

## Gravimetrický model kvázigeoidu na území Slovenska

Marcel Mojzeš, Juraj Janák a Juraj Papčo<sup>1</sup>

### Gravimetric Model of Quasigeoid in the Area of Slovakia

The gravimetric model of quasigeoid in the area of Slovakia was determined by using the revised and homogenised gravity mapping data in the scale of 1:25 000 from the area of Slovakia, and by using the mean Bouguer gravity anomalies with the resolution of 5'x7.5' in the area 44°<φ<56° and 12°<λ<30° from abroad and by the digital terrain model DMR-2/ERTS89 with the resolution 3" in the ellipsoidal latitude and 5" in the ellipsoidal longitude from the area of Slovakia and the digital terrain model GTOPO30 with the resolution of 30" in the ellipsoidal latitude and 30" in the ellipsoidal longitude from abroad. The global part of the height anomaly was determined from the global geopotential model EGM96. The residual part of the height anomaly was determined by the Stokes integral formula. For the solution of the Stokes integrals the Fast Fourier Transformation method in the spherical approximation was used. The gravimetric quasigeoid was tested by the GPS/levelling method using 46 points distributed in the area of Slovakia. The systematic trend of differences between height anomalies was rejected by the surface polynomial of second degree with 6 coefficients. The standard deviation after removing a systematic trend was 0.017 m

**Key words:** Gravimetric quasigeoid, homogenisation of data, testing of quasigeoid.

### Úvod

Meracia technika GPS má širokú škálu uplatnenia, od monitorovania pohybu zemského povrchu, budovania trojrozmerných geodetických referenčných sietí, až po meranie detailu. Zaujímá teda významné miesto medzi geodetickými meracími technikami pri zbere údajov. Problémom však ostáva, ako pretransformovať elipsoidickú výšku  $h$  na nadmorskú výšku  $H$ , resp. elipsoidické prevýšenie na prevýšenie nadmorských výšok, aby sme sa dozvedeli „kade potečie voda“. Toto budeme vedieť riešiť vtedy, keď budeme poznať priebeh kvázigeoidu, t.j. výšku kvázigeoidu nad používaným referenčným elipsoidom v oblasti, kde sú merania GPS vykonávané. Mnohé krajiny v Európe riešia určenie geoidu/kvázigeoidu s takou presnosťou, aby uspokojili najnáročnejších užívateľov z praxe. Z tohto dôvodu Katedra geodetických základov Slovenskej technickej univerzity v Bratislave vytvorila priestor pre štúdium najnovších metód a technologických postupov na určenie kvázigeoidu z dostupných gravimetrických údajov a digitálnych modelov reliéfu terénu na území aj mimo územia Slovenska. Predložený článok obsahuje najnovšie výsledky určenia kvázigeoidu na území Slovenska. Podrobnejšie informácie môže záujemca nájsť v odborných článkoch (napr. Mojzeš a Janák, 1998, Mojzeš et al, 2004).

### Matematický model

Detailný kvázigeoid je možné určiť pomocou štandardne používanej metódy remove-restore. Matematický model tejto metódy má nasledovný tvar

$$\zeta_{GMSQ03C}(P) = \zeta_{EGM96}(P) + \zeta_{res}(P) + \zeta_{Moritz}(P). \quad (1)$$

Modelová časť bola vypočítaná zo vzťahu

$$\zeta_{EGM96}(P) = \frac{GM}{\gamma_P r_P} \sum_{n=2}^{360} \left( \frac{a}{r_P} \right)^n \sum_{k=-n}^n C_{n,k} Y_{n,k}(\varphi_P, \lambda_P), \quad (2)$$

kde  $\gamma_P$  je normálne tiažové zrýchlenie v bode  $P$  vypočítané z modelu GRS80,  $r_P$  je geocentrický sprievodič bodu  $P$ ,  $a$  je veľká poloos referenčného elipsoidu GRS80,  $C_{n,k}$  sú geopotenciálne koeficienty modelu EGM96 do stupňa a rádu  $n=k=360$ ,  $Y_{n,k}(\varphi_P, \lambda_P)$  je plošná sférická funkcia argumentu sférickej šírky  $\varphi_P$  a sférickej dĺžky  $\lambda_P$  bodu  $P$ .

