

UDC 51-77

## MATHEMATICAL MODELING LABOR MARKET PROCESSES BY THE EXAMPLE OF UNEMPLOYMENT

<sup>1</sup> Eugeny A. Pitukhin  
<sup>2</sup> Viktoriya A. Golubenko

<sup>1</sup> Petrozavodsk State University  
33, Lenin street, Petrozavodsk, 185910  
Doctor of Technical Sciences  
E-mail: Eugene@psu.karelia.ru

<sup>2</sup> Petrozavodsk State University  
33, Lenin street, Petrozavodsk, 185910  
Junior Research Fellow, Budget Monitoring Center  
E-mail: golubenko@psu.karelia.ru

The officially registered unemployed dynamics in Russia is considered. Based on the second order differential equation, econometric analysis of unemployment is carried. Then using logistic functions, seasonal component decomposition takes place. As a result of synthesis, the mathematical model of the seasonal component dynamics has been created depending on the relevant factors which adequately describe the process on Russian labor market.

**Keywords:** Unemployment modeling, econometric analysis, dismissal, employment, labor market, logistic curve.

Анализ динамики численности официально зарегистрированных безработных (ОЗБ) предлагается рассматривать в зависимости от значимых факторов, что позволит понять сущность безработицы и природу процессов, формирующих ее. В процессе исследования используется динамика численности официально зарегистрированных безработных граждан Российской Федерации в период с августа 2001 по декабрь 2008 гг. включительно [1].

В ходе эконометрического анализа получена функция тренда для анализируемого временного ряда при помощи аппроксимации квадратичной функцией, проходящей по ежегодным локальным минимумам. В результате уравнение параболы  $y_{tr}(t)$ , описывающее долговременный фактор, влияющий на динамику численности ОЗБ РФ, выглядит следующим образом:

$$y_{tr}(t) = at^2 + bt + c, \text{ где } a = -0.3; b = 30 \text{ [тыс.чел./мес]; } c = 926 \text{ [тыс.чел]}$$

Циклическая (конъюнктурная) составляющая  $y_c(t)$  была получена с помощью аппроксимации исходных данных синусоидой, уравнение которой имеет вид:

$$y_c(t) = A \sin(\omega t + d) + s, \text{ где } A = 912.6 \text{ [тыс.чел.]; } \omega = 0.03 \Rightarrow$$

$$T = 212 \text{ [мес.]; } d = 100.64; s = 893.5$$

Круговая частота колебаний равна 0.03, что соответствует периоду в 18 лет. Согласно классификации экономических циклов, такой период подпадает во временной промежуток цикла Кузнеца [2].

После удаления из исходных данных долговременного фактора  $y_{tr}(t)$ , оказывающего влияние на значения рассматриваемого временного ряда, остается ряд, который хорошо аппроксимируется синусоидальной функцией.

В результате чего, удается выделить сезонную составляющую  $y_s(t)$ , с периодом равным 12 месяцев.

Уравнение синусоиды:

$$y_s(t) = A\sin(\omega t + d) + s, \text{ где } A = 98 [\text{тыс.чел.}]; \omega = 0.53 \Rightarrow$$

$$T = 12[\text{мес.}]; d = -22; s = 92$$

На рис. 1 этот ряд представлен в нижней части графика и отчетливо показывает периодическую структуру рассматриваемой динамики, что исходные данные в верхней части графика отражают слабо.

