MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika *Volume 7 No. 3 Tahun 2019*
ISSN XXXX-XXXX

KODE SEMPURNA TOTAL DALAM GRAF SEDERHANA

Nurina Rahmatika Sari
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : nurinasari@mhs.unesa.ac.id

Dwi Juniati
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya
e-mail **:** dwi_juniati@yahoo.com

Abstrak

Misalkan G graf. Kode sempurna total dari graf G dinotasikan dengan $C'(G)$ adalah subhimpunan dari $V(G)$ sedemikian hingga setiap titik di G memiliki persekitaran tepat satu titik di $C'(G)$. Pada skripsi ini menyelidiki sifat-sifat kode sempurna total pada beberapa kelas penting graf, yaitu: lintasan, sikel, graf komplet, graf bipartit dan graf bintang. Pada penelitian ini, yang dibahas adalah kode sempurna total yang berfokus pada graf sederhana tidak berarah.
Kata kunci: Kode sempurna total, Graf sederhana, Persekitaran.

Abstract

Given a graph G, a code denoted by $C(G)$ is a subset of $V(G)$. A code $C'(G)$ is called a total perfect code in G if every vertex of G has exactly one neighbour in $C'(G)$. In this research we investigated some properties of total perfect codes in some important class of graphs: paths, cycles, complete graphs, bipartite graphs and star graphs. In this research, we study total perfect codes with focus on the simple, undirected graphs.
Keywords : Total perfect codes, Simple Graphs, Neighbour.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu bidang dalam ilmu matematika yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan yang berasal dari Swiss bernama Leonardo Euler. Meskipun teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah lama, namun sampai sekarang teori graf masih berkembang. Salah satu pembahasan dari teori graf adalah kode sempurna total.

Kode dari graf G dinotasikan dengan $C(G)$ adalah subhimpunan dari $V(G)$. Sebuah kode $C'(G)$ dikatakan kode sempurna total dalam graf G jika setiap titik di G memiliki persekitaran tepat satu titik di $C'^{(G)}$ yaitu $|N(v) \cap C'(G)| = 1, \forall\, v \in V(G)$.
Manfaat mempelajari definisi kode sempurna total yaitu kita dapat menyelidiki keberadaan kode sempurna total dalam beberapa kelas penting graf, yaitu: lintasan, sikel, graf komplet, graf bipartit dan graf bintang. Pada penelitian ini, yang dibahas adalah graf sederhana tidak berarah. Graf G dikatakan sederhana jika tidak mempunyai sisi rangkap atau gelung .

KAJIAN TEORI

Graf

Definisi 2.1 Graf G dinotasikan $G = (V(G), E(G))$ adalah pasangan terurut dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$, dengan elemen-elemennya yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan berhingga (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi (*edge*) sedemikian sehingga setiap elemen $E(G)$ merupakan pasangan berurutan titik-titik di $V(G)$.

(Budayasa,2007)

Tingkat dan Ukuran

Definisi 2.2 Jumlah titik di graf G disebut tingkat (*order)* dari graf G, dilambangkan $|G|$. Jumlah sisi di graf G disebut ukuran (*size)* dari graf G, dilambangkan $\|G\|$.

(Diestel, 2000)

Terhubung Langsung (*adjacent*)

Definisi 2.3 Misalkan v_1 dan v_2 dua titik di graf G. $\forall\, v_1, v_2 \in V(G)$ dan $e = \{v_1, v_2\}$ (sering ditulis $e = v_1v_2$) merupakan pasangan berurutan titik $v_1, v_2 \in V(G)$. Titik v_1 dan v_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*) di graf G.

(Budayasa, 2007)

Derajat Titik

Definisi 2.4 Derajat titik v pada graf G dilambangkan $d_G(v)$ atau $d(v)$, adalah banyak sisi G yang terkait dengan titik v (dengan catatan setiap gelung dihitung dua kali). (Budayasa, 2007)

Graf Sederhana

Definisi 2.5 Graf G dikatakan sederhana jika tidak mempunyai sisi rangkap atau gelung .

