# UM ESTUDO DO ERRO TIPO II EM UM TESTE DE HIPÓTESES PARA A MÉDIA

**CARRASCO,** Cleber Giugioli[1]
**SILVA,** Luciano Amaral da[2]

**Recebido em:** 2013-04-29 **Aprovado em:** 2013-09-29 **ISSUE DOI:** 10.3738/1982.2278.894

**RESUMO:** Neste trabalho avaliou-se a probabilidade de se cometer o erro tipo II em um teste de hipóteses para a média. Essa avaliação foi realizada através de um estudo de simulação conhecido como método de Monte Carlo, o qual foi implementado no *software free R*. Concluiu-se que na medida em que se aumenta o tamanho da amostra ou o nível de significância do teste, o erro tipo II diminui, isto também ocorre quando o valor real da média se distancia do valor fixado na hipótese nula. Entretanto, quanto maior é a variância dos dados, maior é a probabilidade de se cometer o erro tipo II. Ou seja, pode-se controlar este erro, em particular, através do tamanho amostral e do nível de significância do teste.

**Palavras-chave:** Método de Monte Carlo. Nível de significância. Probabilidade do erro tipo II.

**SUMMARY:** In this work we evaluated the type II error rates in a hypothesis testing for the mean. This evaluation was carried out through a simulation study known as the Monte Carlo method, which was implemented in the software free R. We concluded that the extent that increases the sample size or the level of significance the test, the type II error decreases, this is also the case when value the true average differs from the value determined in the null hypothesis. However, the greater is the variance of the data, the higher is of the type II error rates. That is, we can control this error, in particular by sample size and the level of significance the test.

**Keywords:** Monte Carlo method. Level of significance. Type II error rates.

## INTRODUÇÃO

Ao aplicar um teste de hipóteses se está sujeito a cometer dois erros, os quais são denominados de erro tipo I e erro tipo II (CASSELA; BERGER, 2010). O erro tipo I ocorre quando se rejeita a hipótese nula, sendo ela de fato verdadeira, enquanto o erro tipo II ocorre quando não se rejeita a hipótese nula, sendo a mesma falsa (SILVA; FERREIRA, 2002).

As probabilidades de ocorrer os erros tipo I e II são dadas respectivamente por (MAGALHÂES; LIMA, 2005):

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) \qquad \textbf{(1)}$$
$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa})$$

Em geral, controla-se o erro tipo I fixando a sua probabilidade de ocorrência ($\alpha$) através do nível de significância do teste, porém, a probabilidade de ocorrer o erro tipo II ($\beta$) não é fixada, ou seja, esse erro não é controlado.

Dessa forma, este trabalho teve como objetivo avaliar a probabilidade de ocorrer o erro tipo II ao utilizar-se um teste de hipóteses para a média, em relação ao tamanho amostral, nível de significância do teste, variabilidade dos dados e do afastamento da média real em relação à fixada na hipótese nula.

Para avaliar a probabilidade de se cometer o erro tipo II, foi realizado um estudo de simulação por meio do método de Monte Carlo, o qual consiste em repetir o mesmo procedimento várias vezes (MUN, 2006; NERY; FERREIRA; CHAVES, 2005; BARROS; MAZUCHELI, 2005). Neste estudo de simulação, toda implementação computacional foi feita utilizando o *software free R* (VENABLES;

[1] Unidade Universitária de Ciências Exatas e Tecnológicas - Universidade Estadual de Goiás
[2] Graduado em Matemática - Universidade Estadual de Goiás

SMITH, 2011). A escolha desse *software* se deu pela facilidade na criação de novas funções, além do fato de ele ser um *software* estatístico gratuito (PETERNELLI; MELLO, 2007).

Neste trabalho, considerou-se o teste de hipóteses para a média com variância conhecida (BUSSAB; MORETTIN, 2010), uma vez que os dados foram gerados de uma distribuição Normal, onde foram atribuídos valores tanto para a média quanto para a variância.

