

# Analýza identity bodov v polohových sieťach

Juraj Sütti<sup>1</sup>, Gabriel Weiss<sup>1</sup>, Štefan Kuráň<sup>1</sup>

## Identity analysis for plane network points

In 1987 and 1997 a deformation network was measured with different datum points of the reference frame S-JTSK. The difference vectors obtained were unable for identity analysis because of the effect of the S-JTSK datum deformations in this region. Various statistical tools were applied in the analysis: three testing procedures for filtering the systematic influences in the vectors and two identity tests for the network points to detect their significant displacements.

**Key words:** deformation net with constraints, difference vector filtering, identity test of network points, displacement vectors, surface movement.

## Úvod

Často sa vyskytujúcou úlohou geodézie pri budovaní a používaní lokálnych polohových sietí (napr. pri dlhodobej realizácii a postrealizačných kontrolách budovaných, resp. vybudovaných významných inžinierskych diel), je určenie jej identických, resp. neidentických bodov, zameraných v dvoch epochách, s použitím vhodných analytických a štatistických nástrojov. Najčastejšími metódami na riešenie tohoto problému sú vhodné transformácie (spravidla podobnostná alebo afinná) súradníc bodov z jednej epochy na súradnice, vzťahujúce sa k epoche druhej (porovnávacia epocha) a štatistické analýzy identifikácie vybočujúcich (vychýlených) hodnôt zo súborov súradnicových diferencií, ktoré vznikli transformáciou (Benning, 1985; Boljen, 1986; Heck, 1985; Jindra, 1990; Lenzmann, 1984). Typickým príkladom takejto úlohy je overenie polohovej stability bodov v sieti za určité obdobie, pretože v dôsledku rôznych príčin môže dôjsť k fyzickým zmenám polohy jej bodov.

V praxi vznikajú však aj iné situácie a prípady, kedy je možné využiť rôzne analýzy identity bodov siete. V tomto príspevku chceme prezentovať jedno neštandardné využitie identifikačných postupov na testovanie zhody bodov v prípade deformačnej siete, ktoré je spojené s pôsobením súradnicových deformácií v Štátnej trigonometrickej sieti (ŠTS) v oblasti Košíc.

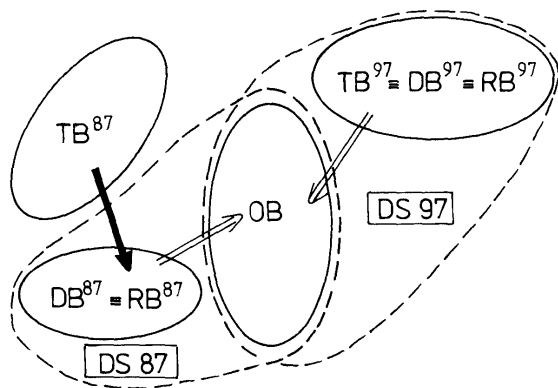
## Deformačná sieť a geodetické merania

Predmetná lokálna polohová sieť bola založená v r.1972-74 na území západného svahu výraznej terénnej elevácie (do 350 m) medzi riekami Hornád a Torysa, vo východnej časti mesta Košice, v súvislosti s výstavbou sídliska Dargovských hrdinov (DH). Toto územie patrí svojou morfológickou expozíciou terénu a zložitou inžiniersko-geologických podmienok medzi lokality s najzložitejšími základovými pomermi (Dobra, 1978; Nemčok, 1982). Výstavba sídliska vyžadovala z hľadiska bezpečnostného, okrem použitia celého radu rôznych sanačných diel, od začiatku aj pravidelné geodetické monitorovanie stability objektov a terénu. Referenčné body siete boli určené trigonometrickým a polygonometrickým meraním z okolitých trigonometrických - pripájacích bodov (Dóm Sv. Alžbety, Františkánsky kostol, Hradová a iné) a objektové (určované) body viacnásobnými pretínaniami napred z referenčných bodov. Polohove bola teda sieť dátumovaná v S - JTSK. Posledné terestrické zameranie tejto siete bolo vykonané v máji 1987 (epocha 87M), v ktorom sa dosiahli priemerné súradnicové štandardné odchýlky objektových bodov  $\bar{s}_{x87} = \bar{s}_{y87} = 10.15 \text{ mm}$ .

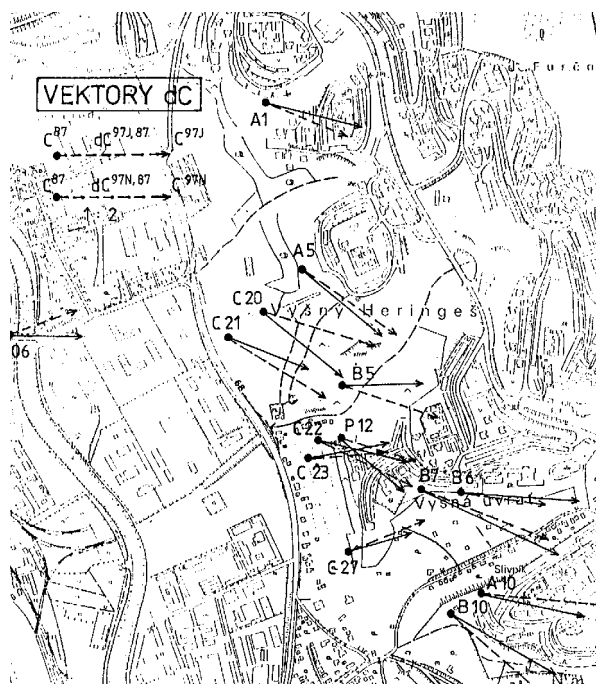
V r.1997, kvôli overeniu stability územia, na požiadanie Miestneho úradu Košice – Dargovských hrdinov, bolo po 10 rokoch vykonané ďalšie polohové zameranie zachovalých objektových bodov tejto siete, a to najprv v júli (epocha 97J) a potom v novembri (epocha 97N). V týchto meraniach sa použila GPS meracia technika s rôznymi druhmi aparátúr a observátormi. Ako homologické body (pre transformáciu) bola použitá iná skupina bodov ŠTS (Široká, Heringeš, Varkapu, Šibená hora a iné), ako boli pripájacie body v terestrických meraniach v r. 1987, čo bolo