(Budayasa, 2007)

Jalan (*Walk*)

Definisi 2.6 Jalan (*Walk*) di graf G merupakan sebuah barisan berhingga (tak kosong) $W = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, e_k, v_k\}$ yang suku-sukunya bergantian titik dan sisi, sedemikian hingga v_{i-1} dan v_i adalah titik-titik akhir sisi e_i , untuk $1 \leq i \leq k$. Jalan dari titik v_1 ke titik v_k dinotasikan dengan $-(v_1, v_k)$. Titik v_1 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W . Sedangkan titik–titik $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ disebut titik-titik internal W.

(Budayasa, 2007)

Lintasan P_n

Definisi 2.7 Misalkan $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, e_k, v_k)$ sebuah jalan (*walk*) di graf *G*. Jika semua titik internal jalan P berbeda, maka P disebut lintasan. Lintasan dinotasikan dengan P_n dengan *n* merupakan banyak titik.

(Budayasa , 2007)

Sirkuit

Definisi 2.8 Misalkan $S = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \ldots, e_k, v_k)$ merupakan sebuah jejak. Jejak S disebut sirkuit (jejak tertutup), jika semua sisi berbeda dengan titik awal dan titik akhir sama.

(Budayasa, 2007)

Sikel C_n

Definisi 2.9 Sikel (*cycle*) adalah sebuah sirkuit $C = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \ldots, v_n, \; e_n, v_1)$ yang titik awal dan semua titik internalnya berbeda. Titik v_1 disebut titik awal C. Sedangkan titik–titik $v_2, v_3, \ldots, v_n$ disebut titik-titik internal C. Banyaknya sisi dalam suatu sikel disebut panjang sikel. Sikel dengan n jumlah titik disebut sikel-n, disimbolkan dengan C_n.

(Budayasa, 2007)

Graf Terhubung

Definisi 2.10 Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik berbeda di graf G terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut.

(Budayasa, 2007)

Penjodohan (*matching*)

Definisi 2.11 Sebuah penjodohan (*matching*) pada graf G dilambangkan dengan $M(G)$, adalah sebuah himpunan sisi-sisi G yang saling lepas (*independent*). Dua sisi dikatakan saling lepas jika kedua sisi tersebut tidak mempunyai titik akhir persekutuan. Jadi tidak ada sisi-sisi M yang mempunyai titik-titik ujung persekutuan. Penjodohan disebut trivial jika terdiri atas sebuah sisi tunggal.

(Budayasa, 2007)

Graf Komplet

Definisi 2.12 Graf komplet adalah graf sederhana dengan n titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi. Graf komplet dengan n titik dinotasikan dengan K_n.

(Budayasa , 2007)

Graf Bipartit

Definisi 2.13 Graf G disebut bipartit jika $V(\square G)$ dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan saling lepas A dan B sedemikian hingga setiap sisi $\square G$ menghubungkan sebuah titik di A dan sebuah titik di B. Kita sebut (A, B) bipartisi dari G.

(Budayasa, 2007)

Bipartit Komplet

Definisi 2.14 Misalkan G graf sederhana dan graf bipartit dengan bipartisi (A, B) sedemikian hingga setiap titik di A terhubung langsung dengan setiap titik di B oleh sisi $e \in E(G)$, maka graf G disebut graf bipartit komplet. Graf bipartit komplet dinotasikan dengan $K_{m,n}$, dengan $|A|= m$ dan $|B|= n$.

(Budayasa, 2007)

Graf Bintang $K_{1,n-1}$

Definisi 2.15 Graf bintang (*star*) $K_{1,n-1}$ merupakan suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat $n - 1$ yang disebut pusat dan titik lainnya berderajat satu.

(Rameez, 2018)

Subgraf dan Subgraf Perentang

Definisi 2.16 Graf H disebut subgraf dari graf G jika $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$. Subgraf H disebut perentang dari graf G jika $V(H) = V(G)$.