## MÉTODOS

Para avaliar o erro tipo II, primeiramente foi gerada uma amostra de tamanho *n* de uma distribuição Normal com média $\mu$ (média real) e variância $\sigma^2$. Em seguida, foi fixado o nível de significância do teste ($\alpha$) e aplicado o teste de hipóteses para a média com variância conhecida, para testar a hipótese nula ($H_0$: $\mu = \mu_0$) contra a hipótese alternativa ($H_A$: $\mu \neq \mu_0$), isto para o teste bilateral. Para os testes unilaterais, foram utilizadas como hipóteses alternativas $H_A$: $\mu < \mu_0$ no caso unilateral à esquerda e $H_A$: $\mu > \mu_0$ no caso unilateral à direita (BUSSAB; MORETTIN, 2010). Atribuíram valores para $\mu$, tais que $\mu \neq \mu_0$.

Posteriormente, foi verificado se o teste rejeitou ou não a hipótese nula de $\mu = \mu_0$. Note que, se a amostra é proveniente de uma distribuição normal com média igual a $\mu$ ($\mu \neq \mu_0$), então o teste deveria rejeitar a hipótese nula de $\mu = \mu_0$ (decisão correta). No entanto, se o teste não rejeitasse a hipótese nula, teria ocorrido o erro do tipo II, uma vez que a hipótese nula é falsa, pois $\mu \neq \mu_0$. Assim, pode-se definir $\delta = 0$ se o teste rejeitasse $H_0$ e $\delta = 1$ se o teste não rejeitasse $H_0$.

Utilizando o método de Monte Carlo (MUN, 2006; NERY; FERREIRA; CHAVES, 2005; BARROS; MAZUCHELI, 2005), foi repetido esse processo *r* vezes, verificando-se em cada repetição se o teste rejeitou a hipótese nula ou não. Assim, tem-se:

$$\begin{array}{l} \delta_i = 0 \text{ se o teste rejeitar } H_0 \\ \delta_i = 1 \text{ se o teste não rejeitar } H_0 \end{array} \qquad i = 1, 2, \ldots, r \qquad \textbf{(2)}$$

Dessa forma, pode-se estimar a probabilidade de ocorrer o erro tipo II ($\beta$), ou seja, a P(não rejeitar $H_0$ | $H_0$ é falsa), adaptando a expressão apresentada por Carrasco e Silva (2009) da seguinte maneira:

$$\beta^* = \frac{\sum_{i=1}^{r} \delta_i}{r}, \quad i = 1, 2, \ldots, r \qquad \textbf{(3)}$$

Além disso, neste estudo de simulação foram atribuídos alguns valores distintos para o tamanho amostral *n*, para verificar seu efeito na estimação do erro tipo II. Com o mesmo objetivo, adotaram-se valores distintos para a média $\mu$, variância $\sigma^2$ e nível de significância do teste $\alpha$.

Este procedimento foi realizado tanto para o teste bilateral, quanto para os testes unilaterais à esquerda e à direita, respectivamente.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A metodologia adotada foi implementada no *software* R, onde a hipótese nula foi tomada como sendo $H_0$: $\mu = 5$ e, amostras foram geradas de uma distribuição Normal utilizando-se os seguintes valores para seus parâmetros, $\mu$ = 4,0; 4,5; 4,9; 5,1; 5,5 e 6,0 e $\sigma^2$ = 0,0625; 1 e 25. Esses valores foram escolhidos para verificar o efeito da distância da média $\mu$ em relação ao valor da média adotado na hipótese nula, e da variabilidade dos dados. Também com o objetivo de verificar o efeito do tamanho amostral e do nível de significância do teste, os valores de *n* e $\alpha$ foram fixados em n = 5; 10; 30; 50; 200 e 1.000 e $\alpha$ = 0,01; 0,05 e 0,10.

Para cada valor atribuído para a média $\mu$, oscilou-se a variância, o tamanho amostral e o nível de significância do teste. Para os testes unilaterais, consideraram-se apenas os valores de $\mu$ menores do que 5 para o caso unilateral à esquerda, e maiores do que 5 no caso unilateral à direita. Ao todo foram 648 combinações de amostras.