<sup>1</sup> Prof.Ing. Juraj Sütti, DrSc., Doc.Ing. Gabriel Weiss, CSc. a Ing. Štefan Kuráň, CSc. Katedra geodézie a geofyziky Fakulty BERG Technickej univerzity, 043 84 Košice, Park Komenského 19  
(Recenzovali: Doc.Ing. Lubica Floreková, CSc. a Doc.Ing. Alojz Kopáčik, CSc. Revidovaná verzia doručená 4.6.1998)

vyvolané použitím rôznych meracích technológií. Schematicky je situácia s bodovými poliami a deformačnou sieťou v oboch realizáciách zobrazená na obr.1. V kampani 97J bola dosiahnutá pre súradnice transformované do S-JTSK polohová presnosť vyjadrená súradnicovými štandardnými odchýlkami  $\bar{s}_{X97J} = \bar{s}_{Y97J} = 16.45 \text{ mm}$  a v kampani 97N  $\bar{s}_{X97N} = \bar{s}_{Y97N} = 6.58 \text{ mm}$ .



TB – trigonometrické body  
 DB – dátumové body  
 RB – referenčné body  
 OB – objektové body  
 DS 87 – deform. sieť 1987  
 DS 97 – deform. sieť 1997



Obr.1. Schematicky zobrazené realizácie deformačnej siete Obr.2. Vektory diferencií dC zo súradníc  $C^{87}$  a  $C^{97J}$ ,  $C^{97N}$  a rôznych druhov bodov pôsobiach pri jej tvorbe.

Vyčíslené súradnicové rozdiely  $dC^{97J,87} = C^{97J} - C^{87}$  a  $dC^{97N,87} = C^{97N} - C^{87}$  medzi súradnicami určených bodov  $C^{87}$  v epoche 87M a  $C^{97J}$ ,  $C^{97N}$  v epochách 97J a 97N (tab.1), sú graficky zobrazené (obr.2) ako polohové diferenciálne vektory

BODY	$dC^{97J,87}$ [mm]		$dC^{97N,87}$ [mm]	
	dX	dY	dX	dY
A1	16,30	-48,49	15,50	-54,64
A5	37,40	-53,74	37,60	-56,05
A10	4,40	-68,81	12,70	-60,73
B5	18,10	-51,18	0,10	-44,32
B6	6,80	-44,42	4,80	-63,60
B7	26,80	-64,60	36,10	-71,40
B10	45,70	-52,20	33,35	-58,91
C20	20,40	-62,06	37,20	-46,62
C21	35,30	-53,53	18,70	-46,68
C22	-26,90	-57,90	10,50	-49,25
C23	-2,20	-44,05	-8,20	-44,78
C27	-18,70	-41,18	-10,70	-34,40
P12	14,10	-40,54	31,40	-34,18

Tab.1. Súradnicové diferencie pôvodné medzi súradnicami  $C^{87}$  a  $C^{97J}$ ,  $C^{97N}$ .

$$d^{97J,87} = \sqrt{(dX^{97J,87})^2 + (dY^{97J,87})^2}$$

a

$$d^{97N,87} = \sqrt{(dX^{97N,87})^2 + (dY^{97N,87})^2}$$

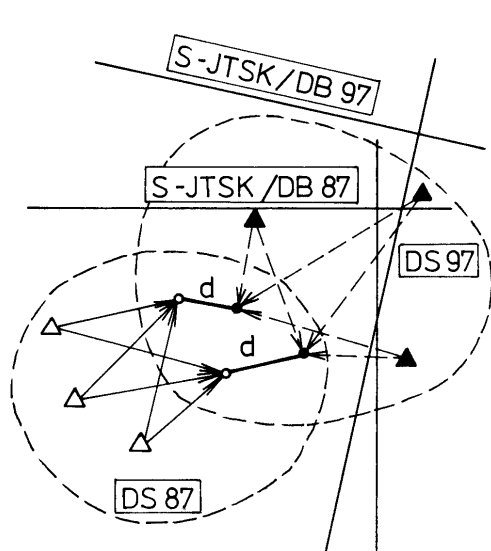
ktorých začiatkový bod je daný súradnicami  $C^{87}$  a koncové body súradnicami  $C^{97J}$  a  $C^{97N}$ . Z tab.1 a obr.2 vyplýva, že v oboch meraniach:

- všetky diferencie dX sú záporné (smerujú na východ, proti západnému úklonu svahu územia, na ktorom je sídlisko),
- prevažná väčšina diferencií dY je kladná (smerujú na juh).

