Historias de Matemáticas
Aproximación del diseño arquitectónico a la fractalidad

Juana María Sánchez González

Ascensión Moratalla de la Hoz

Agripina Sanz Pérez

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático

ISSN 2174-0410

12 de abril de 2011

Resumen

En el último siglo los avances de la Matemática han sido espectaculares. Nuevas aplicaciones y nuevas necesidades han demandado "nuevas matemáticas" y la necesidad de dar respuesta a esas demandas han propiciado nuevos descubrimientos como los objetos fractales. Por otro lado, el gran desarrollo producido en los medios informáticos ha potenciado su utilización en diversas ramas del arte y la técnica en general.

Palabras Clave: Geometría, informática, objeto fractal, arte, arquitectura.

1. Introducción

La reciente aparición de las geometrías no-euclidianas, entre las que se encuentra la Geometría Fractal, está influyendo de un modo u otro en muchas disciplinas y la Arquitectura, como la Pintura, la Escultura, el Urbanismo y muchas otras, no podía quedar fuera de esa influencia.

El origen de la Geometría Fractal puede encontrarse en el estudio de una serie de conjuntos irregulares que surgieron a finales del siglo XIX y comienzos del XX con unas propiedades geométricas ajenas y distintas a las encontradas hasta entonces en otros conjuntos. Esas formas extrañas tenían como único propósito poner de manifiesto las limitaciones del análisis clásico. La reacción de las matemáticas tradicionales fue la de calificarlos de patológicos, de monstruos. Su característica común podría establecerse como la capacidad de, mediante una acción sencilla y repetitiva, poder dar lugar a objetos complejos y difíciles de medir con los métodos establecidos hasta ese momento.

Si bien los primeros conjuntos que plantearon el problema, los de Cantor, Sierpinski, la curva de Koch[1], de Peano... fueron los que despertaron la curiosidad por esta disciplina, su presentación en sociedad se hace de la mano de Benoit Mandelbrot[2] quien, desde su puesto de investigador de IBM en Nueva York, se da cuenta de que esa curvas, llamadas por algunos monstruosas, son la clave para una teoría muy general de las irregularidades de la Naturaleza.

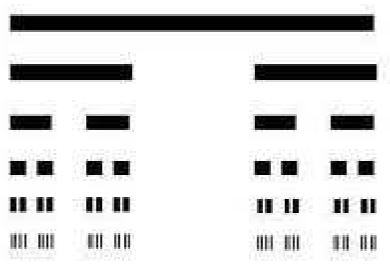

Figura 1. Generación del Conjunto de Cantor

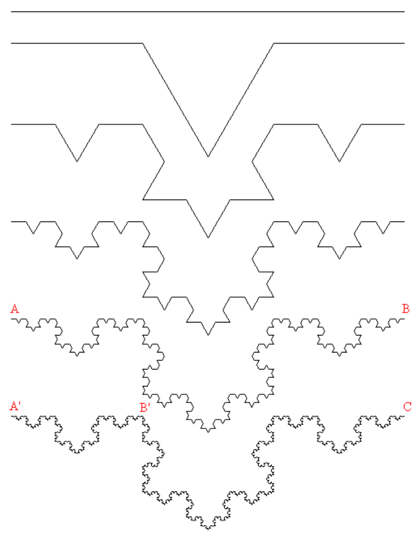

Figura 2. Generación de la Curva de Koch

[1] La curva la inventa el matemático sueco en 1906. El autor de la imagen es M. Romero Schmitke.

[2] Benoit Mandelbrot investigador de IBM en el Centro de Investigación Thomas J. Watson. Ingeniero y Matemático dictó conferencias, entre otros centros, en el Collège de France. La recopilación de esas lecciones dieron lugar a la publicación de su libro *La geometría fractal de la naturaleza*. Dicha obra se considera el texto más importante sobre geometría fractal.

A finales de los "70" y, como resultado de las lecciones que imparte desde 1973 en el Collège de France, escribe sobre la universalidad de esa geometría pasando, unos años más tarde, a dar una definición de conjunto fractal capaz de acoger a los descubiertos hasta entonces y a muchos de los que pudiesen aparecer en el futuro. Para él un fractal es, fundamentalmente, **"**un conjunto en que las partes son similares al total, en algún sentido**".** Con esa afirmación incluye como objetos fractales no sólo a los conjuntos mecánicamente obtenidos por sus antecesores, sino a muchas imágenes naturales, repetitivas y autosemejantes, fáciles de observar en nuestro entorno más cotidiano.

