Historias de Matemáticas
Riemann y los Números Primos

José Manuel Sánchez Muñoz

Revista de Investigación
G.I.E Pensamient Matemátic
ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

Resumen

En el mes de noviembre de 1859, durante la presentación mensual de los informes de la Academia de Berlín, el alemán Bernhard Riemann presentó un trabajo que cambiaría los designios futuros de la ciencia matemática. El tema central de su informe se centraba en los números primos, presentando el que hoy día, una vez demostrada la Conjetura de Poincaré, puede ser considerado el problema matemático abierto más importante. El presente artículo muestra en su tercera sección una traducción al castellano de dicho trabajo.

Palabras Clave: Función Zeta, Números Primos, Hipótesis de Riemann.

1. Introducción

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Demostrar la Hipótesis de Riemann significaría un cambio profundo en la forma de entender la realidad que nos rodea. Por ello, no es extraño que sea considerado como el problema matemático abierto más importante en la actualidad. Pero su reputación ha sufrido el mismo proceso que experimentan los buenos vinos, mejorando con el tiempo, asentándose, a la espera de que la mente privilegiada de un genio pueda arrojar algo de luz sobre el halo de misterio que lo envuelve. Desde que en noviembre de 1859, el alemán Bernard Riemann publicara en la Academia de Berlín *Sobre La Cifra de Números Primos menores que una Cantidad Dada*, muchos matemáticos han intentado, hasta ahora sin éxito, demostrar el *santo grial* de las matemáticas. Pero, ¿qué esconde esta hipótesis?, ¿cuál es el motivo de su fama?, ¿qué conceptos matemáticos oculta?.

Sin lugar a duda el misterio existente en torno a los números primos alimenta la sed de respuestas.

En el año 1900, el alemán David Hilbert pronunció una conferencia durante la celebración del Congreso Internacional de Matemáticos en París. Esta intervención guiaría en cierto modo el devenir futuro de las matemáticas. En ella Hilbert enunció, lo que desde su punto de vista debían ser considerados los 23 problemas matemáticos aún no resueltos más importantes del momento, y en los que la comunidad matemática debería volcar todos sus esfuerzos, de ahí su famosa frase *"Debemos saber, y sabremos"*. El problema número 8 trataba precisamente la *Hipótesis de Riemann*, enunciada de tres modos diferentes:

David Hilbert

HR.1: *La función $Li(x)$ de Gauss está a distancia raíz cuadrada de $\pi(x)$.*

HR.2: *Las funciones $Li(x)$ de Gauss y $R(x)$ de Riemann están a una distancia de orden raíz cuadrada de $\pi(x)$.*

HR.3: *Todos los ceros no triviales de la función zeta de Riemann, definida como continuación analítica de la forma*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad Re(s) > 1$$

están en la franja crítica vertical, formada por los números complejos s tales que $Re(s) = \frac{1}{2}$, esto es, en mitad de la franja crítica.

La Hipótesis de Riemann está relacionada "genéticamente" con los números primos, que son los "átomos" de las matemáticas. Su demostración podría cambiar la forma de hacer negocios hoy en día, pues los números primos son el eje central de la seguridad en la banca y el comercio electrónico. Supondría también que habría una profundo impacto en la vanguardia de la ciencia, que afectaría a la mecánica cuántica, la teoría del caos, y el futuro de la computación. Por ello, el mismo Instituto Matemático Clay de la Universidad de Cambridge en Massachussets, anunció durante el Congreso Internacional de París el 24 de mayo de 2000, en conmemoración del centenario de la conferencia de David Hilbert, que premiaría con un millón de dólares a quien lograra demostrar cualquiera de los 7 problemas matemáticos abiertos del momento, denominados comúnmente *del milenio*[1], del que la Hipótesis de Riemann formaba

[1] Estos problemas, reducidos actualmente a 6 una vez que la *Conjetura de Poincaré*, un problema de topología geométrica, fue demostrada en noviembre de 2002 por el ruso Grigori Perelman, son los siguientes:

1. *P versus NP*. Formulado por Stephen Cook en 1971; puede ser el problema central de las Ciencias de la computación y de especial importancia para los sistemas criptográficos utilizados en la actualidad. Consiste en demostrar que en determinados problemas es mucho más difícil encontrar una solución que comprobar si una solución es correcta.

2. *La Conjetura de Hodge*. Relacionada con la investigación de las formas de objetos complicados mediante la aproximación a partir de combinaciones de bloques geométricos más

ISSN 2174-0410

parte. Como anécdota para resaltar la importancia de la Hipótesis de Riemann, cabe comentar que en una ocasión en 1943, poco antes de morir, un periodista le preguntó a David Hilbert cuál sería su primera pregunta si pudieran resucitarle 500 años después de su muerte, a lo que éste respondió sin titubeos: *"¿Ha demostrado alguien la Hipótesis de Riemann?"*.

2. Una retrospectiva hasta Riemann de los Números Primos

2.1. Grecia

Los primeros intentos de descifrar los misterios de los números primos surgieron en la antigua Grecia. Ellos fueron los que establecieron los principios matemáticos sobre los que se ha trabajado desde entonces. Los pitagóricos se encargaron de profundizar en los conceptos fundamentales de la aritmética, otorgándole a los números un carácter casi místico. Fueron ellos quienes comenzaron a multiplicar y operar con los números, dándose cuenta de que existían algunos de ellos que eran imposibles de reducir. Como anécdota cabe destacar que los números primos pitagóricos son aquellos que se pueden expresar de la forma $4n + 1$, es decir, aquellos números cuyo resto al dividirlos por 4 es 1. Fue entonces cuando las academias y bibliotecas comenzaron a mostrar un ferviente interés por contar con tablas de registro de los números primos cada vez más y más extensas. Pero, ¿era esta lista de números primos finita?

Euclides de Alejandría[2]

Fue en los *Elementos* de Euclides (en torno al año 300 a.C.) donde encontramos el primer salto cualitativo en lo que a los números primos se refiere. Euclides demostró que la cantidad de números primos era infinita, y lo hizo

simples de dimensión creciente.

3. *La Hipótesis de Riemann*. Considerada como la pregunta abierta más importante en las matemáticas y que trata sobre los números primos, cuyo estudio ha atraído a numerosos matemáticos: Euclides, Gauss, Riemann, Chebyshev, etc. En particular se refiere a la distribución de los números primos en la serie de números naturales, que está muy relacionada con el comportamiento de la llamada función zeta de Riemann.
4. *El problema de Yang-Mils*. Está planteado como un problema matemático y se refiere al estudio de las ecuaciones de Yang-Mills, fundamentales en la unificación de la electrodinámica cuántica con la teoría electrodébil.
5. *El problema de Navier-Stokes*. El estudio de la existencia de soluciones para las ecuaciones básicas del movimiento de los fluidos incompresibles: las Ecuaciones de Navier-Stokes (Navier 1822 y Stokes 1842).
6. *La Conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer*. Conduce al estudio del carácter infinito o finito del número de soluciones racionales de una curva algebraica elíptica o de género 1.

[2] Retrato fechado en 1474 del pintor Justus van Ghent (1430-1480) que se encuentra actualmente en el Palacio Ducal de Urbino en la Galería Nacional de Las Marcas. En la Edad Media, Euclides de Alejandría era confundido erróneamente con Euclides de Megara, discípulo de Sócrates, de ahí que en la inscripción al pie aparezca este nombre.

ISSN 2174-0410

mediante un método ingenioso del razonamiento lógico, la *reducción al absurdo*. Para ello consideró como hipótesis de partida que existe un conjunto finito de números primos que denotaremos como $C = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. En este punto Euclides realiza el paso clave para su demostración. Si ahora consideramos el número formado por el producto de todos estos números primos p_i, todos ellos mayores que 1, y le sumamos 1, tendremos:

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$$

Por lo tanto N es mayor que cualquier de los números primos p_i, por lo tanto no pertenece al conjunto C, y por el Teorema Fundamental de la aritmética (que aparece en el Libro IX de los *Elementos*), puede descomponerse como producto de factores primos. Por hipótesis, estos factores sólo pueden estar entre los primos que aparecen en el conjunto C. Por tanto, existirá un primo q del conjunto C, tal que q es divisor de N, y obviamente, q divide a $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$. Por consiguiente, q divide a la diferencia

$$N - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$$

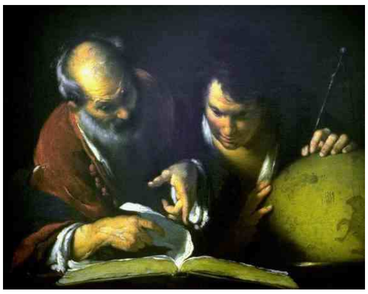
(que es igual a 1). Pero ningún número primo divide a 1, y q es un número primo que divide a 1, de aquí la contradicción. Concluimos entonces que el conjunto de los números primos no puede ser finito (q.e.d.).

En principio, el argumento de Euclides establece cómo podemos encontrar números primos nuevos: multipliquemos los que conocemos, sumemos uno al producto y factoricemos el número resultante. Por ejemplo si realizamos la siguiente operación $N = 2 \times 3 + 1 = 7$ obtenemos como resultado un nuevo número primo. Desgraciadamente, una vez que hemos obtenido los 200 primeros números primos, la factorización comienza a ser prácticamente inabordable. Como curiosidad, el número $P = 2^{43.112.609} - 1$ con ¡12. 978. 189! cifras en el sistema decimal, es el número primo más grande conocido hasta Marzo de 2011, descubierto por Edson Smith del Departamento de Matemáticas de la Universidad de California, Los Ángeles (UCLA).

Una vez establecida la infinidad de números primos, el siguiente paso debía ser *cuantificar* la cantidad de números primos que existen menores que un número N establecido previamente. Denotaremos entonces

$$\pi(x) = \text{números primos} \leq x$$

La herramienta más útil que se conoce para contar primos es la *Criba de Eratóstenes*, descubierta por Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.). Éste es un algoritmo utilizado para eliminar los números compuestos entre 1 y x, y se basa en la observación de que si N es menor o igual a x, y no es divisible por ningún primo menor o igual que $\sqrt{x}$, entonces N debe ser primo. Comenzamos por hacer un listado de todos los enteros entre 1 y x, y eliminar de la lista todos los múltiplos de 2. A



Eratóstenes enseñando en Alejandría, pintura de Bernardo Strozzi (1581-1644)

ISSN 2174-0410

continuación borramos los múltiplos de 3, después los múltiplos de 5, etc., hasta que todos los múltiplos de los primos menores o iguales que $\sqrt{x}$ hayan desaparecido de la lista. Los números que hayan sobrevivido a la criba serán todos primos.