<sup>1</sup> doc. Ing. Marcel Mojzeš, PhD., Ing. Juraj Janák, PhD., Ing. Juraj Papčo, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, [marcel.mojzes@stuba.sk](mailto:marcel.mojzes@stuba.sk)  
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 16. 5. 2005)

Reziduálna časť  $\zeta_{res}(P)$  bola vypočítaná riešením Stokesovho integrálu vo sférickej aproximácii

$$\zeta_{res}(P) = \frac{R}{4\pi\gamma(P)} \iint_{\psi=3} \Delta g_{res} S(\psi) dS. \quad (3)$$

Na riešenie Stokesovho integrálu bola použitá metóda rýchlej Fourierovej transformácie (1D FFT). Do riešenia vstupovali reziduálne anomálie tiažového zrýchlenia vypočítané podľa vzťahu

$$\Delta g_{res}(P) = \Delta g(P) + \delta g_t(P) - \Delta g_{EGM96}(P), \quad (4)$$

kde  $\Delta g(P) = g(P) - \gamma(Q)$  je anomália tiažového zrýchlenia vo voľnom vzduchu podľa Molodenského,  $\delta g_t(P)$  je topografická korekcia tiažového zrýchlenia vypočítaná z integračnej oblasti  $3^\circ$  a  $\Delta g_{EGM96}(P)$  je povrchová anomália tiažového zrýchlenia vypočítaná zo vzťahu (Pavlis, 1997)

$$\Delta g_{EGM96}(P) \approx \frac{GM}{r_Q^2} \sum_{n=2}^{360} (n-1) \left( \frac{a}{r_Q} \right)^n \sum_{k=-n}^n C_{n,k} Y_{n,k}(\varphi_Q, \lambda_Q), \quad (4)$$

kde bod Q je na teluroide. Korekcia druhého člena Molodenského rozvoja bola vypočítaná podľa vzťahu (Moritz, 1980)

$$\zeta_{Moritz}(P) = \pi G \rho \gamma_p^{-1} H_p^2 \quad (5)$$

kde  $H_p$  je normálna nadmorská výška bodu P.

### Použitá údaje

Na riešenie gravimetrického kvázigeoidu boli použité diskkrétne hodnoty tiažového zrýchlenia z podrobného gravimetrického mapovania na území Slovenska, ktoré bolo realizované od roku 1956 do roku 1992, s priemernou hustotou 3-6 bodov/km<sup>2</sup>. Táto množina tvorila okolo 200 000 bodov. Z oblasti mimo územia Slovenska, ohraničenej rovnobežkami  $44^\circ \leq \varphi \leq 56^\circ$  a poludníkmi  $12^\circ \leq \lambda \leq 30^\circ$ , boli použité stredné hodnoty úplných Bouguerových anomálií tiažového zrýchlenia s pravidelným krokom  $5' \times 7.5'$  (obr. 1). Na výpočet topografických korekcií tiažového zrýchlenia bol použitý digitálny model reliéfu terénu DMR2/ETRS89 s krokom  $3''$  v zemepisnej šírke a  $5''$  v zemepisnej dĺžke z oblasti Slovenska a GTOPO30 s krokom  $30''$  v zemepisnej šírke a  $30''$  v zemepisnej dĺžke z oblasti mimo územia Slovenska.

Globálne informácie o tiažovom poli boli vypočítané z globálneho geopotenciálneho modelu EGM96 do stupňa a rádu 360 (Lemoine et al, 1996).

