



**Revista MICA.**  
**Volumen 3 No. 3.**  
**ISSN: 2594-1933**  
**Periodo: Enero – Junio 2019**  
**Tepic, Nayarit. México**  
**Pp. 27 - 47**  
**Recibido: 2019-03-12**  
**Aprobado: 2019-05-23**

**Análisis de modelos matemáticos para el comportamiento de dos microorganismos en un proceso de fermentación.**

**Analysis of mathematical models for the behavior of two microorganisms in a fermentation process**

**Jonathan Ricardo Bahuman Moreida**  
**Universidad Autónoma de Nayarit**  
**jonabahuman@hotmail.com**

**Roberto Alonso Saenz Casas**  
**Universidad Autónoma de Colima**  
**rsaenz@uacol.mx**

# **Análisis de modelos matemáticos para el comportamiento de dos microorganismos en un proceso de fermentación.**

**Analysis of mathematical models for the behavior of two microorganisms in a fermentation process.**

**Autores**

**Jonathan Ricardo Bahuman Moreida**  
**Universidad Autónoma de Nayarit**  
**jonabahuman@hotmail.com**

**Roberto Alonso Saenz Casas**  
**Universidad Autónoma de Colima**  
**rsaenz@uocol.mx**

## **Resumen**

El comportamiento de los microorganismos que interactúan en un proceso de fermentación requiere de la utilización de diferentes modelos matemáticos. Para el análisis de dos microorganismos en un proceso de fermentación se proponen tres modelos matemáticos, con el objetivo de analizar la interacción que desempeñan las bacterias en el medio donde se desarrollan. Para cada modelo se cuantificó Biomasa, Sustratos y Productos. Se utilizan tablas y gráficas de los modelos propuestos para observar el comportamiento que efectúan dos microorganismos en un proceso de fermentación.

**Palabras clave:** Contiene de 2 a 5 palabras claves en español.

## **Palabras clave.**

Fermentación, modelos, microorganismos.

## **Abstract**

The behavior of microorganisms that interact in a fermentation process requires the use of different mathematical models. For the analysis of two microorganisms in a fermentation process, three mathematical models are proposed, with the aim of analyzing the interaction that bacteria play in the environment where they develop. Biomass, Substrates and Products were quantified for each model. Tables and graphs of the proposed models are used to observe the behavior of two microorganisms in a fermentation process.

## **Keywords:**

Fermentation, models, microorganisms.

## Introducción

La fermentación es un proceso natural que ocurre en determinados compuestos o electos a partir de la acción de diferentes actores y que se podría simplificar como un proceso de oxidación incompleta. La fermentación es el proceso que se da en algunos alimentos tales como el pan, las bebidas alcohólicas, el yogurt, etc., y que tiene como agente principal a la levadura o a diferentes compuestos químicos que suplen su acción.

La fermentación es realizada por diferentes bacterias y microorganismos en medios anaeróbicos, es decir, en los que falta aire, por eso es un proceso de oxidación incompleta. Las bacterias o microorganismos, así como también las levaduras, se alimentan de algún tipo de componente natural y se multiplican, cambiando la composición de producto inicial (Cecilia, 2010).

En los procesos de fermentación interactúan microorganismos que realizan cambios fisicoquímicos que hacen posible la producción de etanol. Los microorganismos interactúan con una sustancia llamada sustrato (Glucosa) que es su principal fuente de alimento y medio donde se desarrollan.

Un ejemplo notorio es la fermentación de la savia de palma de coco (tuba) este proceso se ha venido manifestando durante el transcurso del tiempo y se le conoce como “alimento fermentado tradicional”. El proceso de fermentación se ha transmitido de generación tras generación por nuestros ancestros como una costumbre, sin tomar en cuenta el comportamiento microbiano existente. La savia de casi todas las especies de palmas de coco también se transforma en vinagre, en vinos locales y en otras bebidas fermentadas, al igual que en vinos destilados con el 57.19 % de grados de alcohol. Durante el proceso espontaneo de fermentación de la savia de palma de coco se sintetiza alcohol en una primera etapa, posteriormente este es transformado a vinagre debido a la acción de bacterias que pertenecen al género *Acetobacter*, una porción de etanol se oxida y se forma ácido acético/vinagre (Jacobo, 2018).

Planteamiento del problema:

En la fermentación de la savia de palma de coco actúan varios microorganismos, como levaduras y distintas bacterias, que sintetizan diversos productos (etanol, ácido láctico, ácido acético).

