

Indexação de Fundos de Pensão com Fundos de Índice

(Indexing Pension Funds with Exchange-Traded Funds)

Maria Alcina Rodrigues Batista Sanfins*

Antonio Marcos Duarte Júnior**

Resumo

Este artigo considera o uso de Fundos de Índice (FI) para a indexação das carteiras de fundos de pensão no Brasil. Uma metodologia é apresentada para a utilização combinada de FI e dos ativos que compõem o índice de referência escolhido. A metodologia está baseada em modelos de programação matemática, com os problemas resultantes resolvidos numericamente com qualquer algoritmo de otimização global. A modelagem é ilustrada para o caso do mercado acionário brasileiro com estudos simulados para dois FI: BOVA11 (indexado ao Ibovespa) e BRAX11 (indexado ao IBrX-100). As limitações impostas pela legislação em vigor foram incorporadas aos estudos simulados. A metodologia se provou uma alternativa eficiente para os gestores de fundos de pensão, com bons resultados no que se refere ao controle do erro de aderência.

Palavras-chave: fundos de índice; gestão passiva; indexação; erros de aderência.

Códigos JEL: C61; C63; G11; G23.

Abstract

This article considers the use of Exchange-Traded Funds (ETFs) for indexing the portfolios of pension funds in Brazil. A methodology is proposed to allow the portfolio managers to combine ETFs and the assets composing its benchmark. The methodology is based on a mathematical programming model, with the resulting problem solved by any global optimization algorithm. The results obtained for two ETFs – BOVA11 (indexed to the Ibovespa) and BRAX11 (indexed to the IBrX-100) – are presented for illustrative purposes. All constraints imposed by the Brazilian regulatory environment have been incorporated in the studies presented.

Submetido em 31 de dezembro de 2013. Reformulado em 3 de abril de 2014. Aceito em 6 de maio de 2014. Publicado on-line em 6 de outubro de 2014. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Antonio Zoratto Sanvicente.

*FAPES / BNDES, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

E-mail: alcinasanfins@fapesbndes.org.br

**UERJ e IbmeC/RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

E-mail: antoniomarcosdj@uerj.br

The methodology proved to be an interesting alternative to pension fund managers, with good results with respect to the control of tracking errors.

Keywords: exchange traded funds; passive management; indexing; tracking errors.

1. Introdução

Fundos de Índice (FI; Exchange-Traded Funds) são fundos de investimento negociados em bolsas de valores ou no mercado de balcão organizado cujo objetivo é acompanhar o desempenho de um índice de referência de mercado (como IBrX-100, Ibovespa etc.). As cotas dos FI podem ser negociadas em tempo real de forma semelhante às ações, permitindo a compra, a venda e o aluguel aos participantes do mercado, conforme a Instrução CVM 359/2002 (Comissão de Valores Mobiliários, 2002).

O primeiro FI foi oferecido em 1990 no Canadá. Três anos depois surgiu o primeiro FI no mercado norte-americano – S&P Depository Receipts Trust Series I – negociado na American Stock Exchange, cujo objetivo era acompanhar o desempenho do índice do mercado acionário S&P500 (Investment Company Institute, 2012).

Até o final da década de 90 o crescimento dos FI no mundo havia surpreendido muitos participantes do mercado financeiro, especialmente após o surgimento destes instrumentos financeiros nos mercados europeus e asiáticos. Os participantes do mercado viam um crescimento ainda mais surpreendente na década seguinte, com a incorporação dos mercados emergentes. Segundo o relatório técnico Blackrock (2012), no ano 2000 o montante investido no mundo em FI era de aproximadamente US\$75 bilhões (dos quais US\$ 65 bilhões nos EUA), tendo atingido a marca de US\$ 1,6 trilhão em 2012 (do qual US\$ 1,2 trilhão nos EUA). A velocidade de crescimento dos FI pode ser constatada se observamos que havia menos de 100 destes instrumentos disponíveis para investimento globalmente em 2000 e, ao final de 2012, mais de 3200, segundo também Blackrock (2012).

No Brasil o primeiro FI foi oferecido em 2004 pelo Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES): o Papéis Índice Brasil Bovespa (PIBB) buscava a indexação ao IBrX-50 e era composto por ações da carteira do BNDESPAR (BNDES, 2004). O sucesso deste lançamento foi enorme junto aos pequenos investidores do mercado acionário, sendo superado apenas pelo movimento de compra de ações da VALE e Petrobrás com recursos do Fundo de Garantia do Tempo de Serviço (FGTS). Por quatro anos somente o PIBB esteve disponível para os investidores brasileiros. Em 2008 uma gestora internacional de recursos de terceiros obteve

autorização da Comissão de Valores Mobiliários (CVM) para lançar três FI no Brasil (Blackrock, 2013): BOVA (para o índice Bovespa), SMAL (para o índice SMLL) e MILA (para o índice MLCX).