Takéto výsledky naznačujú, že polohové posuny (ak budeme vektory d predbežne považovať za posuny), nastali na všetkých bodoch proti svahu, na ktorom sa územie DH nachádza, čo všeobecne a najmä v danom prípade je ťažko očakávateľné, prakticky neprijateľné.

Keďže meranie tak v epoche 87M (predchádzali mu 14 ročné merania toho istého bodového poľa), ako aj v epoche 97J, resp. 97N (sú to prakticky dve nezávislé opakované merania bodového poľa) je možné považovať za spoľahlivé, ale z nich odvodené diferenčné vektory za nereálne, nezodpovedajúce skutočnosti, musí sa táto protirečivosť výsledkov prirodzene analyzovať, pretože je potrebné vysvetliť, čo je príčinou nereálnosti, neočakávaných znamienok diferenčných vektorov.

Najpravdepodobnejšie vysvetlenie tohoto javu poskytuje predpoklad, že použité dve skupiny bodov zo ŠTS nie sú súradnicovo kompatibilné a že ich pôsobenie v súradniciach objektových bodov sa prejavuje určitým systema-tickým skreslením súradníc týchto bodov. Ak budeme teda vychádzať z predpokladaného pôsobenia systematických zložiek neznámej veľkosti  $K_{dx}$ ,  $K_{dy}$  v  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$ , budeme predpokladať, že tieto zložky sú generované tým, že súradnice zameraných objektových bodov v epochách 87M a 97J, resp. 97N sú navzájom tiež nekompatibilné v dôsledku súradnicových rozdielov medzi trigonometrickými bodmi  $DB^{87}$ , použitými v epoche 87M a trigonometrickými bodmi  $DB^{97}$ , použitými v epoche 97J a 97N, t.j. v dôsledku súradnicovej deformácie ŠTS v oblasti Košíc. Inými slovami, budeme predpokladať, že body  $DB^{87}$  vytvárajú jednu "bodovú", dátumovú realizáciu S-JTSK/ $DB^{87}$  v dátume (systéme) S-JTSK a body  $DB^{97}$  inú, odlišnú realizáciu dátumu S-JTSK/ $DB^{97}$ , pričom obidve realizácie môžu byť vo všeobecnosti vzájomne posunuté, stočené a môžu mať aj rozdielnu metriku (obr.3). Ak sa tento predpoklad potvrdí, je zrejmé, že potom sa súradnice objektových bodov určené v S-JTSK/ $DB^{87}$  a v S-JTSK/ $DB^{97}$  musia navzájom líšiť o systematické hodnoty.



Obr.3. Dátumové realizácie DS87 a DS97 v rámci S-JTSK.

Overenie naznačeného predpokladu príčin, pre ktoré sa mohli diferenčné vektory prejavovať tak, ako sa prejavili, vedie k preskúmaniu identity objektových bodov, t.j. k problému ich identifikácie. Z meraní do r. 1987 a v r. 1997, ako je to naznačené, vznikli dve realizácie deformačnej siete : sieť DS87 a sieť DS97 (obr.1 a 3), ktoré obsahujú tie isté objektové body, ale rôzne skupiny referenčných bodov. Spracovanie DS87 dáva pre objektové body súradnice  $C^{87}$ , spracovanie DS97 dáva ale pre tie isté objektové body iné súradnice  $C^{97J}$ , resp.  $C^{97N}$ . Každý objektový bod má teda z týchto meraní tri rôzne súradnice. Základnou otázkou je, či tieto súradnice, napriek ich numerickej rozdielnosti patria tomu istému fyzickému objektovému bodu v referenčnom rámci S-JTSK, t.j. či je "bod, definovaný

súradnicami  $C^{87}$  " identický s "bodom, definovaným súradnicami  $C^{97J}$ , resp.  $C^{97N}$ " aj pri zohľadnení presnosti ich zamerania.

Keďže získané  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$  (tab.1) nemôžu byť použité ako reálne podklady na analýzu identity objektových bodov, musia sa  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$  najskôr analyzovať na prítomnosť predpokladaných systematických vplyvov - zložiek  $K_{dx}$ ,  $K_{dy}$  (kap. „Analýza významnosti vektorov súradnicových diferencií“) a až po ich eliminácii, na základe nových hodnôt  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$  súradnicových diferencií, je možné prijať závery o stabilite, resp. o reálnom posune objektových bodov za obdobie 97J - 87M, resp. 97N - 87M (kap. „Posúdenie stability určených bodov“).

### Analýza významnosti vektorov súradnicových diferencií

Ovplyvnenie súradnicových diferencií  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$  systematickými účinkami, vyvolanými vyššie uvedenými predpokladanými príčinami, bolo objektívne preukázané pomocou nasledujúcich troch nezávislých overovacích postupov.