Existen modelos matemáticos de procesos de fermentación que consideran solo a un microorganismo, entonces nuestro objetivo es proponer nuevos modelos matemáticos en donde se considere la interacción de dos microorganismos en un proceso de fermentación. La mayor problemática consiste en proponer modelos matemáticos que nos faciliten estudiar el comportamiento de dos bacterias en un proceso de fermentación.

### **Revisión bibliográfica**

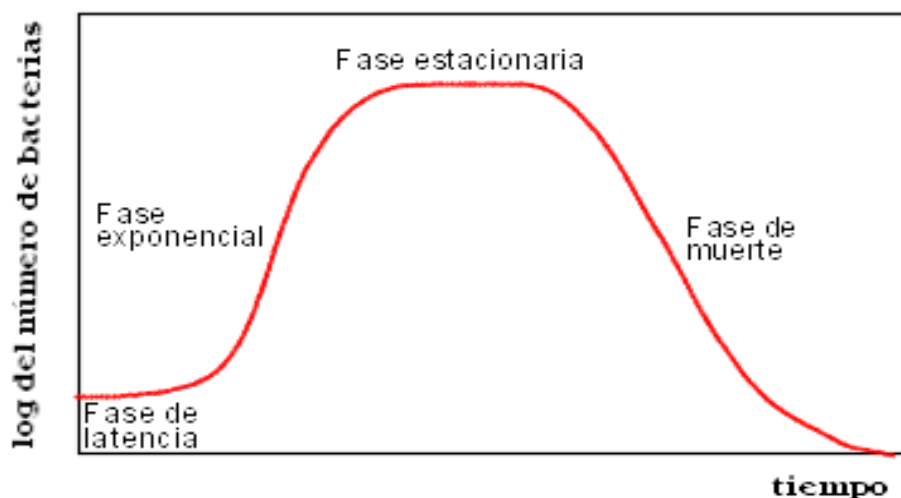
Crecimiento microbiano:

El crecimiento microbiano es un proceso auto catalítico: el crecimiento depende de la viabilidad celular y la tasa de crecimiento aumentara de acuerdo con la cantidad de biomasa viable presente. La pauta de crecimiento es la misma para bacterias y para hongos.

Un análisis simple de la curva de crecimiento puede diferenciar tres fases principales. En la fase de latencia no existe crecimiento visible mientras el microorganismo se adapta al medio y se generen condiciones para su multiplicación. Esta fase de latencia se puede alargar bajo ciertos factores de crecimiento (pH, nutrientes, temperatura). Al término de la fase de latencia inicia la fase exponencial, que se caracteriza por una alta actividad fisiológica, se produce un aumento en el número de células hasta que se agotan los nutrientes y el medio se deteriora, lo que da lugar a la fase estacionaria. La velocidad de crecimiento comienza a disminuir hasta hacerse nula cuando alcanza la fase estacionaria, ya que cambios en la composición y concentración de nutrientes entre el cultivo del inóculo y el medio fresco pueden desencadenar el control y la regulación de la actividad enzimática.

La fase estacionaria se caracteriza por el agotamiento de sustrato o por acumulación de productos metabólicos tóxicos para la célula. También puede ser por la disminución de oxígeno, así como los cambios en las condiciones de pH del medio de cultivo (acidificación o alcalinización). En esta fase se equilibran el número de células nuevas con el número de células que mueren. Por último, el cultivo entra en la fase de muerte, en la que el número de

células que mueren se va haciendo mayor. La pendiente de esta fase puede ser más o menos pronunciada de acuerdo al tipo de microorganismo de que se trate. Suelen presentarse pendientes menos bruscas cuando el microorganismo presenta alguna forma de resistencia (por ejemplo, esporas y glicocalix). En la siguiente imagen se muestra las diferentes etapas de la vida o desarrollo de un microorganismo.



*Ilustración 1. Etapas de la vida o desarrollo de bacterias. (Oskar, 2014).*

La cuantificación de un proceso físico o químico puede realizarse mediante un modelo matemático, el cual puede describir el comportamiento del proceso. El modelo se puede expresar como un sistema de ecuaciones donde la solución está dada en términos de los datos de entrada y las condiciones iniciales del proceso generan la señal de respuesta del proceso. Los modelos se construyen a partir de datos experimentales u observaciones del proceso que se desea modelar; no existe un método único que genere un modelo completo, es decir, todos los procesos tienen sus propias características distintivas.