Ao final de 2012 haviam quinze FI oferecidos no país, com um patrimônio total de R\$ 3,8 bilhões, sendo os dois maiores gestores a Blackrock Gestora de Recursos e o Itaú Unibanco (BM&FBOVESPA, 2013). O maior destes FI era o BOVA11, gerido pela Blackrock Gestora de Investimentos, com patrimônio de aproximadamente R\$1,8 bilhão, e com o Ibovespa como seu índice de referência. O segundo maior FI era o PIBB11, gerido pelo Itaú Unibanco, com patrimônio de aproximadamente R\$1,3 bilhão e com o IBrX-50 como seu índice de referência. Para o caso do índice de referência IBrX-100 o maior FI disponível era o BRAX11, gerido pela Blackrock Gestora de Recursos, com um patrimônio aproximado de R\$52 milhões.

Segundo BM&FBOVESPA (2012a) a evolução do volume médio diário negociado no mercado brasileiro de FI cresceu em mais de 70% de 2010 para 2011. Outro dado interessante relativo ao crescimento dos FI no Brasil está ilustrado em BM&FBOVESPA (2013), onde obtemos a divisão por tipo de investidor do volume médio negociado em 2012. Por exemplo, 45% do montante total negociado foram operados por fundos de pensão, contra 28% por instituições financeiras, 18% por investidores estrangeiros, 7% por pessoas físicas, e o restante (menos de 3%) por empresas públicas e privadas. Em outras palavras, o interesse dos fundos de pensão brasileiros nos FI vem se constituindo em importante fator para a expansão deste mercado.

O interesse de fundos de pensão por FI está relacionado ao debate sobre a melhor forma de gerir carteiras de investimento (Fabozzi & Markowitz, 2011): gestão passiva ou gestão ativa? Lembrando, na gestão ativa de carteiras o responsável responde ativamente às mudanças nas expectativas no mercado de forma a obter retornos (ajustados aos riscos) superiores aos dos concorrentes e/ou índices de referência, enquanto na gestão passiva o responsável não responde às mudanças nas expectativas no mercado (Margin *et al.*, 2007).

Dentre as diferentes possibilidades para a gestão de recursos de forma passiva destaca-se a indexação, definida como a estruturação de carteiras com o propósito de obter desempenho/retorno igual ao de algum índice de referência (Fusco *et al.*, 2007). A indexação de carteiras surgiu no mercado acionário norte-americano em 1970 (CFA Institute, 2009) e no Brasil em 1996, conforme ilustrado pela metodologia descrita em Duarte Jr. (1997).

A indexação de carteiras tem crescido de forma acelerada quando observamos os mercados internacionais. Por exemplo, se considerarmos o montante total investido no mercado acionário norte-americano entre 1997 e 2011 veremos que o percentual gerido de forma indexada subiu de 6,6% para 16,4%, sendo a maior parte deste crescimento devido aos fundos de pensão (Investment Company Institute, 2012).

Nos mercados internacionais os FI e as carteiras indexadas são as duas principais possibilidades consideradas por fundos de pensão interessados na indexação, sendo este um dos motivos para o crescimento rápido das ofertas de FI no exterior, segundo Blackrock (2012). Exemplos da utilização de FI na indexação de carteiras nos mercados norte-americano e europeu estão documentados em Alexander & Barbosa (2008), Amenc & Goltz (2009), Blitz *et al.* (2012), Bruce (2009), Bruce & Fuhr (2012), Harper *et al.* (2006), Kostovetsky (2003), Rompotis (2009), dentre outros.

Um ponto importante antes da adoção de FI para indexação de carteiras está relacionado aos erros de aderência do FI em relação ao seu índice de referência. Aber *et al.* (2009), Charupat & Miu (2013), Engle & Sarkar (2006), Johnson (2009), Meric *et al.* (2010) e Shin & Soydemir (2010) ilustram os possíveis impactos negativos neste tipo de gestão de carteiras para a realidade de alguns mercados internacionais.

O objetivo deste artigo é propor uma metodologia para a indexação de carteiras ao Ibovespa e ao IBrX-100 usando FI e ações, simultaneamente, assim como ilustrar seu uso com vários estudos simulados aplicados ao mercado acionário brasileiro. Entendemos que a solução deste problema facilitará sobremaneira a utilização de FI para a indexação de fundos de pensão no Brasil.