(Budayasa, 2007)

Subgraf Terinduksi

Definisi 2.17 Misalkan $V' \subset V(G)$. Subgraf dari graf G yang diinduksi (dibangun) oleh V', dilambangkan $G[V']$, adalah sebuah subgraf dari graf G yang himpunan titiknya adalah V' dan himpunan sisinya beranggotakan semua sisi G yang kedua titik akhir berada di V'.

(Budayasa, 2007)

PEMBAHASAN

Persekitaran Titik

Definisi 3.1 Persekitaran titik $v \in V(G)$ pada graf G dinotasikan dengan $N(v)$, didefinisikan sebagai $N(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$.

(Budayasa, 2007)

Kode Sempurna Total

Definisi 3.2 Misalkan G graf. Kode sempurna total dari graf G dinotasikan dengan $C'(G)$ adalah subhimpunan dari $V(G)$ sedemikian hingga $|N(v) \cap C'(G)| = 1, \forall\ v \in V(G)$. $|N(v) \cap C'(G)|$ adalah notasi yang menyatakan bahwa untuk setiap $v \in V(G)$ terhubung langsung *(adjacent)* ke tepat satu titik elemen $C'(G)$.

(Ghidewon, Richard H., Dewey T., 2008)

Lemma 3.1

Misalkan graf G, $C'(G)$ subhimpunan dari $V(G)$. $C'(G)$ merupakan kode sempurna total di G jika dan hanya jika subgraf yang diinduksi oleh $C^{'}(G)$ merupakan penjodohan di G dan himpunan $\{N(v)\backslash \mathrm{C}^{'}(\mathrm{G})\ |v \in C'(G)\}$ merupakan partisi dari $V(G)\backslash C^{'}(G)$.

Bukti:

Andaikan $C^{'}(G)$ bukan kode sempurna total, maka $\exists\ w \in V(G)$ dengan $\left|N(w) \cap C^{'}(G)\right| \neq 1$.

1. Jika $\left|N(w) \cap C^{'}(G)\right| = 0$, maka $\{N(v)\backslash \mathrm{C}^{'}(\mathrm{G})\ |v \in C'(G)\}$ bukan partisi dari $V(G)\backslash C^{'}(G)$, karena $w \notin N(v)\backslash C^{'}(G), \forall v \in C'(G)$ sehingga $\left|N(w) \cap C^{'}(G)\right| \neq 0$.
2. Jika $\left|N(w) \cap C^{'}(G)\right| > 1$, maka $\exists\ v_1, v_2 \in C^{'}(G)$ dan $\{v_1, v_2\} \subset N(w)$. Sedemikian hingga $w \in N(v_1)\backslash \mathrm{C}^{'}(\mathrm{G})$ dan $w \in N(v_2)\backslash \mathrm{C}^{'}(\mathrm{G})$. Hal ini bertentangan dengan (ii) yaitu $\{N(v)\backslash \mathrm{C}^{'}(\mathrm{G})\ |v \in C'(G)\}$ merupakan partisi dari $V(G)\backslash C^{'}(G)$.

Oleh karena itu pengandaian salah, seharusnya $C^{'}(G)$ adalah kode sempurna total di G.

$\therefore$ Terbukti, $C^{'}(G)$ merupakan kode sempurna total di G jika dan hanya jika subgraf yang diinduksi oleh $C^{'}(G)$ merupakan penjodohan di G dan $\{N(v)\backslash \mathrm{C}^{'}(\mathrm{G})\ |v \in C'(G)\}$ merupakan partisi dari $V(G)\backslash C^{'}(G)$. ■

Lemma 3.2

Jika G graf, $C^{'}(G)$ kode sempurna total di G maka $|C^{'}(G)|$ genap.

Bukti:

Andaikan $|C^{'}(G)|$ ganjil.

Berdasarkan Lemma 3.1, diperoleh subgraf yang diinduksi $C^{'}(G)$ merupakan penjodohan pada G, sehingga $\exists v \in C^{'}(G)$ dan $d(v) = 0$. $\left|N(v) \cap C^{'}(G)\right| = 0$.

Ini bertentangan dengan definisi kode sempurna total sehingga pengandaian salah.

