PROPOSTA DE ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS PARA A DETERMINAÇÃO DO CARÁCTER DE UMA SÉRIE NUMÉRICA POR ESTUDANTES DO PRIMEIRO ANO DE MATEMÁTICA DO INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO DE HUAMBO, ANGOLA

ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS PARA DETERMINAÇÃO DO CARÁCTER DE UMA SÉRIE NUMÉRICA

AUTORES: Bartolomeu Chindumbo Delfino[1]

Hélder Jorge Barroso[2]

José Cruz Bumba[3]

ENDEREÇO PARA CONTATO:E-mail: delfinomano27@gmail.com

Data de recepção: 22-04-2015

Data de aceptação: 18-07-2015

RESUMO

Através de diferentes instrumentos de investigação, se constatou que existem insuficiências por parte dos estudantes do 1º e 2º ano de Matemática do ISCED-Huambo, na disciplina Análise Matemática Matemática I no tema Séries Numéricas especificamente em conteúdos relacionados com a determinação de seu carácter. Para superar essas dificuldades, elaborou-se a presente obra com orientações metodológicas para determinar a convergência ou divergências de uma série numérica, com exemplos resolvidos. As orientações metodológicas apresentadas servirão de apoio para os professores e estudantes, e contribuirá para a perfeiçoar o trabalho com Séries Numéricas.

PALAVRAS-CHAVE:Orientações Metodológicas; Carácter da série numérica; ensino e aprendizagem.

METHODOLOGICALGUIDELINES FOR DETERMINATION THE CHARACTER OF A NUMERIC SERIES BY STUDENTS OF THE 1ST YEAR OF MATHEMATICS FROM THE HIGHER INSTITUTE OF EDUCATIONAL SCIENCES FORM HUAMBO, ANGOLA

ABSTRACT

Through different instruments of research, it was observed that there are shortcomings on the part of students of 1st and 2nd year of ISCED-Huambo Mathematics in Mathematics I in the subject Numerical Series specifically on content related to the determination of his character. To overcome these difficulties, it elaborated the present work with methodological guidelines to determine the convergence or divergence of a numerical series, with worked examples. The methodological guidelines will serve as

[1]Licenciado em Matemática. Professor do Departamento de Ciências Exactas (ISCED) de Huambo, Angola.
[2]Licenciado em Matemática. Professor do Departamento de Ciências Exactas (ISCED) de Huambo, Angola. E-mail: helderbarroso17@gmail.com
[3]Bacharel. Instituto Superior de Ciências de Educação, Huambo, Angola. E-mail: eltoncrz@hotmail.com

reference material for teachers and students, and help to minimize the difficulties in solving the problem diagnosed.

KEYWORDS:Methodological guidelines; nature of the numerical series; teaching and learning.

INTRODUÇÃO

Pensar que o conteúdo no ensino da Análise Matemática se reduz aos conceitos, teoremas e procedimentos, constitui um grave erro de concepção de ensino, embora tenha-se que admitir que em geral é a que predomina. Milián (2005).

A formação e preparação de profissionais capazes de enfrentar as tarefas que lhe correspondem de maneira eficiente de acordo com as necessidades do mundo moderno, é uma das maiores provocações pelo que atravessa a Educação Superior hoje em dia, muitos podem ser os factores que atentam contra o bom desempenho do processo de ensino aprendizagem (PEA), destas disciplinas que obsequeiam à formação que se espera deste tipo de profissional, uma das quais se encontra a matemática como disciplina básica na formação de qualquer profissional.

A formação superior de Professores, isto é, o curso Superior de Ciências de educação deve favorecer a aprendizagem que contribua para que o estudante treinado consiga procurar respostas aos novos problemas que se expõem constante e rapidamente, o qual está determinado pelo ritmo em que um problema seja substituído imediatamente por outro. Pois a educação seria um esforço inútil se o homem não puder aplicar, para resolver numerosas situações, assimilando-o concretamente.

Porém, concede - se grande atenção no desenrolar do desenvolvimento didáctico nos últimos anos, em diversos eventos, aulas e documentos, à projecção futura que a Educação Superior tem que assumir, a reflexão sobre seu conteúdo, as tendências que prevalecem e as urgências a enfrentar para que o processo de ensino aprendizagem apresente uma qualidade desejada.