Prvý overovací postup, založený na štatistickej báze, predstavuje znamienkový test jednotlivých hodnôt  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$  (ako chýb medzi príslušnými súradnicami), resp. nulových hypotéz  $H_0: E(dX)=0$ ,  $E(dY)=0$ , ktoré vyjadrujú predpoklady, že príslušné súradnicové diferencie sú nulové a majú stochastický charakter (nie sú zaťažené systematickými vplyvmi). Na testovanie bola použitá štatistika (Böhm, J. et al., 1990)

$$Z = |k - (n-k)| \sim B(k),$$

s binomickým rozdelením pravdepodobnosti a intervalový odhad podľa

$$P(Z \geq t_{\alpha, v} \sqrt{n}) = \alpha,$$

kde  $n$  je počet všetkých súradnicových diferencií,  $k$  je počet diferencií s kladným znamienkom a  $\alpha$  je hladina významnosti. Pre kritickú hodnotu  $Z_{krit} = t_{\alpha, v} \sqrt{n}$  stačí uvažovať testovaciu hodnotu Studentovho rozdelenia  $t_{\alpha, v} = 2$ , t.j. dostatočne vysokú pravdepodobnosť  $1 - \alpha = 0.95$ . Ak  $Z > Z_{krit}$ , nie je možné na zvolenej hladine významnosti  $\alpha = 0.05$  súhlasiť s  $H_0$ , t.j. môžeme byť prakticky presvedčení o systematickom vplyve v hodnotách  $dX$ ,  $dY$ . V prípade  $Z < Z_{krit}$  je možné  $H_0$  prijsť, t.j. prijať predpoklad o neexistencii systematických vplyvov v hodnotách  $dX$ ,  $dY$ .

Pre diferencie  $dX^{97J,87}$ , platí  $Z_{dX} = |3 - (13 - 3)| = 7$ ,  $Z_{dXkrit} = 2.13^{1/2} = 7.21$ , z čoho vyplýva nerovnosť  $Z_{dX} < Z_{dXkrit}$ . Avšak vzhľadom na malý rozdiel medzi hodnotami  $Z_{dX}$  a  $Z_{dXkrit}$  môžeme pripustiť, že súbor diferencií  $dX^{97J,87}$  už môže byť prakticky ovplyvnený systematickými účinkami. Podobne pre vektor  $dY^{97J,87}$ , platí  $Z_{dY} = |0 - (13 - 0)| = 13$ ,  $Z_{dYkrit} = 2.13^{1/2} = 7.21$ , teda  $Z_{dY} > Z_{dYkrit}$ , čo ukazuje presvedčivo na pôsobenie systematického vplyvu aj v diferenciách  $dY^{97J,87}$ .

Pre diferencie  $dX^{97N,87}$  a  $dY^{97N,87}$  analogicky máme  $Z_{dX} = |2 - (13 - 2)| = 9$ ,  $Z_{dY} = |0 - (13 - 0)| = 13$ , takže pri  $Z_{dXkrit} = Z_{dYkrit} = 7.21$ , bude  $Z_{dX} > Z_{dXkrit}$ ,  $Z_{dY} > Z_{dYkrit}$ , čo opäť jednoznačne ukazuje na pôsobenie systematického vplyvu v oboch súboroch  $dX^{97N,87}$  a  $dY^{97N,87}$ .

Na základe všetkých výsledkov tejto testovacej procedúry môžeme byť teda presvedčení s rizikom  $\alpha$ , že testovanie preukázalo prítomnosť systematických zložiek vo všetkých štyroch skupinách overovaných súradnicových diferencií.

Ďalší, druhý overovací postup, založený tiež na štatistickej báze, určuje hodnoty predpokladaných systematických zložiek  $K_{dX}$ ,  $K_{dY}$  v súradnicových diferenciách  $dC^{97N,87}$  a  $dC^{97J,87}$  a testuje ich významnosť pomocou intervalových odhadov na základe (Böhm, J. et al., 1990)

$$P(|K_{dC}| \geq t_{\alpha, v} s_{KdC}) = \alpha,$$

kde fiduciálny koeficient  $t = K_C / s_{KdC} \sim t_v$

má Studentovo  $t$ -rozdelenie so stupňom voľnosti  $v = n - 1$ . Pri tomto postupe sa hodnoty  $K_{dX}$ ,  $K_{dY}$  určujú štandardne ako stredné hodnoty náhodných veličín  $dX$ ,  $dY$ , resp. ako ich aritmetické priemery podľa

$$K_{dX}^{97J,87} = \frac{\sum_{i=1}^n dX^{97J,87}}{n}, \quad K_{dY}^{97J,87} = \frac{\sum_{i=1}^n dY^{97J,87}}{n}$$

a analogicky pre  $dX^{97N,87}$  a  $dY^{97N,87}$ . Ich štandardné odchýlky dostávame podľa

$$s_{KdX} = \sqrt{\frac{\sum (dX - K_{dX})^2}{n(n-1)}}, \quad s_{KdY} = \sqrt{\frac{\sum (dY - K_{dY})^2}{n(n-1)}},$$

t.j. z nesystematických (prevažne náhodných) zložiek súradnicových diferencií

$$dXr = dX - K_{dX}, \quad dYr = dY - K_{dY}, \quad (*)$$

ktoré vznikajú po eliminácii  $K_{dX}$  a  $K_{dY}$  z príslušných diferencií  $dX$  a  $dY$ . Pre praktické použitie testovacieho postupu pomocou intervalového odhadu, namiesto výpočtu hraníc intervalu na základe voľby hladiny významnosti  $\alpha$  pri danom  $v$ , použijeme tri intervaly so zvolenými  $t_{\alpha, v} = 1$  ( $1 - \alpha \cong 0.830$ ) a  $t_{\alpha, v} = 2$  ( $1 - \alpha \cong 0.939$ ) a s nasledujúcimi výrokmi o významnosti  $K_C$ :

- ak bude platiť

$s_{KdC} \geq K_{dC}$ , nie sme oprávnení uvažovať o hodnote  $K_{dC}$  ako o systematickej zložke v  $dC$ ,

- ak bude aktuálna nerovnosť

$s_{KdC} < K_{dC} \leq 2s_{KdC}$ , môžeme pripustiť pôsobenie systematických vplyvov s veľkosťou  $K_{dC}$  v  $dC$ ,

- ak z testovania vyplynie

$K_{dC} > 2s_{KdC}$ , budeme prakticky presvedčení, že príslušné  $dC$  sú zaťažené systematickými vplyvmi a že  $K_{dC}$  predstavujú ich priemernú veľkosť.