La Criba de Eratóstenes nos permite evaluar la función $\pi(x)$ para valores pequeños de x: se trata de una función escalonada que da un salto 1 cada vez que aparece un primo nuevo. Sin embargo, para valores grandes de x, es imposible calcular el valor de $\pi(x)$ con exactitud, pero podemos intentar hacer una estimación de su valor basándonos en el patrón de su comportamiento para valores conocidos.

2.2. Fermat, Mersenne y algunas conjeturas

Tras la caída del imperio romano, Europa quedó sumida en una especie de letargo durante la edad Media. No fue hasta finales del siglo XV, con la aparición del Renacimiento, cuando se empezaron a recuperar en todas las disciplinas del arte, y la ciencia los trabajos de los clásicos. Sin embargo, la aritmética jugó en cierto modo un papel secundario en cuanto a interés se refiere, dejando el protagonismo primero al álgebra durante el siglo XVI, a la geometría algebraica durante la primera mitad del siglo XVII, y al cálculo y al análisis durante la segunda mitad del siglo XVII y todo el siglo XVIII. Sin embargo durante este largo periodo no dejaron de surgir nuevas investigaciones en torno a la aritmética, caracterizada esta época por la aparición de ciertas conjeturas, muchas de ellas en torno a los números primos.

Pierre de Fermat

Pero, si hay un personaje que destaque sobre todos los demás en el siglo XVII en cuanto a la aritmética se refiere, éste es sin lugar a dudas el francés Pierre de Fermat. Fermat, que no era matemático de profesión sino un hombre de leyes, trabajó en infinidad de ramas de las matemáticas. Llegó a descubrir el cálculo incluso antes que Newton o Leibniz, siendo cofundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal, o descubriendo independiente de Descartes el principio fundamental de la geometría analítica. Fermat conjeturó que todos los números de la forma $2^{2^n}+1$ eran primos (debido a lo cual se los conoce como *números de Fermat*, ligados fuertemente a la construcción de polígonos regulares mediante regla y compás, de modo que si notamos como F_n a los números de Fermat, y tenemos que F_n es un número primo p, entonces podemos inscribir en un círculo un polígono regular de p lados con la ayuda únicamente de una regla y un compás) y verificó esta propiedad hasta $n = 4$ (es decir, $2^{16}+1$). Sin embargo, el siguiente número de Fermat $2^{32}+1$ es compuesto ($2^{32}+1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$), como demostró Euler. De hecho, hasta nuestros días no se conoce ningún número de Fermat que sea primo aparte de los que ya conocía el propio matemático francés[3]. También demostró el que hoy es un resultado fundamental de la arit-

[3] Existe un test especializado cuyo tiempo de ejecución es polinómico: el *test de Pépin*. Sin embargo, los propios números de Fermat crecen tan rápidamente que sólo se ha podido aplicar para

ISSN 2174-0410

mética, conocido como *Pequeño Teorema de Fermat*, cuyo enunciado establece:

> Si p es un número primo, y a es cualquier número natural mayor que 1, entonces $p|a^p - a$, es decir, $a^p - a$ es divisible por p.

Marin Mersenne

El segundo gran personaje del siglo XVII, en lo que a aritmética se refiere, fue el monje francés de la Orden de los Mínimos Marin Mersenne, quien hizo de su habitación en un convento de París un lugar de encuentro de matemáticos de la talla de Fermat o Pascal con la matemática como tema principal de discusión. Mersenne dedicó especialmente gran parte de sus investigaciones a los números primos de la forma $2^p - 1$. Se puede demostrar que si p no es primo entonces $2^p - 1$ tampoco es primo, con lo que sólo tienen un especial interés los números $2^p - 1$ con p primo. Antes de Mersenne, otros matemáticos habían establecido ya que ciertos números del tipo $2^p - 1$ eran primos. En particular, se sabía que $2^p - 1$ era primo para $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17$ y 19, y que $2^p - 1$ no era primo para $p = 11$. Entonces Mersenne en 1644, en el prólogo de su libro *Cogitata Physica-Mathematica*, escribió que considerando un primo p entre 2 y 257, el número $2^p - 1$ es primo sólo para los números p siguientes: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257. Toda la comunidad matemática opinaba que era imposible que Mersenne hubiese estudiado tal cantidad de números, pero tampoco había nadie capaz de probar que su enunciado era incorrecto. La afirmación estaba tan por encima de las posibilidades de la época que tuvieron que pasar más de 100 años para que alguien hiciese un avance real en su estudio: finalmente se logró probar que efectivamente el número $2^{31} - 1$ es un número primo. Éste es sólo uno de la cantidad ingente de resultados matemáticos asociados al nombre del matemático más prolífico de la historia, el suizo Leonhard Euler. El estudio del resultado anunciado por Mersenne no se completó hasta 1947, estableciéndose que la lista correcta es: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 y 127. Al final resultó que Mersenne había puesto dos números de más y tres de menos en su lista original. A pesar de todo, los primos de la forma $2^p - 1$ conservan el nombre de Mersenne. Quedaban así entonces establecidos los 12 primeros primos de Mersenne[4].

valores de n pequeños. En 1999 se aplicó para $n = 24$. Para determinar el carácter de otros números de Fermat mayores se utiliza el método de divisiones sucesivas y de esa manera a fecha de junio de 2009 se conocen 241 números de Fermat compuestos, aunque en la mayoría de los casos se desconozca su factorización completa.

[4] Existe un test de primalidad muy eficaz, el *test de Lucas-Lehmer*, para determinar si un número de Mersenne es primo o no. El proyecto de computación distribuida GIMPS, acrónimo de Great Internet Mersenne Prime Seach, se encarga de buscar números primos de Mersenne, que normalmente son los mayores primos que se conocen, de hecho el $2^{43.112.609} - 1$ antes mencionado forma el tetragésimo quinto número primo de Mersenne. La idea es que colaboradores de todo el mundo operen sobre una base de datos central. No hay más que conectar con la página WEB de GIMPS (www.mersenne.org) y descargar el software necesario. Automáticamente, la base de datos central asigna una serie de cálculos. Esta tarea la realiza el ordenador con los recursos que no están siendo utilizados en cada momento, no interfiriendo así en su actividad normal. Una vez obtenidos los resultados, el mismo ordenador contacta automáticamente con la base de datos central, actualizándola. Si el ordenador no está conectado continuamente a Internet, espera a estar conectado para hacer la transferencia de datos. Esto hace posible el uso de los nuevos resultados por otros colaboradores.

El 7 de junio 1742, Christian Goldbach, secretario de la Academia Imperial de Ciencias de San Petesburgo desde febrero de 1725, y tutor-educador en Moscú de varios descendientes del zar Pedro I *El Grande* (Ekateriana I, Pedro II, Anna Ivanovna, Iván VI e Isabel Petrovna), escribió una carta a Euler que demuestra la capacidad intuitiva matemática del alemán. En esta carta exponía:

> *"No creo que sea totalmente inútil plantear aquellas proposiciones que son muy probables aunque falte una verdadera demostración, pues aún cuando se descubra que son incorrectas, pueden conducir al descubrimiento de una nueva verdad."*

Además Goldbach le comentaba que, a pesar de no haber encontrado una demostración, estaba seguro de que *todo número natural mayor o igual que 6 se puede escribir como suma de tres números primos*. Euler le contestó el 30 de junio, confirmando que el resultado es equivalente a que *todo número natural par mayor o igual que 3 es la suma de dos primos*. Este último enunciado pasaría a la historia con el nombre de *Conjetura de Goldbach*, uno de los problemas abiertos más famosos de las Matemáticas. Es bien conocido que Descartes había formulado una conjetura similar, aunque no equivalente a la de Goldbach en 1650, que establecía que *todo número par es al menos suma de tres números primos*. Lo que no está tan claro es que formulara dicha conjetura únicamente para los números enteros pares, pero es fácil ver que ésta es equivalente. Muchos han intentado su demostración. Uno de los primeros fue el padre de la teoría de conjuntos, el alemán Georg Cantor. Otros matemáticos brillantes como Lev Schnirelmann, Godfrey H. Hardy, Ivan Vinagodrov y Chen Jingrun, han dedicado parte de sus esfuerzos en lograr desentrañar sus secretos, lográndose avances muy significativos por métodos analíticos, aunque sin llegar a la solución general final. No se duda de su veracidad, como además sugieren los cálculos hechos en la actualidad con algunos de los ordenadores más potentes, pero nadie ha sido capaz de dar una demostración general. El último avance en la comprobación directa del resultado mediante ordenador asegura que el resultado es cierto para todo número par hasta 400 billones.

Otra de las conjeturas más interesantes es la relativa a la cantidad de números primos gemelos. Dos números primos p y q se dice que son gemelos si $p = q + 2$. Como ningún número primo puede ser par, a excepción del 2, dos primos son gemelos si están todo lo cerca que dos primos mayores que 2 pueden llegar a estar. Primos gemelos son, por ejemplo, las parejas (17, 19), (29, 31) y (1.000.000.000.061, 1.000.000.000.063). La *Conjetura de los primos gemelos* establece que existen infinitas parejas de primos gemelos. Aunque esta afirmación parezca muy similar al resultado que hemos demostrado sobre la existencia de una cantidad infinita de números primos, todavía nadie ha sido capaz de determinar si es cierta o no. Esta conjetura puede sugerir que los primos se encuentran cerca unos de otros. Sin embargo, es fácil ver que hay listas de números naturales consecutivos no primos de cualquier longitud. La *Conjetura de Polignac* es una versión más general y más fuerte que la anterior, ya que enuncia que *para cada entero positivo n, existen infinitos pares de primos consecutivos que están separados por $2n$ números compuestos*. A su vez, una versión más débil de dicha conjetura dice que *todo número par es la diferencia de dos números primos*.