As limitações impostas pelo ambiente regulatório a fundos de pensão restringem o uso de FI na prática pelos grandes fundos de pensão brasileiros. Entretanto, os FI podem ser combinados aos ativos que compõem o índice de referência de interesse do gestor para a estruturação de carteiras indexadas com maior controle dos erros de aderência.

A relevância do tema está ligada diretamente à realidade prática da gestão de fundos de pensão no mercado financeiro brasileiro: a utilização de FI é crescente, sendo imperativo o desenvolvimento e teste de metodologias que facilitem a indexação de carteiras aos principais índices do mercado local por parte dos gestores de fundos de pensão brasileiros.

A metodologia de indexação utilizada está baseada em um modelo de programação matemática (Taha, 2008) com uma função convexa no obje-

tivo, restrições lineares e variáveis contínuas (livres e não negativas). Usamos um algoritmo de otimização global (Yinyu, 1990) para a resolução numérica dos problemas resultantes. A proposta é de fácil visualização, interpretação e implementação computacional, como ilustrado pelos estudos simulados apresentados no artigo.

A modelagem permite ao usuário a experimentação para a calibragem dos parâmetros que melhor se adequem às suas necessidades. Por exemplo, a metodologia permite limitar as alocações a grupos de ativos, incorporar custos de transação (incluindo custos de corretagem), limitar o total do giro da carteira em cada período de reestruturação da mesma, limitar o número máximo de ativos na carteira, experimentar com diferentes quantidades de cenários (históricos, simulados ou gerados pelo investidor) e reestruturar a carteira a qualquer instante de tempo desejado.

Em termos de apresentação, na segunda seção deste artigo consideramos as vantagens relativas quando FI e fundos indexados são comparados para a gestão de fundos de pensão. Revisamos a literatura existente no Brasil sobre o assunto e o arcabouço regulatório local, com particular interesse nas limitações que este impõe ao uso dos FI pelos fundos de pensão.

Na terceira seção apresentamos a modelagem matemática escolhida para a solução do problema em consideração, com todas as suas equações, funções de perda, parâmetros e variáveis.

Na quarta seção e na quinta seção apresentamos os dados, hipóteses e resultados dos estudos simulados para diferentes aspectos de modelagem, assim como os dois índices de mercado adotados: Ibovespa e IBrX-100.

Por fim, na sexta seção resumimos os resultados e recomendações práticas obtidas dos estudos simulados, assim como sugerimos direções futuras de investigação para o uso de FI na prática local.

2. Fundos de Índice versus Fundos Indexados no Brasil

Os gestores de carteiras têm disponíveis no mercado financeiro brasileiro apenas FI atrelados a índices do mercado acionário. Por este motivo, no restante deste artigo nos concentramos no mercado acionário brasileiro.

FI e fundos indexados são concorrentes no que se refere à indexação de carteiras. Existem algumas diferenças entre FI e fundos indexados no Brasil que merecem atenção, sendo as principais:

1. No que se refere à forma de negociação de suas cotas, enquanto no caso dos fundos indexados as aplicações e resgates são feitos por

meio de solicitação ao administrador, e liquidadas conforme o regulamento do fundo, no caso dos FI a negociação pode ocorrer no mercado primário ou secundário, exatamente como se fossem ações – no caso do mercado primário a negociação ocorre com a criação ou resgate de cotas baseadas em uma carteira de ativos do índice de referência, enquanto no mercado secundário com a compra ou venda de cotas em bolsas por meio de corretoras.

2. O período de negociação no caso de fundos indexados é diário para seus cotistas, com o valor de fechamento dos ativos ponderados por suas participações de acordo com o regulamento do fundo, enquanto no caso dos FI é intradiário, pelo valor de mercado negociado em bolsa.
3. Os custos de negociação de cotas (aplicações e resgates) são pagos diretamente pelo investidor no caso dos FI, e absorvidos pelos cotistas (interferindo na rentabilidade) no caso de fundos indexados.
4. O aluguel de cotas é permitido no caso dos FI, podendo gerar retorno adicional, não sendo tal possibilidade permitida no caso dos fundos indexados.
5. A taxa de administração é cobrada nos dois casos, sendo menor no caso dos FI, o que gera impactos diferenciados nas rentabilidades.