Figura 3. Imagen del Coto de Doñana

2. Antecedentes

La Geometría Fractal nace, como otras geometrías en otros momentos de la historia, de un intento de entender, describir y medir la Naturaleza. Una Naturaleza que no es extraña ni rara, es, sencillamente, irregular. Y esa irregularidad exige una forma de representación y de medida que ahora, con los medios informáticos y tecnológicos con los que se cuenta, puede acercarse más a la realidad. La Geometría Fractal puede, hoy, describir mejor el mundo que la Geometría Euclidiana y esa es la gran ventaja que aporta al diseño de cualquier objeto.

No se puede ignorar que, cada vez con más frecuencia los algoritmos que se utilizan en informática para modelizar un diseño, derivan de las nuevas matemáticas. Pero lo normal es que esa matemática no se utilice como un componente más en el proceso de diseño. Que su misión se reduzca a facilitar y potenciar la visualización de un objeto, arquitectónico o no, que ha surgido de la imaginación del diseñador.

La Matemática en su larga y complicada historia, siempre se ha apoyado en dos pilares: la realidad que ha rodeado al hombre y su imaginación. Combinadas, sin que una pueda prescindir de la otra, la han llevado adelante. En sus comienzos, con aportaciones extraordinarias. Más adelante con momentos de actividad, que se desplazaban por el mundo conocido, mezclados con estancamientos de cientos de años, en función del auge o declive de determinadas culturas.

De esos avances la selección natural de los distintos modelos matemáticos que pudieron surgir, ha hecho que hayan llegado hasta nosotros principios potentes que con el transcurrir de los años han adquirido vida propia. No sabemos los que han podido quedarse por el camino.

3. Propiedades de un objeto fractal

Oficialmente un fractal es un conjunto que presenta alguna de las siguientes propiedades:

-Tiene los mismos detalles a todas las escalas de forma que, si lo ampliamos o reducimos la estructura que presente será parecida. Estaría formado por fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable, pero de aspecto similar. A esta propiedad responden, como se ha indicado anteriormente, tanto objetos comunes en la naturaleza como objetos artificiales construidos con un determinado fin como pueden ser las obras de Zvi Hecker[3] autor de una obra conocida por su énfasis en la geometría y su acentuada asimetría.

Figura 4 . Fractal natural.

[3] Zvi Hecker. Arquitecto polaco nacido en Israel, en 1931, donde tiene gran parte de su obra.

Figura 5. Conjunto de viviendas. Zvi Heckuer

-Es autosemejante, tienen la propiedad de parecerse a sí mismo, de contenerse a sí mismo.

La figura más aludida por los textos que tratan de objetos fractales al referirse a esta propiedad, es la de la espiral áurea. Una figura que se expande hasta el infinito repitiendo siempre un mismo patrón. Son numerosos los ejemplos que, en la Naturaleza y a todas las escalas, se pueden encontrar con este comportamiento y esa universalidad es también la que la ha hecho referencia de muchas obras de arte. Posiblemente las que mejor la representan sean las de Hannsjörg Voth[4] y especialmente su vivienda espiral, Goldene Spirale, en el desierto de Mara en Marruecos.

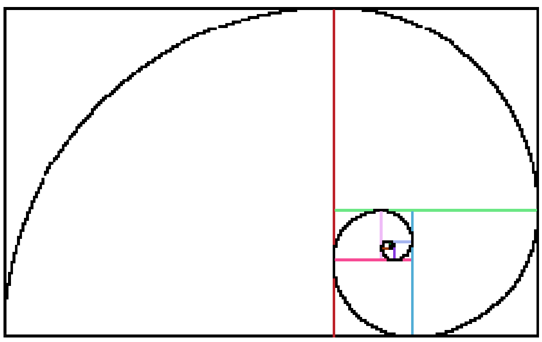

Figura 6. Espiral áurea

[4] Voth es un artista alemán nacido en 1940. En las últimas décadas ha llevado a cabo su obra en el desierto de Marruecos.

Figura 7. Goldene Spirale

-Tiene una definición algorítmica sencilla o lo que es lo mismo, tiene un resultado como consecuencia de un proceso simple que se repite un número muy alto de veces.

Esta característica la hace propicia para representar a objetos fractales obtenidos con la ayuda de ordenadores, ya que los avances informáticos han permitido desarrollar, con unos resultados plásticos espectaculares, obras imposibles de imaginar sin la asistencia de esos medios.