Para poder realizar un modelo de cualquier sistema es necesario conocer las leyes físicas, químicas o biológicas presentes durante el proceso. Los modelos biológicos contienen variables tales como sustrato  $S(t)$ , biomasa  $X(t)$ , producto  $P(t)$ ; la relación entre estos estados está dada en términos de ecuaciones de balance. (Jacobo, 2018)

Modelos matemáticos

Se ha propuesto diversos modelos matemáticos para describir el crecimiento de una población de microorganismos. Malthus describió el crecimiento de una población con la ecuación

$$\frac{dX}{dt} = \mu X$$

la ecuación es conocida como crecimiento exponencial, donde  $\mu$  es la tasa per cápita de reproducción, o velocidad de crecimiento, y  $X$  el número de individuos o biomasa. Este modelo no es preciso biológicamente durante un periodo de tiempo indefinido, ya que el crecimiento de la población de microorganismos siempre se desacelera, y eventualmente se detiene, cuando el suministro de nutrientes es limitado. (Edelstein, 2005).

El modelo logístico está definido por

$$\frac{dX}{dt} = \mu X \left(1 - \frac{X}{X_{max}}\right)$$

donde  $\mu$  es la tasa intrínseca de reproducción y  $X_{max}$  es la capacidad de carga (la cantidad máxima de microorganismos que puede sostener el sistema). Este modelo supone que la tasa de crecimiento per cápita disminuye (linealmente) cuando aumenta la población (Edelstein, 2005).

Otro tipo de modelos suponen que la tasa de crecimiento poblacional depende directamente de los nutrientes (el sustrato) disponible. De esta manera, el modelo tiene la forma

$$\frac{dX}{dt} = \mu(S)X$$

donde  $S$  es la concentración de sustrato. Por ejemplo, Blackman (1905) propuso

$$\mu(S) = \begin{cases} \mu_{max} & \text{si } S > \mu_m B \\ \frac{S}{B} & \text{si } S \leq \mu_m B \end{cases}$$

donde  $\mu_{max}$  es la tasa máxima de crecimiento y  $B$  es una constante que indica la cantidad de sustrato necesaria para alcanzar la tasa máxima.

Otros modelos describen explícitamente el consumo de sustrato. Por ejemplo, el modelo

$$\frac{dX}{dt} = \mu_{max}SX$$

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{1}{y_{x/s}} \frac{dS}{dt}$$

supone que la tasa per cápita de crecimiento del microorganismo es proporcional a la concentración de sustrato y que  $\frac{1}{y_{x/s}}$  unidades del sustrato son consumidas para producir un incremento de una unidad de la población de microorganismos. El parámetro  $y_{x/s}$  es llamado el rendimiento del sustrato.

Monod et al. (1965) propusieron la función

$$\mu(s) = \frac{\mu_{max}S}{K_S + S}$$

para describir la tasa de crecimiento per cápita de la población (Monod, 1965). Esta función es análoga a la ecuación de Michaelis-Menten para reacciones enzimáticas. En este modelo,  $\mu_{max}$  es la tasa máxima de crecimiento y  $K_S$  es una constante de saturación (la concentración de sustrato para la cual  $\mu(S) = \mu_{max}/2$ ) (Monod, 1965).

La ecuación de Tessier

$$\mu(s) = \mu_{max} \left( 1 - \exp \left( -\frac{S}{K_{sx}} \right) \right)$$

describe una caída (aumento) exponencial hacia su valor de saturación.

Por otro lado, la ecuación de Haldane

$$\mu(s) = \left( \frac{\mu_{max}S}{K_S + S + \frac{S^2}{K_i}} \right)$$

describe una inhibición en el crecimiento de la biomasa para cantidades grandes de sustrato. El parámetro  $K_i$  es llamado la constante de inhibición.

La tasa de cambio de la concentración de sustrato está dada por la siguiente ecuación

$$\frac{dS}{dt} = \left( -\frac{1}{Y_x^s} \frac{dX}{dt} + \frac{m_s}{\mu} \frac{dX}{dt} \right)$$

(Jacobo, 2018)

### Metodología

Los microorganismos utilizan el proceso de fermentación como mecanismo para producir etanol. Para describir el análisis de los microorganismos en el proceso de fermentación, se proponen cuatro modelos que describen el comportamiento microbiano en la producción de etanol. Para el análisis de los cuatro modelos se hizo uso de las siguientes variables:

$X(t)$ ,  $Z(t)$ ,  $P(t)$ ,  $M(t)$ ,  $S(t)$  y  $G(t)$ . Donde  $X(t)$  y  $Z(t)$  son biomasa,  $P(t)$  y  $M(t)$  es producto,  $S(t)$  sacarosa y  $G(t)$  glucosa.