Resumindo, os FI trazem maior flexibilidade e menores custos para a gestão indexada de fundos de pensão. No que se refere à rentabilidade e erros de aderência, três trabalhos produzidos nos últimos anos facilitaram a compreensão dos FI no Brasil:

1. Aragão (2011) analisou a eficiência de dois FI (BOVA11 e PIBB11) entre fevereiro de 2010 e maio de 2011 para concluir que o erro de aderência diário variou entre 0,50% e 1,13%.
2. Mattos (2011) observou que as taxas e custos dos fundos indexados acabaram deteriorando a rentabilidade dos mesmos para valores abaixo daqueles de seus índices de referência. Quando analisou dois FI (BOVA11 e PIBB11) verificou que estes apresentaram desempenhos alinhados com seus índices de referência e, quando considerada a possibilidade de empréstimos, que estes FI ofereceram rentabilidades superiores.

3. Borges *et al.* (2012) compararam as rentabilidades de FI e fundos indexados para concluir que os primeiros se mostraram superiores em função principalmente de taxas de administração mais baixas e dos custos de transação (que ficam por conta dos investidores no caso dos FI, sem influir diretamente na rentabilidade como no caso dos fundos indexados).

Em adição aos pontos acima mencionados, vale ressaltar que os FI podem oferecer mais rapidez e eficiência ao investidor passivo quando comparados a fundos indexados, pois:

1. Sua negociação é mais flexível, em decorrência de poder ser comprado, vendido e alugado, como qualquer ação.
2. As informações sobre suas condições de negociação estão disponíveis em tempo real, com maior transparência, ao contrário dos fundos indexados, cujo valor da cota transacionada (aplicação ou resgate) somente é disponibilizado no dia seguinte.
3. Sua liquidez é elevada, quer pela negociação do próprio título no mercado secundário, quer pela liquidez das ações que compõem o índice de referência (usualmente alta) e que podem ser usadas para eventuais transferências de valores mobiliários conforme Instrução 359/2002 da CVM.
4. Seu giro é menor quando da necessidade de operações de reestruturação da carteira para melhor adequação ao índice de referência (especialmente quando este sofre alterações em sua composição), dado que tais operações ocorrem internamente, sem a atuação do investidor.

Existe hoje uma grande limitação para a utilização de FI por fundos de pensão no Brasil: restrições impostas pela Resolução CMN 3792/09 ao montante que pode ser investido nestes instrumentos financeiros. A Tabela 1 resume estas limitações, enquanto a Tabela 2 ilustra numericamente as limitações na prática local para um dos maiores fundos de pensão no Brasil: a Fundação de Assistência e Previdência Social do BNDES (FAPES).

A FAPES possuía ao final de setembro de 2012 aproximadamente R\$9,23 bilhões sob gestão. Diante da restrição de que no máximo 10% do total estejam alocados a algum FI, vemos na Tabela 2 que o investimento

máximo possível (para a FAPES) é de aproximadamente R\$ 923 milhões em qualquer FI. Uma segunda limitação é que até 25% do patrimônio total de um FI pode ser considerado por qualquer fundo de pensão no Brasil, o que restringe ainda mais o posicionamento, no caso do BOVA11 a R\$446 milhões, enquanto no caso do BRAX11 a R\$13 milhões.

Estas limitações de investimento também são válidas para a Caixa de Previdência dos Funcionários do Banco do Brasil (PREVI), a maior entidade de previdência fechada da América Latina, com aproximadamente R\$160 bilhões de ativos. A PREVI estava limitada a investir no máximo 0,28% de seu patrimônio no maior FI disponível no Brasil, BOVA11, e no máximo 0,008% no BRAX11, se cálculos similares aos feitos na Tabela 2 (para a FAPES) forem repetidos. Vemos, portanto, que dois dos maiores fundos de pensão do país têm grandes dificuldades para utilizar apenas FI na gestão passiva de seus recursos.

Tabela 1

Limitações a investimentos em fundos de índice

Regras para investimento em FI	Previdência complementar (resolução 3.792/09)
Limites de alocação de recursos com relação ao patrimônio do plano	Até 35% dos recursos do plano em FI (cotas de Fundos de Índice referenciados em ações) - segmento renda variável Até 10% dos recursos do plano em FI (cotas de Fundos de Índice domiciliados no exterior) - segmento Investimento no Exterior
Limites de alocação de recursos por emissor	Até 10% dos recursos do plano por FI , se este for Fundo de Índice referenciado em cesta de ações de companhias abertas
Limites de concentração de recursos por emissor	Até 25% do patrimônio líquido de um mesmo FI (Fundo de Índice referenciado em cesta de ações de companhias abertas), considerada a soma dos recursos administrados pela EFPC
Investimento final	Os investimentos em cotas de Fundos de Índice de ações devem ser reportados como ativos finais, não devendo ser consolidados com as demais posições das carteiras próprias e administradas
Empréstimo de ações do FI	Permitidas as operações realizadas no âmbito da Bolsa de Valores, com registro na BM&FBOVESPA

Fonte: Conselho Monetário Nacional (2009).