Jadi, haruslah $|C^{'}(G)|$ adalah genap. ■

Lemma 3.3

Jika P_n merupakan lintasan dengan $n \neq 4k + 1, k \in \mathbb{N}$ maka P_n memiliki kode sempurna total.

Bukti:

Misalkan P_n lintasan dengan $n \neq 4k + 1, k \in \mathbb{N}$. Pembuktikan Lemma 3.3 dibagi menjadi 3 kasus yaitu, untuk $n = 4k, n = 4k + 2, n = 4k + 3$.

Untuk kasus 1 dan kasus 2 menggunakan cara berikut.

Misalkan

$$A = \{v_i \mid i = 2 + 4k, k \in \{0,1,2,3, \dots\}, 1 < i \leq n\}$$

$$B = \{v_j | \ j = n - (1 + 4m), m \in \{0,1,2,3, \dots\}, 1 \leq j < n\}$$

Akan dibuktikan : $A \cup B$ merupakan kode sempurna total di P_n untuk $n = 4k$ atau $n = 4k + 2$.

<u>Kasus 1:</u>

Untuk $n = 4k$ dengan $k \in \mathbb{N}$.

$$A \cup B = \{v_j | \ j = 2 + 4k \ atau\ j = 3 + 4k, k \in \{0,1,2,3, \dots\}, 1 \leq j \leq n\}$$

Berdasarkan indeks dari elemen-elemen $A \cup B$, dapat terlihat bahwa subgraf yang dibangun oleh $A \cup B$ merupakan penjodohan …………………………… (i)

$N(v_i) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$.

$N(v_i)\backslash(A \cup B) = \{v_{i-1}\}$, untuk $i = 2 + 4k$,

$N(v_i)\backslash(A \cup B) = \{v_{i+1}\}$, untuk $i = 3 + 4k$.

Sehingga diperoleh:

$\{N(v_i)\backslash(A \cup B) | v_i \in (A \cup B)\}$ merupakan partisi dari $V(P_n)\backslash(A \cup B)$ …………………………………… (ii)

Dari (i) dan (ii) dengan menggunakan lemma 3.1 diperoleh bahwa $A \cup B$ merupakan kode sempurna total dari P_n, dengan $n = 4k$.

<u>Kasus 2:</u>

Untuk $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

$$A \cup B = \{\ v_j | j = 2 + 4k \ atau\ j = 1 + 4k, k \in \{0,1,2,3, \dots\}, 1 \leq j \leq n\}$$

yaitu, $A \cup B = \{v_1, v_2, v_5, v_6, \dots, v_{n-1}, v_n\}$.

Berdasarkan indeks dari elemen-elemen di $A \cup B$, diperoleh bahwa subgraf yang dibangun oleh $A \cup B$ merupakan penjodohan …………………………… (i)

$N(v_j) = \{v_{j-1}, v_{j+1}\}$ dan $N(v_j)\backslash(A \cup B) = \{v_{j+1}\}$ untuk $j = 2 + 4k$,

$N(v_j)\backslash(A \cup B) = \{v_{j-1}\}$ untuk $j = 1 + 4k$.

Sehingga diperoleh:

$\{N(v_j)\backslash(A \cup B) | v_j \in (A \cup B)\}$ merupakan partisi dari $V(P_n)\backslash(A \cup B)$ …………………………………… (ii)

Dari (i) dan (ii) dan berdasarkan lemma 3.3 diperoleh bahwa $A \cup B$ merupakan kode sempurna total dari P_n dengan $n = 4k + 2$.

Kasus 3:

Untuk $n = 4k + 3$.

$C = \{v_j | j = 2 + 4k \text{ atau } j = 1 + 4k, k \in \{0,1,2,3, \dots\},$
$1 \le j < n\}$

$C = \{v_1, v_2, v_5, v_6, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}\}$.

Berdasarkan indeks dari elemen-elemen C, diperoleh bahwa subgraf yang dibangun oleh C merupakan penjodohan ………………………………………… (i)

$N(v_j) = \{v_{j-1}, v_{j+1}\}$.