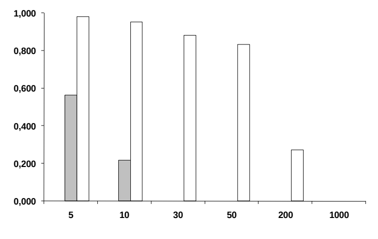
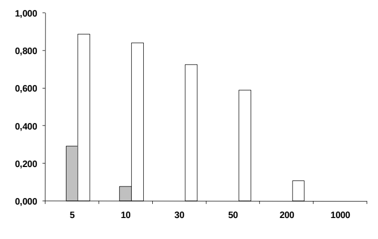
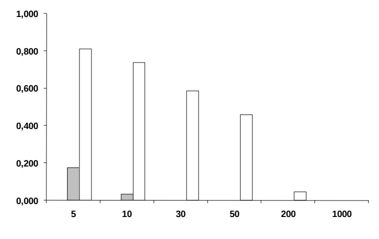
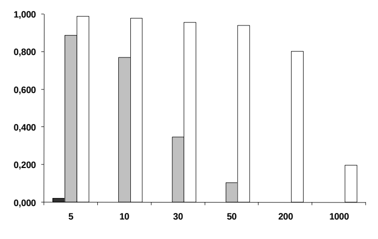
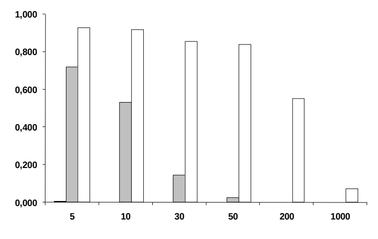
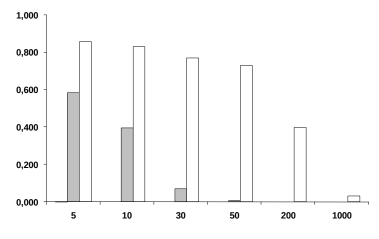
No estudo de simulação de Monte Carlo utilizou-se r = 1.000 e, em cada caso, estimou-se o erro tipo II através da expressão dada em (3). Ao todo foram 648 x 1.000 = 648.000 simulações.

Os resultados desse estudo estão apresentados nos Quadros 1, 2 e 3, onde as barras, representam $\sigma^2$ = 0,0625; as barras, $\sigma^2$ = 1 e as barras, $\sigma^2$ = 25 Com relação ao tamanho amostral, à medida que se aumenta o tamanho da amostra o erro tipo II diminui, ou seja, quando se selecionam amostras maiores para realizar um teste de hipóteses para a média, a probabilidade de se cometer o erro tipo II é menor. Em relação ao nível de significância do teste, concluiu-se que, aumentando $\alpha$, $\beta$ diminui, ou seja, quanto maior for o nível de significância do teste menor será a probabilidade de ocorrer o erro tipo II, no entanto, maior será o erro tipo I. Adicionalmente, verificou-se que, quanto maior a variância dos dados, maior é a probabilidade do erro tipo II, ou seja, quando se tem uma variabilidade maior no conjunto de dados, a probabilidade de não rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa também aumenta.

Observou-se ainda que, quanto mais afastada estiver a média $\mu$ do valor testado na hipótese nula, menor será a probabilidade de se cometer o erro tipo II. Isso vale tanto para valores de $\mu$ menores quanto maiores que $\mu_0$, basta somente que elas se distanciem do valor testado. Todos estes resultados são verificados tanto para o teste bilateral quanto para os testes unilaterais (à esquerda e à direita).