Diante destas restrições, a modelagem matemática que apresentamos a seguir permite o uso combinado de FI e de ações para a indexação de carteiras a índices de mercado. Nossa proposta permite que limites máximos sejam impostos aos montantes possíveis de investimento em FI e ações separadamente, o que facilita a incorporação das restrições impostas pela

Resolução CMN 3792/09 ao trabalho dos gestores de fundos de pensão no Brasil.

Tabela 2

Ilustração numérica das limitações

Fundo de índice		Limites de alocação da resolução 3792		
Código	Ativos sob gestão R\$(MM)	35% dos recursos da FAPES no total R\$(MM)	10% dos recursos da FAPES por FI R\$(MM)	25% do patrimônio líquido de um mesmo FI R\$(MM)
BOVA11	1.785		923	446
PIBB11	1.300		923	325
ECOO11	328		328	82
SMAL11	151		151	38
BRAX11	52		52	13
FIND11	28		28	7
MATB11	16		16	4
ISUS11	12		12	3
CSMO11	9		9	2
MOBI11	5		5	1
MILA11	5		1	
UTIP11	3		3	1
XBOV11	–		–	–
Limites de alocação	3.836	3.230	2.596	959

Fonte: Sistema de Informações Bloomberg.

3. Modelagem Matemática

Consideramos um problema de indexação onde existem n ativos disponíveis para investimento. Para o conjunto de n ativos disponíveis assumimos que sejam gerados m cenários igualmente prováveis para seus retornos. Denotamos por r_{ij} o retorno do ativo j segundo o cenário i , com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Em qualquer instante de reestruturação da carteira de investimento a alocação em cada ativo (em R\$) é denotada por a_j , com $j = 1, 2, \dots, n$. O percentual máximo que pode ser investido no ativo j é denotado por m_j e seu custo de transação por t_j , com $j = 1, 2, \dots, n$.

A cada instante de reestruturação da carteira assumimos que existe um percentual máximo de giro da carteira permitido, denotado por δ .

Assumimos que a carteira de referência (*benchmark*) será um índice de mercado cujos retornos, para cada um dos m cenários gerados, são denotados por b_i , com $i = 1, 2, \dots, m$.

A alocação no ativo j ao final da reestruturação é denotada por X_j , com $j = 1, 2, \dots, n$, sendo tais variáveis não negativas.

Denotamos o retorno da carteira indexada e o erro de aderência para o

cenário i por R_i e E_i , respectivamente, com $i = 1, 2, \dots, m$, sendo estas variáveis livres. Estas variáveis se relacionam matematicamente como

$$E_i = R_i - b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

Utilizamos duas variáveis auxiliares não negativas para modelar os montantes comprados ou vendidos de cada ativo j quando da reestruturação da carteira: C_j e V_j denotam, respectivamente, o montante comprado e vendido do ativo, com $j = 1, 2, \dots, n$.

Valem as duas seguintes equações de equilíbrio para cada instante de reestruturação da carteira:

$$\sum_{j=1}^n C_j = \sum_{j=1}^n V_j \quad (2)$$

e

$$a_j + C_j = X_j + V_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Mais ainda, existe a restrição de máximo giro da carteira, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n (C_j + V_j) \leq \delta \times \sum_{j=1}^n a_j \quad (4)$$

A definição de retorno da carteira é dada por

$$R_i = \sum_{j=1}^n (r_{ij} \times X_j - t_j \times (C_j + V_j)) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

Por fim, as restrições de não negatividade e de máximo investimento impõem que

$$0 \leq X_j \leq m_j \times \sum_{j=1}^n a_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$C_j \geq 0 \quad V_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

As demais variáveis são livres, ou seja,

$$-\infty < E_i, R_i < +\infty \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

Denotamos a função objetivo do problema como $L(E_1, E_2, \dots, E_m)$. Esta função será uma “função de perda”, ou seja, nosso objetivo será sempre minimizá-la. Neste artigo utilizamos duas funções de perda para fins de ilustração numérica:

1. Desvio Padrão dos Erros de Aderência (DPEA)

$$L(E_1, E_2, \dots, E_m) = \sqrt{\frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})^2} \quad (9)$$

onde

$$\bar{E} = \frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^m E_i \quad (10)$$

2. Erro de Aderência Absoluto Médio (EAAM)

$$L(E_1, E_2, \dots, E_m) = \frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^m |E_i| \quad (11)$$