Los términos que forman los modelos son las siguientes:

La ecuación  $\mu_{max} \left( \frac{S}{K_S+S} \right)$  se utilizó para describir la tasa per cápita de crecimiento de la población. Donde  $\mu_{max}$  es la tasa máxima de crecimiento y  $K_S$  es una constante de saturación.  $-\left( \frac{1}{Y_{XS}} \right) \left( \frac{dX}{dt} \right)$  Esta función nos permite determinar el consumo que realiza el microorganismo de sustrato o de la glucosa según sea el caso.  $V_m$  Es la tasa máxima de hidrólisis.  $\left( \frac{K_i}{K_i+M} \right)$  Esta función nos permite determinar inhibición por producto para el crecimiento de biomasa.

Cuando uno de nuestro microorganismo comienza a producir hidrólisis de sacarosa la ecuación utilizada para la tasa de cambio es:

$$\frac{dS}{dt} = -V_m X \left( \frac{S}{K_m + S} \right)$$



La cual nos dice que las moléculas de sacarosa son hidrolizadas por nuestros microorganismos.

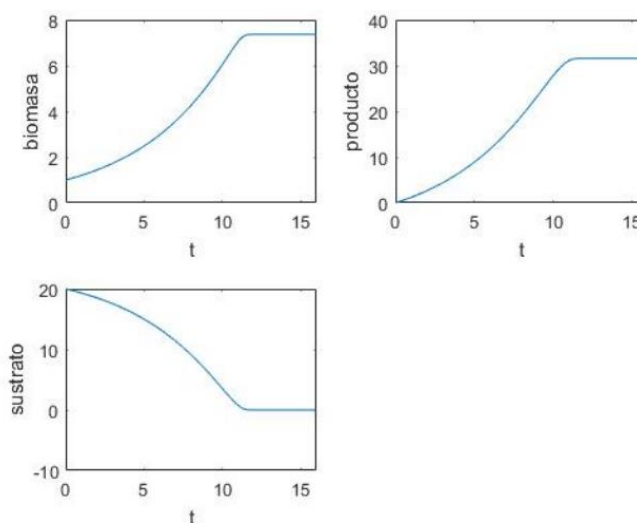
Para hacer el estudio de los modelos matemáticos se utilizó el método de cambio de valores de los parámetros y cambio de condiciones iniciales.

**En el primer modelo (modelo de Monod)**, la formación de producto depende principalmente de la concentración de sustrato límite y de algunos parámetros como la constante de saturación y la constante de velocidad específica. Se tomó en cuenta el uso de parámetros para analizar el comportamiento de dicho microorganismo. Se observó que el microorganismo crece produciendo etanol hasta llegar a su punto límite de saturación.

$$\frac{dX}{dt} = m_{max} \left( \frac{S}{K_{sx} + S} \right) X$$

$$\frac{dP}{dt} = q_{max} \left( \frac{S}{K_{sp} + S} \right) X$$

$$\frac{dS}{dt} = - \left( \frac{1}{Y_{xs}} \frac{dX}{dt} \right)$$



**Ilustración 2. Resultados del modelo 1.**

Los siguientes modelos fueron analizados por medios del cambio de parámetros y condiciones iniciales.

**En el segundo modelo (modelo con dos microorganismos)**, se analizó el proceso de fermentación con dos microorganismos  $X$  y  $Z$  los cuales producen dos tipos de producto, el microorganismo  $X$  etanol y el microorganismo  $Z$  ácido láctico. Se hizo el análisis por medio de 5 ecuaciones diferenciales que describen el proceso de fermentación. En donde se tomó en cuenta el rendimiento del sustrato, tasa máxima de crecimiento de los microorganismos y rendimiento de la hidrólisis de sacarosa. Se analizó el comportamiento dividiéndolo en cuatro casos donde se le asignó diferentes valores a los parámetros establecidos de las ecuaciones diferenciales, para observar el comportamiento.

Los dos microorganismos estrechamente relacionados solo con consumo de sustrato. Las variables consideradas para el modelo 2 son:

$X$  = Biomasa1,  $P$  = Producto1,  $Z$  = Biomasa2,  $M$  = Producto2,  $S$  = Sustrato (Glucosa).