Pre súradnicové diferencie  $dC^{97J,87}$  boli vypočítané hodnoty

$$K_{dX}^{97J,87} = 13.65 \text{ mm}, \quad K_{dY}^{97J,87} = -52.52 \text{ mm},$$

$$s_{KdX} = 5.87 \text{ mm}, \quad s_{KdY} = 2.48 \text{ mm},$$

teda platí:

$$K_{dX}^{97J,87} > 2s_{KdX}, K_{dY}^{97J,87} > 2s_{KdY}$$

a môžeme preto (s rizikom  $\alpha$ ) prijať záver, že diferencie  $dC^{97J,87}$  sú jednoznačne spôsobené systematickými vplyvmi.

V prípade súradnicových diferencií  $dC^{97N,87}$  sú

$$K_{dX}^{97N,87} = 17,18 \text{ mm}, K_{dY}^{97N,87} = -51,40 \text{ mm}, \\ s_{KdX} = 4,17 \text{ mm}, s_{KdY} = 2,69 \text{ mm},$$

a teda tiež platí

$$K_{dX}^{97N,87} > 2s_{KdX}, K_{dY}^{97N,87} > 2s_{KdY},$$

s rovnakými závermi ako pri diferenciách  $dC^{97J,87}$ .

Tretí overovací postup predstavuje analytickú metódu dôkazu o pôsobení systematických vplyvov v  $dC$ , založenú na vzájomnom vzťahu predpokladaných dátumových realizácií S-JTSK/DB<sup>87</sup>, S-JTSL/DB<sup>97</sup>, v ktorých sa súradnice  $C^{87}$  a  $C^{97J}$ , resp.  $C^{97N}$  počítali. Predpokladajme medzi nimi len translačné vzťahy, teda uvažujme, že obe realizácie (obr.3) sú navzájom len (najmä) posunuté, bez rotácie a dĺžkového skreslenia. Ako je známe, dĺžky sú vzhľadom na transláciu súradnicového systému invariantné, teda vzdialenosti medzi dvojicami bodov, určené zo súradníc v jednej dátumovej realizácii a v druhej dátumovej realizácii, sú identické.

Na empirické overenie, či tento predpoklad platí aj v danom prípade, použili sa dĺžky medzi tromi náhodne vybranými bodmi z poľa objektových bodov (č.A1,B5,B10) a tromi bodmi z referenčných (základných) bodov (č.06,08,09), použitých v epoche 87M, ktoré sú stabilizované v pobrežnom pásme rieky Hornád, t.j. mimo sledovaného územia s objektovými bodmi. Príslušných 9 dĺžok, určených zo súradníc  $C^{87}$  a  $C^{97N}$ , sa líši navzájom o hodnoty

$$ds = [0,4, -3,0, -31,4, -5,91, 17,6, -10,7, 7,5, 32,7, 3,1], \text{ (mm)}$$

v priemere o 12,48 mm. Aj tieto výsledky jednoznačne potvrdzujú predpokladanú prítomnosť systematických vplyvov v  $dC$ , keďže uvedené diferencie medzi dĺžkami sú vysvetliteľné najmä vplyvom meračských chýb z oboch meraní v epochách 87M a 97N.

Uvedenými tromi postupmi bolo preukázateľne potvrdené, že v hodnotách  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$  pôsobia systematické vplyvy, ktoré zjednodušene môžeme vyjadriť veľkosťami  $K_{dX}$ ,  $K_{dY}$  a že ich príčinou je súradnicová deformácia v referenčnom rámci S-JTSK v oblasti Košíc, bližšie objasnená v kap. „Deformačná sieť a geodetické merania“.

### Posúdenie stability určovaných bodov

Po analytickom preukázaní príčin neprijateľnosti súradnicových diferencií  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$  pre testy identity, po určení (približných) veľkostí systematických zložiek  $K_{dX}$  a  $K_{dY}$  v nich a po určení ich nesystematických (v podstate náhodných) zložiek podľa (\*) (tab.2), je možné s použitím  $dC^{97J,87}$  a  $dC^{97N,87}$  pristúpiť k testovacím procedúram, pomocou ktorých sa posúdi polohová identita objektových bodov, t.j. v skutočnosti ich polohová stabilita, ako aj stabilita územia v ich okolí.