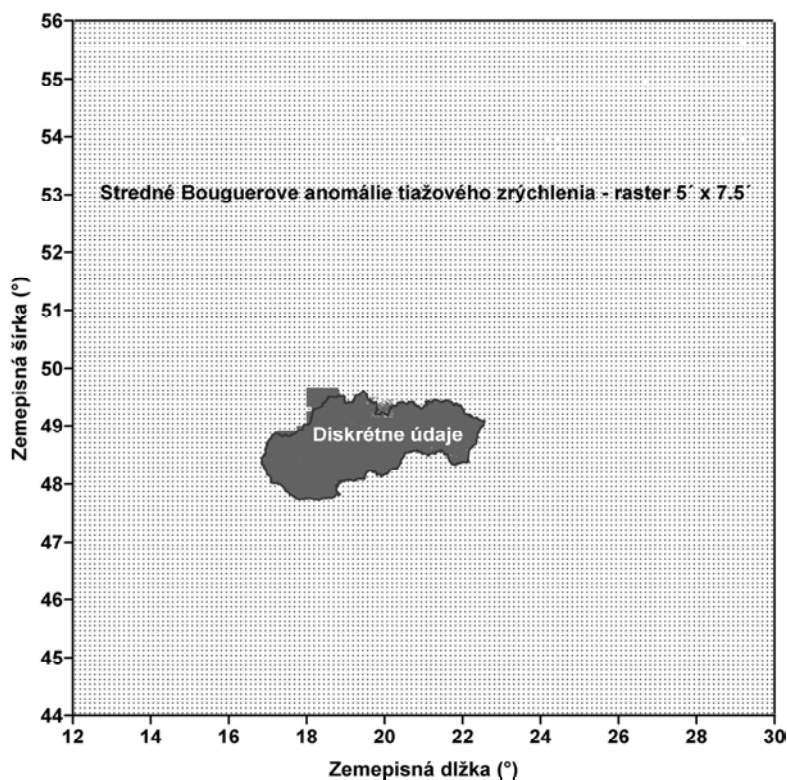
### Praktické riešenie

Praktické riešenie bolo vykonané pomocou softvéru F388 (Rizos, 1979), (Pavlis, 1988) a softvéru SPFOUR-FFT vo sférickej aproximácii Stokesovej funkcie (Tscherning et al., 1992), ktoré boli získané z Medzinárodných škôl o určovaní geoidu, realizovaných na Technickej univerzite v Miláne v roku 1994 a na Technickej univerzite v Tessalonikách v roku 2002.

Výsledný gravimetrický model Slovenského kvázigeoidu označený skratkou GMSQ03C je znázornený na obr. 2. Kvázigeoid GMSQ03C má najmenšiu výšku (37 m), ktorá sa nachádza na styku poľskej, ukrajinskej a slovenskej hranice a najväčšiu výšku dosahuje pri Bratislave (44 m).

### Testovanie kvázigeoidu metódou GPS/nivelácie a odhad jeho presnosti

Testovanie presnosti kvázigeoidu je možné vykonávať pomocou rôznych technologických postupov, ktoré sledujú stanovený cieľ testovania. Veľmi častý postup je porovnaním priebehu kvázigeoidu, ktoré vznikli rozdielnymi teoretickými a technologickými postupmi z tej istej množiny vstupných údajov. V takomto prípade výsledky testu ukážu len kvalitu zhody použitých technologických postupov. Najkvalitnejší test určenia kvázigeoidu je pomocou nezávislých metód, ktoré poukážu na nezhody a deformácie v určení kvázigeoidu. Tieto



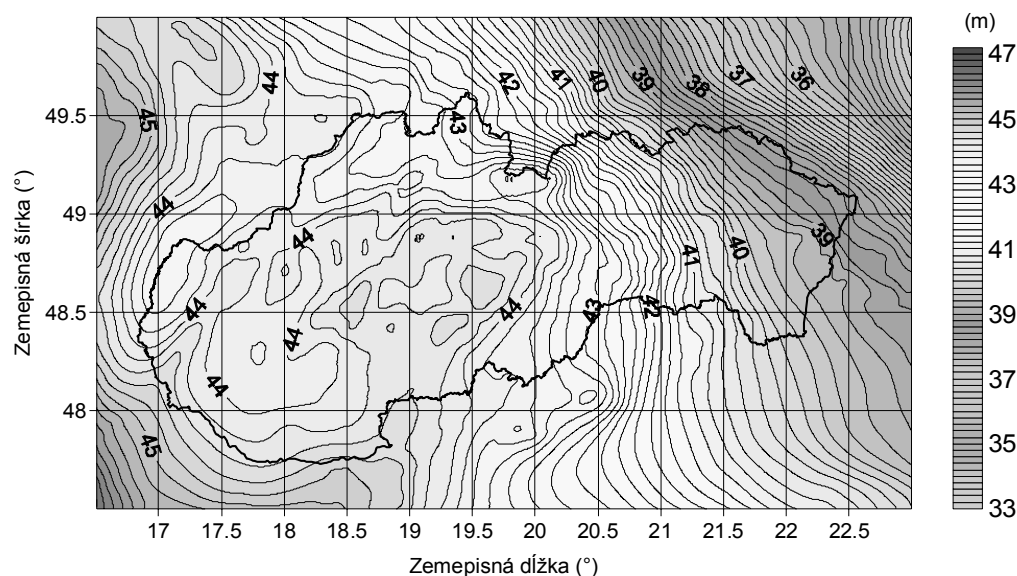
informácie je možné použiť na ďalšie spresnenie teórií alebo technologických postupov, prípadne môžu stimulovať úvahy o použití nových neštandardných postupov na určenie kvázigeoidu.

