1 & \cdots & \mathfrak{L}_n \end{vmatrix}$$

será igual a cero. Pero, debido a las expresiones de $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{L}_0$,resulta que Δ es el producto de estos dos otros determinantes

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_0 & L_1 & \cdots & L_n \end{vmatrix}$$

y

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \cdots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \cdots & \Phi(z_n, z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \cdots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

de los cuales el primero vale $\delta^{2(m-1)}$, y el segundo δ^2. Resulta entonces $\Delta = \delta^{2m}$, y se muestra de forma sencilla de manera rigurosa que la relación asumida es imposible[8], y por lo tanto, el número e no puede ser un número irracional algebraico.

Referencias

[1] BECKMANN, Petr. *A History of π*, pp. 148-157, St. Martin's Press, New York, 1971.

[2] JAMES, Ioan. *Remarkable Mathematicians*, pp. 173-177, Cambridge University Press, The Mathematical Association of America, Cambridge, 2002.

[3] KATZ, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd. Ed., pág. 664, Adisson Wessley Educational Publishers, Inc., USA, 1998.

[4] SMITH, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*, pp. 95-106, McGraw-Hill Book Company,Inc., New York, 1929.

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.

[8]Se puede demostrar que

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_0^n & z_1^n & \cdots & z_n^n \end{vmatrix} = \pm(z_n - z_{n-1})(z_n - z_{n-2})\cdots(z_n - z_0)(z_{n-1} - z_{n-2})\cdots(z_1 - z_0)$$

y por lo tanto δ es distinto de cero, asumiendo, como de hecho se hace, que los exponentes $z_0, z_1, \ldots, z_n$ son distintos.