Pre túto analýzu použijeme len nestranné, nevychýlené (unbiased) súradnicové diferencie  $dCr^{97J,87}$  a  $dCr^{97N,87}$ , graficky zobrazené na obr.4, v ktorých sú podľa (\*) eliminované systematické zložky  $K_{dX}$  a  $K_{dY}$ . Transformácia diferencií  $dC$  na  $dCr$  je v podstate "redukcia", napr. súradníc  $C^{97J}$  na  $Cr^{97J}$ , resp.  $C^{97N}$  na  $Cr^{97N}$ . Redukcia súradníc  $C^{97J}$ ,  $C^{97N}$  (ktoré sa vzťahujú na dátumovú realizáciu S-JTSK/DB<sup>87</sup>) na súradnice  $Cr^{97J}$ ,  $Cr^{97N}$  (ktoré sa vzťahujú už na dátumovú realizáciu S-JTSK/DB<sup>87</sup>), predstavuje zmenu ich dátumovej väzby. Touto redukciou stanú sa vzniknuté súradnice  $Cr^{97J}$  a  $Cr^{97N}$  porovnateľné (kompatibilné) so súradnicami  $C^{87}$ .

Tieto "redukované" súradnice  $Cr^{97J}$  a  $Cr^{97N}$  dostávame podľa vzťahov

$$Cr^{97J} = C^{87} + dCr^{97J,87} = C^{97J} - K_{dC}^{97J,87},$$

alebo

$$Cr^{97N} = C^{87} + dCr^{97N,87} = C^{97N} - K_{dC}^{97N,87},$$

ktoré vyplývajú z ich definičných deklarácií.

Na posúdenie významnosti súradnicových diferencií  $dCr^{97J,87}$  a  $dCr^{97N,87}$  z hľadiska ich informačného obsahu o stabilite objektových bodov, použili sme dva testovacie postupy.

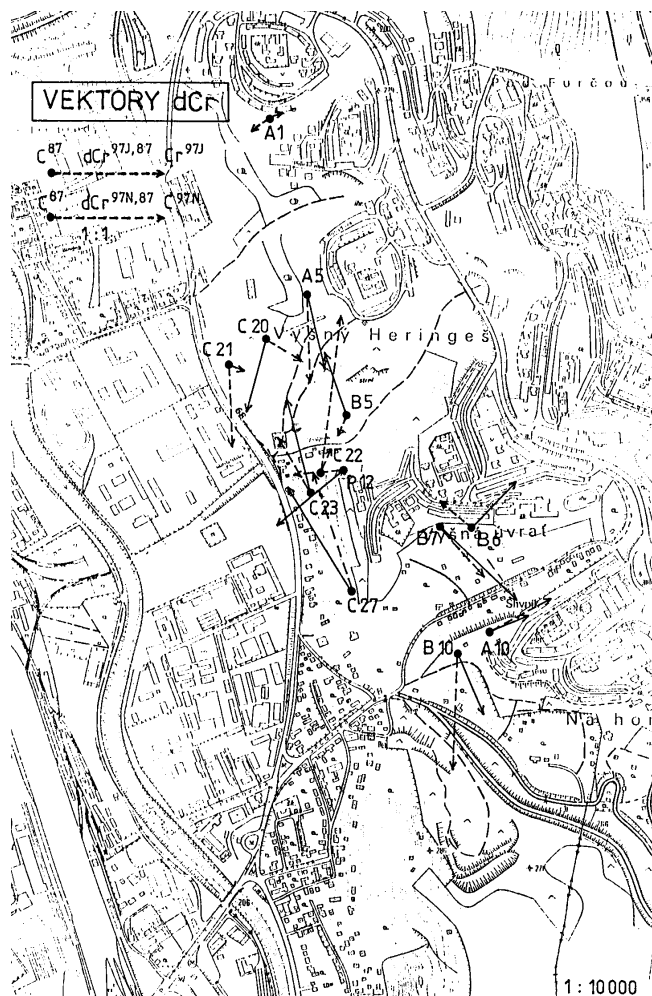
V prvom riešení sa realizoval bežný postup na vyšetrenie identity objektových bodov, t.j. transformácia ich súradníc  $C^{97J}$ , resp.  $C^{97N}$  z dátumovej realizácie S-JTSK/DB<sup>97</sup> na súradnice  $C^{87Jt}$  a  $C^{87Nt}$ , vzťahujúce sa na dátumovú realizáciu S-JTSK/DB<sup>87</sup>, s následným vlastným testovaním vzniknutých súradnicových rozporov - opráv.

Pre prezentáciu tohoto postupu použijeme len súradnice  $C^{97N}$  objektových bodov a len jednoduchú podobnostnú (Helmertovu) transformáciu. Všetky čiastkové kroky transformácie (určenie transformačných parametrov  $\Theta$  zo všetkých objektových bodov považovaných pre toto testovanie za homologické, výpočet súradníc  $C^{87t}$ , výpočet súradnicových rozporov  $dC = C^{87t} - C^{87}$ ) sú obsiahnuté v riešení modelu podobnostnej transformácie, prepísaného do Gaussovho-Markovovho odhadovacieho modelu

$$v = A\hat{\Theta} - C^{87} = C^{87t} - C^{87} \equiv dC, \\ \Sigma_{C^{87}} = 0,$$

BODY	$dCr^{97J,87}$ [mm]		$dCr^{97N,87}$ [mm]	
	dXr	dYr	dXr	dYr
A1	2,65	4,03	-1,68	-3,23
A5	23,75	-1,22	20,42	-4,65
A10	-9,25	-16,29	-4,48	-9,33
B5	4,45	1,34	-17,08	7,08
B6	-6,85	8,10	-12,38	-12,20
B7	13,15	-12,08	18,92	-20,00
B10	32,05	0,32	16,17	-7,50
C20	6,75	-9,54	20,02	4,78
C21	21,65	-1,01	1,52	4,72
C22	-40,55	-5,38	-6,68	3,15
C23	-15,85	8,47	-25,38	6,62
C27	-32,35	11,34	-27,88	17,00
P12	0,45	11,98	14,22	17,22

Tab.2. Súradnicové diferencie redukované medzi súradnicami  $C^{87}$  a  $C^{97J}$ ,  $C^{97N}$ .