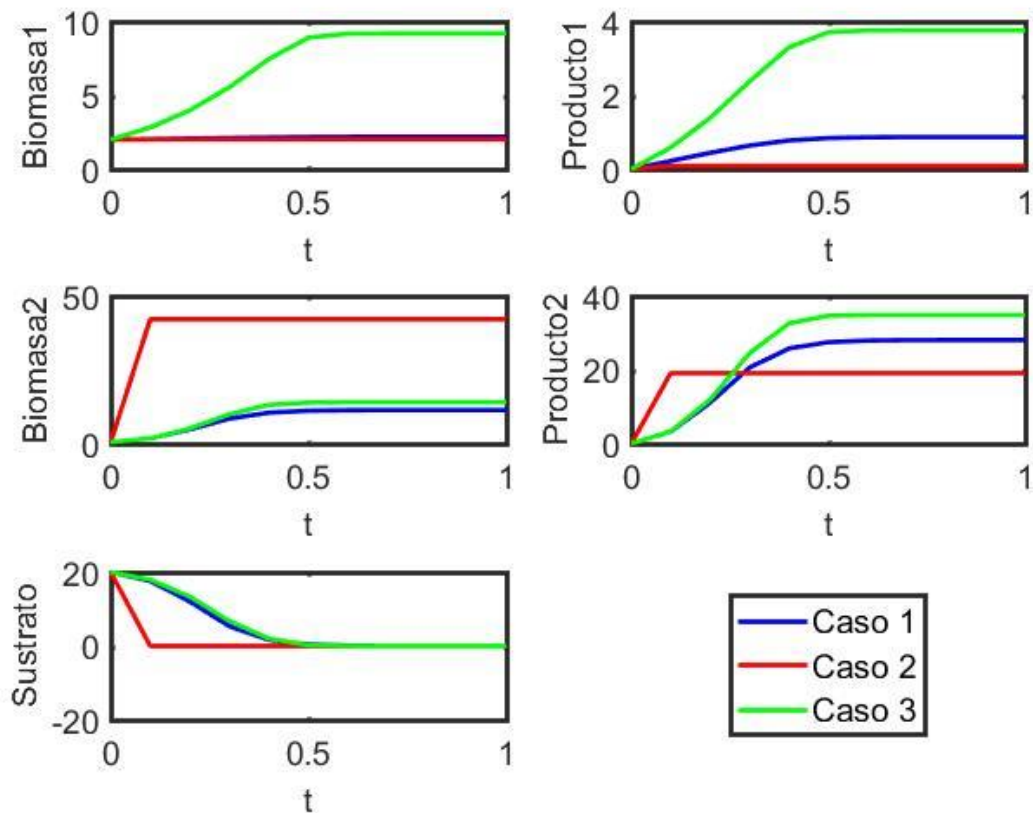
$$\frac{dX}{dt} = m_{max} \left( \frac{S}{K_{sx} + S} \right) X$$

$$\frac{dP}{dt} = q_{max} \left( \frac{S}{K_{sp} + S} \right) X$$

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha_{max} \left( \frac{S}{K_{sz} + S} \right) Z$$

$$\frac{dM}{dt} = h_{max} \left( \frac{S}{K_{sm} + S} \right) Z$$

$$\frac{dS}{dt} = - \left( \frac{1}{Y_{xs}} \frac{dX}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{ps}} \frac{dP}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{sz}} \frac{dZ}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{ms}} \frac{dM}{dt} \right)$$



**Ilustración 3. Graficas de resultados del modelo 2.**

Caso1 (color azul) se le asignaron valores iguales a los parámetros de Biomasa y Producto para los dos microorganismos. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 1.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	0.186
$k_{sx}$	0.390
$q_{max}$	1.27
$k_{sp}$	2.88
$\alpha$	0.186
$k_{sz}$	0.390
$h_{max}$	1.27

$k_{sm}$	2.88
$y_{xs}$	2
$y_{ps}$	2
$y_{ms}$	2
$y_{sz}$	2

Caso2 (color rojo), el valor de los parámetros de Biomasa 2 y Producto 2 son el doble de grande que Biomasa 1 y producto 1. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 2.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	0.186
$k_{sx}$	0.390
$q_{max}$	1.27
$k_{sp}$	2.88
$\alpha$	3.6
$k_{sz}$	0.8
$h_{max}$	3
$k_{sm}$	4.2
$y_{xs}$	4
$y_{ps}$	2
$y_{ms}$	2
$y_{sz}$	4

Caso3 (color verde), Biomasa 1 y Producto 1 con valores en los parámetros el doble de grandes que Biomasa 2 y Producto 2. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 3.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	3.6