ISSN 2174-0410

Durante el Congreso Internacional de Matemáticos de 1912 celebrado en la ciudad británica de Cambridge, el alemán Edmund Landau redactó un ensayo sobre teoría de números y la función zeta de Riemann. En él, catalogó los cuatro problemas básicos sobre números primos considerados "inabordables" en aquel momento. Estos problemas se denominaron comúnmente *Los Problemas de Landau*, y son los siguientes:

Edmund Landau

1. La *Conjetura de Goldbach*[5].
2. La *Conjetura de los Números Primos Gemelos*.
3. La *Conjetura de Legrende*, establece que *existe siempre un número primo entre dos cuadrados perfectos, esto es, entre* n^2 *y* $(n+1)^2$.
4. La conjetura de establece que *existen infinitos números primos* p *tales que* $(p-1)$ *es un cuadrado perfecto*. Dicho de otra forma, *existen infinitos números primos de la forma* n^2+1.

Otros enunciados sobre números primos aún sin demostrar de forma general son:

1. La *Conjetura de Brocard*, que establece que *entre los cuadrados de primos consecutivos mayores que 2 existen siempre al menos cuatro números primos*.
2. La *Conjetura de Cramer*, cuya veracidad implicaría la de Legendre, que establece la siguiente expresión

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}-p_n}{(\log p_n)^2} = 1$$

3. El *problema ternario*, establece que *dado un número impar* $n > 7$*, éste es suma de tres números primos*.
4. *Para cualquier* n*, éste es un cuadrado de la suma de un primo y un cuadrado*[6].
5. La *Conjetura de Hardy-Littlewood* establece que *la cantidad de números primos tales que* $n^2+1 < x$ *tiende asintóticamente a la siguiente expresión*

$$\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{p-1}\left(\frac{-1}{p}\right)\right)\frac{\sqrt{x}}{\log x}$$

Hardy y Littlewood expresaron varias conjeturas sobre los problemas de adición de números primos en su trabajo conjunto de 1923. Algunas de estas se tratan en este documento.

[5] En realidad se denomina *Conjetura fuerte de Goldbach* y como curiosidad no considera el 1 como un número primo. Si se representa dicha conjetura a través de la ecuación $2n = p+q$ siendo $n \in \mathbb{N} | n > 1$ y p y q son números primos, tenemos la expresión equivalente

$$n = \frac{p+q}{2}$$

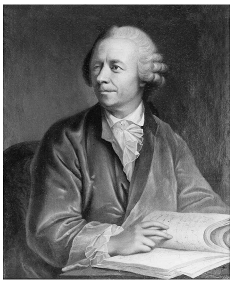
que nos permite enunciar la conjetura de forma alternativa *todo número natural mayor que 1, es promedio de dos números primos*. También existe una *Conjetura débil de Goldbach*, que establece que *todo número impar mayor que 5 puede escribirse al menos de una forma como suma de tres números primos*.

[6] Esto no es cierto para todos los valores de n, ya que al menos 34 y 58 son excepciones.

ISSN 2174-0410

2.3. Euler y el nacimiento de la función zeta

Hasta el siglo XVIII, nadie había podido vislumbrar ningún patrón en el comportamiento de los números primos. Estos aparecen en la sucesión de los números naturales sin ningún orden aparente, aunque lo que sí es cierto es que su frecuencia disminuye a medida que avanzamos en la sucesión.



Leonhard Euler

En 1737, el prolífico suizo Leonhard Euler encontró una identidad capaz de relacionar los números naturales con los números primos que abriría las puertas de la moderna teoría (analítica) de números , enunciando el siguiente teorema

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \text{ para todo } s > 1 | s \in \mathbb{R}, \text{ y } p \text{ primo.}^{7} \qquad (1)$$

¿Pero cómo pudo Euler deducir esta interconexión entre los números naturales y los números primos?. Su demostración más estricta fue publicada en 1744. Sea

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\,x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots$$

Lo que nos lleva a

$$\frac{1}{2}\,x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots$$

Nótese que no existen números pares en los denominadores del lado derecho de la igualdad. Ahora, para eliminar los denominadores que son divisibles por tres, dividimos ambos lados de la igualdad por tres, para obtener

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\,x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \dots$$

Restando, se eliminan todos los denominadores múltiplos de 3, resultando

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\,x = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

Este proceso es similar a la criba de Eratóstenes, ya que, en cada paso, se elimina el denominador primo y todos sus múltiplos. Repitiendo la iteración, pero esta vez dividiendo la última ecuación por 5, y reagrupando se obtiene

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\,x = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \dots$$

[7] En realidad Euler demostró esta afirmación para el caso $s = 1$ en el teorema 7 de su obra *Variae observationes circa series infinitas*, a la sazón una de las primeras de su prolífica carrera.

ISSN 2174-0410

operando resulta

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 5}\, x = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \ldots$$

Del mismo modo, los términos con denominadores que son múltiplos de 7, 11, y así con todos los números primos, se irán eliminado, resultando

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 22 \cdots}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdots}\, x = 1$$

Pero, como x es sabido que resulta ser la suma de la serie harmónica (la cual diverge), el resultado queda inmediatamente demostrado.

Sin embargo, esta demostración no puede ser considerada suficientemente rigurosa desde un punto de vista de los estándares matemáticos modernos, pero cualquier matemático moderno reformularía el teorema diciendo que la serie harmónica tiene un límite finito si y sólo si el producto infinito lo tiene, y entonces comenzaría la demostración "suponiendo que la serie harmónica converge al valor x".

Sin embargo, si aceptamos el resultado, entonces tenemos una pequeña demostración de que existen infinitos números primos. Para que el producto

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdots}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdots}$$

diverja debe tratarse de un producto infinito, por lo tanto deben existir infinitos números primos.

El teorema 8 de dicha obra de Euler resulta extremadamente importante. Si utilizamos la serie de números primos para formar la expresión

$$\frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \cdot \ldots$$

entonces su valor es igual a la suma de esta serie

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots$$

Utilizando la notación moderna, esta expresión resulta ser (1), cuya demostración es exactamente igual a la del teorema 7, con el exponente n incluido. Además, la demostración del teorema 8 es completamente correcta desde el punto de vista de los estándares matemáticos modernos ya que todas las series involucradas en la expresión son absolutamente convergentes.

2.4. Las aportaciones de Legendre y Gauss

Aunque en principio no sabemos cuándo un número va a ser primo, y la distribución de los números primos en la recta real es bastante errática, lo cierto es que la función $\pi(x)$, pese a tener pequeñas oscilaciones, crece con bastante regularidad, y esta regularidad es mucho más extrema cuanto mayores son los valores de la variable x. Veamos una Tabla 1 con valores de $\pi(x)$.

x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$	$x/\log x$
10	4	2,50	4,34
10^2	25	4,00	21,71
10^3	168	5,95	144,76
10^4	1.229	8,14	1.085,74
10^5	9.582	10,44	8.685,89
10^6	78.498	12,74	72.382,41
10^7	664.579	15,05	620.420,69
10^8	5.761.455	17,36	5.428.681,02
10^9	50.874.534	19,66	48.254.942,43
10^{10}	455.052.511	21,98	434.294.481,90

Tabla 1

Observando la Tabla 1 vemos que la razón $x/\pi(x)$ aumenta aproximadamente en 2,3 cuando pasamos de una potencia de 10 a la siguiente: esto es, el logaritmo de 10 en base e. Esto nos lleva a conjeturar que

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$$

donde $\approx$ significa que $\pi(x)$ y $x/\log x$ consideradas como funciones sobre $\mathbb{R}$ están muy próximas la una a la otra, de forma que se puede establecer que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1 \tag{2}$$

Este teorema fue conjeturado de manera independiente por Adrien Marie Legendre y Carl Friedrich Gauss.

En 1798, el francés Legendre realizó un intento de aproximación de la función $\pi(x)$, estableciendo la siguiente expresión que aparecía en su obra *"Essai sur la théorie des nombres, 1"*

$$\pi(x) = \frac{x}{A\log x + B}$$

para valores de x suficientemente grandes, y más tarde, en 1808, en su obra *"Essai sur la théorie des nombres, 2"* establecía los valores $A = 1$, $B = -1,08366$ (la constante B es a veces denominada *constante de Legendre*).

Pero el primer estudio serio de la función $\pi(x)$ parece ser que lo llevó a cabo un jovencísimo C. F. Gauss entre 1792 y 1793, con tan sólo 15 o 16 años, siendo aún estudiante, así se lo haría saber en una carta en las Navidades de 1849 al astrónomo Encke. Gauss estudió la densidad de números primos entre 1 y 3.000.000, y su distribución en intervalos de longitud 1.000, y conjeturó la fórmula (2), conocida posteriormente como el *Teorema de los números primos*, una vez demostrada de forma independiente por Hadamard y de la Vallée Poussin en 1896.