Obr.4. Vektory redukovaných diferencií dCr zo súradníc  $C^{87}$  a  $C^{97J}$ ,  $C^{97N}$ .

kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & X^{97N} & -Y^{97N} \\ 0 & 1 & Y^{97N} & X^{97N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \hat{\Theta} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ m \\ \omega \end{bmatrix}, C^{87t} = \begin{bmatrix} X^{87t} \\ Y^{87t} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Z transformácie vyplynulo pre :

↪ hodnoty transformačných parametrov :

$$t_x = -3.25285 \text{ m}, \\ t_y = -2.21224 \text{ m}, \\ m = 2.871 \times 10^{-6}, \\ \omega = 1.222 \times 10^{-6} (\cong 0.8^{cc}),$$

ktoré ukazujú, že dátumové realizácie S-JTSK/DB<sup>87</sup> a S-JTSK/DB<sup>97</sup> sa líšia najmä vzájomnou transláciou (so zanedbateľnou rotáciou) a tiež rozdielnou metrikou, keď modul dĺžkového skreslenia dosahuje 3 mm. km<sup>-1</sup>,

↪ maticu súradnicových rozporov (t.j. opráv  $v$ )  $dC = [dX \ dY] = C^{87} - C^{87t} \equiv v$  :  
že numerické hodnoty rozporov sú v intervale  $|dC| \in < 0, 26.62 >$  mm,

že priemerné hodnoty  $dC$  v osiach  $X$  a  $Y$  dosahujú  $|\overline{dC}_X| = 13.82$  mm,  $|\overline{dC}_Y| = 9.15$  mm,

že priemerná hodnota diferenčného vektora je  $\overline{d} = 16.57$  mm a napr. jeho maximálna hodnota pre bod C27 je  $d = \sqrt{dX^2 + dY^2} = \sqrt{26.62^2 + (-16.94)^2} = 31.55$  mm,

↳ aposteriornú jednotkovú varianciu  $s_o = 14.46$  mm.

Rozpory  $dX \equiv v_X$ ,  $dY \equiv v_Y$  sme testovali na vybočujúce hodnoty pomocou dvojrozmerného testu (Heck, 1985; Lenzmann, 8), ktorý súčasne testuje významnosť  $x$ -ového aj  $y$ -ového rozporu určitého vybraného bodu. Tomuto testovaniu sme podrobili bod C27, v ktorom boli najväčšie súradnicové rozpory. Ako testovacia štatistika bola použitá premenná

$$T = \frac{\frac{\Omega - \overline{\Omega}}{r}}{\frac{\overline{\Omega}}{2n - 4 - r}} \sim F(f_1, f_2), \quad (**)$$

ktorá má  $F$  - rozdelenie pravdepodobnosti so stupňami voľnosti  $f_1 = r = 2$ ,  $f_2 = 2n - 4 - r = 32 - 4 - 2 = 26$ . V štatistike (\*\*):  $\Omega = s_o^2(2n - 4) = v^T v = 0.005856$  je kvadratická forma opráv  $v$ , ktoré vznikajú pri nepôsobení systematických vplyvov v transformačnom modeli  $v = A\hat{\Theta} - C^{87}$  a  $s_o^2$  je príslušný aposteriorný variančný faktor,

$$\triangleright \overline{\Omega} = \overline{v}^T \overline{v} = v^T v - v^T H (H^T Q_{vv} H)^{-1} H^T v = 0.004763$$

je kvadratická forma opráv  $\overline{v}$ , ktoré by sme dostali pri pôsobení systematických vplyvov, t.j. použitím modelu podobnostnej transformácie  $\overline{v} = A\hat{\Theta} + H dC - C^{87}$ , kde  $dC$  je matica neznámych (ale predpokladaných) systematických vplyvov a  $H$  je matica, snímajúca z matice  $dC$  hodnoty  $dX_i, dY_i$  bodu  $OB_i$ , ktoré chceme na systematický vplyv testovať,

$\triangleright$  je hodnosť matice  $H$ , t.j.  $rk(H) = r = 2$ .

Ako hladina signifikantnosti bola zvolená hodnota  $\alpha = 0.05$  a určená kritická hodnota štatistiky  $T$

$$T_{krit} = F(f_1, f_2; \alpha) = 3.369,$$

ktorá pri porovnaní s realizáciou  $T = 2.984$  dáva nerovnosť  $T < T_{krit}$ . Teda aj pre bod C27 s najväčšími hodnotami  $dX \equiv v_X$ ,  $dY \equiv v_Y$ , resp.  $d$ , môžeme nulovú hypotézu, t.j. nepôsobenie systematického vplyvu podľa tohoto testovania, pripustiť.