$k_{sx}$	0.8
$q_{max}$	3
$k_{sp}$	4.2
$\alpha$	0.186
$k_{sz}$	0.390
$h_{max}$	1.27
$k_{sm}$	2.88
$y_{xs}$	2
$y_{ps}$	4
$y_{ms}$	4
$y_{sz}$	2

**En el tercer modelo (modelo con dos microorganismos donde solo uno produce hidrólisis de sacarosa)**, al igual que en el modelo 2, cuenta dos microorganismos  $X$  y  $Z$  solo que en este modelo el microorganismo  $X$  produce hidrólisis de sacarosa haciendo que el microorganismo  $Z$  se aproveche de la producción del microorganismo  $X$  consumiendo la glucosa que este produce. Se observó que el crecimiento de la biomasa es proporcional al crecimiento de producto y su punto límite de crecimiento está determinado por el valor de la tasa máxima de crecimiento.

Las variables consideradas para el modelo 3 son:  $X$  = Biomasa1,  $P$  = Producto1,

$Z$  = Biomasa2,  $M$  = Producto2,  $G$  = Sustrato (Glucosa) y  $S$  = Sacarosa.

$$\frac{dX}{dt} = m_{max} \left( \frac{G}{K_{sx} + G} \right) X$$

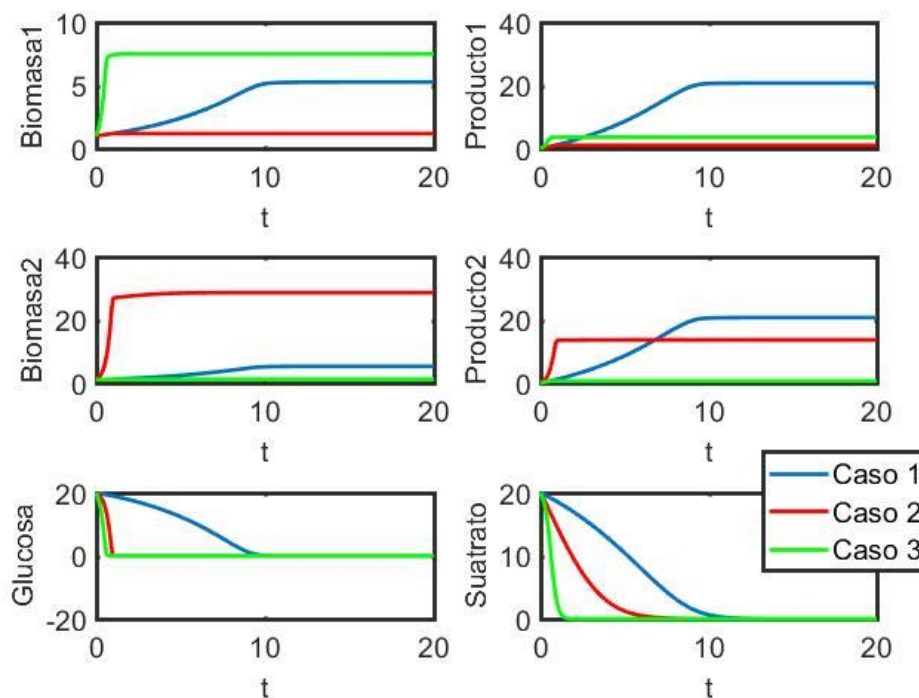
$$\frac{dP}{dt} = q_{max} \left( \frac{G}{K_{sp} + G} \right) X$$

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha_{max} \left( \frac{G}{K_{sz} + G} \right) Z$$

$$\frac{dM}{dt} = h_{max} \left( \frac{G}{K_{sm} + G} \right) Z$$

$$\frac{dS}{dt} = V_m X \left( \frac{S}{K_{sm} + S} \right)$$

$$\frac{dG}{dt} = - \left( \frac{1}{Y_{xs}} \frac{dX}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{ps}} \frac{dP}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{sz}} \frac{dZ}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{ms}} \frac{dM}{dt} \right) + K V_m X \left( \frac{S}{K_{sm} + S} \right)$$



**Ilustración 4. Graficas de resultados de modelo 3.**

Caso1 (color azul) se le asignaron valores iguales a los parámetros de Biomasa y Producto para los dos microorganismos. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 1.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	0.186

$k_{sx}$	0.390
$q_{max}$	1.27
$k_{sp}$	2.88
$\alpha$	0.186
$k_{sz}$	0.390
$h_{max}$	1.27
$k_{sm}$	2.88
$y_{xs}$	2
$y_{ps}$	2
$y_{ms}$	2
$y_{sz}$	2
$v_m$	2
$kv_m$	0.5
$k_m$	10