$N(v_j)\backslash(C) = \{v_{j+1}\}$ untuk $j = 2 + 4k$,

$N(v_j)\backslash(C) = \{v_{j-1}\}$ untuk $j = 1 + 4k$.

Sehingga diperoleh:

$\{N(v_j)\backslash C \,|v_j \in C\}$ merupakan partisi dari $V(P_n)\backslash C$.. (ii)

Dari (i) dan (ii) dan berdasarkan lemma 3.3.1 diperoleh bahwa C merupakan kode sempurna total dari P_n, dengan $n = 4k + 3$.

Jadi, terbukti P_n dengan $n \neq 4k + 1$ $k \in \mathbb{N}$ memiliki kode sempurna total. ■

Lemma 3.4

Jika P_n merupakan lintasan dengan $n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$ maka P_n tidak memiliki kode sempurna total.

Bukti:

Misal P_n adalah lintasan dengan $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Andaikan P_n memiliki kode sempurna total yaitu $C'(P_n)$.

Karena $N(v_1) = \{v_2\}$ maka $v_2 \in C'(P_n)$ berdasarkan definisi kode sempurna total.

Karena $N(v_3) = \{v_2, v_4\}$ dan $v_2 \in C'(P_n)$ maka $v_4 \notin C'(P_n)$.

Jika proses yang sama dilanjutkan, maka diperoleh:

$v_2, v_6, v_{10}, \dots, v_{2+4k} \in C'(P_n)$ dengan $1 < 2 + 4k < n$.

Karena $N(v_n) = \{v_{n-1}\}$ maka $v_{n-1} \in C'(P_n)$berdasarkan definisi kode sempurna total.

$N(v_{n-1}) = \{v_{n-2}, v_n\}$.Memilih $v_{n-2} \in C'(P_n)$ atau $v_n \in C'(P_n)$ untuk memenuhi definisi kode sempurna total.

Untuk $v_{n-2} \in C'(P_n)$:

Karena $N(v_{n-1}) = \{v_{n-2}, v_n\}$ dan $v_{n-2} \in C'(P_n)$ maka
$v_n \notin C'(P_n)$.

Karena $N(v_{n-2}) = \{v_{n-3}, v_{n-1}\}$ dan $v_{n-1} \in C'(P_n)$ maka
$v_{n-3} \notin C'(P_n)$.

Karena $N(v_{n-3}) = \{v_{n-2}, v_{n-4}\}$ dan $v_{n-2} \in C'(P_n)$ maka
$v_{n-4} \notin C'(P_n)$.

Untuk $v_n \in C'(P_n)$:

Karena $N(v_{n-1}) = \{v_{n-2}, v_n\}$ dan $v_n \in C'(P_n)$ maka
$v_{n-2} \notin C'(P_n)$.

Karena $N(v_{n-2}) = \{v_{n-3}, v_{n-1}\}$ dan $v_{n-1} \in C'(P_n)$ maka
$v_{n-3} \notin C'(P_n)$.

Karena $N(v_{n-3}) = \{v_{n-2}, v_{n-4}\}$ dan $v_{n-2} \notin C'(P_n)$maka
$v_{n-4} \in C'(P_n)$.

Jika proses yang sama dilanjutkan, maka diperoleh:

$$v_{n-1}, v_{n-5}, v_{n-9}, \dots, v_{n-(1+4m)} \in C'(P_n)$$
dengan $1 < n - (1 + 4m) < n$.

Oleh karena itu, barisan titik-titik berikut merupakan elemen di $C'(P_n)$:

$$v_2, v_6, v_{10}, \dots, v_{2+4k}$$
$$v_{n-1}, v_{n-5}, v_{n-9}, \dots, v_{n-(1+4m)}$$

Karena $n = 4k + 1$ maka $n - 1 = 4k$, sehingga barisan $n - 1$, $n - 5$, $n - 9$ merupakan bilangan kelipatan 4.

Sehingga ada dua elemen $C'(P_n)$ yaitu v dan w dengan $v = 4k_1$ dan $w = 4k_1 + 2$.