Carl Friedrich Gauss

Gauss calculó tanto $\pi(x)$ como $x/\log x$ para $x = 3.000.000$, obteniendo

$$\pi(3.000.000) = 216.745 \qquad \frac{3.000.000}{\log 3.000.000} = 216.971$$

por lo que concluiría que $x/\log x$ aproxima $\pi(x)$ para $x = 3.000.000$, con un error de sólo 226 primos. De hecho el error es 161, aún menor, pues parece ser que Gauss cometió un error en sus cálculos, resultando $\pi(3.000.000) = 216.816$. En cualquier caso, a pesar de este error de cálculo, Gauss supo vislumbrar que ambas funciones estaban muy cerca una de la otra, aunque desgraciadamente no lo suficiente como para explicar la regularidad de $\pi(x)$. Gauss observó que la frecuencia de primos cerca de un número x grande es prácticamente $x/\log x$, y por lo tanto la probabilidad de que un número grande x elegido al azar sea primo parece ser proporcional a

$$\frac{1}{\log_{10} x} \approx \frac{1}{\text{número de dígitos de } x},$$

observación que de hecho es la idea básica de la teoría de los números primos. Por ejemplo, la probabilidad de que un número de 100 dígitos sea primo es $1/230$, mientras que la probabilidad de que un número de 1.000 dígitos sea primo es $1/2.302$, etc. Así pues, concluyó Gauss, si estimamos $\pi(x)$ por

$$\pi(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \text{Prob.(n primo)} + \text{término de error}$$

tendremos la suma logarítmica

$$\pi(x) = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} + E_1(x)$$

o, lo que es esencialmente lo mismo,

$$\pi(x) = Li(x) + E_2(x),$$

con $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$, la función denominada *logaritmo integral*. $E_1(x)$ y $E_2(x)$ son errores muy similares, de hecho,

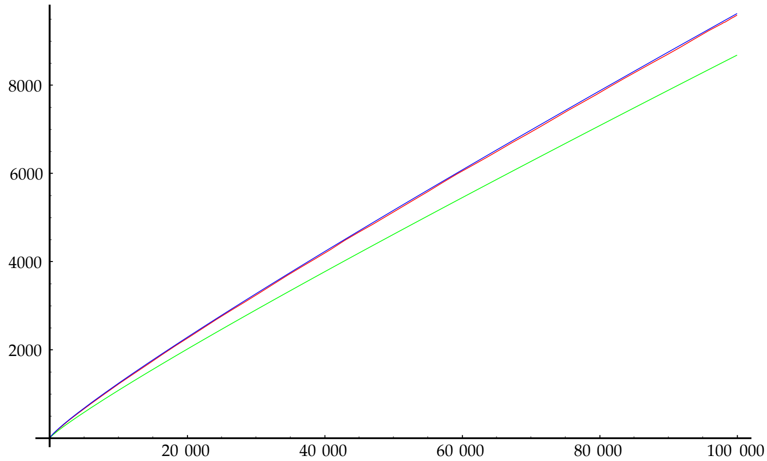
$$\left| \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} - \int_2^x \frac{dt}{\log t} \right| \leq 2$$

por lo que $\pi(x)$ puede ser aproximada mediante una suma o mediante una integral.

Gauss conjeturó que las funciones $Li(x)$ y $\pi(x)$ están muy cerca la una de la otra, y que la probabilidad de que un número grande y arbitrario x sea primo está cerca de $1/\log x$. En cierto modo, Gauss había sido capaz de vislumbrar un cierto patrón en la distribución de los números primos. Su apuesta pasaría a denominarse *Conjetura de los Números Primos*. Para recompensa de Gauss, los matemáticos demostrarían que el porcentaje de error entre la función logaritmo integral de Gauss y la distribución real de números primos se hace cada vez más y más pequeño cuanto más grande es la cantidad de números fijada previamente.

x	$\pi(x)$	$Li(x)$	$x/\log x$	$\pi(x)/Li(x)$
10	4	$4,34$	$5,12$	$0,781250$
10^2	25	$21,27$	$29,08$	$0,859697$
10^3	168	$144,76$	$176,56$	$0,951518$
10^4	1.229	$1.085,74$	$1.245,09$	$0,987077$
10^5	9.582	$8.685,89$	$9.682,76$	$0,989594$
10^6	78.498	$72.382,41$	$78.626,50$	$0,998366$
10^7	664.579	$620.420,69$	$664.917,36$	$0,999491$
10^8	$5.761.455$	$5.428.681,02$	$5.762.208,33$	$0,999869$
10^9	$50.874.534$	$48.254.942,43$	$50.849.233,94$	$0,999966$
10^{10}	$455.052.511$	$434.294.481,90$	$455.055.612,94$	$0,999993$

Tabla 2



Comparativa entre las funciones $\pi(x)$ (en rojo), $\dfrac{x}{\log x}$ (en verde) y $Li(x)$ (en azul)

2.5. Las aportaciones de Dirichlet y Chebyshev

En 1837, el francés Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet generalizó el método utilizado por Euler para demostrar que cualquier progresión geométrica $a, a+k, a+2k, a+3k, \ldots$, donde a y k no tengan ningún factor común, existen infinidad de número primos[8]. La principal modificación al método de Euler que Dirichlet llevó a cabo consistió en alterar la función zeta de modo que los número primos fueran separados por categorías dependiendo del resto que resultara de dividirlos por k. Su función zeta modificada, denominada hoy día *función L de Dirichlet*, se expresa

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

$$L(s,\chi) = \frac{\chi(1)}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} + \frac{\chi(3)}{3^s} + \frac{\chi(4)}{4^s} + \ldots$$

[8] De hecho el teorema de Euclides puede ser considerado como un caso especial de esta afirmación para la progresión aritmética $1, 3, 5, 7, \ldots$.

donde $\chi(n)$ es una clase especial de función denominada *carácter de Dirichlet*[9] que clasifica los primos del modo especificado. En particular, esta función cumple una serie de condiciones como que $\chi(mn) = \chi(m) \cdot \chi(n)$ para cualquier m, n; además depende únicamente del resto obtenido al dividir n por k, y $\chi(n) = 0$ si n y k tienen un factor común.

Cualquier función de la forma $L(s, \chi)$ donde s es un número real mayor que 1 ($Re(s) \geq 1$), y χ es un carácter, se denomina función L-serie de Dirichlet. La función zeta de Riemann es un caso especial que aparece cuando se toma $\chi(n) = 1$ para todo n.

Un resultado clave sobre las L-funciones es que, al igual que la función zeta, pueden ser expresadas como un producto infinito de números primos:

$$L(x, \chi) = \frac{1}{1 - \frac{\chi(2)}{2^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{\chi(3)}{3^s}} \times \frac{1}{1 - \frac{\chi(5)}{5^s}} \times \cdots = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$$

de modo que p es un número primo.

Tras estas aportaciones de Dirichlet, los matemáticos se dedicaron a generalizar su expresión, extendiendo tanto la variable s como el carácter $\chi(s)$ a los números complejos, y utilizando la versión generalizada para demostrar infinidad de resultados sobre números primos, demostrando así la importancia de las L-series como herramienta fundamental para el estudio de los mismos. Con Dirichlet comenzó la aplicación de los métodos infinitesimales a la teoría de números, y la investigación de la ley de distribución asintótica de los números primos.

Pafnuty Lvóvich Chebyshev

El primer trabajo en el que se demostró la distribución asintótica de los números primos, apareció publicado en el año 1850 en la primera memoria del matemático ruso Pafnuty Lvóvich Chebyshev (1821-1894) con el nombre de *"Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée"* (*"Sobre la función que determina la totalidad de los números primos por debajo de un determinado límite"*), la cual ya había sido previamente presentada en la Academia Imperial de Ciencias de San Petesburgo el 24 de mayo de 1848. En este trabajo Chebyshev demostró que si se realiza cualquier aproximación a $\pi(x)$ del orden de $x/\log x^N$ (siendo N cualquier entero positivo muy grande previamente fijado), entonces la aproximación tendría que ser $Li(x)$. De esta afirmación se deduce que la hipótesis de Legendre para los coeficientes A y B, esto es, $\lim_{x\to\infty} A(x) = 1,08366$[10] es falsa, y que si el límite existe, éste ha de ser igual a 1.

[9] En teoría de números, los caracteres de Dirichlet son un cierto tipo de funciones aritméticas que derivan de caracteres completamente multiplicativos sobre las unidades $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Los caracteres de Dirichlet son usados para definir las Funciones L de Dirichlet, las cuales son funciones meromorfas, con una variedad interesante de propiedades analíticas.

[10] Recordamos que Legendre ya había realizado la aproximación $\dfrac{x}{\log x - A(x)}$ con el valor de $A(x) = 1,08366$ para x muy grandes.

ISSN 2174-0410

Chebyshev demostró que para cualquier entero positivo n,

$$\varliminf_{x\to\infty}\left(\pi(x)-\int_2^x \frac{dt}{\log t}\right)\frac{\log^n x}{x}\leq 0\leq \varlimsup_{x\to\infty}\left(\pi(x)-\int_2 x\frac{dt}{\log t}\right)\frac{\log^n x}{x}$$

donde $\log^n x = (\log x)^n$. Integrando repetidamente por partes, se puede ver que para cada entero positivo n,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t}=\left(1+\frac{1!}{\log x}+\frac{2!}{\log^2 x}+\ldots+\frac{(n-1)!}{\log^{n-1} x}\right)\frac{x}{\log x}+n!\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t}+c_n$$

donde c_n es una constante. Utilizando el símbolo de orden de Landau,

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^{n+1} t}=O\left(\frac{x}{\log^{n+1} x}\right)$$

$$\int_2^{x^{1/2}} \frac{dt}{\log^{n+1} t}<\frac{x^{1/2}}{\log^{n+1} 2},\quad \int_{x^{1/2}}^x \frac{dt}{\log^{n+1} t}<2^{n+1}\frac{x}{\log^{n+1} x}$$

Este resultado muestra que $A = B = 1$ son los valores que mejor aproximan la función de Legendre y sugieren que

$$Li(x)=\int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

es la mejor aproximación para $\pi(x)$.

Si interpretamos esta aproximación como una fórmula asintótica, esto implica que

$$\pi(x)\frac{\log x}{x}\to 1 \text{ cuando } x\to\infty$$

y haciendo uso del símbolo de orden de Landau,

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$$

La validez de dicha expresión es lo que posteriormente se denominaría *teorema de los números primos*, o lo que es lo mismo, que $\pi(x)$ tiene el orden de magnitud de $x/\log x$.

Posteriormente, Chebyshev publicó en 1852 su obra *"Mémoire sur les nombres premiers"* (*"Memoria sobre los números primos"*) donde demostró esencialmente que

$$B<\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}<\frac{6B}{5}$$

para números x suficientemente grandes, donde

$$B=\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}-\frac{\log 30}{30}\approx 0,92129$$

y
$$\frac{6B}{5} \approx 1,10555.$$
Por desgracia, con este método fue incapaz de demostrar el Teorema de los Números Primos. Lo que sí demostró fue la *Conjetura de Bertrand* que establece que *siempre existe un número primo p entre n y* $2n$*, siendo* $n \in \mathbb{N}$. Esto supone que, en una progresión geométrica de primer término entero mayor que 3 y razón igual a 2, entre cada término de la progresión y el siguiente, se tiene al menos un número primo.