Son paradigmáticas, en este sentido, las clásicas imágenes del triángulo de Sierpinski o el cuadrado de Menger.

En ellas se han inspirado una gran cantidad de diseños de todo tipo y a todas las escalas.

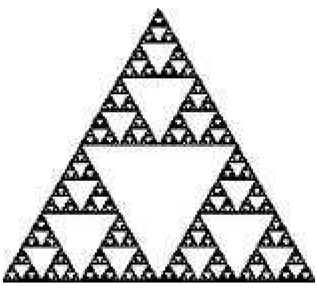

Figura 8. Triángulo de Sierpinski

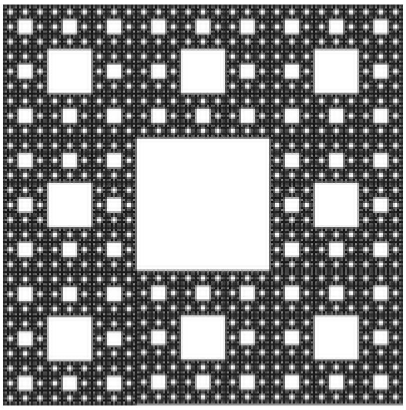

Figura 9. Cuadrado de Sierpinski- Menger

Con esta filosofía se pueden considerar llevadas a cabo obras plásticas como las de Escher[5] o bien de arquitectura como el Pabellón de Bruselas de Corrales y Molezún y las más recientes del anteriormente citado Zvi Hecker.

A Maurits C. Escher se le considera el padre de las "teselaciones" o divisiones regulares del plano, entendiendo por teselaciones la posibilidad de rellenar el plano con figuras que ni se superpongan ni dejen espacios vacíos. La genialidad del artista residía en su capacidad para explorar conceptos matemáticos como la lógica del espacio, las divisiones regulares del plano, las paradojas y las figuras imposibles.

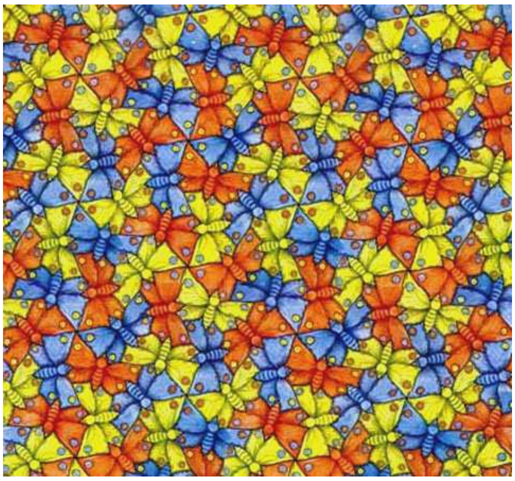

Figura 10. Escher

[5] Maurits C. Escher (1898-1972). Natural de Leeuwarden (Países Bajos)

Corrales y Molezún[6] fueron los arquitectos que ganaron el Concurso de Arquitectura convocado con el fin de diseñar el pabellón que representaría a España en la Exposición Universal que se celebraría en Bruselas en 1958.

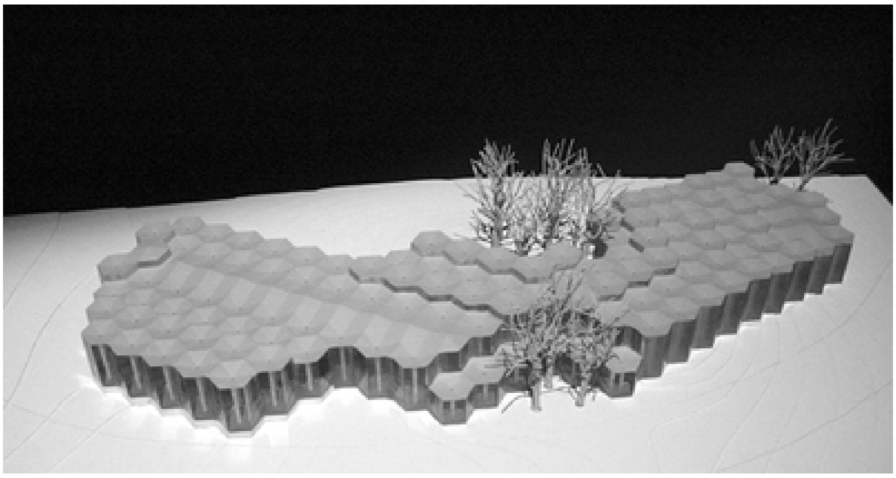

Figura 11. Maqueta del Pabellón de Bruselas

Figura 12. Interior del Pabellón de Bruselas

El edificio, considerado desde su nacimiento una obra maestra de la arquitectura, responde con un diseño en planta dibujado sobre una red de hexágonos que se multiplican, a diversas escalas, no sólo en el edificio