Podemos então escrever o modelo completo como

Minimizar $L(E_1, E_2, \dots, E_m)$ (12)

Sujeito a: $E_i = R_i - b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

$$R_i = \sum_{j=1}^n (r_{ij} \times X_j - t_j \times (C_j + V_j)) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$a_j + C_j = X_j + V_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n C_j = \sum_{j=1}^n V_j$$

$$\sum_{j=1}^n (C_j + V_j) \leq \delta \times \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

$$0 \leq X_j \leq m_j \times \sum_{j=1}^n a_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$C_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$V_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$-\infty < E_i, R_i < +\infty \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Vemos que este é um modelo com:

1. O total de $2n$ variáveis não negativas.
2. O total de n variáveis não negativas e limitadas.
3. O total de $2m$ variáveis livres.
4. O total de $2m + n + 1$ restrições com igualdades.
5. Uma restrição com desigualdade.

4. Dados e Metodologia de Simulação Histórica

Consideramos elegíveis para investimento (BM&FBOVESPA, 2012a,b):

1. Todas as ações que compunham o Ibovespa no terceiro quadrimestre de 2012, no total de sessenta e um papéis, desde os associados às maiores ponderações, como VALE5 e PETR4, até os associados às menores ponderações, como TRPL4 e VAGR3.
2. Todas as ações que compunham o IBrX-100 no terceiro quadrimestre de 2012, no total de uma centena de papéis, desde os associados às maiores ponderações, como PETR4 e ITUB4, até os associados às menores ponderações, como LLXL3 e CCXC3.
3. Dois FI, sendo um indexado ao Ibovespa, BOVA11, e o outro indexado ao IBrX-100, BRAX11.

O período dos dados utilizados nos estudos simulados se estende do primeiro dia útil de janeiro de 2011 até o primeiro dia útil de dezembro de 2012, compreendendo 495 observações diárias. Os dados relativos a preços de fechamentos de ações (ajustados a proventos) e dos FI, *spread* compra-venda médio diário e valores dos índices de referência foram obtidos do fornecedor de informações Bloomberg.

Para efeito de análise numérica assumimos que um fundo de pensão (como a FAPES) possui R\$ 500 milhões para investir em uma estratégia passiva indexada em ações no primeiro dia útil de julho de 2011 – ou seja, assumimos que dos R\$ 9,23 bilhões da FAPES, R\$ 500 milhões ficarão alocados em uma estratégia passiva no mercado acionário brasileiro. Feita

a alocação inicial, assumimos que as reestruturações ocorrem sempre em base mensal, no primeiro dia útil de cada mês, até dezembro de 2012.

Os estudos simulados foram totalmente baseados no modelo (12), com o uso das funções objetivo (9) e (11). O objetivo será sempre o de minimizar uma função de perda (DPEA ou EAAM) em cada momento de reestruturação, no início de cada mês.

Nos estudos simulados assumimos que:

1. Diferentes números de ativos podem ser utilizados – ou seja, o valor de n no modelo (12) variará para diferentes simulações. Por questões de uniformidade nos estudos simulados sempre teremos pelo menos dois ativos disponíveis para investimento.
2. Serão utilizados 126 cenários em cada otimização – ou seja, $m = 126$. Estes cenários serão os retornos diários históricos dos 126 dias úteis (ou seja, seis meses) imediatamente anteriores a cada momento de reestruturação da carteira. Embora sempre tenhamos 126 cenários, os cenários variarão ao longo do tempo, conforme a simulação avançar, com os dados sendo capturados por uma janela móvel de 126 dias úteis.
3. Assumimos que o nível máximo de giro da carteira está limitado a 20% – ou seja, $\delta = 20\%$. Este valor é adotado na prática por alguns fundos de pensão brasileiros para carteiras de ações, como no caso da FAPES.
4. As restrições máximas de alocação em FI (conforme a Tabela 1) serão respeitadas sempre, como forma de oferecer maior realismo, em linha com o ambiente regulatório em vigor.
5. O custo de qualquer transação (compra ou venda) será igual ao valor médio do *spread* compra-venda nos 126 dias úteis imediatamente anteriores à reestruturação, sempre acrescido de 0,1% de corretagem (valor usualmente cobrado dos maiores fundos de pensão no Brasil por suas corretoras).