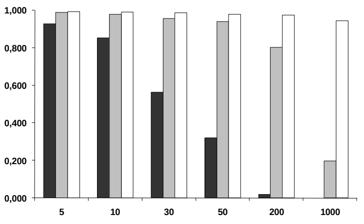
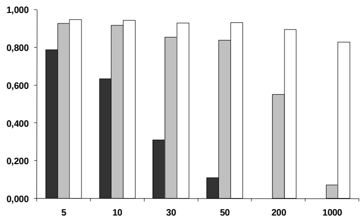
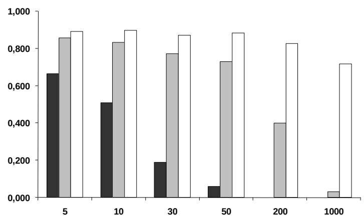
**Quadro 1**: Gráficos dos resultados do erro Tipo II para o teste unilateral à esquerda

**(Continua)**

| | **$\alpha$ = 0,01** | **$\alpha$ = 0,05** | **$\alpha$ = 0,10** |
|---|---|---|---|
| **$\mu$ = 4,0** |  |  |  |
| **$\mu$ = 4,5** |  |  |  |

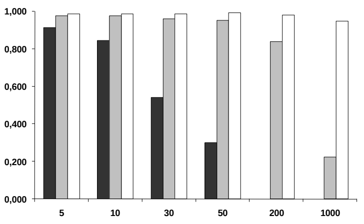
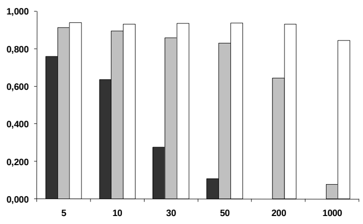
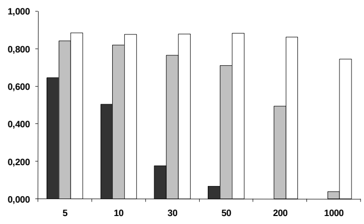
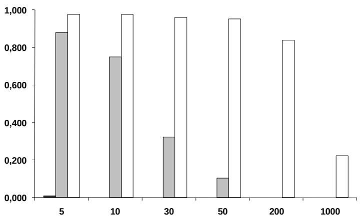
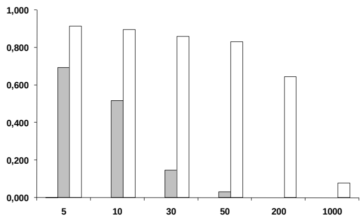
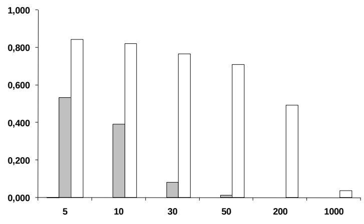
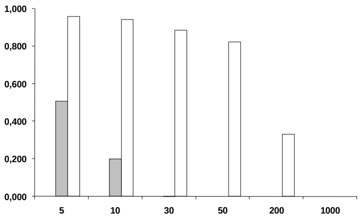
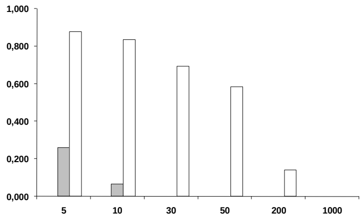
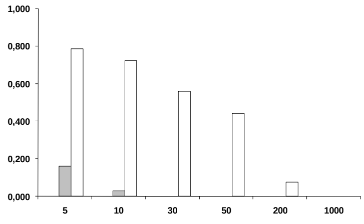
**Quadro 1**: Gráficos dos resultados do erro Tipo II para o teste unilateral à esquerda

**(Conclusão)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **μ = 4,9** |  |  |  |

**Fonte:** Elaborado pelos Autores

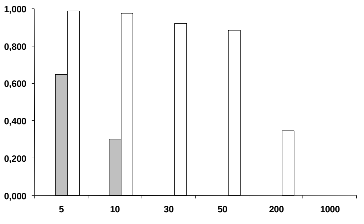
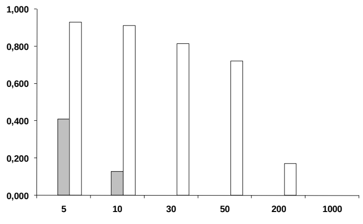
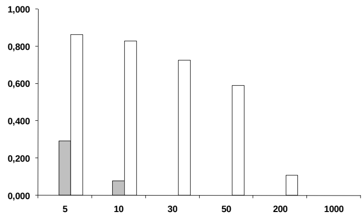
**Quadro 2:** Gráficos dos resultados do erro Tipo II para o teste unilateral à direita

| | **α = 0,01** | **α = 0,05** | **α = 0,10** |
|---|---|---|---|
| **μ=5,1** |  |  |  |
| **μ=5,5** |  |  |  |
| **μ=6,0** |  |  |  |