Se integrarmos estas missões da Universidade actual em uma só que recolhe a essência das mesmas, pudéssemos mencionar que a missão da Universidade radica na democratização de seu processo de Ensino – Aprendizagem, isso se refere a como aumentar o papel dos estudantes na aquisição do novo conhecimento, como desenvolver seu nível de independência, como lhes criar as convicções para transformar, de tal maneira que ao concluir seus estudos sejam capazes de integrar-se no contexto produtivo ou social de forma activa, participativa, criativa e inovadora.

Actualmente, no Ensino da Matemática no Instituto Superior de Educação do Huambo (ISCED – Huambo) um dos aspectos que merece maior atenção, é o trabalho com os estudantes do primeiro ano, onde evidentemente se confrontam com problemas ligados a adaptação e a articulação entre o ensino de proveniência e o actual, incidindo de forma negativa no ensino e / ou aprendizagem da Matemática, para o qual se necessita de um domínio adequado dos conhecimentos e habilidades precedentes para poder enfrentar com êxito os novos conteúdos.

O actual processo de ensino – aprendizagem da Análise Matemática I é apoiada na Obra do Professor Doutor Mariano J. Milián com o título “Una concepción en laenseñanza da Matemática para propiciar aprendizaje desarrollador” de 2005 que coaduna com a rigorosidade e sistematicidade do ISCED - Huambo com vista à formação de habilidades básicas de cálculo, reflectindo em orientações metodológicas e didácticas para um rumo qualitativo.

Desde a reabertura do ISCED – Huambo em 2002, na altura inserida na única Universidade Pública (Agostinho Neto) que o país tinha, na opção de Ensino da Matemática, na cadeira de Análise Matemática I não era dada a Unidade Temática Séries Numéricas constante do programa. Somente no Iº Semestre do ano 2015, por trabalhos metodológicos e secções de debates foi possível ministrar a Unidade Temática em questão. Dai que mereceu maior atenção por parte dos autores deste trabalho para se puderem averiguar os possíveis pontos a melhorar.

Assim, através da análise dos resultados das avaliações, das observações as aulas, das entrevistas a estudantes e professores, possibilitou tirar a conclusão que os estudantes do primeiro ano da opção Ensino da Matemática no ISCED do Huambo apresentam insuficiências no desenvolvimento das habilidades matemáticas básicas ligadas aos procedimentos de solução das Séries Numéricas, incidindo de maneira significativa na resolução de problemas e exercícios de modo geral e em particular na determinação do carácter da Série.

A situação antes descrita em torno do actual processo de ensino – aprendizagem da Análise Matemática I motivou os autores à busca de uma alternativa que resolva tais dificuldades, ou seja, é evidente a necessidade de um ensino da Análise Matemática I que possibilite a integração das habilidades matemáticas básicas dirigidas à determinação do carácter da Série Numérica. Portanto objetiva – se propor orientações metodológicas que contribuam ao desenvolvimento das habilidades matemáticas básicas nos estudantes de 1º ano de Matemática do ISCED-Huambo - Angola na determinação do carácter de uma Série Numérica.

DESENVOLVIMENTO

O processo de ensino-aprendizagem da Matemática como disciplina, com o fim de preparar ao homem para a vida, deve dotá-lo de um sistema de conhecimentos, habilidades, hábitos, modos de actuação e convicções para sua aplicação na sociedade em que vive, actuando no contexto actual que impõe o vertiginoso desenvolvimento científico-técnico (Hurtado, 2007)[4].

Segundo Ballester (1992) um dos objectivos ensino-aprendizagem da Matemática passa pelo saber e poder matemático, onde “a aquisição de um saber e poder sólidos, pelos alunos, constitui a base para a formação matemática futura, e um instrumento intelectual para solucionar os vários problemas que surgem na vida, principalmente relacionados com a ciência, tecnologia, os serviços e a produção”.

Na sequência da temática Sucessão encontra – se as Séries numéricas que são de capital importância, para o professor de Matemática o qual é de grande utilidade para a formação do profissional, pois é aplicável em vários campos da Análise Matemática, como Análise Matemática II e III, Análise Complexa, Equações Diferenciais inclusive

[4]Hurtado, E. C. (2007). Modelo didactico sustentado en la euristica para el proceso de enseñanza - aprendizaje de la matematica asistida pela computadora. Santa Clara Cuba: tese Doutoramento.

com muito impacto na Unidade temática Séries de Fourier na Cadeira de Análise Funcional.

Tendo em consideração o exposto acima, partiremos da concepção de que as séries numéricas estão referidas ao comportamento das somas infinitas de números, as quais sempre preocuparam aos pensadores da antiguidade; entre estes o filósofo Zenão de Eleia (495-435 a C) que nasceu em Eleia, ao sudoeste da Itália. Chegou a ser o discípulo predilecto do filósofo grego Parménides.