[6] Juan Antonio Corrales y Ramón Vázquez Molezún ganan el Concurso organizado por el Ministerio de Asuntos Exteriores Español y al que se presentan ocho propuestas.

propiamente dicho, sino en todos los elementos, incluso decorativos y de equipamiento, que componen toda la construcción. La obra, capaz de adaptarse a cualquier perímetro, hubiera podido extenderse hasta el infinito siempre igual y siempre distinta.

Jean Nouvel gana el concurso que se convoca en 1981 para llevar a cabo un centro dedicado a la cultura árabe en París.

El edificio, que se inaugura en 1987, tiene la particularidad de ofrecer al espectador fachadas, completamente distintas, aunque todas de traza ortogonal. Una de ellas, la sur, está compuesta por figuras geométricas que recuerdan los dibujos de las celosías tradicionales de los edificios árabes.

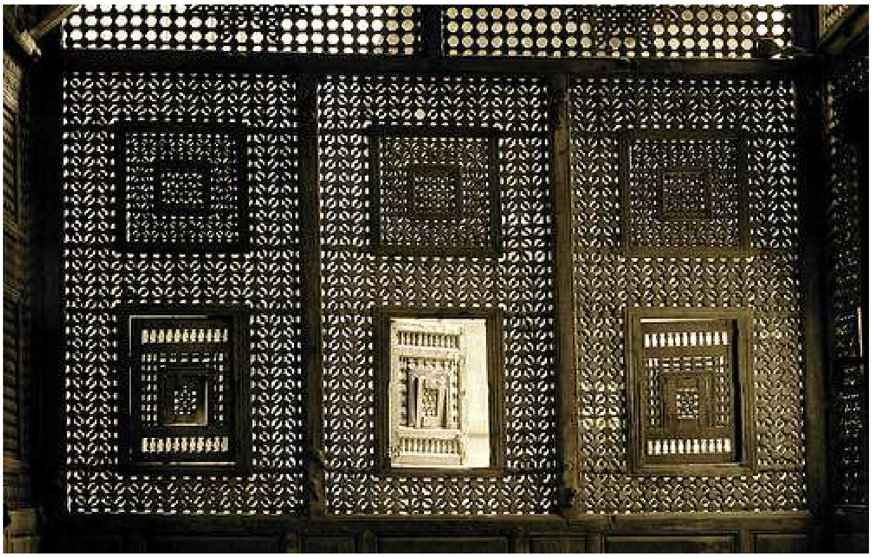

Figura 13. Interior del Instituto del Mundo Árabe.

-Tiene dimensión fractal mayor que su dimensión topológica.

A esta característica, menos comprensible que otras para las personas no iniciadas en las Matemáticas, se le dedica una atención especial aunque ciñéndonos a un ejemplo fácil de asimilar: La figura autosemejante del Triángulo de Sierpinski.

A esta propiedad, característica de todos los conjuntos fractales más tradicionales o más modernos, como la conocida Curva de Hilbert, podríamos asociar las obras del ya citado Hecker o las llevadas a cabo con anterioridad por el neerlandés Aldo van Eyck[7].

[7] Aldo van Eyck (1918-1999) tiene una producción constructiva en la que destacan sus obras dedicadas a la infancia. Sus parque infantiles han sido un