**Fonte:** Elaborado pelos Autores

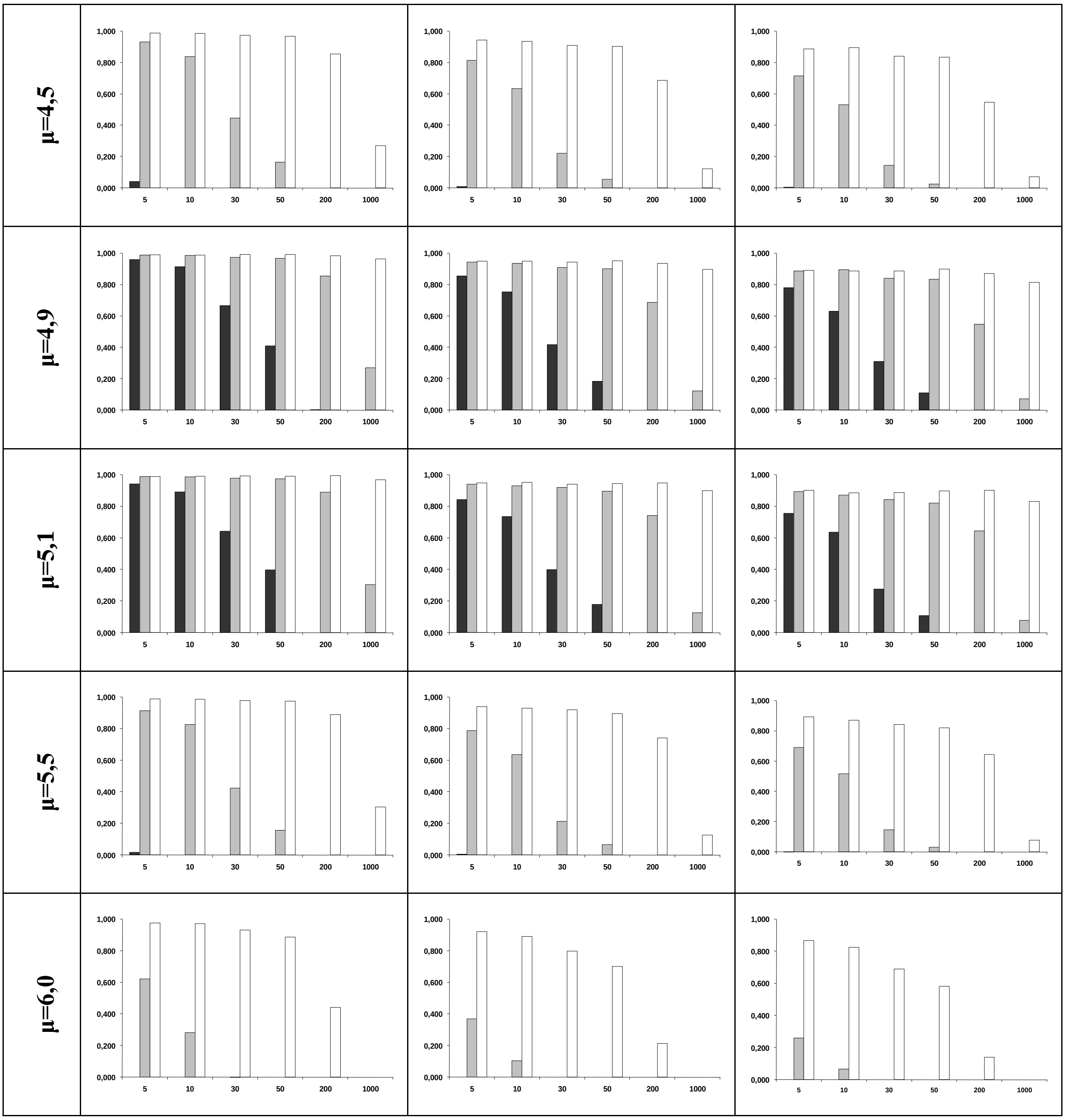
**Quadro 3:** Gráficos dos resultados do erro Tipo II para o teste bilateral