Padahal $N(v_{4k+1}) = \{v_{4k_1}, v_{4k_1+2}\}$ sehingga $|N(v_{4k+1}) \cap C'(P_n)| = 2$.

Hal tersebut bertentangan dengan definisi kode sempurna total. Jadi pengandaian salah. Haruslah P_n dengan $n = 4k + 1$ tidak memiliki kode sempuna total. ■

Lemma 3.5

Sikel C_n dengan $n = 4k, k \in \mathbb{N}$ memiliki kode sempurna total.

Bukti 3.5 :

Misalkan C_n sikel dengan $n = 4k, k \in \mathbb{N}$.

Misal $A = \{v_i | \; i = 1 + 4m$ atau $i = 2 + 4m,$
$m \in \{0,1,2,3, \dots\}, 1 \le i < n\}$

Akan ditunjukkan A merupakan kode sempurna total di C_n.

$$A = \{v_1, v_2, v_5, v_6, \dots, v_{n-6}, v_{n-3}, v_{n-2}\}$$

Berdasarkan indeks dari elemen-elemen di A, diperoleh bahwa subgraf yang dibangun oleh A merupakan penjodohan di C_n……………………………………… (i)

$N(v_j) = \{v_{j-1}, v_{j+1}\}$.

$N(v_j)\backslash A = \{v_{j-1}\}$ jika $j = 1 + 4k$,

$N(v_j)\backslash A = \{v_{j+1}\}$ untuk $j = 2 + 4k$.

Sehingga diperoleh:

$\{N(v_j)\backslash A \mid v_j \in A\}$ merupakan partisi dari $V(C_n)\backslash A$……………………………………………………….(ii)

Dari (i) dan (ii) dan berdasarkan lemma 3.1 diperoleh bahwa A merupakan kode sempurna total dari C_n dengan $n = 4k$.

Jadi, terbukti sikel C_n dengan $n = 4k, k \in \mathbb{N}$ memiliki kode sempurna total. ■

Lemma 3.6
Sikel C_n dengan $n \neq 4k, k \in \mathbb{N}$ tidak memiliki kode sempurna total.

Bukti:
Pembuktian Lemma 3.6 dibagi menjadi 3 kasus yaitu, untuk $n = 4k$, $n = 4k + 2$ dan $n = 4k + 3$

<u>Kasus 1</u>: $n = 4k + 1, n > 4$
Andai C_n memiliki kode sempurna total $C^{'}(C_n)$.
Misal $v_1 \in C^{'}(C_n)$; karena sifat $C^{'}(C_n)$ adalah $\left|N(v) \cap C^{'}(C_n)\right| = 1$, maka $\{v_1, v_5, v_9, \dots, v_n\} \subset C^{'}(C_n)$…….(*)

Karena v_1, v_n di $C^{'}(C_n)$ maka $v_{n-1} \notin C^{'}(C_n)$ sehingga $v_{n-3} \in C^{'}(C_n)$ dan $\{v_{n-3}, v_{n-7}, v_{n-11}, \dots, v_2\} \subset C^{'}(C_n)$ ………………………………….……….……….(**)

Dari (*) dan (**) diperoleh v_n, v_1, v_2 adalah elemen $C^{'}(C_n)$ sehingga $\left|N(v_1) \cap C^{'}(C_n)\right| > 1$.
Ini bertentangan dengan $C^{'}(C_n)$ adalah kode sempurna total.
Jadi pengandaian salah, haruslah C_n dengan $n = 4k + 1$ tidak memiliki kode sempurna total.

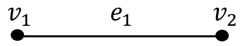
<u>Kasus 2:</u> $n = 4k + 2, n > 4$
Andai C_n memiliki kode sempurna total $C^{'}(C_n)$.
Misal $v_1 \in C^{'}(C_n)$; maka $\{v_1, v_5, v_9, \dots, v_{n-1}\} \subset C^{'}(C_n)$.
Padahal $N(v_n) = \{v_1, v_{n-1}\}$ sehingga $\left|N(v_n) \cap C^{'}(C_n)\right| > 1$.
Ini bertentangan dengan $C^{'}(C_n)$ adalah kode sempurna total, sehingga pengandaian salah. Haruslah C_n dengan $n = 4k + 2$ tidak memiliki kode sempurna total.

