UDC 51-74/536.21

MODEL PROBLEM ABOUT EVALUATION OF THE TEMPERATURE FIELD IN THE UNIFORMLY ROTATING WHEEL AT INTERACTION WITH THE DISK BRAKE

[1] Anatolii I. Zadorozhnyi
[2] Igor V. Kolesnikov

[1] Southern Federal University
344049, Rostov-on-Don, Pushkinskaya St., 148
The doctor of physico-mathematical sciences, Professor
E-mail: simon@sfedu.ru
[2] RSU of TC (RGUPS), Rostov-on-the-Don, Russia.
PhD (technical), assistant professor

In the article the axially symmetric mixed problem of heat conduction for a system «a wheel-disk brake» is considered. The solution is obtained by Fox method of average and method of joining of the solutions on a demarcation line between the boundary conditions.

Keywords: disk brake, heat conduction equation, mixed boundary value problem, Fox average method.

Расчетная схема задачи приведена ниже на рис. 1.

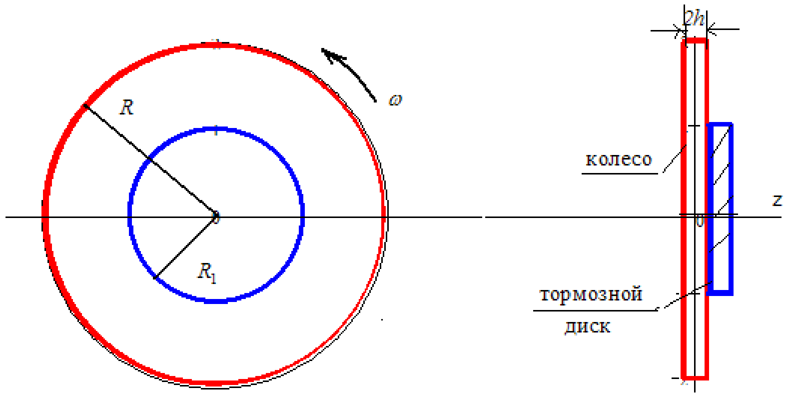

Рис.1. Расчетная схема системы «колесо-тормозной диск»

Колесо радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω, к колесу равномерно распределенным давлением p (результирующей силой P) прижимается неподвижный тормозной диск радиуса R_1. Кулоновское трение с коэффициентом трения скольжения f_C порождает идущий в колесо тепловой поток $Q(r) = k\, f_C\, p\,\omega r_p$, где k - коэффициент разделения тепловых потоков [1].

Формулировка математической модели в безразмерных переменных имеет следующий вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0,\quad r\in[0;1],\quad z\in[-h;h], \qquad (1)$$

где $T = (T_p - T_s)T_s$, $r_p = Rr$, $h_p = Rh$, T_s - температура окружающей среды.

Краевые условия записываются в форме

$$\frac{\partial T}{\partial z} = BiT \text{ при } z=-h,\ r\in[0;1], \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -BiT \text{ при } z=h,\ r\in[r_1;1],\ r_1 = R_1/R, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -q(r) \text{ при } z=h,\ r\in[0;r_1]. \qquad (4)$$

Здесь $Bi = (\alpha R)/\lambda$ - безразмерный критерий Био, α - коэффициент теплоотдачи со свободных торцов колеса, λ - коэффициент теплопроводности колеса, $q(r) = (Q(r)R)/(\lambda T_s)$. Как видно, на части границы области $z=h$ при переходе через линию $r=r_1$ происходит смена типа граничного условия с условия второго рода на условие третьего рода. Именно в этом смысле, как и в [2], речь идет о смешанной краевой задаче математической физики. На цилиндрической поверхности колеса принимается условие постоянства температуры, а именно:

$$T(1,z) = T_c = const. \qquad (5)$$

Сформулированная задача с учетом тонкости колеса ($h \ll 1$) может быть решена одним из асимптотических методов, например, методом Вишика-Люстерника [3] или методом регуляризации сингулярных возмущений С.А. Ломова [4, 1]. В данной статье реализуется подход, упомянутый и описанный в [3, 5, 6], который можно условно назвать «инженерным». Он основан на предложенном Фоксом Е.Н. методе осреднения [7], дающем менее точное приближение, чем то, которое можно получить методами [3, 4]. Решение, однако, будет более наглядным и простым для численных расчетов, сохраняя при этом основные физические закономерности.