Obr. 1. Použité gravimetrické údaje.  
Fig. 1. Gravimetric data used.

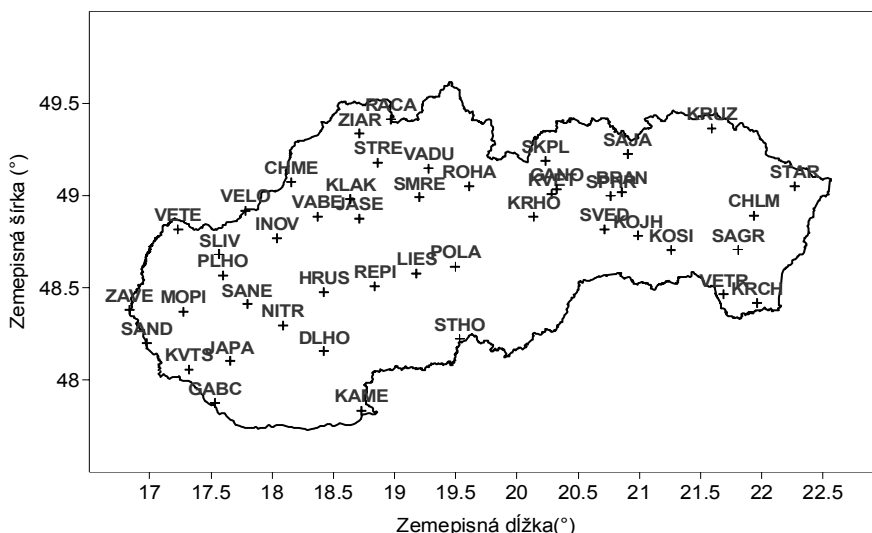
Nezávislé testovanie gravimetických kvázigeoidov sa vykonáva najčastejšie pomocou metódy GPS a nivelácie. Táto metóda vychádza z predpokladu, že meranie GPS dáva možnosť určiť veľmi presné pravouhlé priestorové súradnice  $X, Y, Z$  ľubovoľného bodu na zemskom povrchu, ktoré môžeme pretransformovať na elipsoidické  $\varphi, \lambda, h$  a elipsoidickú výšku  $h$  použiť ako parameter na testovanie kvázigeoidu. Ak v tomto bode určíme nadmorskú (normálnu) výšku  $H$  metódou veľmi presnej nivelácie pripojením na Štátnu referenčnú nivelačnú sieť, potom z rozdielu elipsoidickej a nadmorskej výšky môžeme určiť výšku kvázigeoidu  $\zeta_{niv}$ , t.j.

$$\zeta_{niv} = h - H \quad (6)$$

Neistota v určení výšky kvázigeoidu bude obsahovať predovšetkým neistoty v určení elipsoidickej a nadmorskej výšky. Chyba spôsobená stotožnením dĺžky normály s dĺžkou skutočnej tiažnice je pre okrajovú podmienku na území Slovenskej republiky ( $H = 2 \text{ km}$ ,  $\varepsilon = 1''$ ) zanedbateľná ( $0,17 \text{ mm}$ ) (Albertella, Sansó, 1997).



Obr. 2. Gravimetrický model Slovenského kvázigeoidu GMSQ03C.  
Fig. 2. Gravimetric model of the Slovak quasigeoid GMSQ03C.



Obr. 3. Rozloženie bodov GPS/nivelácia použitých na testovanie.  
Fig. 3. Position of GPS/leveling points used for the testing.