<u>Kasus 3:</u> $n = 4k + 3, n > 4$
Andai C_n memiliki kode sempurna total $C^{'}(C_n)$.
Misal $v_1 \in C^{'}(C_n)$; maka $\{v_1, v_5, v_9, \dots, v_{n-2}\} \subset C^{'}(C_n)$ ……………………………………………………… (*)
Karena $v_{n-2} \in C^{'}(C_n)$ dan $N(v_{n-1}) = \{v_{n-2}, v_n\}$ maka $v_n \notin C^{'}(C_n)$.
Karena $v_n \notin C^{'}(C_n)$ dan $N(v_1) = \{v_n, v_2\}$ maka $v_2 \in C^{'}(C_n)$
Sehingga $\{v_2, v_6, v_{10}, \dots, v_{n-1}\} \subset C^{'}(C_n)$ …………(**)

Dari (*) dan (**) diperoleh v_1, v_{n-1} adalah elemen $C^{'}(C_n)$ sehingga $\left|N(v_n) \cap C^{'}(C_n)\right| > 1$.
Ini bertentangan dengan definisi kode sempurna total.
Jadi pengandaian salah, haruslah C_n dengan $n = 4k + 3$ tidak memiliki kode sempurna total.
$\therefore$ Terbukti bahwa sikel C_n dengan $n \neq 4k, n > 4, k \in \mathbb{N}$ tidak memiliki kode sempurna total. ■

Lemma 3.7
Graf komplet K_2 memiliki kode sempurna total.

Bukti:
Untuk $n = 2$, jelas bahwa K_n adalah lintasan sederhana terdiri dari 2 titik yang saling terhubung langsung (*adjacent*).



Misalkan $A = \{v_1, v_2\}$.
Akan ditunjukkan A adalah kode sempurna total di K_2.

$N(v_1) = \{v_2\}$ sehingga $N(v_1) \cap A = \{v_2\}$,
$N(v_2) = \{v_1\}$ sehingga $N(v_2) \cap A = \{v_1\}$.
Sehingga $|N(v_i) \cap A| = 1, \forall v_i \in V(K_2)$.
Hal tersebut sesuai dengan definisi kode sempurna total.
Oleh karena itu, A merupakan kode sempurna total dari K_2.
Jadi benar bahwa graf komplit K_n dengan $n = 2$ memiliki kode sempuna total. ■

Lemma 3.8
Graf komplet K_n dengan $n \geq 3$ tidak memiliki kode sempurna total.

Bukti:
Misalkan G graf komplet K_n dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.
Andai K_n memiliki kode sempurna total $C^{'}(K_n)$.
$N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_n\} = V(K_n) - \{v_1\}$,
$N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, \dots, v_n\} = V(K_n) - \{v_2\}$,
.
.
.
$N(v_i) = V(K_n) - \{v_i\}$.

Misal v_l di $C^{'}(K_n)$ maka $|N(v_l) \cap C'(K_n)| = 1$,
misal v_m dengan $m \neq l$ maka $v_i \notin C'(K_n)$, $\forall \begin{matrix} i \neq l \\ i \neq m \end{matrix}$,
$i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Karena $|N(v_m) = V(K_n) - \{v_m\}| = 1$,maka $v_l \in C'(K_n)$, sehingga untuk v_j dengan $j \neq l$ dan $j \neq m$ diperoleh $v_m \in N(v_j)$dan$v_l \in N(v_j)$sehingga$|N(v_j) \cap C'(K_n)| \geq 2$.

Ini bertentangan dengan pengandaian.
Jadi haruslah K_n dengan $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ tidak memiliki kode sempurna total. ■

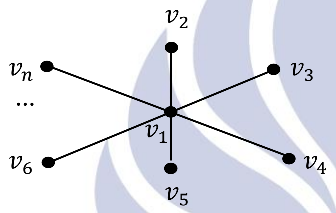
Lemma 3.9
Graf bipartit komplet memiliki kode sempurna total yang berorder 2.