**(Continua)**

| | **α = 0,01** | **α = 0,05** | **α = 0,10** |
|---|---|---|---|
| **μ=4,0** |  |  |  |

**Quadro 3:** Gráficos dos resultados do erro Tipo II para o teste bilateral

**(Conclusão)**




**Fonte:** Elaborado pelos Autores

## CONCLUSÃO

Através deste estudo de Monte Carlo, verificou-se que a probabilidade de se cometer o erro tipo II em um teste de hipóteses para a média com variância conhecida é influenciada pelo tamanho amostral, nível de significância do teste, variabilidade dos dados e pela distância entre a média real e o valor testado na hipótese nula.

Em relação ao erro do tipo II, concluiu-se que este erro diminui na medida em que se aumenta o tamanho da amostra, ou toma-se um nível de significância maior, ou ainda quando a média real se distancia do valor testado na hipótese nula. Porém, quanto maior a variância dos dados, maior também é a probabilidade de ocorrer o erro tipo II.

Sendo assim, é necessário cuidado ao aplicar um teste de hipóteses para a média com variância conhecida, uma vez que se está sujeito a cometer erros. Entretanto, podem-se controlar esses erros, em particular, através do tamanho da amostra e do nível de significância fixado no teste.

## AGRADECIMENTOS

A Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Estadual de Goiás, pela concessão de bolsa de iniciação científica (PBIC/UEG) ao acadêmico Luciano Amaral da Silva.

## REFERÊNCIAS

BARROS, E. A. C.; MAZUCHELI J. Um estudo sobre o tamanho e poder dos testes t-Student e Wilcoxon. **Acta Sci. Technol.** Maringá, v. 27, n. 1, p. 23-32, jan./jun., 2005.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística básica.** 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2011.

CARRASCO, C. G.; SILVA, L. A. Avaliação do erro tipo 1 na aplicação de um teste de hipóteses para a média. **Revista Mosaicum**. Ano 5, n. 9, jan./jun., 2009.

CASSELA, G.; BERGER, R. L. **Inferência estatística**. Tradução da 2ª edição norte-americana por Solange Aparecida Visconte. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. **Noções de probabilidade e estatística.** 7. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2010.

MUN, JOHNATHAN. **Applying Monte Carlo simulation, real options analysis, forecasting, and optimization techniques**. Wiley, 2006.

NERY, J. C.; FERREIRA, D. F.; CHAVES, L. M. Abordagem não-paramétrica do problema de Behrens-Fisher usando *bootstrap*. **Rev. Mat. Estat.**, São Paulo, v.23, n.3, p.71-85, 2005.

PETERNELLI, L. A.; MELLO, M. P. **Conhecendo o R:** uma visão estatística**.** Viçosa: UFV, 2007.

SILVA, R. B. V.; FERREIRA, D. F. Comparação da robustez de alternativas do teste de igualdade de duas médias populacionais sob não normalidade por simulação Monte Carlo. **Acta Scientiarum.** Maringá, v. 24, n. 6, p. 1771-1776, 2002.

VENABLES, W. N.; SMITH, D. M. and the R Development Core Team **An Introducion to R:** Notes on R: A Programing Environment for Data Analysis and Grafics, Version 3.0.0, 2013. Disponível em: http://cran-r.c3sl.ufpr.br/. [Acessado em 29 maio2013].