Ak túto výšku kvázigeoidu vypočítanú podľa vzťahu (6) porovnáme s výškou kvázigeoidu určenou podľa vzťahu (1) dostaneme rozdiel, ktorý obsahuje v sebe kvalitu určenia elipsoidickej výšky určenej meraním GPS, kvalitu určenia nadmorskej (normálnej výšky) a kvalitu určenia výšky kvázigeoidu podľa vzťahu (1).

Je zrejmé, že rozdiely vo výškach kvázigeoidu určené na viacerých bodoch poskytujú obsiahle informácie, predovšetkým o systematickom a náhodnom trende. Na odstránenie systematického trendu bol použitý plošný polynóm v tvare

$$\Delta\zeta(P) = \zeta_{niv}(P) - \zeta_{GMSQ03C}(P) = \sum_{p=0}^P \sum_{q=0}^Q Q_{p,q} (\varphi - \varphi_0) ((\lambda - \lambda_0) \cos \varphi)^q, \quad (7)$$

kde  $\varphi, \lambda$  sú elipsoidické súradnice testovaného bodu,

$\varphi_0, \lambda_0$  sú elipsoidické súradnice ťažiska testovanej oblasti,

$Q_{p,q}$  sú neznáme koeficienty, určené metódou najmenších štvorcov.

Voľba počtu koeficientov závisí od počtu testovaných bodov. Počet neznámych koeficientov by nemal prekročiť polovicu počtu testovaných bodov.

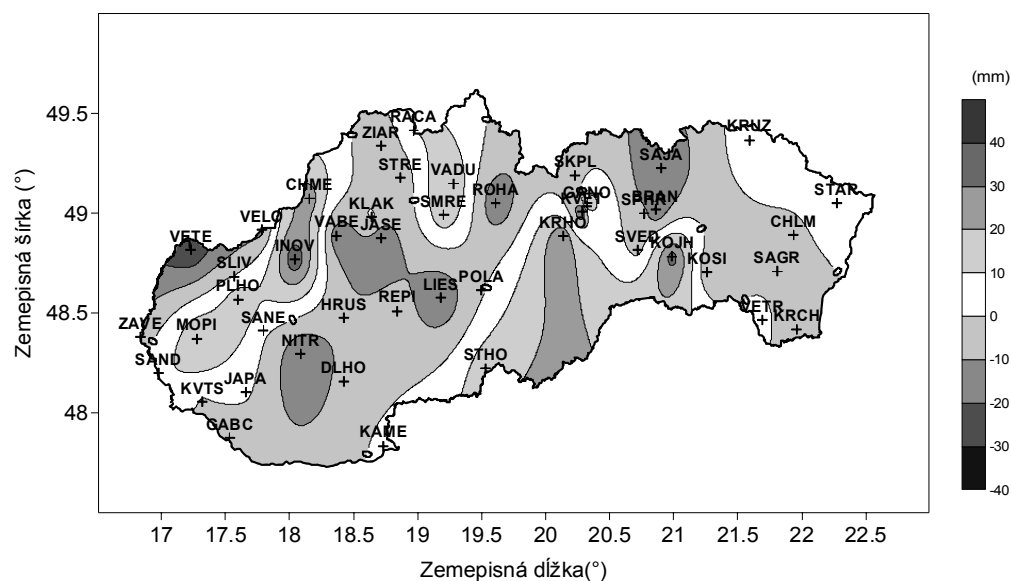
Praktické testovanie kvázigeoidu bolo vykonané na množine pozostávajúcej zo 46 GPS bodov znázornených na obr. 3, ktoré boli merané v GPS kampaniach CS-NULRAD91, SLOVREGENET93, SLOVGERENET95 a niektoré body z SKTRS kampaní (Hefty, 1999). Presnosť určenia elipsoidickej výšky sa pohybuje okolo 2 cm. Všetky body GPS boli pripojené na štátnu niveláčnu sieť Slovenskej republiky 1957 metódou veľmi presnej nivelácie a vypočítané rozdiely podľa vzťahu (6) majú nasledovné štatistické informácie

Priemer ( $\sum(\Delta\zeta)/n$ )	0.706 m
Štandardná odchýlka ( $\sigma_{\Delta\zeta}$ )	0.076 m
Rozptyl reziduí ( $v_{\Delta\zeta}$ )	0.363 m