2.6. La estrategia de Riemann

En 1859, para su ingreso en la Academia de las Ciencias de Berlín, el alemán Bernhard Riemann redactó una memoria de ocho páginas que prepararían el camino para llegar posteriormente al Teorema de los Números Primos. La idea de Riemann se basó en interconectar la función $\pi(x)$ con la función zeta de Euler
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$
pero, y éste es el salto cualitativo con respecto a Euler, considerada dicha función como de variable compleja. La derivada logarítmica de la identidad de Euler se traduce en la identidad
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$ [11]
$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{si } n = p^k,\ p \text{ primo} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

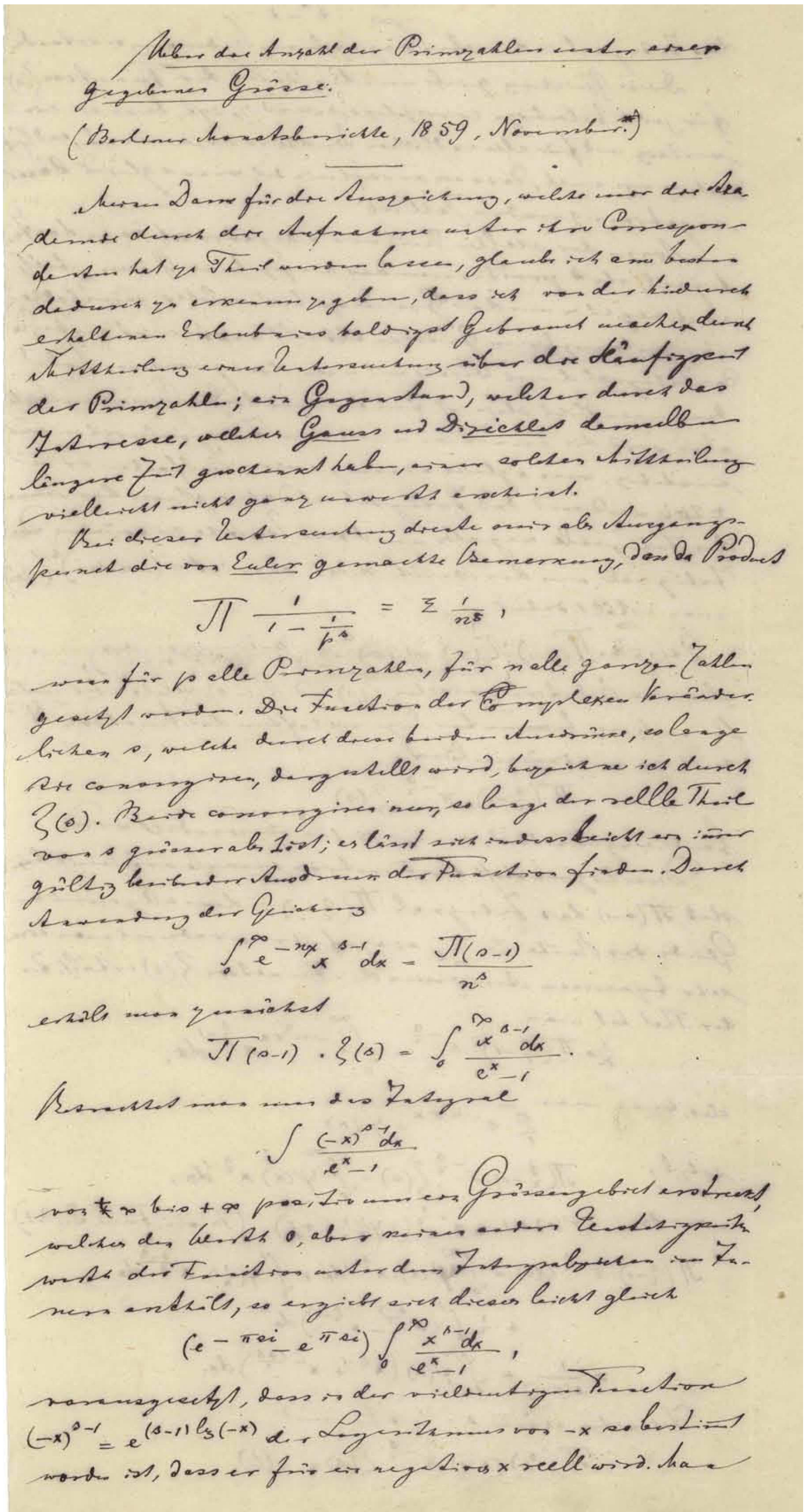
Por otro lado no es complicado comprobar que el teorema de los números primos, aún conjetura cuando Riemann redactó su memoria, es equivalente al enunciado que afirma que
$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x$$ [12]

La estrategia de Riemann consistió en tratar de obtener información sobre $\psi(x)$, partiendo de las propiedades de la función $\zeta(s)$. La función zeta de Riemann, como es actualmente conocida, posee únicamente un polo simple que

[11] La función $\Lambda(n)$ es la *función de von Mangoldt*, introducida por Chebyshev en su memoria publicada en 1850.

[12] La función $\psi(x)$ es la función sumatorio de Mangoldt, cuya fórmula explícita es
$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log(1 - x^2),$$
donde el sumatorio es en todos los ceros complejos ρ de la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ e interpretado como
$$\lim_{t\to\infty} \sum_{|\Im(\rho)|<t} \frac{x^\rho}{\rho}.$$

ISSN 2174-0410



Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Berliner Monatsberichte, 1859, November.)

Meinen Dank für die Auszeichnung, welche mir die Akademie durch die Aufnahme unter ihre Correspondenten hat zu Theil werden lassen, glaube ich am besten dadurch zu erkennen zu geben, dass ich von der hierdurch erhaltenen Erlaubniss baldigst Gebrauch mache durch Mittheilung einer Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen; ein Gegenstand, welcher durch das Interesse, welches Gauss und Dirichlet demselben längere Zeit geschenkt haben, einer solchen Mittheilung vielleicht nicht ganz unwerth erscheint.

Bei dieser Untersuchung diente mir als Ausgangspunkt die von Euler gemachte Bemerkung, dass das Product

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

wenn für p alle Primzahlen, für n alle ganzen Zahlen gesetzt werden. Die Function der complexen Veränderlichen s, welche durch diese beiden Ausdrücke, so lange sie convergiren, dargestellt wird, bezeichne ich durch $\zeta(s)$. Beide convergiren nur, so lange der reelle Theil von s grösser als 1 ist; es lässt sich indess leicht ein immer gültig bleibender Ausdruck der Function finden. Durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

erhält man zunächst

$$\Pi(s-1) \cdot \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}.$$

Betrachtet man nun das Integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

von $+\infty$ bis $+\infty$ positiv um ein Grössengebiet erstreckt, welches den Werth 0, aber keinen andern Unstetigkeitswerth der Function unter dem Integralzeichen im Innern enthält, so ergiebt sich dieses leicht gleich

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1},$$

vorausgesetzt, dass in der vieldeutigen Function $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\lg(-x)}$ der Logarithmus von $-x$ so bestimmt worden ist, dass er für ein negatives x reell wird. Man

Página primera del trabajo original presentado por Riemann en 1859 resulta ser $s = 1$, y se puede extender de forma analítica a todo el plano complejo. La localización de sus ceros en la denominada franja crítica, $0 \leq Re(x) \leq 1$, está fuertemente ligada a la distribución de los números primos. Riemann conjeturó que todos los ceros en esa franja estaban sobre la recta $Re(s) = \frac{1}{2}$.

Tras su descubrimiento, la Universidad de Gotinga otorgó a Riemann el puesto de Jefe de Departamento de Matemáticas, exactamente el mismo puesto que su predecesor Gauss había ocupado. Desde ese momento, Riemann comenzó a gozar de una vida social muy activa, viendo incrementados su fama y su reputación. Hoy día es considerado un genio, pero de un modo diferente a Gauss; Gauss fue capaz de abarcar todo lo posible en las matemáticas, pero Riemann otorgó a sus aportaciones un carácter casi mágico. Realizó descubrimiento asombrosos sobre los números primos, en parte debido a que fue capaz de "inventar" una maquinaria capaz de interconectar aspectos fundamentales de la teoría de números. También contribuyó en gran medida al desarrollo de la geometría, construyendo nuevos modelos no euclídeos (geometría elípticas) conocidos hoy como *geometrías riemannianas*, donde por ejemplo la Teoría de la Relatividad de Eistein se fundamenta. Su aportación a la ciencia, lejos de estar pasada de moda, se mantiene hoy día relevante.

Por desgracia, nunca sabremos cuán cerca estuvo de demostrar su hipótesis, ya que al parecer tras su muerte su ama de llaves destruyó en el fuego gran parte del material que Riemann tenía en forma de manuscritos o borradores.

3. Sobre La Cifra de Números Primos menores que una Cantidad Dada - Bernhard Riemann

[13] Considero que el mejor modo de expresar mi agradecimiento a la Academia por el honor que hasta cierto punto me ha conferido mediante mi admisión como uno de sus corresponsales, lo llevaré a cabo si pronto hago uso del permiso recibido para comunicar una investigación sobre la acumulación de los números primos, un tema que tal vez pueda ser considerado completamente digno de tal comunicación, dado el interés que *Gauss* y *Dirichlet* han mostrado durante mucho tiempo.

Para esta investigación, mi punto de partida surge de la observación proporcionada por *Euler* de que en el producto

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s},$$

p sustituye a todos los números primos, y n a la totalidad de los números. La función de la variable compleja s, que está representada por estas dos expresiones, donde quiera que converjan, la denoto como $\zeta(s)$. Ambas expresiones convergen únicamente cuando la parte real de s es mayor que 1; al mismo tiempo puede encontrarse fácilmente una expresión de la función lo cual siempre

[13] *"Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"* - Bernhard Riemann. Monatsberichte der Berliner Akademie (Informes Mensuales de la Academia de Berlín). Noviembre, 1859. Traducido por José Manuel Sánchez Muñoz, versión 1, Septiembre 2011.

resulta útil. Haciendo uso de la ecuación

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \frac{\Pi(s-1)}{n^s}$$

se observa primeramente que

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1}.$$

Si se considera ahora la integral

$$\int \frac{(-x)^{s-1}\, dx}{e^x - 1}$$

desde $+\infty$ a $+\infty$ tomados en sentido positivo en torno a un dominio que contiene el valor 0 pero ningún otro punto de discontinuidad del integrando en su interior, entonces se observa que ésta es igual a

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\, dx}{e^x - 1},$$

siempre que, en la función multivalorada $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$, el logaritmo de $-x$ esté determinado de tal modo que sea un número real cuando x sea negativo. Por lo tanto

$$2 \operatorname{sen} \pi s\, \Pi(s-1)\zeta(s) = i \int_\infty^\infty \frac{(-x)^{s-1}\, dx}{e^x - 1},$$

donde la integral tiene el significado que se acaba de especificar.