No momento de cada reestruturação da carteira indexada calculamos a variação de valor experimentada pela carteira no mês (do primeiro dia útil do mês até o primeiro dia útil do mês imediatamente seguinte) e, para tal, utilizamos sempre os preços de fechamento a mercado de cada ativo

que compõe acarteira. Desta forma podemos “marcar a mercado” a carteira precisamente, obtendo o erro de aderência experimentado pela carteira para cada mês decorrido. Este procedimento é repetido mensalmente para a carteira simulada (correspondendo às variações de julho de 2011 até novembro de 2012). Os erros de aderência são então calculados em relação ao índice de referência adotado, analisados e comparados para cada estudo simulado realizado.

Consideramos quatro estudos simulados neste artigo:

1. No primeiro estudo o Ibovespa é adotado como índice de referência, sendo utilizadas somente ações compondo o índice para a indexação.
2. No segundo estudo o Ibovespa segue como o índice de referência, mas agora o BOVA11 está sempre disponível para investimento. A comparação destes dois primeiros estudos simulados nos permitirá mensurar a vantagem de utilizar conjuntamente o BOVA11 e ações para a indexação, em vez de usar somente ações.
3. No terceiro estudo adotamos o IBrX-100 como índice de referência, sendo utilizadas somente ações compondo o índice para a indexação.
4. No quarto estudo o IBrX-100 segue como o índice de referência, mas agora o BRAX11 está sempre disponível para investimento. A comparação destes dois últimos estudos simulados nos permitirá mensurar a vantagem de utilizar conjuntamente o BRAX11 e ações para a indexação, em vez de usar somente ações.

Nos quatro grupos de estudos simulados citados acima faremos um estudo completo com a função de perda DPEA e, a seguir, repetiremos todo o estudo simulado para a função de perda EAAM. Assim, poderemos comparar a eficácia relativa destas duas funções de perda no uso prático de indexação de carteiras com FI e ações no mercado brasileiro.

Por fim, o problema de programação matemática resultante em cada etapa de otimização foi resolvido com o auxílio do pacote R-PROJECT (2013), baseado em Yinyu (1990).

5. Resultados Numéricos

5.1 Primeiro Estudo Simulado: Ibovespa com Ações e sem o BOVA11

Iniciamos o estudo com uma carteira com as duas ações com os maiores pesos na composição do Ibovespa ao final de 2012 (VALE5 e PETR4).

Repetimos o estudo simulado completo no caso das três ações com os maiores pesos, e seguimos repetindo os estudos com números crescentes de ações em cada etapa, até que as 30 ações com os maiores pesos no índice tenham sido consideradas. Em outras palavras, realizamos um estudo simulado para cada valor de n , tal que $n \in \{2, 3, \dots, 30\}$, e a função de perda é DPEA e, a seguir, repetimos todo o estudo simulado com a outra função de perda, EAAM.

A Figura 1 resume estatísticas para os erros de aderência obtidos para as duas funções de perda (DPEA e EAAM) e diferentes valores de n . Desta figura observamos que:

1. Os comportamentos das duas funções de perda são semelhantes, com pouca diferença nos resultados das indexações em função do uso de uma ou outra função.
2. Com a utilização de um número maior de ações a tendência da distribuição dos erros de aderência é se concentrar ao redor do valor zero – ou seja, a indexação se torna mais precisa.
3. Há uma tendência de estabilização na melhora da indexação quando o número de ações supera (aproximadamente) 25 – ou seja, graficamente não parece haver mais ganhos em termos de uma distribuição de erros de aderência ainda mais concentrada (ao redor do zero) quando mais de 25 ações são utilizadas na indexação.
4. Por outro lado, percebemos um ganho visível com o aumento do número de ações usadas na indexação quando menos de 20 ações são utilizadas na indexação.

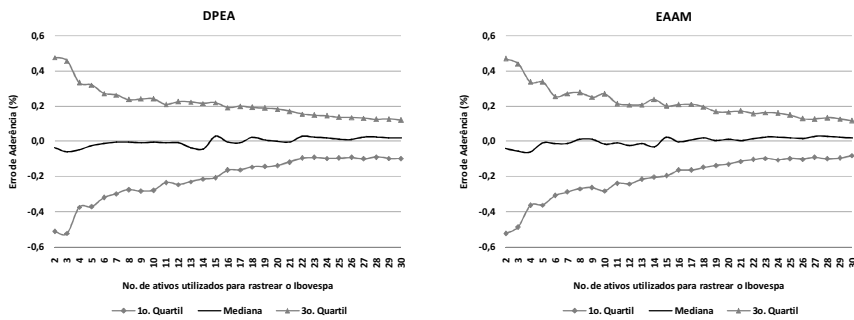


Figura 1
Estatísticas para os erros de aderência sem BOVA11

5.2 Segundo Estudo Simulado: Ibovespa com BOVA11 e Ações

Um segundo estudo simulado é realizado com o BOVA11 sempre disponível para investimento.