Bukti:

Misalkan G adalah graf bipartit komplet.
Misal $V(G) = V_1(G) \cup V_2(G)$ dengan
$V_1(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan
$V_2(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.
Misal $A = \{v_i, u_j\}$ dengan $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le m$.
Akan ditunjukkan A adalah kode sempurna total di G.
Jelas bahwa,
$|N(v_l) \cap A| = 1, \forall v_l \in V_1(G)$,
$|N(u_k) \cap A| = 1, \forall u_k \in V_2(G)$.
Jadi, A adalah kode sempurna total dari G berorder 2.■

Proposisi 3.10
Graf bintang $K_{1,n-1}$ memiliki kode sempurna total.

Bukti:
Misalkan G graf bintang dengan n titik dengan $d(v_1) = n - 1$ dan $d(v_i) = 1, \forall i, 1 < i \le n$.



Misalkan $A = \{v_1, v_k\}$ dengan $1 < k \le n$.
Akan ditunjukkan A merupakan kode sempurna total dari G.
$N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, \dots, v_n\}$ sehingga $N(v_1) \cap A = \{v_k\}$,
$N(v_i) = \{v_1\}, \forall i, 1 < i \le n$, sehingga $N(v_i) \cap A = \{v_1\}$,
Sehingga $|N(v_i) \cap A| = 1, \forall v_i \in V(G)$.
Oleh karena itu, A merupakan kode sempurna total dari G. Jadi, terbukti graf bintang memiliki kode sempurna total. ■

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada skripsi yang berjudul "Kode Sempurna Total dalam Graf Sederhana", maka dapat disimpulkan sebagai hal-hal berikut:

1. Misalkan graf G. $C'(G)$ adalah subhimpunan dari $V(G)$. $C'(G)$ merupakan kode sempurna total di graf G jika dan hanya jika subgraf yang diinduksi oleh $C'(G)$ merupakan penjodohan di G dan himpunan $\{N(v) \backslash C'(G) \mid v \in C'(G)\}$ merupakan partisi dari $V(G) \backslash C'(G)$.
2. Jika G graf, $C'(G)$ kode sempurna total di G maka $|C'(G)|$ adalah genap.
3. Kode Sempurna Total pada lintasan P_n, yaitu:
   - Jika P_n merupakan lintasan dengan $n \neq 4k + 1, k \in \mathbb{N}$ maka P_n memiliki kode sempurna total.
   - Jika P_n dengan $n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$ maka P_n tidak memiliki kode sempurna total.
4. Kode Sempurna Total pada sikel C_n , yaitu:
   - Sebuah sikel C_n dengan $n = 4k, k \in \mathbb{N}$ memiliki kode sempurna total.
   - Sebuah sikel C_n dengan $n \neq 4k, k \in \mathbb{N}$ tidak memiliki kode sempurna total.
5. Kode Sempurna Total pada graf komplet K_n, yaitu:
   - Graf komplet K_2 memiliki kode sempurna total.
   - Graf komplet K_n dengan $n \ge 3$ tidak memiliki kode sempurna total.
6. Misal G adalah graf bipartisi komplet, maka G memiliki kode sempurna total yang berorder 2.
7. Graf bintang memiliki kode sempurna total.

Saran

Pada skripsi ini penulis membahas tentang kode sempurna total pada beberapa kelas penting graf, yaitu: lintasan, sikel, graf komplet, graf bipartit komplet dan graf bintang. Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan pembaca dapat membahas tentang kode sempurna total pada beberapa kelas penting graf yang belum dibahas dalam skripsi ini.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I Ketut. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Diestel, Reinhard. 2000. *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag.

Ghidewon Abay-Asmerom, Richard H. Hammack dan Dewey T. Taylor. 2008. "Total Perfect Codes in Tensor Product of Graphs". *Ars Combinatoria*. Vol. 88: pp 129-134.

Raja, Rameez. 2018. "Total Perfect Codes in Zero-Divisor Graphs". *Journal: Harish-Chandra Research Institute*. ArXiv: 1802.00723v1.