Caso2 (color rojo), el valor de los parámetros de Biomasa2 y Producto2 son el doble de grande que Biomasa1 y producto1. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 2.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	0.186
$k_{sx}$	0.390
$q_{max}$	1.27
$k_{sp}$	2.88
$\alpha$	3.6
$k_{sz}$	0.4
$h_{max}$	3
$k_{sm}$	4.6

$y_{xs}$	2
$y_{ps}$	2
$y_{ms}$	2
$y_{sz}$	2
$v_m$	8
$kv_m$	0.5
$k_m$	10

Caso3 (color verde), Biomasa1 y Producto1 con valores en los parámetros el doble de grandes que Biomasa2 y Producto2. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 3.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	3.6
$k_{sx}$	0.8
$q_{max}$	3
$k_{sp}$	4.2
$\alpha$	0.186
$k_{sz}$	0.390
$h_{max}$	1.27
$k_{sm}$	2.88
$y_{xs}$	0.5
$y_{ps}$	0.5
$y_{ms}$	0.66
$y_{sz}$	0.66
$v_m$	8
$kv_m$	0.5
$k_m$	10



**El modelo 4 (inhibición por producto para el crecimiento de biomasa)**, es muy parecido al modelo 3 solo que en este modelo el primer microorganismo tiene inhibición por producto para el crecimiento de biomasa  $\left(\frac{K_i}{K_i+M}\right)$ . Se analizó estos modelos en 5 casos, donde se le asignaron valores distintos a la constante de inhibición  $K_i$  y se hizo uso de diferentes condiciones iniciales. Se observó que a pesar de tener inhibición por producto para el crecimiento de biomasa en el primer microorganismo no afectaba a la producción final de etanol.

Las variables consideradas para el modelo 2 son: X = Biomasa1, P = Producto1, Z = Biomasa2, M = Producto2, G = Sustrato (Glucosa) y S = Sacarosa

$$\frac{dX}{dt} = m_{max} \left( \frac{G}{K_{sx} + G} \right) \left( \frac{K_i}{K_i + M} \right) X$$

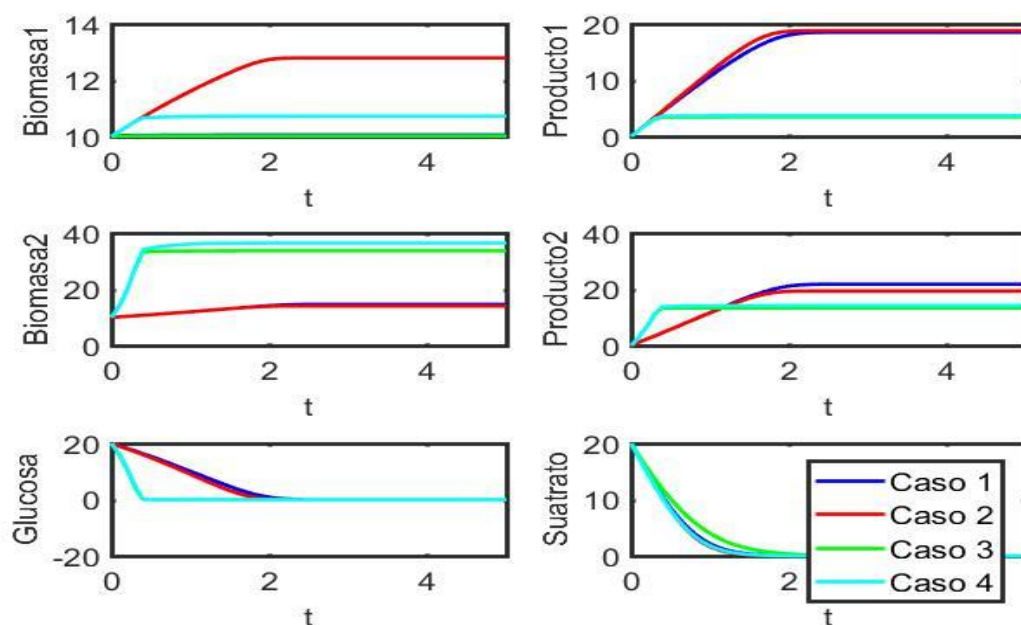
$$\frac{dP}{dt} = q_{max} \left( \frac{G}{K_{sp} + G} \right) X$$