Zenão de Eleia é reconhecido não só por seus paradoxos, mas também por estabelecer os debates filosóficos que favorecem a discussão raciocinada, embora estes paradoxos precipitaram uma crise na matemática antiga.

Sirva de exemplo o chamado paradoxo do corredor que em síntese expõe o seguinte:

Um corredor que sai de um ponto nunca pode alcançar a meta porque sempre tem que percorrer a metade da distância que o separa da mesma, ao infinito.

Se assumirmos que ao corredor lhe faz a uma velocidade constante e que recorre a metade da distância total em Q minutos, a quarta parte o fará em $\frac{Q}{2}$, a oitava parte em $\frac{Q}{4}$ e assim sucessivamente, o qual se pode expressar matematicamente mediante a soma: $Q+\frac{Q}{2}+\frac{Q}{4}+\frac{Q}{8}+...+\frac{Q}{2^n}+...$ o que da lugar a necessidade de encontrar um número que represente esta soma.

As séries numéricas podem ser abordadas a partir do problema da determinação do valor ao que tendem as sucessões construídas como soma de termos de uma sucessão dada, reafirmando os referentes utilizados nas sucessões.

O problema parte de considerar o limite $(n \to \infty)$ da soma dos primeiros n termos de uma sucessão, existirá?

Série numérica

Seja (a_n) uma sucessão numérica. A soma $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ se chama série numérica, os números a_k se chamam termos da série e a_n termo geral.

Se denota por $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
....
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

Os números $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ se chamam somas parciais da série. A sucessão $s_1,\ s_2,\ s_3 ... s_n$ é conhecida por sucessão das somas parciais da série e (S_n) chama – se soma parcial de ordem n. Milian & Jamba (2012).

Natureza de uma série

A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diz – se convergente se a sucessão das somas parciais $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ converge para um numero real S. Neste caso o número S diz – se a soma da série e escreve – se.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ .$$

A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergente $\Leftrightarrow (S_n)$ é convergente, é dizer, $\lim_{n \to \infty} S_n$ existe. Se este limite existe e é S, dizemos que S é a soma da série. (Oliveira, 2008).

Se o limite das somas parciais não existe, se diz então, que a série é divergente. (Oliveira, 2008).

Um dos elementos básicos que dificilmente se encontra nos livro que abordam série é a claridade sobre as duas sucessões que encontramos na definição de séries que é o termo a_k que define a série e s_n que determina o carácter da Série. Outro elemento não menos importante é que nem todas as séries são necessárias calcular a soma para determinar o seu carácter.

Devemos antes de mais despertar o estudante no sentido de que uma série tem um termo geral que a determina, o qual faz com que existam séries consideradas fundamentais.

Séries Fundamentais

Segundo Thomas (2009) as Séries fundamentais são.

- Geométricas
- Telescópicas
- Harmónica
- Híper harmónicas.

Estes tipos de Séries possibilitam a análise do seu carácter conhecendo – as devidamente. No entanto revestem-se de grande utilidade na determinação do carácter de outras Séries.

Orientações metodológicas para determinar o carácter da Série Numérica

Tendo em conta os estudos feitos por diferentes autores (Fernández, 1982, Demidovitch, 1993, Lezzi, 2004, Oliveira, 2008, Simões, 2009, Thomas, 2009, Milian & Jamba, 2012)para a determinação do carácter da série os autores chegam a conclusão de que é pertinente obedecer os seguintes procedimentos:

- Identificar o tipo de série, tendo em consideração as "fundamentais";
- Caso a série seja "fundamental", determinar o seu carácter pelos procedimentos exequíveis às mesmas;
- Não sendo a série de um dos tipos considerados fundamentais, recorre-se aos critérios de convergência, que se traduzem em procedimentos "gerais", (ou condições suficientes) para a determinação da natureza da série;
- Para as séries de termos positivos, devem – se utilizar os seguintes critérios: Critério de comparação, critério do quociente ou de D´Alambert, critério da raíz ou critério de Cauchy, critério de Raabe, entre outros.
- Para a devida aplicação dos critérios, conhecer as condições exigidas;
- Para séries de termos alternantes, recorrer ao critério de Leibniz, se cumpre suas condições, ou os critérios da raíz e do quociente, dando ou não uma convergência absoluta.

Condição necessária de convergência

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então (a_n) é infinitesimal, é dizer, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

A condição é necessária e não suficiente já que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e $\left(\frac{1}{n}\right)$é uma sucessão infinitesimal.