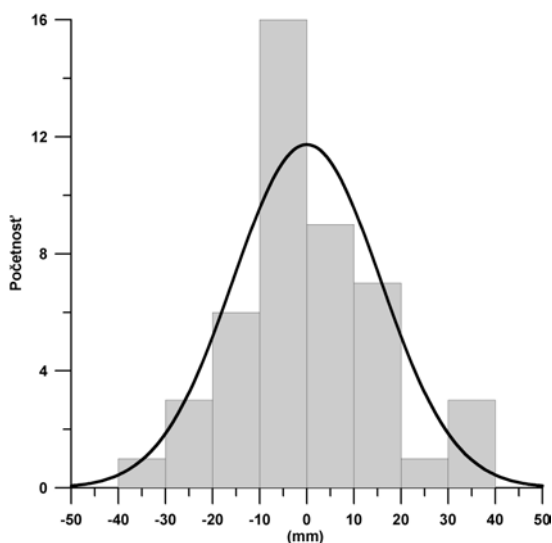
Priemerná odchýlka 0.706 m výšok gravimetrického kvázigeoidu od výšok GPS/nivelácie je predovšetkým spôsobená neuvážením reziduálnych anomálií tiažového zrýchlenia v integračnej oblasti od  $3^\circ$  do  $180^\circ$ . Systematický trend bol však odstránený pomocou plošného polynómu druhého stupňa s deviatimi koeficientmi. Hodnoty koeficientov boli odhadnuté metódou najmenších štvorcov a sú zostavené spolu so strednými chybami v tab. 1. Jednotková stredná chyba fitovaného kvázigeoidu dosiahla hodnotu 0,017 m.

Tab. 1. Hodnoty koeficientov plošného fitovacieho polynómu určené MNŠ a ich stredné chyby  
 Tab. 1. Values of coefficients of surface fitting polynomial determined by the LSM and their RMS.

Koeficient	Rozmer	Hodnota	Stredná chyba
$Q_{0,0}$	[m]	- 0,751	0,006
$Q_{1,0}$	[m/°]	- 0,037	0,011
$Q_{0,1}$	[m/°]	- 0,043	0,003
$Q_{1,1}$	[m/° <sup>2</sup> ]	0,026	0,013
$Q_{2,0}$	[m/° <sup>2</sup> ]	- 0,020	0,025
$Q_{0,2}$	[m/° <sup>2</sup> ]	0,036	0,004
$Q_{2,1}$	[m/° <sup>3</sup> ]	0,082	0,025
$Q_{1,2}$	[m/° <sup>3</sup> ]	- 0,066	0,010
$Q_{2,2}$	[m/° <sup>4</sup> ]	- 0,064	0,025



Obr. 4. Rozloženie rezíduí na testovaných bodoch.  
 Fig. 4. Distribution of the residuals on the tested points.



Reziduá na fitovaných bodoch sa pohybujú v intervale od  $-0.030$  m po  $0.039$  m. Rozloženie rezíduí na obr.4 v oblasti bodov KRHO, KVET, ROHA poukazuje na prítomnosť systematických chýb, ktoré môžu pochádzať predovšetkým z nehomogénnej množiny merania GPS, alebo z vertikálneho pohybu bodov nivelačnej siete. Histogram rezíduí znázornený na obr. 5. však na túto skutočnosť nepoukazuje. Vyšetrenie prítomnosti systematických chýb vyžaduje detailný výskum priebehu kvázigeoidu v daných oblastiach.

Obr. 5. Histogram rezíduí.  
 Fig. 5. Histogram of residuals.

### Testovanie kvázigeoidu pomocou astronomických meraní v oblasti Vysokých Tatier

Najkomplikovanejšia oblasť určeného kvázigeoidu je v oblasti Vysokých Tatier, a to z dôvodu riedkych gravimetrických meraní lokalizovaných prevažne v údoliach, ktoré boli použité na určenie gravimetrického

kvázigeoidu. Táto skutočnosť dala podnet na testovanie určeného kvázigeoidu v oblasti Vysokých Tatier pomocou astronomických meraní. Astronomické meranie bolo vykonané Cirkumzenitálom 50/500 vyrobeným vo Výskumnom ústave geodézie, topografie a kartografie Praha. Pomocou tohto prístroja boli v roku 2003 odmerané astronomické súradnice na 11 bodoch a vypočítané astronomické zvislicové odchýlky. Na tých istých bodoch boli určené gravimetrické zvislicové odchýlky pomocou Vening-Meineszových integračných vzťahov. Porovnanie zvislicových odchýliek ukázalo, že zhoda je v oblasti presnosti astronomických meraní, okrem oblasti Lomnického štítu a Skalnatého Plesa, kde rozdiel dosiahol 1,5" a 1,4" (Mojzeš et al, 2004). Je to pravdepodobne spôsobené komplikovaným reliéfom terénu a malou hustotou gravimetrických bodov. Na odstránenie rozporu bude potrebné zhustiť astronomické a gravimetrické meranie v tejto oblasti.