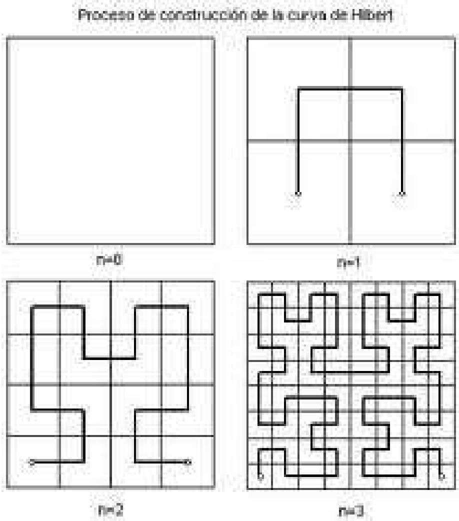

Figura 14. Curva de Hilbert

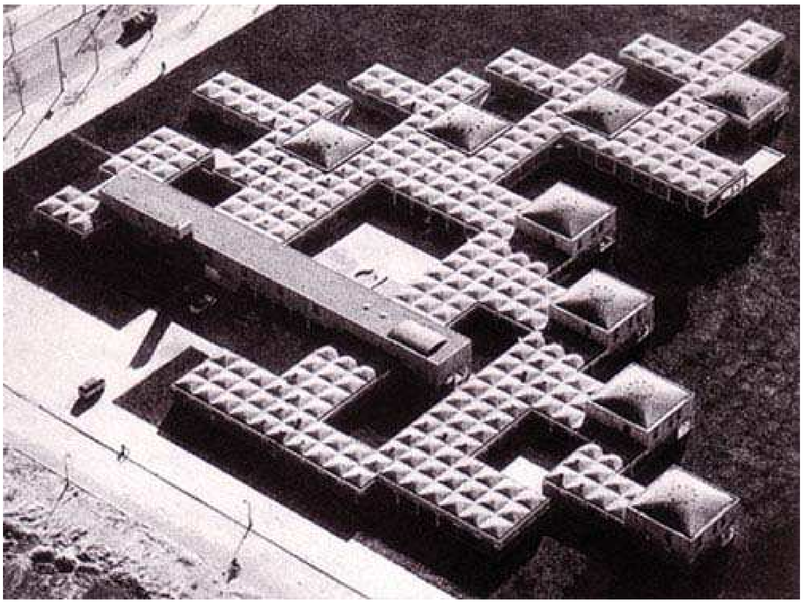

Figura 14. Orfanato municipal de Ámsterdam de A. van Eyck

modelo a seguir en épocas posteriores.

Figura 15. Zvi Hecker

El hecho de poder obtener a partir de estos conjuntos unas imágenes que, potenciadas con el uso del ordenador, ofrezcan resultados sorprendentes y de una gran plasticidad, ha hecho que se pongan de moda y que, concretamente en Arquitectura, se vengan "rastreando" obras en las que pueden reconocerse alguna de las propiedades de la nueva matemática, sin tener en cuenta si el autor de esas obras conocía con anterioridad y aplicaba conscientemente alguna de las propiedades que hacen a un objeto fractal.

4. Dimensión fractal

El Triángulo de Sierpinski es un conjunto fractal autosemejante que se puede generar por sucesivas homotecias.

Dichas homotecias pueden considerar como centro cualquiera de los vértices del triángulo equilátero de partida. Cada uno de los nuevos triángulos que se generen, tendrán un lado que mida la mitad del inicial

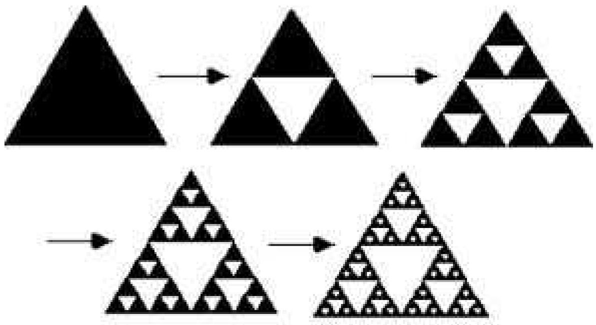

Figura 16. Generación sucesiva del Triángulo de Sierpinski

Si analizamos desde el punto de vista Euclídeo la figura, F, es decir, midiendo longitudes y áreas, obtenemos el siguiente resultado: si en el primer paso, del triángulo equilátero de partida se obtienen tres triángulos semejantes al primero y de lado la mitad del inicial; en el paso k-ésimo, F, tendrá 3^k triángulos, lo que nos permite obtener como expresión general del lado correspondiente a los triángulos que se van obteniendo en pasos sucesivos:

$$\text{Longitud del lado: } \left(\frac{1}{2}\right)^K$$

De forma análoga se puede escribir como expresión genérica para la altura correspondiente a los sucesivos triángulos obtenidos de las sucesivas homotecias:

$$\text{Longitud de la altura: } \left(\frac{1}{2}\right)^K \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Con estas condiciones:

Si definimos el área de F como la suma de las áreas de todos los triángulos que componen F, el conjunto tiene el área:

$$A(F) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^K \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^K 3^K$$

que es 0 cuando $K \to \infty$.

Si definimos la longitud de F como la suma de los perímetros de todos los triángulos que componen F, este conjunto tiene de longitud:

$$L\left(F\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{K}\ 3^{K}$$

que es infinita cuando $K \to \infty$

La consecuencia es, por lo tanto, que tenemos un conjunto de longitud infinita y área cero sobre un triángulo equilátero.