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha_{max} \left( \frac{G}{K_{sz} + G} \right) Z$$

$$\frac{dM}{dt} = h_{max} \left( \frac{G}{K_{sm} + G} \right) Z$$

$$\frac{dS}{dt} = V_m X \left( \frac{S}{K_{sm} + S} \right)$$

$$\frac{dG}{dt} = - \left( \frac{1}{Y_{xs}} \frac{dX}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{ps}} \frac{dP}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{sz}} \frac{dZ}{dt} \right) - \left( \frac{1}{Y_{ms}} \frac{dM}{dt} \right) + K V_m X \left( \frac{S}{K_{sm} + S} \right)$$



**Ilustración 5. Graficas de resultados modelo 4.**

Caso 1 (color azul) se le asigna un valor menor que cero a la constante de inhibición y valor de los parámetros de Biomasa 1, Producto 1, Biomasa 2 y Producto 2 iguales. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 1.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	0.186
$k_{sx}$	0.390
$q_{max}$	1.27
$k_{sp}$	2.88
$\alpha$	0.186
$k_{sz}$	0.390
$h_{max}$	1.27
$k_{sm}$	2.88
$y_{xs}$	2
$y_{ps}$	2
$y_{ms}$	2

$y_{sz}$	2
$v_m$	2
$kv_m$	0.5
$k_m$	10
$k_i$	0.05

Caso 2 (color rojo) se le asigna un valor mayor que cero a la constante de inhibición  $k_j$  y el valor de los parámetros de Biomasa 1, Producto 1, Biomasa 2 y Producto 2 iguales. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 2.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	0.186
$k_{sx}$	0.390
$q_{max}$	1.27
$k_{sp}$	2.88
$\alpha$	0.186
$k_{sz}$	0.390
$h_{max}$	1.27
$k_{sm}$	2.88
$y_{xs}$	2
$y_{ps}$	2
$y_{ms}$	2
$y_{sz}$	2
$v_m$	2
$kv_m$	0.5
$k_m$	10
$k_i$	25

Caso 3 (color verde) constante de inhibición  $k_j$  menor a cero y con parámetros el doble de grandes de Biomasa 2 y Producto 2 comparados con Biomasa 1 y Producto 1. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 3.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	0.186
$k_{sx}$	0.390
$q_{max}$	1.27
$k_{sp}$	2.88
$\alpha$	3.6
$k_{sz}$	0.8
$h_{max}$	3
$k_{sm}$	4.2
$y_{xs}$	2
$y_{ps}$	2
$y_{ms}$	2
$y_{sz}$	2
$v_m$	4
$kv_m$	0.5
$k_m$	10
$k_i$	0.05

Caso 4(azul cielo), constante de inhibición  $k_j$  mayor a cero y con parámetros el doble de grandes de Biomasa 2 y Producto 2 comparados con Biomasa 1 y Producto 1. En la siguiente tabla se muestra el valor de los parámetros utilizados para el caso 4.

Parámetro	Valor
$m_{max}$	0.186
$k_{sx}$	0.390
$q_{max}$	1.27

$k_{sp}$	2.88
$\alpha$	3.6
$k_{sz}$	0.8
$h_{max}$	3
$k_{sm}$	4.2
$y_{xs}$	2
$y_{ps}$	2
$y_{ms}$	2
$y_{sz}$	2
$v_m$	4
$kv_m$	0.5
$k_m$	10
$k_i$	100

### Resultados y Conclusiones

Con la propuesta de estos modelos para el proceso de fermentación se puede analizar la interacción entre dos Microorganismos.

Si en un proceso de fermentación se tiene datos de microorganismos, entonces con ayuda de estos modelos se puede estudiar el comportamiento de dos bacterias y analizar cuál es su efectividad de producción.

### Referencias

Cecilia, B. (Agosto de 2010). *Definición ABC*. Obtenido de Definición ABC:  
<https://www.definicionabc.com/general/fermentacion.php>

Edelstein, K. (2005). *Mathematical models in biology*. SIAM.

Jacobo, A. P. ( 2018). *MODELACION MATEMATICA DEL PROCESOS DE FERMENTACION DE LA SAVIA DE PALMA DE COCO*. COLIMA.

Monod, J. W. (1965). *On the nature of allosteric transitions: a plausible model*. Journal of molecular biology.

Oskar, H. (26 de Septiembre de 2014). *Noche de los investigadores, Premio Dardos y mucho mas*. Obtenido de Noche de los investigadores, Premio Dardos y mucho

mas.: <http://lastupidezestremendamentmasinteresant.blogspot.com/2014/09/noche-de-los-investigadores-premio.html>