Проведя, как и в [3] процедуру осреднения по переменной z и обозначая через $\overline{T}(r) = (2h)^{-1}\int_{-h}^{h} T(r,z)dz$ среднюю по толщине колеса температуру, полагая, что $T(r,-h) = T(r,h) = \overline{T}(r)$, получим следующую одномерную краевую задачу

$$\frac{d^2\overline{T}_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{T}_1}{dr} - B\overline{T}_1(r) = q(r),\ r\in[0;r_1], \qquad (6)$$

где $q(r) = \gamma r$, $\gamma = const$, $\overline{T}_1(0) \neq \infty$,

$$\frac{d^2\overline{T}_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{T}_2}{dr} - 2B\overline{T}_2(r) = 0,\ r\in[r_1;1], \qquad (7)$$

с условиями сопряжения

$$\frac{d\overline{T}_1}{dr} = \frac{d\overline{T}_2}{dr} \text{ при } r=r_1,\ \overline{T}_1(r_1) = \overline{T}_2(r_1) \qquad (8)$$

и условием

$$\overline{T}_2(1) = T_c. \qquad (9)$$

Метод вариации произвольной постоянной дает решение на первом участке

$$\overline{T}_1(r) = C_1^1 I_0(\sqrt{B}\,r) + \int_0^r \left[K_0(\sqrt{B}\,r) I_0(\sqrt{B}\,\rho) - I_0(\sqrt{B}\,r) K_0(\sqrt{B}\,\rho)\right]\gamma\rho^2 d\rho, \qquad (10)$$

где $I_0(\sqrt{B}\,r)$, $K_0(\sqrt{B}\,r)$ - модифицированные функции Бесселя.

Для $\overline{T}_2(r)$ элементарно получается представление

$$\overline{T}_2(r) = C_1^2 I_0(\sqrt{2B}\,r) + C_2^2 K_0(\sqrt{2B}\,r),\ r\in[r_1;1]. \qquad (11)$$

Произвольные постоянные C_1^1, C_1^2, C_2^2 однозначно определяются в результате удовлетворения трем условиям (8) и (9), дающим линейную алгебраическую систему. Их выражения вследствие определенной аналитической громоздкости, не сказывающейся на процедуре их численного определения, здесь не приводятся.

В заключение приведем некоторые результаты численных расчетов.

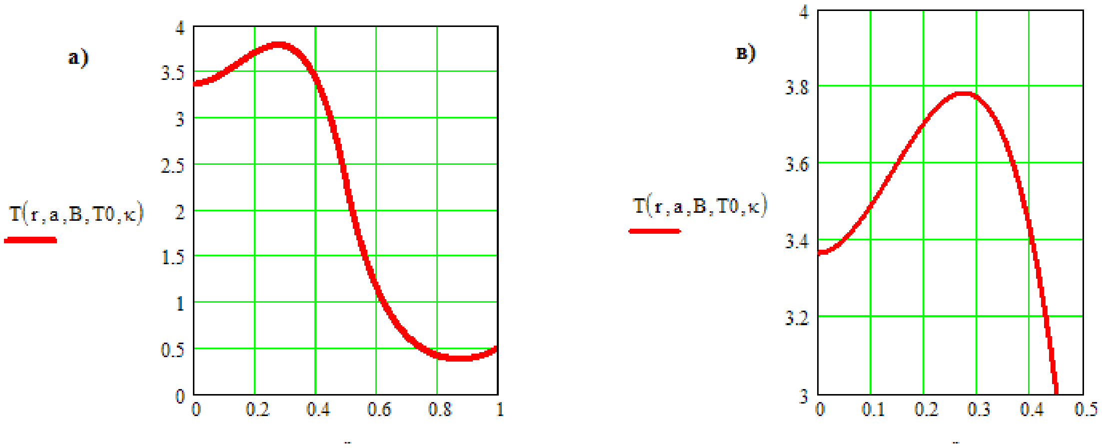

Рис. 2. Распределение температуры по радиусу колеса при $r_1 = 0.5$, вариант в) показывает локализацию температурного максимума.