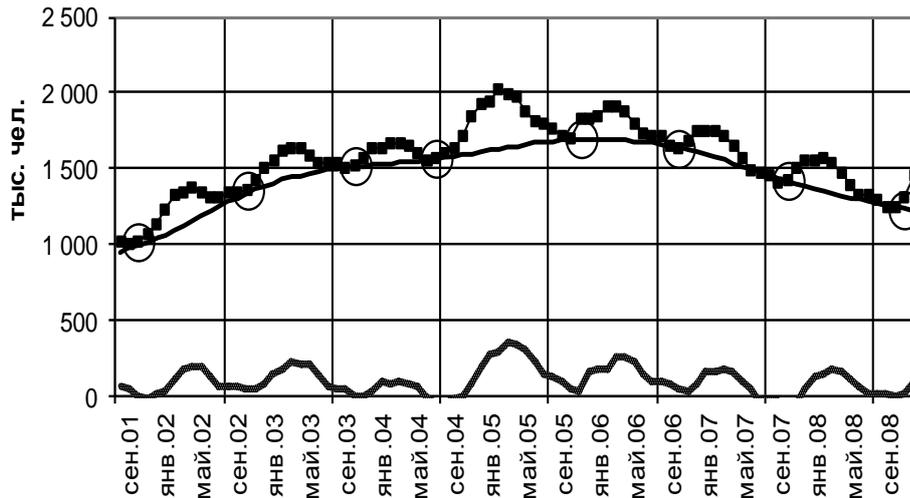


Рис. 1. Динамика численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ и выделенные в ней долговременных (тренда) и циклических (сезонных) составляющих (квадратные маркеры – численность ОЗБ РФ, аппроксимация – сплошная линия, о – локальные минимумы значений численности официально зарегистрированных безработных, внизу рисунка изображена разность исходных данных и аппроксимации)

Итоговая приведенная форма математической модели безработицы  $y(t)$  зависит только от экзогенного параметра (времени) и включает две группы основных факторов – тренд  $y_{tr}(t)$  и сезонность  $y_s(t)$ :  $y(t) = y_{tr}(t) + y_s(t)$

Итоговое уравнение имеет вид:

$$y(t) = 98\sin(0.53t - 22) - 0.3t^2 + 30t + 1018$$

Для найденного решения строится исходная модель в виде ОДУ второго порядка:

$$y(t)'' + \omega^2 y(t) = -0.0842t^2 + 8.43t + 285.36, \text{ где } \omega = 0.53 \tag{1}$$

С помощью замены переменных совершается переход от уравнения (1) к системе из двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} U1' \\ U2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U1 \\ U2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, \text{ где } p = -0.0842t^2 + 8.43t + 285.36$$

Данная модель включает две переменные, первая из которых  $U1$  соответствует  $u(t)$  – официально зарегистрированным безработным РФ, а  $U2$  – является производной от  $U1$ .

Для экономической интерпретации переменных  $U1$  и  $U2$  необходимо выразить их через независимые, влияющие на них экзогенные факторы.

Таковыми факторами, очевидно, являются процессы трудоустройства и увольнения, происходящие на рынке труда. Пусть  $R(t)$  – ежемесячная численность уволенных граждан с рынка труда РФ (тыс. чел.), которая способствует увеличению численности официально зарегистрированных безработных РФ. Пусть  $E(t)$  – численность трудоустроившихся граждан РФ (тыс. чел.), вызывающая уменьшение численности безработных.

Тогда, если обозначить за  $U(t)$  численность официально зарегистрированных безработных граждан РФ (тыс.чел.), то основное уравнение, связывающее указанные выше процессы, будет иметь вид

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{dE}{dt}. \quad (2)$$

Уравнение (2) определяет допущение, что прирост численности безработных равен разности между приростом численности уволенных и приростом численности трудоустроенных граждан на рынке труда.

Функциональную зависимость данных экзогенных факторов предлагается описать логистическим законом в виде:

$$R(t) = \frac{k_1 R_0 e^{\lambda t}}{k_1 + R_0 (e^{\lambda t} - 1)}, \quad E(t) = \frac{k_2 E_0 e^{\lambda_2 t}}{k_2 + E_0 (e^{\lambda_2 t} - 1)}.$$

Для связи процессов увольнения и трудоустройства принимается гипотеза, что годовой цикл этих процессов, вследствие которых происходит изменение численности безработных, состоит из двух этапов: на этапе I с ноября по май (не включительно) происходят одни увольнения  $R(t) \neq 0$ , но не происходят трудоустройства ( $E(t) = 0$ ); на этапе II с мая по ноябрь (не включительно) происходят только трудоустройства  $E(t) \neq 0$ , а увольнений нет ( $R(t) = 0$ ).