V druhom postupe sme použili lokalizačnú testovaciu procedúru priamo pre jednotlivé  $dX_r$ ,  $dY_r$  so štatistikou

$$t = \frac{dCr}{S_{dCr}} \sim t(n-1),$$

ktorá má Studentovo rozdelenie s  $(n-1)$  stupňami voľnosti. Testovali sme nulové hypotézy  $E(dX_r) = 0$ ,  $E(dY_r) = 0$  na hladine významnosti  $\alpha$ , t.j. predpoklady, že  $dX_r$ ,  $dY_r$  sú realizácie príslušných náhodných veličín, teda nesignifikantné hodnoty, ktoré nepredstavujú posuny objektových bodov v smere osi  $X$ , resp.  $Y$ .

Pre zvolené  $\alpha = 0.05$  a  $(n-1) = 13-1 = 12$ , kritická hodnota  $t$  - rozdelenia  $t_{krit}$  je 2.18 a realizácie  $t$  sú :

$$t_X = [0.14, 1.69, 0.37, 1.41, 1.02, 1.56, 1.34, 1.65, 0.13, 0.55, 2.10, 2.30, 1.18]$$

$$t_Y = [0.27, 0.38, 0.77, 0.59, 1.01, 1.65, 0.62, 0.40, 0.39, 0.26, 0.55, 1.40, 1.42].$$

Porovnanie  $t_X$  a  $t_{krit}$  ukazuje, že len pre jeden bod C27 platí  $t_X > t_{krit}$ , pre ostatné body je  $t_X < t_{krit}$  a pre všetky objektové body tiež  $t_Y < t_{krit}$ . Pre bod C27 môžeme teda formálne pripustiť významnosť príslušnej  $dX_r$ , ale vzhľadom na malý rozdiel hodnôt  $t_X$  a  $t_{krit}$ , ako aj na nepreukázaný posun bodu v smere osi  $Y$ , môžeme prijať stanovisko, že toto testovanie len naznačilo podozrenie na možný pohyb tohoto bodu v južnom smere (trend).

Súhrnne, na základe výsledkov oboch testovaní, môžeme s vysokou pravdepodobnosťou (0.95) objektové body, fixované v S-JTSK v epoche 87M súradnicami  $C^{87}$  a v epoche 97N súradnicami  $Cr^{97N}$ , považovať za identické body. Inými slovami, testovania nepreukázali prakticky polohový posun žiadneho objektového bodu za obdobie medzi epochami 87M a 97N a môžeme teda na hladine významnosti  $\alpha=0.05$  nezamietnuť hypotézu o stabilite týchto bodov za príslušné obdobie ako aj o stabilite územia, na ktorom sa nachádzajú.

### Záver

Analýza identity bodov v polohových sieťach je účinným nástrojom pre rôzne identifikačné ciele aj v tom prípade, ak je spojená s pôsobením lokálnych súradnicových deformácií používaného referenčného systému, ako to dokazuje v príspevku uvedený prípad. V systéme S-JTSK pre ŠTS a body PPBP 1. triedy presnosti je táto problematika vždy aktuálna, ak pri opakovaných meraniach v sieti použijeme (sme nútení použiť) iné pripájacie (dátumové) body. Vtedy budú mať jednotlivé realizácie siete (v rôznych epochách) vlastné lokálne dátumy v rámci S-JTSK, ktoré sú lokálnymi realizáciami (verziami) oficiálneho systému S-JTSK a ktoré budú navzájom odlišné. Táto vlastnosť S-JTSK môže vyvolať najmä u pripojených (väzbových) deformačných sietí komplikácie pri interpretácii výsledkov, pretože vzniklé súradnicové diferencie medzi epochami sú spôsobené interakciou vplyvu dátumovej deformácie, meračských chýb a možných posunov bodov. Metódy identifikačných analýz na báze matematickej štatistiky sú použiteľnými a potrebnými nástrojmi na riešenie všetkých týchto a podobných otázok.

### Literatúra

- Benning, W.: Test von Ausreissern bei der Helmerttransformation. *Zeitsch. f. Verm.Wesen* 110, 1985, 5, 207 - 209.
- Boljen, J.: Identitätsanalyse Helmert - transformierter Punkthaufen. *Zeitsch. f. Verm.Wesen* 111, 1986, 10, 490 - 500.
- Böhm, J. et al.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. *Praha, Geodet. a kartograf. podnik* 1990.
- Dobra, E.: Inžinierskogeologické problémy sídliska Dargovských hrdinov v Košiciach. *Geologický průzkum* 1978, 4, 109 - 112.
- Heck, B.: Ein- und zweidimensionale Ausreissertests bei der ebenen Helmert-Transformation. *Zeitsch. f. Verm.Wesen* 110, 1985, 10, 461 - 471.
- Jindra, D.: K problematice analýzy identit v polohových sítích. *Geodet. a kartograf. obzor* 36/78 1990, 10, 251 - 256.
- Kuráň, Š.: Sledovanie stability územia IX. obvodu: Furča - Košice. *Techn. správa o meraní a vyhodnotení v r. 1987, str. 43. Katedra banského meračstva a geofyziky BF VŠT Košice* 1987.
- Lenzmann, L.: Zur Aufdeckung von Ausreissern bei überbestimmten Koordinatentransformationen. *Zeitsch. f. Verm.Wesen* 109, 1984, 9, 474-479.
- Nemčok, A.: Zosuvy v Slovenských Karpatoch. *Veda Bratislava* 1982.
- Sütti, J. & Weiss, G.: Posúdenie stability územia v Mestskej časti Košice - Dargovských hrdinov. *Záver. správa z deformačného merania územia v r. 1997, str. 30. Katedra geodézie a geofyziky F BERG TU v Košiciach, Košice* 1998.