### Záver

Gravimetrický kvázigeoid GMSQ03C má vysokú vnútornú presnosť, jednotková stredná chyba dosiahla hodnotu 0,017 m. Môže sa používať pre praktické účely pri určovaní nadmorských výšok pomocou technológie GPS v celej oblasti Slovenska. Meranie GPS sa však musí pripájať na body Štátnej terestrickej referenčnej siete, ktorá je určená v systéme ETRS89 alebo na permanentné stanice GPS, ktoré budú mať spoľahlivo určené ročné rýchlosti pohybov. Čas pripájacieho simultánneho merania GPS bude závisieť od vzdialenosti meranej lokality od permanentných staníc. Vzhľadom na závažnosť problematiky je potrebné vypracovať technologický postup pripájania GPS merania do Štátnej terestrickej referenčnej siete alebo do siete permanentných staníc GPS, ktorá sa postupne buduje a zahusťuje. Nezávislé testovanie kvázigeoidu v horských oblastiach Slovenska je efektívne vykonať pomocou astronomických meraní, ktoré sú v súčasnosti značne automatizované a v kombinácii s GPS meraním umožňujú určiť veľmi rýchle zvislicovú odchýlku.

*Autori článku vyjadrujú poďakovanie Vedeckej grantovej agentúre Ministerstva školstva a Slovenskej akadémie vied za finančnú podporu grantového projektu č.1/1433/04.*

### Literatúra - References

- Albertella, A., Sansó, F.: A Compendium of Physical Geodesy. International School for the Determination and Use of the Geoid, *Volume 1. Lecture Notes, 1997. DIIAR-Politecnico di Milano, pp. 1-70.*
- Hefty, J.: Určenie súradníc bodov SLOVGERENET, vybraných bodov ŠAGS a ŠTS 1. rádu a ich kovariančnej matice v referenčnom systéme ETRS89 pri rešpektovaní štatistických charakteristík pripájacích sietí. *Čiastková správa, Etapa 4d. VÚGK Bratislava, 1999.*
- Lemoine, F. G. et al.: The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96, *NASA/TP-1998-206861, Maryland, 1998.*
- Mojzeš, M., Janák, J.: New gravimetric quasigeoid of Slovakia. *Bollettino di geofisica teoretica ed applicata, 40, sep.-dec. 1999, n. 3-4, pp.211-217.*
- Mojzeš, M., Husár, L., Janák, J., Papčo, J., Czarnecki, K., Barlik, M., Bogusz, J., Walo, J.: Testing of Gravimetric Quasigeoid by Astronomical Measurements. *Reports on Geodesy No.2(69), 2004. Warsaw University of Technology. pp. 157-166.*
- Moritz, H.: Advanced Physical Geodesy. *H. Wichmann-Abacus Press, Karlsruhe-Tunbridge Wells, 1980.*
- Pavlis, N. K.: Development and Applications of Geopotential Models. *International School for the Determination and Use of the Geoid. Volume 1. Lecture Notes, 1997. DIIAR-Politecnico di Milano, pp. 101-147.*
- Pavlis, N. K.: Modeling and Estimation of a Low Degree geopotential Model from Terrestrial Gravity Data. *Report No. 386. Dept. Of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, 1988.*
- Rizos, C.: An Efficient Computer Technique for the Evaluation of Geopotential from Spherical Harmonic Models. *Australian Journal of Geodesy, Photogram and Surveying, No. 31, 161-169, December 1979.*
- Tscherning, C. C., Forsberg, R., Knudsen, P.: The GRAVSOFTE package for geoid determination. *Proc. 1st continental workshop on the geoid in Europe, Prague 1992, pp.327-334.*