Ahora esta ecuación nos da el valor de la función $\zeta(s)$ para todos los números complejos s y refleja que esta función es inyectiva y finita para todos los valores finitos de s a excepción de 1, y también que es cero si s es igual a un número entero par negativo.

Si la parte real de s es negativa, entonces, en lugar de ser considerada en torno a un dominio específico en sentido positivo, esta integral puede también ser tomada en un sentido negativo en torno a un dominio que contenga el resto de cantidades complejas, ya que la integral considerada es infinitamente pequeña a pesar de que los valores del módulo son infinitamente grandes. Sin embargo, en el interior de este dominio, el integrando posee discontinuidades únicamente donde x sea igual a un múltiplo de $\pm 2\pi i$, y la integral es por lo tanto igual a la suma de las integrales tomadas en un sentido negativo en torno a estos valores. Pero la integral en torno al valor $n2\pi i$ es $= (-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$, de lo que se obtiene de aquí que

$$2 \operatorname{sen} \pi s\, \Pi(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}((-i)^{s-1} + i^{s-1}),$$

por lo tanto hay una relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$, que, a través de propiedades conocidas de la función Π, podría ser expresada como sigue:

$$\Pi\left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)$$

ISSN 2174-0410

que se mantiene sin cambios cuando s es sustituida por $1-s$.

Esta propiedad de la función me indujo a considerar, en lugar de $\Pi(s-1)$, la integral $\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)$ como término general de la serie $\sum \frac{1}{n^s}$, mediante el cual se obtiene una expresión muy apropiada para la función $\zeta(s)$. En realidad

$$\frac{1}{n^s}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int\limits_0^\infty e^{-nn\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

por lo tanto, si se establece

$$\sum_1^\infty e^{-nn\pi x} = \psi(x)$$

entonces

$$\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int\limits_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx,$$

o desde

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left(2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right), \text{ (Jacobi, Fund. S. 184)}$$

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) &= \int\limits_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}\,dx + \int\limits_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}\,dx \\ &\quad +\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x^{\frac{s-3}{2}}-x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int\limits_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx.\end{aligned}$$

Ahora establezco que $s=\frac{1}{2}+ti$ y

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t),$$

así

$$\xi(t) = \tfrac{1}{2} - (tt+\tfrac{1}{4})\int\limits_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx$$

o, adicionalmente,

$$\xi(t) = 4\int\limits_1^\infty \frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\tfrac{1}{2}t\log x)\,dx.$$

Esta función es finita para todos los valores finitos de t, y permite ser desarrollada en potencias de tt como una serie rápidamente convergente. Ya que, para un valor de s cuya parte real sea mayor que 1, $\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s})$ es finito, e igualmente sucede con los logaritmos de los otros factores de $\xi(t)$, deduciendo que la función $\xi(t)$ sólo puede desaparecer si la parte imaginaria de t se encuentra entre $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$. El número de raíces de $\xi(t)=0$, cuyas partes reales están entre 0 y T es aproximadamente

$$= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi};$$

por que la integral $\int d\log\xi(t)$, tomada en un sentido positivo en torno a la región formada por los valores de t cuyas partes imaginarias se encuentran entre $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$ y cuyas partes reales se encuentran entre 0 y T, es igual (hasta una fracción del orden de magnitud de la cantidad $\frac{1}{T}$) a $\left(T\log\dfrac{T}{2\pi} - T\right)i$; esta integral sin embargo es igual al número de raíces de $\xi(t)=0$ que se encuentran dentro de esta región, multiplicada por $2\pi i$. De hecho ahora se deduce aproximadamente el número de raíces reales dentro de estos límites, y es muy probable que todas las raíces sean reales. Ciertamente, en este punto uno desearía una demostración más estricta. Por ahora he aparcado temporalmente la búsqueda de este número tras algunos intentos fugaces fallidos, ya que parece innecesario para el próximo objetivo de mi investigación.

Si se denota por α a todas las raíces de la ecuación $\xi(\alpha) = 0$, se puede expresar $\log\xi(t)$ como

$$\sum\log\left(1-\frac{tt}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0);$$

para deducir, ya que la densidad de las raíces de la cantidad t crece con t sólo como $\log\dfrac{t}{2\pi}$, que esta expresión converge y se alcanza el valor infinito $t\log t$ para un valor infinito de t; por lo tanto, difiere de $\log\xi(t)$ en una función de tt, que para un valor finito de t es continua y finita, y cuando se divide por tt, alcanza valores infinitamente pequeños para valores de t infinitamente grandes. La diferencia es en consecuencia una constante, cuyo valor puede ser determinado mediante la consideración de $t=0$.

Con la ayuda de estos métodos, el número de números primos que son menores que x puede ser determinado ahora.

Sea $F(x)$ igual a este número cuando x no es exactamente igual a un número primo; pero sea éste mayor que $\frac{1}{2}$ cuando x sea un número primo, así, para cualquier x en el que haya un salto en el valor en $F(x)$,

$$F(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}.$$

Si en la identidad

$$\log\zeta(s) = -\sum\log(1-p^{-s}) = \sum p^{-s} + \tfrac{1}{2}\sum p^{-2s} + \tfrac{1}{3}\sum p^{-3s} + \cdots$$

ahora se reemplaza

$$p^{-s} \text{ por } s\int_{p}^{\infty} x^{-s-1}\,ds, \quad p^{-2s} \text{ por } s\int_{p^2}^{\infty} x^{-s-1}\,ds, \ldots,$$

se obtiene

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_{1}^{\infty} f(x) x^{-s-1}\, dx,$$

si se denota

$$F(x) + \tfrac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

por $f(x)$.

Esta ecuación es válida para cada valor complejo $a + ib$ de s tal que $a > 1$ Si, por el contrario, la ecuación

$$g(s) = \int_{0}^{\infty} h(x) x^{-s}\, d\log x$$

se mantiene dentro de este rango, entonces, por la aplicación del *Teorema de Fourier*, se puede expresar la función h en términos de la función g. La ecuación se descompone, si $h(x)$ es real y

$$g(a + bi) = g_1(b) + ig_2(b),$$

en las dos siguientes:

$$g_1(b) = \int_{0}^{\infty} h(x) x^{-a} \cos(b \log x)\, d\log x,$$

$$ig_2(b) = -i \int_{0}^{\infty} h(x) x^{-a} \operatorname{sen}(b \log x)\, d\log x.$$

Si se multiplican ambas ecuaciones por

$$(\cos(b \log y) + i \operatorname{sen}(b \log y))\, db$$

y se las integra desde $-\infty$ a $+\infty$, entonces por el *Teorema de Fourier* se obtiene en ambas $\pi h(y) y^{-\alpha}$ en la parte derecha de la igualdad; por lo tanto, si se suman ambas expresiones y se las multiplica por iy^{α}, se obtiene

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s) y^{s}\, ds,$$

donde la integración se lleva a cabo de manera que la parte real de s se mantiene constante.

Para un valor de y en el que haya un salto en el valor de $h(y)$, la integral expresa la media de los valores de la función h a ambos lados del salto. Del modo en el que la función f se definió, vemos que se tiene la misma propiedad, y por lo tanto, con toda generalidad

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^{s}\, ds.$$

Se puede sustituir por $\log \zeta$ la expresión

$$\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) + \sum^{\alpha}\log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + \log\xi(0)$$

establecida anteriormente; Sin embargo, las integrales de los términos individuales de esta expresión no convergen, cuando se extiende hasta el infinito, por lo que es conveniente convertir la ecuación anterior por medio de la integración por partes en

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\dfrac{\log\zeta(s)}{s}}{ds}x^s\,ds$$

Como

$$-\log\Pi\left(\frac{s}{2}\right) = \text{lím}\left(\sum_{n=1}^{n=m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2}\log m\right),$$

para $m = \infty$ y por lo tanto

$$-\frac{d\dfrac{1}{s}\log\Pi\left(\dfrac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{1}^{\infty}\frac{d\dfrac{1}{s}\log\left(1+\dfrac{s}{2n}\right)}{ds},$$

entonces se deduce que todos los términos de la expresión para $f(x)$, con la excepción de

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{ss}\log\xi(0)x^s\,ds = \log\xi(0),$$

que toma la forma

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\dfrac{1}{s}\log\left(1-\dfrac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s\,ds.$$

Pero ahora

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{s}\log\left(1-\dfrac{s}{\beta}\right)\right)}{d\beta} = \frac{1}{(\beta-s)\beta},$$

y, si la parte real de s es mayor que la parte real de β,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s\,ds}{(\beta-s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int\limits_{\infty}^{x}x^{\beta-1}\,dx,$$

o

$$= \int\limits_{0}^{x}x^{\beta-1}\,dx,$$

dependiendo de si la parte real de β es negativa o positiva. Se tiene como resultado

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left(\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right)}{ds}x^s\,ds \\
&= \quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s\,ds \\
&= \quad \int\limits_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx + \text{ const.}
\end{aligned}$$

en el primer caso, y

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}\,dx + \text{ const.}$$

en el segundo.

En el primer caso la constante de integración se determina si la parte real de β es infinitamente negativa; en el segundo caso la integral de 0 a x toma valores separados por $2\pi i$, dependiendo de si la integración se toma a través de valores complejos con el argumento positivo o negativo, y se convierte en infinitamente pequeño, del primer caso, cuando el coeficiente de i del valor de β se convierte en infinitamente positivo, pero para el segundo, cuando este coeficiente se hace infinitamente negativo. A partir de esto se ve como en el lado izquierdo $\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)$ se determinará con el fin de que las constantes de integración desaparezcan.