На рис. 2 схематично показаны два выше упомянутых этапа одногодичного цикла моделирования численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ. Начало цикла – ноябрь 2002 г., конец – ноябрь 2003 г ( $n$ –порядковый номер годового цикла).

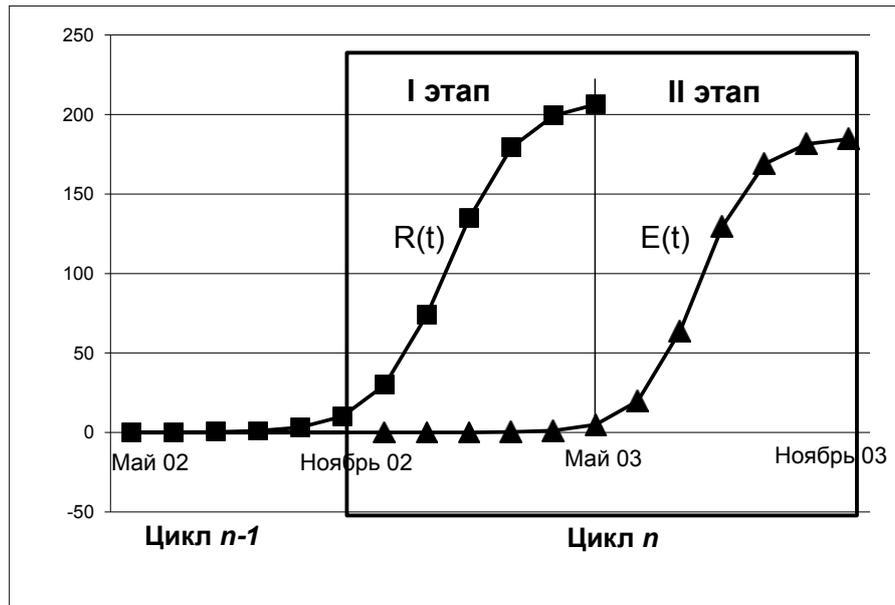


Рис. 2. Взаимосвязь циклических процессов увольнения и трудоустройства

Интегрируя уравнение (2), получим одно из его частных решений:

$$U(t) = U_0 + R(t) - E(t), \quad (3)$$

где  $U_0$  – начальное значение для уровня безработицы.

Уравнение (3), с учетом допущения, что процесс трудоустройства  $E(t)$  запаздывает на  $\tau = 6$  месяцев относительно  $R(t)$ , записывается в пределах целого цикла в виде двух раздельных уравнений для первого и второго этапа

$$\begin{cases} U^I(t) = U_0^I + R(t) - E(t - \tau) \\ U^{II}(t) = U_0^{II} + R(t - T) - E(t - \tau) \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку функции  $R(t)$  и  $E(t)$  имеют разрывы первого рода, их следует раздельно интегрировать на участках, не содержащих разрывов, передавая конечное значение на этапе I в качестве начального значения на этапе II.

Следует отметить, что формула (4) справедлива в пределах рассмотрения одного цикла. Переходя к общему случаю, для реализации цикличности функции  $R(t)$  и  $E(t)$  могут быть записаны с учетом периодичного аргумента:

$$R(t) = R(t + n \cdot T), E(t) = E(t + n \cdot T) | t \in 0, T, n \in \mathbf{Z}.$$

На основе моделирования на всех временных промежутках годовой длины в диапазоне 2001–2008 годы, был получен результат, приведенный на рис. 3.

Значения параметров логистических кривых, используемые при расчете, индивидуально подбирались для каждого года. Средняя ошибка аппроксимации составляет 11 %.

