

UDC 330.4

## Defining the Optimal Inventory Management Program Using Bellman's Dynamic Programming Method

<sup>1</sup>Anna Y. Gorlach

<sup>2</sup>Vyacheslav M. Duplyakin

<sup>3</sup>Ramziya R. Yarmukhametova

<sup>1</sup>Samara State Aerospace University, Russia

34 Moskovskoye Shosse, Samara 443086

student

E-mail: [anna-y-gorlach@mail.ru](mailto:anna-y-gorlach@mail.ru)

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University, Russia

34 Moskovskoye Shosse, Samara 443086

Dr. (Technical), Professor

E-mail: [vyacheslav@dupland.com](mailto:vyacheslav@dupland.com)

<sup>3</sup>Samara State Aerospace University, Russia

34 Moskovskoye Shosse, Samara 443086

student

E-mail: [bur81by@rambler.ru](mailto:bur81by@rambler.ru)

**Abstract.** The paper treats the issue of the Bellman's dynamic programming defining optimal inventory management program when the delivery and shipment dates are taken into consideration.

**Keywords:** Optimal inventory equation; dynamic programming; discrete systems.

В данной статье рассматривается задача управления запасами в следующей постановке: необходимо составить план пополнения запасов на складе на отрезок времени, состоящий из  $N$  периодов. Предполагается, что для каждого из этих отрезков имеется прогноз спроса на выпускаемую продукцию; спрос не является постоянным. В зависимости от сроков доставки дополнительного запаса на склад и отгрузки товара потребителю запас, созданный в течение периода  $t$ , может быть использован для полного или частичного покрытия спроса в течение этого периода или же только для покрытия спроса в последующих периодах. Предлагается алгоритм, позволяющий разработать такую программу управления запасами, при которой общая сумма затрат на пополнение и содержание запасов минимизируется при условии полного и своевременного удовлетворения спроса.

В основе предлагаемого алгоритма формирования оптимального плана управления запасами лежат такие математические модели и методы, как модель Уилсона и метод динамического программирования Беллмана в дискретной постановке.

Для примера рассмотрим функционирование склада в течение 12 месяцев. Значения спроса в каждом месяце определены в таблице 1:

Таблица 1

### Значения спроса в течение рассматриваемого отрезка времени

Месяц	Янв.	Фев.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сент.	Окт.	Ноя.	Дек.
Заказ (спрос)	10	20	15	25	35	40	50	50	45	30	25	10

Заданы начальное и конечное значения запасов на складе:  $x[0]_n=10$ ,  $x[12]=10$ . \*  
Функции стоимости хранения (1) и перевозки (2) продукции:

$$C_{\text{хран}} = 0,2 x \quad (1)$$

$$C_{\text{пер}} = 10 + 0,1 u \quad (2)$$

\* Все параметры определены в условных единицах продукции.

где  $x$  – уровень запаса на складе на конец рассматриваемого периода,  
 $u$  – объём дополнительной партии (пополнение запасов) в данном периоде.

На  $x$  и  $u$  наложены ограничения, связанные с размером склада и максимально допустимой единовременной перевозкой дополнительных запасов. В связи с этим определены следующие параметры: объём склада  $x_{max} = 50$ , максимальная единовременная транспортировка  $u_{max} = 100$ . Кроме того, учитывается условие доставки и отгрузки продукции упаковками по 5 единиц. Критерий оптимальности – минимизация суммарных издержек на перевозку и хранение материала. Исходная задача оптимального управления:

$$x[i] = x[i - 1] + u[i] - a[i], \quad i = \overline{1, 12}$$

где  $a$  – спрос на продукцию в текущем периоде.

$$J_i = f_i(x[i - 1], u[i]) = 0,2x[i - 1] + \begin{cases} 10 + 0,1u[i], & u[i] > 0 \\ 0, & u[i] = 0 \end{cases}$$

$$J = \sum_{i=1}^{12} J_i = \sum_{i=1}^{12} f_i(x[i - 1], u[i]) \rightarrow \min_{u[1], \dots, u[12]}$$

$$x[0] = 10$$

$$x[12] = 10$$

$$u[i] \leq b_{max}$$

$$0 \leq x[i] \leq 50$$

Функция Беллмана рассчитывается по следующей формуле (следует помнить, что в методе Беллмана расчёт производится от конечного периода к начальному):

$$S(x[11]) = \min_{u[12]} J_{12} = \min_{u[12]} \left[ 0,2x[11] + \begin{cases} 10 + 0,1u[12], & u[12] > 0 \\ 0, & u[12] = 0 \end{cases} \right]$$