Insertando estos valores en la expresión de $f(x)$, se obtiene

$$f(x)=Li(x)-\sum^{\alpha}\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x}+\log\xi(0),$$

si en $\sum^{\alpha}$ se sustituye por α todas las raíces positivas (o raíces con una parte real positiva) de la ecuación $\xi(\alpha)=0$, ordenados por su magnitud. Se puede observar fácilmente, por medio de un debate más profundo de la función ξ, que con esta ordenación de los términos el valor de la serie

$$\sum\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)\log x$$

coincide con el valor del límite para el cual

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left(1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right)}{ds}x^s\,ds$$

converge a medida que aumenta la cantidad de b sin límite; sin embargo cuando se reordena puede tomar cualquier valor real arbitrario.

De $f(x)$ se obtiene $F(x)$ por inversión de la relación

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

para obtener la ecuación

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

en la cual se sustituye por m la serie consistente en aquellos números naturales que no son divisibles por ningún cuadrado que no sea 1, y en el que μ denota el número de factores primos de m.

Si se restringe $\sum^{\alpha}$ para un número finito de términos, entonces la derivada de la expresión para $f(x)$, o al menos parte de la misma, disminuye rápidamente cuando aumente x,

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum^{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x) x^{-\frac{1}{2}}}{\log x}$$

da una expresión de aproximación para la densidad de números primos + mitad de la densidad de los cuadrados de los números primos + un tercio de la densidad de los cubos de los números primos, etc, hasta la magnitud x.

La conocida expresión aproximativa $F(x) = Li(x)$ es válida hasta cantidades del orden $x^{\frac{1}{2}}$ y da valores tan grandes como se quiera; debido a los términos no periódicos, la expresión de $F(x)$ no crece hasta el infinito con x

$$Li(x) - \tfrac{1}{2}Li(x^{\frac{1}{2}}) - \tfrac{1}{3}Li(x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{5}Li(x^{\frac{1}{5}}) + \tfrac{1}{6}Li(x^{\frac{1}{6}}) - \tfrac{1}{7}Li(x^{\frac{1}{7}}) + \cdots$$

De hecho, comparando $Li(x)$ con el número de números primos menores que x, establecido por *Gauss* y *Goldsmidt* y llevada a cabo hasta $x =$ tres millones, este número ha resultado ser, en los primeros cien mil, siempre menor que $Li(x)$; de hecho la diferencia aumenta, con muchas fluctuaciones, gradualmente con x. Aunque también el aumento y disminución en la densidad de números primos de un lado a otro que depende de los términos periódicos, ha suscitado atención, sin embargo no se ha podido observar ninguna ley que gobierne este comportamiento. En el futuro, sería interesante hacer un seguimiento de la influencia de los términos periódicos individuales en la expresión de la densidad de números primos. Un comportamiento más regular que el de $F(x)$ sería exhibido por la función $f(x)$, la cual ya en los primeros cien números parece estar de acuerdo con la media establecida con $Li(x) + \log \xi(0)$.

La función $f(x)$ exhibe un comportamiento mucho más regular que $F(x)$, de modo que en la primera centena de números parece coincidir con la cantidad dada por $Li(x) + \log \xi(0)$.

4. Los Números Primos tras la Hipótesis de Riemann

4.1. El "asedio" de la conjetura

En la segunda mitad del siglo XIX se llevaron a cabo varias mejoras del límite de Chebyshev, como por ejemplo la realizada en 1892 por James Joseph Sylvester de modo que

$$0,956 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} < 1,045$$

para valores de x suficientemente grandes.

Al estar tan interconectadas las funciones $\zeta(s)$ y $\pi(x)$, la hipótesis de Riemann juega un papel fundamental en la teoría de los números primos, de tal modo que si ésta se cumple, entonces el término de error que aparece al realizar las aproximaciones pertinentes, puede acortarse de la mejor manera posible. Concretamente, Helge von Koch demostró en 1901 que

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

si y sólo si la hipótesis de Riemann se cumple[14].

4.2. De Conjetura al Teorema de los Números Primos

El gran descubrimiento sobre números primos antes de llegar al siglo XX, fue llevado a cabo por el francés Jacques Salomon Hadamard y el belga Charles Jean Étienne Gustave Nicolas de la Vallée-Poussin, quienes se encargaron de demostrar, de forma independiente, la Conjetura de Gauss sobre números primos, adquiriendo la categoría de Teorema de los Números Primos en 1896. Los trabajos de Riemann sobre la función $\zeta(s)$ sirvieron para describir la estrategia a seguir hasta llegar a la demostración de dicho teorema. Para llegar a dicha demostración, por supuesto no elemental, Hadamard hizo uso de su teoría de funciones integrales aplicada a la función $\zeta(s)$, la cual está definida mediante la serie absolutamente convergente

Jacques Salomon Hadamard

Charles Jean Étienne G. N. de la Vallée-Poussin

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \text{para } Re(s) > 1.$$

[14] Una variante refinada del resultado de Koch, dada por Lowel Schoenfeld en 1976, afirma que la hipótesis de Riemann es equivalente al siguiente resultado:

$$|\pi(x) - Li(x)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\,\ln(x), \qquad \text{para todo } x \geq 2657.$$

Básicamente la demostración de Hadamard y de la Vallée Poussin, consistió en probar que la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ no tiene ningún cero de la forma $1 + it$. En particular, de la Vallée Poussin demostró que

$$\pi(x) = Li(x) + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\, e^{-a\sqrt{\log x}}\right)$$

donde a es una constante.

4.3. La sociedad Hardy-Littlewood-Ramanujan

Las luchas entre Newton y Leibniz por la autoría de la invención del cálculo en el siglo XVII, abrieron una profunda herida entre las matemáticas de las islas y el continente. A principios del siglo XX, era evidente que las universidades británicas habían permanecido en cierto modo al margen de la revolución matemática extendida por los cinco continentes durante el siglo XIX, por ello resultó sorprendente que el siguiente avance con respecto a la teoría de los número primos surgiera del Trinity College de Cambridge.

Godfrey Harold Hardy

John Edensor Littlewood

Para ser justos, ha de reconocerse el mérito del impulso que las matemáticas británicas necesitaban a principios del siglo XX, a la sociedad "intelectual" formada en 1911 por Hardy-Littlewood al que más tarde, en 1914, se le uniría el genio desbordante del indú Ramanujan. De esta colaboración que duraría 35 años, surgieron resultados fundamentales en análisis matemático y teoría de funciones. Juntos realizaron aportaciones clave para el avance en el *Problema de Waring*[15] como parte del *método del círculo Hardy-Littlewood*. Juntos enunciaron la *Conjetura de Hardy-Littlewood*[16] sobre la distribución de los primos gemelos, de forma análoga al teorema de los números primos. Su trabajo conjunto en la teoría de números primos sirvió de impulso de la teoría de números fundamentado en establecer un sistema de conjeturas cuya demostración abriría

[15] En teoría de números el *Problema de Waring*, propuesto en 1770 por Edward Waring en su obra *Meditationes Algebraicae*, establece que *todo entero positivo puede expresarse como suma de a lo sumo n potencias k-ésimas positivas, siendo n dependiente de k (se entiende que k es un número entero positivo)*, por ejemplo, todo número es la suma de al menos cuatro cuadrados, o 9 cubos, o 19 números de potencia 4, etc. La respuesta a esta conjetura es que es cierta, conocido como el *Teorema de Hilbert-Waring*, y fue demostrado por Hilbert en 1909.

[16] Si se denota como $\pi_2(x)$ el número de primos p menores que x tales que $p + 2$ también es primo, y la constante de los números primos C_2 como el siguiente producto de Euler

$$C_2 = \prod_{p \geq 3} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \approx 0,66016118158468695739278121100145\ldots$$

para primos mayores o iguales que tres. La conjetura establece que:

$$\pi_2(x) \sim 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}$$

en el mismo sentido en que el cociente de las dos expresiones tiende a 1 cuando x tiende a infinito.

ISSN 2174-0410

una nueva dimensión de problemas. Pero el gran salto en la teoría de números primos estaba aún por llegar. En 1914, tras finalizar la I Guerra Mundial, Hardy demostró que existían infinitos ceros en la expresión de Riemann que estaban alineados en la recta $x = \frac{1}{2}$. Desgraciadamente, aunque este descubrimiento significaba un gran paso adelante en el intento de demostración de la Hipótesis de Riemann, éste no era aún definitivo, puesto que no demostraba que todos los ceros de la función zeta estaban sobre la recta en cuestión tal y como Riemann conjeturó. Es decir, por poner un ejemplo, podemos elegir los números pares y habremos demostrado que estos son infinitos, sin embargo nos quedarán infinitos números, los impares, que no habremos considerado.

Srinivasa Ramanujan

Una mañana de 1913, Hardy recibió una carta de un trabajador de 23 años del puerto de la ciudad de Madrás en la India, con un salario "modesto" de 20 rupias al mes. Su nombre era Srinivasa Ramanujan. Éste había sido animado a escribir a varios distinguidos matemático. La verdad es que Hardy, al igual que el resto de destinatarios de la carta (los matemáticos E. W. Hobson y H. F. Baker), estuvo a punto de deshacerse de ella, aunque esa noche se sentó junto a Littlewood con el fin de desentrañar el misterio de los 120 teoremas que Ramanujan especificaba en su misiva. Entre algunos de ellos, Ramanujan, en desconocimiento de los métodos de Legendre, mejorados después por Gauss, especificaba una fórmula que calculaba con un error minúsculo la cantidad de números primos entre 1 y 100 millones. Horas más tarde ambos reconocían estar ante la obra de un genio, hasta tal punto que Hardy que tenía su propia escala de valores para el genio matemático, consideraba que Ramanujan era un 100, Hilbert 80, Littlewood 30 y él mismo 25. Algunas de las fórmulas de Ramanujan le desbordaron, pero escribió

> *"... forzoso es que fueran verdaderas, porque de no serlo, nadie habría tenido la imaginación necesaria para inventarlas."*

Al igual que Hardy, Ramanujan estaba obsesionado con los números primos, hasta tal punto que en su lugar de trabajo, en lugar de contar barcos, se pasaba el día entero llevando a cabo complicados cálculos matemáticos sobre los mismos. Aislado de la vanguardia matemática de Occidente, lo sorprendente y característico de su genio matemático es que fue capaz de reproducir por sí sólo, de forma totalmente autodidacta, los resultados a los que Riemann había llegado 50 años antes. La Universidad de Madrás le negó su acceso, en parte debido a la animadversión de Ramanujan hacia el resto de asignaturas que no fueran matemáticas. Por ello decidió aprender matemáticas por su cuenta, reclutado en su casa durante 5 años, y aunque este nivel casi "enfermizo" de obsesión hacia las matemáticas es posible que no lleven a resultados importantes, en el caso de Ramanujan le llevó a resultados sorprendentemente claves en la teoría de números. Invitado por Hardy, Ramanujan partió para Inglaterra en 1914 y comenzaron a trabajar juntos.