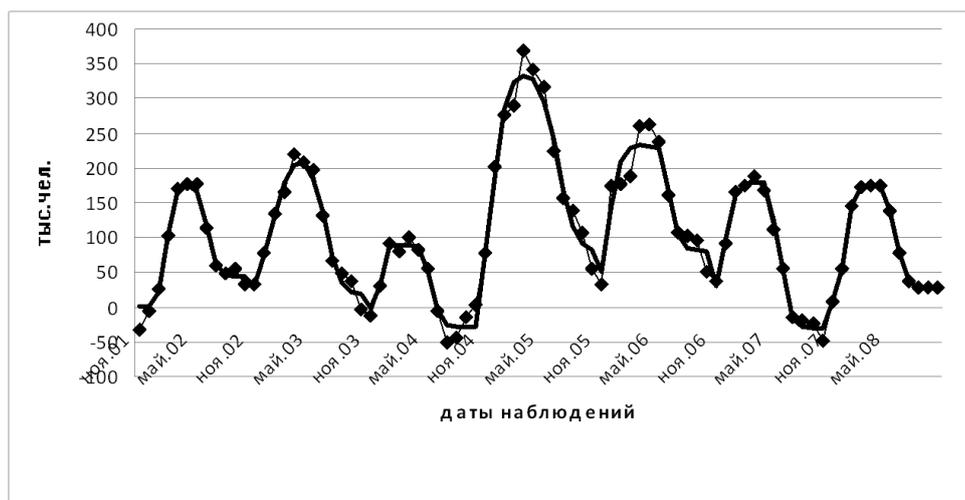


Рис. 3. Циклическая составляющая численности официально зарегистрированных безработных граждан (точки) и ее моделирование логистическими кривыми Ферхюльста (сплошная линия)

Следует отметить, что моделирование циклической составляющей официально зарегистрированных безработных граждан логистическими кривыми (рис. 3), по сравнению с принятым моделированием гармонической функцией, является более предпочтительным, поскольку базируется на экономической интерпретации процессов, происходящих на рынке труда.

В дальнейшем процессы увольнения и трудоустройства могут быть представлены как результат воздействия значимых экзогенных факторов, влияющих на рынок труда, таких, как выпускники системы профессионального образования, переподготовленные безработные, трудовые мигранты, ВВП, инвестиции в основной капитал, цена труда и т.д.

#### Примечания:

1. Обследование населения по проблемам занятости (2006–2009): Стат. сб. / Росстат. М. Официальный сайт Федеральной службы по труду и занятости [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.rostrud.ru>.

2. Полетаев А.В., Савельева И.М. «Циклы Кондратьева» в исторической ретроспективе. М.: ЗАО «Юридический Дом «Юстицинформ», 2009. 272 с.: рис., табл.

УДК 51-77

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НА РЫНКЕ ТРУДА НА ПРИМЕРЕ БЕЗРАБОТИЦЫ

<sup>1</sup> Евгений Александрович Питухин  
<sup>2</sup> Виктория Александровна Голубенко

<sup>1</sup> Петрозаводский государственный университет  
185910, г. Петрозаводск, пр-т. Ленина, 33  
зав. кафедрой математического моделирования систем управления  
доктор технических наук  
E-mail: Eugene@psu.karelia.ru

<sup>2</sup> Петрозаводский государственный университет  
185910, г. Петрозаводск, пр-т. Ленина, 33  
младший научный сотрудник  
E-mail: golubenko@psu.karelia.ru

Исследуется динамика численности официально зарегистрированных безработных граждан РФ. Проводится эконометрический анализ безработицы на основе дифференциального уравнения второго порядка с последующей декомпозицией ее сезонной составляющей с помощью логистических функций. В результате синтеза получена математическая модель изменения сезонной составляющей численности безработных на рынке труда от значимых факторов, адекватно описывающая данный процесс.

**Ключевые слова:** Моделирование безработицы, эконометрический анализ, увольнение, трудоустройство, рынок труда, логистическая кривая.