Este conjunto no se puede definir adecuadamente, en términos de dimensiones, con la geometría Euclídea. ¿Qué dimensión topológica tiene, pues, este conjunto?

Para dar respuesta a esta cuestión podemos recurrir a la definición de la llamada Dimensión de Hausdorff que nos permite determinar la dimensión de un conjunto cualquiera autosemejante en el plano.

Hausdorff nos dice que para un conjunto, F, autosemejante del plano, resultando F:

$$F = g_1(F) \cup \ldots \cup g_n(F)$$

con $g_1,\ldots,g_n$ semejanzas de razones $k_1,\ldots,k_n$ menores que 1, se define su dimensión fractal F como la solución de la ecuación

$$k_1^d + \ldots + k_n^d = 1$$

Si las razones de semejanza son todas iguales a k entonces la dimensión es :

$$d = -\frac{\log n}{\log k}$$

Analizando las semejanzas que dan lugar al triángulo de Sierpinski se ve que partiendo de un triángulo T_0 definimos homotecias de razón ½ con centro en cada uno de los vértices de T_0 y obtenemos tres triángulos semejantes al inicial que forman una figura que llamamos T_1.

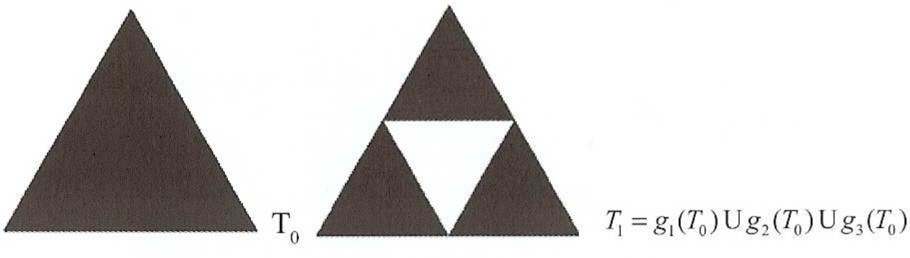

Figura 17. Aplicación de homotecia de k = 1/2

Para el caso del triángulo de Sierpinski, donde las semejanzas son tres homotecias de razón ½, la expresión correspondiente es:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D = 1$$

de donde se obtiene que : $3 = 2^D$
despejando D:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58496$$

4. Conclusiones

En el último siglo los avances de la Matemática han sido espectaculares. Nuevas aplicaciones han demandado nuevas matemáticas y las respuestas a esas demandas han generado nuevos descubrimientos como los objetos fractales. Su uso se ha universalizado. El diseño los ha hecho suyos no siempre con el debido rigor.

Pero lo cierto es que su inmediatez no permite analizarlos de forma objetiva. Falta perspectiva histórica. Aún está por ver cuáles de esos objetos y esos principios que hoy manejamos para diseñar sobrevivirán a sus semejantes. Pero eso ya es otra historia.

Referencias

[1] CÁNOVAS, Andrés y otros. *Pabellón de Bruselas ´58 Corrales y Molezún.*, Ministerio de la Vivienda y DPA. ETSAM, Madrid, 2004.

[2] EXPOSICIÓN, Catálogo de. *Jean Nouvel*, Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. Madrid, 2002.

[3] LOCHER, J. L. y otros. *La magia de M.C. Escher*, TASCHEN, Londres, 2000.

[4] MANDELBROT, Benoit. *Los Objetos Fractales*, Tusquets Editores, Barcelona, 2000.

[5] MORATALLA, A. y SANZ, A. *Actas de las II Jornadas de Experiencia de Innovación Docente*. UCAV, Ávila, 2009.

[6] SÁNCHEZ , J. *La Espiral en la Arquitectura: Espacios pictóricos y arquitectónicos.* Mairea Libros. Madrid, 2007.

[7] HISTORIA DE LA ARQUITECTURA. Página del Departamento. http://www.ETSAC.es

[8] ROMERO SCHMITKE, M. http://www.enciclopedia.us.es

Sobre las autoras:

Nombre: Juana María Sánchez González
Correo Electrónico: juanmaria.sanchez@upm.es
Institución: Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Ascensión Moratalla de la Hoz
Correo Electrónico: ascension.moratalla.delahoz@upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático Universidad Politécnica de Madrid, España.

Nombre: Agripina Sanz Pérez
Correo Electrónico: asanz@caminos.upm.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.