Exemplos de exercícios para a determinação do carácter da série e desenvolvimento de habilidades matemáticas básicas.

A habilidade matemática é a construção, pelo aluno, do modo de actuar inerente a uma determinada actividade matemática, que lhe permite procurar ou utilizar conceitos, propriedades, relações, procedimentos matemáticos, utilizar estratégias de trabalho, realizar raciocínios, julgamentos que são necessários para resolver problemas matemáticos.(Vicente & Morote s.d).

Para (Alves, s/n)… as habilidades matemáticas são características psicológicas específicas e complexas, sendo que existe uma estrutura de componentes básicos das habilidades matemáticas. Esses componentes combinam-se de diversas maneiras possíveis, formando diferentes habilidades matemáticas.

As habilidades matemáticas expressam, portanto, não só a preparação do aluno para aplicar sistemas de acções (já elaborados) inerentes a uma determinada actividade matemática, mas também elas compreendem a possibilidade e necessidade de procurar e explicar esse sistema de acções e seus resultados, de descrever um esquema ou programa de actuação antes e durante a busca e a realização de vias de solução de problemas em uma diversidade de contextos; poder intuir, perceber o possível resultado e formalizar esse conhecimento matemático na linguagem apropriada. Milián (2005)

Assim por exemplo, numa aula de Análise Matemática I, como toda a aula, o professor deve perseguir desenvolver uma habilidade dentro do período normal, pois para Krutetskii (1976) as habilidades são formadas e desenvolvidas em vida, durante actividade, instrução e treinamento. No entanto pelo sistema de habilidades contido no programa da cadeira em referência, em correspondência com os objectivos, se propõem desenvolver as habilidades seguintes: interpretar, identificar, recodificar, graficar, algoritmizar, calcular, definir, refutar, fundamentar, demonstrar, classificar, comparar, construir funções, aproximar, modelar, aplicar, seleccionar, controlar, valorar e resolver problemas.

Assim nos exemplos seguintes são apresentados modelos para desenvolver uma habilidade matemática básica no estudo de uma Série Numérica.

Exemplo 1:

Determine o carácter da seguinte série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Solução:

1º Analisamos a sucessão $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ e verificamos que se pode transformar em $a_n = b_n - b_{n+k}$. Com efeito estamos diante da serie telescópica chamada por muitos autores de série de Mengoli para k=1. Aplicando o procedimento de separação de uma fracção por coeficientes indeterminados, temos:

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ logo aplicamos as seguintes condições. $S = b_1 - L.\quad onde\ L = \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$

Portanto, $S = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \Rightarrow S = 1$

Como a soma é 1 então a série é convergente.

De outra maneira, calculamos aplicando a sucessão das somas parciais:

Como $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ temos:

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$$

....

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Aplicando o limite, temos: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ Logo, corresponde com a mesma soma aplicada pela série telescópica, portanto é convergente porque a soma é um número real.

Como vê-se, a sucessão da soma define o carácter da série.

Exemplo 2:

DadaSérie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, analisar o seu carácter

Solução:

Olhando para a série, verifica-se que $a_n = \frac{1}{n!}$ é um infinitesimal. Pela condição necessária, poderíamos afirmar ser convergente. Mas como é uma condição necessária, temos que passar para um critério e analisamos atendendo suas condições. Pela característica do termo geral, aplicamos o critério do quociente (quociente com passo ao limite). Logo temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

Por este critério, sabe-se que quando o limite for menor que 1 converge. Assim a série é convergente.

Exemplo 3:

Dada a Série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, analise o seu carácter

Solução:

Neste caso tem-se que $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Portanto, a_n é um infinitesimal, de igual forma cumpre-se a condição necessária. Todavia, recorremos à um dos critérios para nos assegurar-mos de que a Série dada é de facto convergente. Com efeito, pela particularidade do termo geral, aplicamos o critério da raíz (com passo ao limite), assim sendo, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

Portanto, pelo critério da raíz a série proposta é convergente, uma vez que o limite calculado é menor que a unidade.

Exemplo 4:

Determinar o carácter da seguinte Série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^5}{2^n}$

Solução:

Olhando para a série, constata-se a existência do termo de alternância. Portanto a Série proposta é de termos alternantes. Deste modo tem-se que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^5}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^5}{2^n}$.

Pela característica da Série, recorremos ao estudo da convergência absoluta da mesma. Desta forma, mediante o critério do quociente (com passo ao limite), tem-se:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^5}{2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^5}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^5}{n^5} = \frac{1}{2} < 1$$

Como o limite calculado é menor do que a unidade, a Série proposta converge absolutamente, portanto converge.