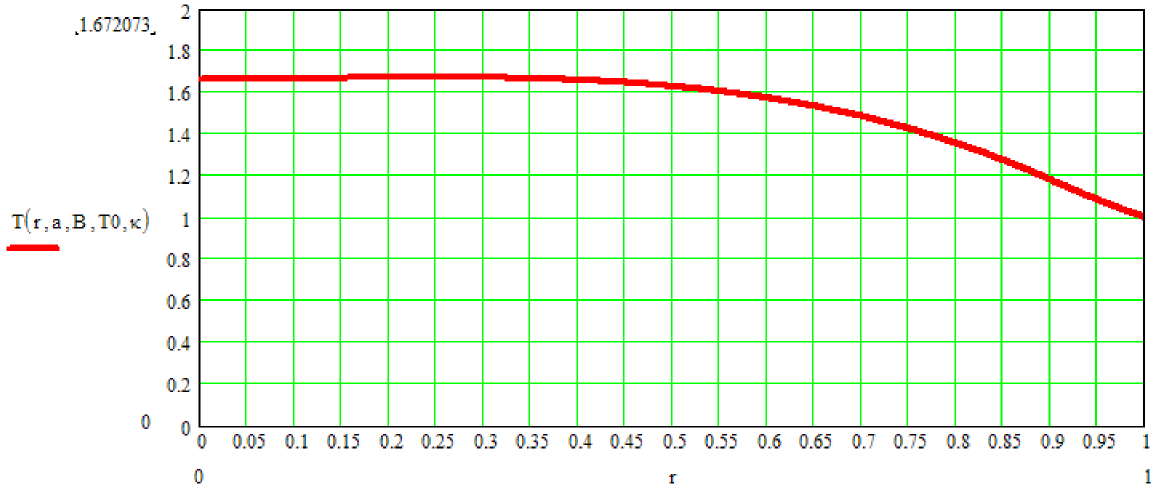

Рис. 3. Температурный график при $r_1 = 0.9$.

Рис. 3 показывает, что по мере увеличения перекрытия торца колеса тормозным диском происходит исчезновения локального температурного максимума.

Примечания:

1. Колесников В.И. Теплофизические процессы в металлополимерных трибосопряжениях. М.: Наука. 2003. 279 с.

2. Александров В.М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / Е.В. Коваленко. М.: Наука. 1986. 336 с.

3. Зино И.Е. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости / Э.А. Тропп. Л.: изд-во Ленинград. гос. ун-та. 1978. 224 с.

4. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1981. 400 с.

5. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Д. Егер. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1964. 488 с.
6. Мотовиловец И.А. Теплопроводность пластин и тел вращения. Киев: Наукова думка. 1969. 144 с.
7. Fox E.N. Two problems arising in practical applications of heat theory // Phil. Mag. 1034. Vol. 118. P. 209-227.

УДК 51-74/536.21

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕМСЯ КОЛЕСЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ДИСКОВЫМ ТОРМОЗОМ

[1] Анатолий Иванович Задорожный
[2] Игорь Владимирович Колесников

[1] Южный федеральный университет
344049, г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 148
Доктор физико-математических наук, профессор.
E-mail: simon@sfedu.ru
[2] РГУПС, Ростов-на-Дону, Россия.
Кандидат технических наук, доцент

В статье рассмотрена осесимметричная смешанная стационарная задача теплопроводности для системы «колесо-дисковый тормоз». Решение проведено методами осреднения Фокса и сращивания решений на линии раздела граничных условий.

Ключевые слова: дисковый тормоз, уравнение теплопроводности, смешанная краевая задача, метод осреднения Фокса.