Далее определяются значения управления  $u$  и запасов на складе  $x$  в 11 периоде, соответствующие найденному значению функции Беллмана – эти значения будут оптимальными. Процедура повторяется для всех периодов; в результате формируется план оптимального управления запасами (таблица 2):

Таблица 2

**План оптимального управления запасами без учёта времени пополнения запасов и отгрузки товара**

№ периода	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Заказ (спрос)	0	10	20	15	25	35	40	50	50	45	30	25	10
Пополнение запасов	35	0	0	0	60	0	90	0	95	0	75	0	0
Запасы в конце периода	45	35	15	0	35	0	50	0	45	0	45	20	10

Рассмотренная модель имеет существенные недостатки, в частности, она не учитывает затраты на хранение дополнительного запаса с момента доставки до конца текущего периода, а также затраты на хранение заказов с начала периода до момента отгрузки товара покупателю. Чтобы устранить эти недостатки, и сделать модель более адекватной, введём два дополнительных параметра: дата доставки товара на склад  $t_u$  и дата отгрузки заказа потребителю  $t_a$ . Будем считать, что эти даты фиксированы. В зависимости от значений параметров  $t_a$  и  $t_u$  возможны два случая. Если товар доставляется на склад раньше, чем производится отгрузка, то запас, доставленный на склад в текущем периоде, можно использовать для удовлетворения спроса в том же периоде. Если же отгрузка осуществляется раньше, то необходимо обеспечить значение остатка на складе в предыдущем периоде, достаточное для удовлетворения спроса в текущем периоде. В связи с этим алгоритм формирования оптимального плана управления запасами несколько

усложняется: изменяется функция стоимости хранения (3) и появляются дополнительные ограничения на размер запаса  $x$  в расчёте функции Беллмана.

$$c_{\text{хран}} = 0,2 \left[ x + a \cdot \frac{t_a}{30} - u \cdot \frac{t_u}{30} \right] \quad (3)$$

Таким образом, функционал задачи оптимального управления примет вид

$$J_i = 0,2 \left[ x[i] + a[i] \cdot \frac{t_a}{30} - u[i] \cdot \frac{t_u}{30} \right] + \begin{cases} 10 + 0,1u[i], & u[i] > 0 \\ 0, & u[i] = 0 \end{cases}$$

Блок-схема алгоритма, позволяющего сформировать оптимальный план управления запасами по критерию минимизации суммарных издержек при различных параметрах исходной задачи, представлена на рисунке 1.

В таблицах 3 и 4 представлены результаты применения алгоритма к решению задачи, описанной выше, с учётом значений дополнительных параметров  $t_a = 10$  и  $t_u = 20$  (Таблица 3) и  $t_a = 20$ ,  $t_u = 10$  (Таблица 4):

Таблица 3

**План оптимального управления при  $t_a = 10$ ,  $t_u = 20$**

№ периода	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Заказ (спрос)	0	10	20	15	25	35	40	50	50	45	30	25	10
Пополнение запасов	20	0	40	0	35	40	50	50	45	30	45	0	0
Запасы в конце периода	30	20	40	25	35	40	50	50	45	30	45	20	10
Затраты	15,33	4,67	18,00	6,00	17,50	19,00	21,00	21,67	20,83	18,00	19,50	5,67	2,67

Таблица 4

**План оптимального управления при  $t_a = 20$ ,  $t_u = 10$**

№ периода	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Заказ (спрос)	0	10	20	15	25	35	40	50	50	45	30	25	10
Пополнение запасов	0	0	60	0	0	75	0	50	50	75	0	45	0
Запасы в конце периода	10	0	40	25	0	40	0	0	0	30	0	20	10
Затраты	2,00	1,33	22,67	7,00	3,33	25,17	5,33	18,33	18,33	24,50	4,00	18,83	3,33

Из анализа данных в таблицах 3 и 4 следует, что значения введённых дополнительных параметров в значительной мере влияют на выбор оптимальной стратегии управления запасами.