Contudo, pela especificidade da Série pode-se também aplicar o critério da raíz. Deste modo, tem-se:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n n^5}{2^n}\right|} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5} = \frac{1}{2} < 1$, logo converge absolutamente. Portanto é convergente.

Na determinação do carácter de uma Série, deve-se ter em conta que um critério pode ter maior vantagem em relação à outros critérios, em função das operações ou expressões que contemplam o termo geral da Série; daí que em Séries de termos positivos com expressões do tipo factorial, o Critério de D´Alambert adequa-se melhor em relação por exemplo ao critério de Cauchy (como se pode constatar no exemplo 2). Em certas ocasiões o critério de Cauchy pode ter grande vantagem, com respeito ao critério de D´Alambert, quando se constatam expressões de n-ésima potência (como visto no exemplo 3). Todavia em outras circunstâncias, pode-se basear tanto num como noutro critério com vista o estudo da natureza da Série (como visto no exemplo 4).

CONCLUSÃO

O processo e ensino – aprendizagem das series numéricas merece maior atenção pelo facto de ser a primeira vez a se leccionar esta unidade temática com fundamentos e argumentos didácticos na cadeira de Análise Matemática I.

As orientações metodológicas apresentadas contribuem de forma positiva ao aperfeiçoamento da compreensão, estudo e análise das Séries Numéricas, quanto a determinação do seu carácter.

Os exercícios e exemplos desenvolvidos, podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades matemáticas no estudo de uma Série Numérica, superando de modo conveniente as dificuldades constatadas e dar um impulso qualitativo no processo de ensino aprendizagem da cadeira de Análise Matemática I.

BIBLIOGRAFIA

Ballester, S. et al. (1992). *Metodologia do Ensino da Matemática*. 2ª Edição. Tomo I Havana.: Editorial Povo e Educação.

Brun, J. (2000). *Didáctica das Matemáticas*. Horizontes Pedagógicos. Lisboa Portugal: Divisão Editorial.

Davidson, L. J.,& Reguera, R. R. (S/A). *Problemas da Matematica Elementar I.* Cuba: Povo e Educação.

Demidovitch, B. (1993). *Problema e Exercícios de Análise Matemática.* Lisboa: Escolar Editora.

Fernández, C. S. (1982). *Análisis Matemático Tomo I* .PLaya, Ciudad de La Habana, Cuba: Editorial Povo e Educação.

Fernández, C. S. (1982). *Análisis Matemático Tomo I* .PLaya, Ciudad de La Habana, Cuba: Editorial Povo e Educação.

Ferreiras, M. V. (2014). *Matematica para consurso Calculo e Geometria Analitica*. Obtido em www.matematicaparaconcurso.com/site/index.php?option= com_content&view=article&id=226:historia-do-calculo&catid=62:historia damatematica-de Outubro de 2014.

Iezzi, G. (2004). *Fundamentos de Matemática elementar I*. 8ª Edição: São Porto Editoras.

Jungk, W. (1985). *Conferencia sobre Metodologia de la enseñanza de la Matematica 1.*Playa, Ciudade de la Habana: Editorial Povo e Educacao.

Kreiszig, E. (1985). *Matemática Superior*. Libros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a.Edition.

Leandro, H. (2007). *Comentarios Metodológicos de lo Enseña de la Matemática*. Cuba. Universidad de Ciego de Ávila. Conferencia Magistral.

Milián, M. H. J (2005). *Una concepción en la enseñanza da Matemática para propiciar aprendizaje desarrollador*. Habana. Cuba: Tese Doutoramento.

Milian, M. H., & Jamba, M. (2012). *Análisis Matemático de las Funciones Reales en una Variable.*Luanda - Angola: Mayamba Editora.

Oliveira, H. B. (2008). *Apontamentos de Analise Matemática I*. Universidade do Algarve.

Safier, F. (2003). *Teoria e Problema de pré – cálculo.* 1ª Edição: Porto Alegre Editoras.

Thomas, G. B. (2009). *Cálculo.* Brasil: Person Education.

Vicente, M. F., & Morote, A. R. (s.f.). *Como dirigir el proceso de formación de habilidades Matemáticas* . Instituto Superior Pedagogico Frank País García, Santiago de Cuba, Cuba.

Baron, M. E. (1985). *Curso de Historia da matemática*. Brasilia: UNB.

Courant, R. (2000). O que é Matemática? *Ciência Moderna: Rio de Janeiro.*