ISSN 2174-0410

En 1916, Ramanujan realizaba la siguiente conjetura:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s}}$$

donde la función $\tau(n)$ se define como *función tau de Ramanujan* y se expresa como

$$q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

Dicha conjetura fue demostrada posteriormente por Louis Joel Mordell en 1920. Ramanujan conjeturó incluso que

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$$

para todos los números primos p, y Pierre René V. Deligne (1968/9) expuso que ésta era una consecuencia de las, por entonces aún no demostradas, conjeturas de Weil.

Con respecto a los números primos, Ramanujan realizó esta increíble conjetura:

$$\pi^2(x) < \frac{e\,x}{\log x}\, \pi\left(\frac{x}{e}\right)$$

el número primo más grande conocido que no cumple dicha inecuación es el ¡38. 358. 837. 677!.

Ramanujan también demostró que,

$$Li(x) = \int_{\mu}^{x} \frac{dt}{\log t} = \gamma + \log\log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log k)^k}{k!k}$$

donde γ es la *constante de Euler-Mascheroni*, cuyo valor es 0,5772156649..., y μ es la *constante de Soldner*, cuyo valor es 1,4513692346.... Otra fórmula de Ramanujan que converge mucho más rápidamente es

$$\int_{\mu}^{x} \frac{dt}{\log t} = \gamma + \log\log x + \sqrt{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\log x)^n}{n!\, 2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2k+1}$$

En 1917 Ramanujan fue admitido en la Royal Society de Londres y en el Trinity College, siendo el primer indio que lograba tal honor. Lo principal de los trabajos de Ramanujan está en sus "Cuadernos", escritos por él en nomenclatura y notación particular, con ausencia de demostraciones, lo que ha provocado una hercúlea tarea de descifrado y reconstrucción, aún no concluida. Fascinado por el número π, desarrolló potentes algoritmos para calcularlo. De salud muy débil, regresó a la India en 1919 con la intención de mejorar su precaria situación física, pero moriría víctima de la tuberculosis el 26 de Abril de 1920.

4.4. La disputa entre Erdős y Selberg

Aunque tras las demostraciones (no elementales) de Hadamard y de la Vallée-Poussin, hubo varios autores que llevaron a cabo simplificaciones, en particular Landau y Wiener, evitando en la medida de lo posible la teoría de funciones de Hadamard, aún estaba lejos de encontrarse una demostración más elemental. De hecho en 1921 G. H. Hardy realizó una conferencia en la Sociedad Matemática de Copenhage, en la que comentaba:

> *"No se conoce aún ninguna demostración elemental sobre el teorema de los números primos, y uno podría preguntarse si es razonable esperar que la haya. Ahora sabemos que el teorema es fundamentalmente equivalente a un teorema sobre funciones analíticas, el teorema que establece que la función zeta de Riemann tiene raíces sobre una cierta recta. Una demostración de tal teorema, fundamentalmente no dependiente de la teoría de funciones, me resulta extraordinariamente improbable. Es temerario afirmar que un teorema matemático no pueda ser demostrado de un modo particular; pero una cosa parece clara. Tenemos cierta perspectiva sobre la lógica de la teoría; pensamos en algunos teoremas, que denominamos "profundos", y otros más superficiales; si alguien realizara una demostración elemental del teorema de los números primos, mostraría que estas perspectivas son erróneas, que el tema no se corresponde del modo al que habíamos supuesto, y que es momento de que los libros sean reorganizados y la teoría reescrita."*

Prácticamente 50 años después de las demostraciones de Hadamard y de la Vallée-Poussin, en el año 1948, el húngaro Paul Erdős y el noruego Atle Selberg, anunciaron haber encontrado una demostración elemental sobre el teorema de los números primos, haciendo uso únicamente de propiedades sencillas de la función logaritmo. Desgraciadamente, este anuncio condujo a una amarga disputa entre los dos matemáticos.

Paul Erdős

Atle Selberg

Erdős publicó su demostración en un artículo del Boletín de la Sociedad Matemática Americana, denominado *Sobre un nuevo método en teoría elemental de números que lleva a una demostración elemental del teorema de los números primos*. Al mismo tiempo Selberg publicó su artículo *Una demostración elemental del teorema de los números primos* en la revista Anales de Matemáticas. Selberg desarrolló su método de criba por el que recibió en 1950 la medalla Fields. Éste está basado en un teorema demostrado en 1973 por el matemático chino Chen Jingrun que dice que *todo entero positivo par, es la suma de un primo y un número producto de al menos dos factores primos (cuasiprimo)*. Selberg es actualmente conocido como uno de los principales matemáticos del siglo XX por su introducción de la teoría espectral en la teoría de números, culminado en su descubrimiento de la fórmula que clasifica todas las funciones aritméticas zeta. Por su parte,

ISSN 2174-0410

Erdős recibió en 1952 el Premio Cole. Su trabajo sirvió para sentar las bases de la teoría de grafos e hipergrafos y métodos probabilísticos con aplicaciones en combinatoria y teoría de números elemental. Ambos recibieron el premio Wolf, Erdős en 1983/1984 y Selberg en 1986.

Referencias

[1] BERNDT, Bruce C.. *Ramanujan's Notebooks: Part IV*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] CILLERUELO MATEO, Javier. *La demostración elemental del Teorema de los Números Primos*, Revista *Números*, Nº 43–44, pp. 243–246, Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, septiembre 2000.

[3] COPEL, William A.. *Number Theory: An Introduction to Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2006.

[4] CORRALES, Capi. *Números en Núm3ros*, Revista *SIGMA*, Nº 30, pp. 137–149, Departamento de Educación del Gobierno Vasco, mayo 2007.

[5] DOXIADIS, Apóstolos. *El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach*, Ediciones B, Barcelona, 1998.

[6] DUNHAM, William. *Euler. The Master of us all*, pp. 39–60, , Dolciani Mathematical Expositions Vol. 22, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.

[7] DU SAUTOY, Marcus. *The Music of The Primes. Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*, Ed. Harper, New York, 2003.

[8] GOLDFELD, Dorian. *The Elementary Proof of The Prime Number Theorem: An Historical Perspective*, pp. 106–111, 172–175, Universidad de Columbia, New York.

[9] HARDY, Godfrey Harold y WRIGHT, Edward Maitland. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4ª Edición revisada, Clarendon Press, Oxford, 1975.

[10] ODIFREDDI, Piergiorgio. *La Matemática del siglo XX. De los Conjuntos a la Complejidad*, 1ª Edición, Katz Editores, Buenos Aires, 2006.

[11] RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.*, Monatsberichte der Berliner Akademie, Berlin, November, 1859.

[12] SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, Carlos, y ROLDÁN INGUAZO, Rita. *Goldbach. Una conjetura indomable*, Colección: La matemática y sus personajes, 1ª Edición. Nívola, Madrid, 2009.

[13] WELLS, David. *The Penguin Book of Curious and Interesting Mathematics*, Penguin, Londres, 1999.

ISSN 2174-0410

[14] EN LA RED.
Página del Profesor Wilkins en el Trinity College de Dublín, dedicada al trabajo que Riemann presentó a la Academia de Ciencias de Berlín en 1859,
http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/
Blog de Fernando del Álamo. Artículo sobre Bernhard Riemann,
http://www.historiasdelaciencia.com/?p=280
Wikipedia. Artículo sobre la Hipótesis generalizada de Riemann,
http://es.wikipedia.org/wiki/Hipótesis_generalizada_de_Riemann
—. Artículo sobre Euclides,
http://es.wikipedia.org/wiki/Euclides
—. Artículo sobre el Teorema de los Números Primos,
http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_números_primos
—. Artículo sobre de la Vallée-Poussin,
http://es.wikipedia.org/wiki/Charles-Jean_de_la_Vallée_Poussin
—. Artículo sobre Edmund Landau,
http://en.wikipedia.org/wiki/Edmund_Landau
—. Artículo sobre Srinivasa Ramanujan,
http://en.wikipedia.org/wiki/Srinivasa_Ramanujan
Página del Museo de Bellas Artes de Montreal,
http://www.mbam.qc.ca/en/activites/dossier_25.html
Página de Archivo MacTutor de Historia de las Matemáticas de la Universidad de St. Andrews, Escocia, creado por John J. O'Connor y Edmund F. Robertson. Artículo de Chebyshev,
http://www.gap-system.org/~history/PictDisplay/Chebyshev.html
—. Artículo de Mersenne,
http://www.gap-system.org/~history/PictDisplay/Mersenne.html
—. Artículo de Jacques S. Hadamard,
http://www.gap-system.org/~history/PictDisplay/Hadamard.html
—. Artículo de Johan P. G. L. Dirichlet,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html
—. Artículo de Godfrey H. Hardy,
http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Hardy.html
—. Artículo de John E. Littlewood,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Littlewood.html
Les-Mathematics.Net. Artículo sobre Paul Erdős,
http://www.les-mathematiques.net/histoire/histoire_erd.php
Artículo sobre Atle Selberg,
http://snl.no/Atle_Selberg
Base de datos de Archivos sobre Leonhard Euler,
http://www.eulerarchive.org/

Sobre el autor:
Nombre: José Manuel Sánchez Muñoz
Correo Electrónico: jmanuel.sanchez@gmx.es
Institución: Grupo de Innovación Educativa Pensamiento Matemático. Universidad Politécnica de Madrid, España.