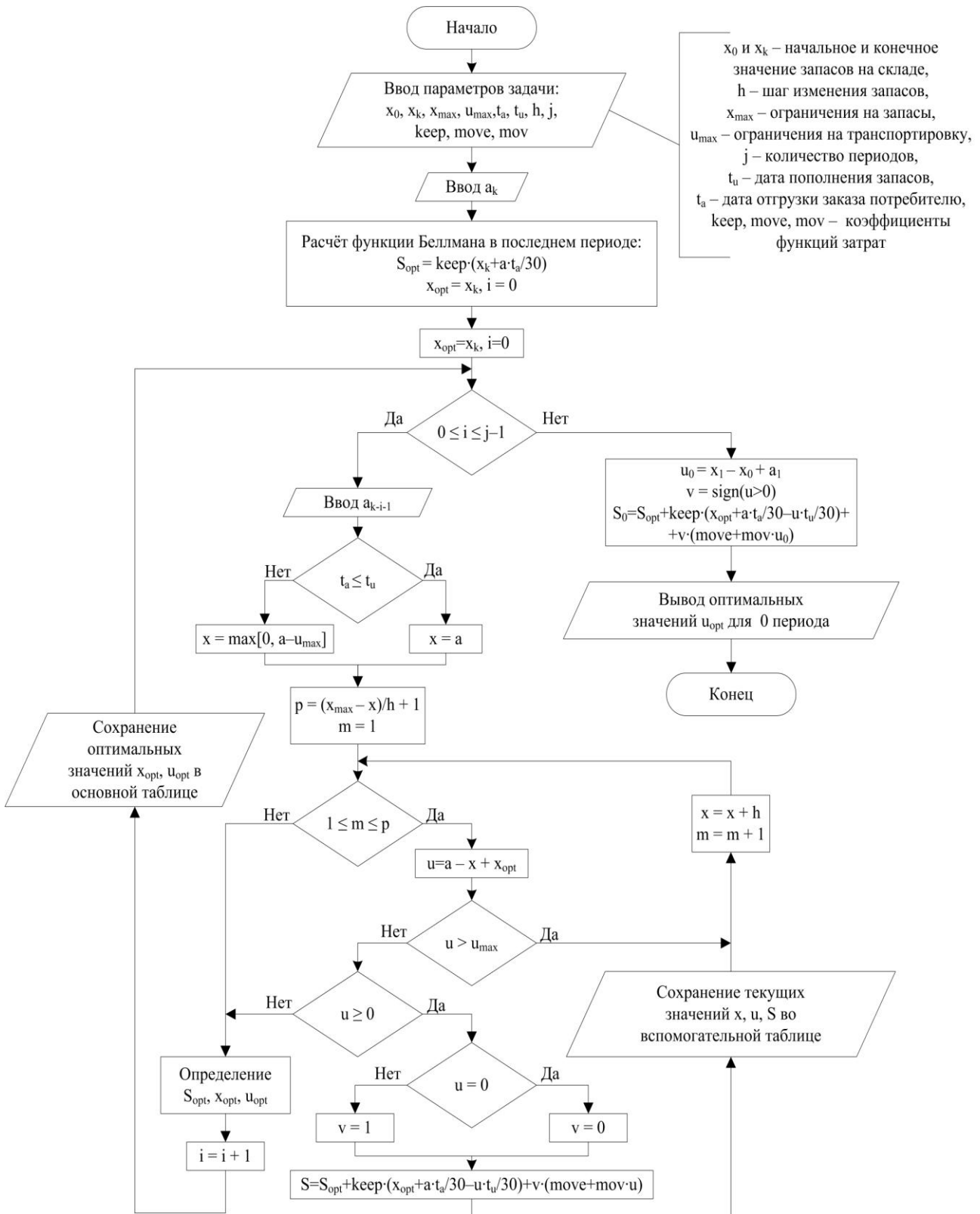


Рис. 1. Алгоритм формирования оптимального плана управления запасами

Предложенный алгоритм, а также разработанное программное обеспечение позволяют решать задачу оптимального управления запасами с учётом дополнительных параметров – времени доставки и отгрузки, обеспечивая формирование плана оптимального управления запасами по критерию минимизации суммарных издержек и использованием метода динамического программирования Беллмана. Разработанное программное обеспечение позволяет варьировать параметры исходной задачи и получать наглядные результаты –

график оптимального управления, график динамики запасов, а также значения затрат в каждом периоде и на всём рассматриваемом промежутке времени.

УДК 330.4

**Математическое моделирование управления запасами с использованием метода динамического программирования Беллмана**

<sup>1</sup> Анна Юрьевна Горлач

<sup>2</sup> Вячеслав Митрофанович Дуплякин

<sup>3</sup> Рамзия Рамисовна Ярмухаметова

<sup>1</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет, Россия

443086, г. Самара, Московское шоссе, 34

Студент

E-mail: anna-y-gorlach@mail.ru

<sup>2</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет, Россия

443086, г. Самара, Московское шоссе, 34

Доктор технических наук, профессор

E-mail: vyacheslav@dupland.com

<sup>3</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет, Россия

443086, г. Самара, Московское шоссе, 34

Студент

E-mail: bur81by@rambler.ru

**Аннотация.** В статье рассматривается применение метода динамического программирования Беллмана в решении задачи оптимального управления запасами с учётом времени доставки и отгрузки продукции.

**Ключевые слова.** Динамическое программирование; управление запасами; оптимизация; дискретные системы.