Iniciamos as simulações com uma carteira com o BOVA11 e a ação com maior peso na composição do Ibovespa ao final de 2012 (VALE5), em um total de dois ativos ($n = 2$). Repetimos o estudo simulado no caso do BOVA11 e das duas ações com os maiores pesos (VALE5 e PETR4), em um total de três ativos ($n = 3$). Continuamos as simulações até o estudo simulado com o BOVA11 e as 29 ações com os maiores pesos no índice, em um total de 30 ativos. Ou seja, realizamos estudos simulados para valores de n tal que $n \in \{2, 3, \dots, 30\}$ (sempre com um destes ativos sendo o BOVA11) para a função de perda DPEA e, a seguir, repetimos tudo com a outra função de perda, EAAM.

Diante da limitação imposta ao uso do BOVA11 pela legislação de fundos de pensão, estabelecemos o limite máximo de investimento de R\$446 milhões, conforme a Tabela 2 para a FAPES. Para simplificar a incorporação desta restrição forçamos o valor do m_j correspondente ao BOVA11 em 89% ($\approx R\$446\text{milhões} / R\500milhões) ao longo de todo este segundo estudo simulado, conforme a equação (6), sob a hipótese do montante investido em uma estratégia passiva no mercado acionário brasileiro ser de R\$ 500 milhões. O valor do m_j para todas as ações é de 100%.

A Figura 2 resume estatísticas para os erros de aderência para diferentes valores de n e as duas funções de perda adotadas. Desta figura observamos que:

1. As duas funções de perda apresentam resultados similares, sem que seja possível estabelecer preferência por uma ou outra.
2. A inclusão do BOVA11 concentra a distribuição dos erros de aderência ao redor de zero mais do que quando usando somente ações, como uma comparação entre a Figura 2 e a Figura 1 mostra. Em outras palavras, o BOVA11 facilita, sobremaneira, a indexação ao Ibovespa, concentrando os erros de aderência ao redor de zero.
3. A inclusão de um número crescente de ações apresenta pouco impacto sobre a distribuição dos erros de aderência quando comparamos a Figura 2 à Figura 1.

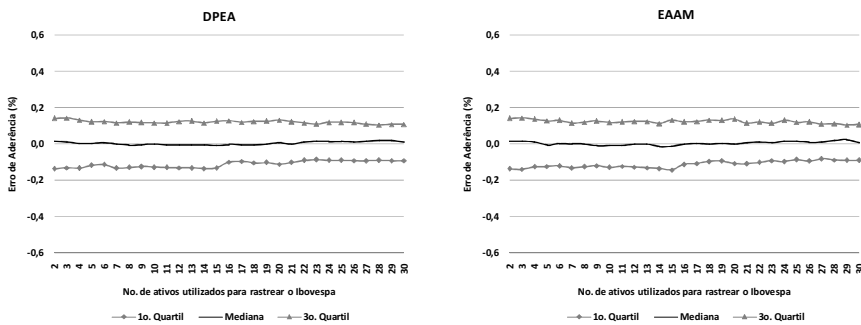


Figura 2
Estatísticas para os erros de aderência com BOVA11

É interessante também observar como as alocações (em percentual) se dão para o BOVA11 para diferentes simulações. A Figura 3 apresenta a alocação (percentual) no BOVA11 para a função de perda DPEA e quatro simulações: $n = 2, 10, 20$ e 30 . Podemos observar que há uma oscilação temporal para a alocação em BOVA11, sendo este usualmente menor quanto maior o valor de n .

A explicação para esta oscilação pode ser obtida da Figura 4, onde temos o DPEA do ativo BOVA11 em relação ao Ibovespa: vemos que quando há aumento no desvio padrão estimado, há redução na alocação de BOVA11 (com a consequente maior alocação em ações), ocorrendo o oposto no caso em que há redução no referido desvio padrão. Ou seja, o modelo matemático (12) ajusta automaticamente as alocações em BOVA11 como resposta à melhor (ou pior) aderência deste FI em relação ao Ibovespa, utilizando, para tal, ações com o propósito de melhor indexar a carteira ao índice de referência.

Este último resultado é muito interessante e justifica a inclusão de ações – em conjunto com o BOVA11 – quando da indexação de carteiras ao Ibovespa, não apenas pelas limitações de alocação (conforme Tabela 2), mas também para compensar momentos nos quais o ativo BOVA11 não apresenta bom ajuste ao seu índice de referência.

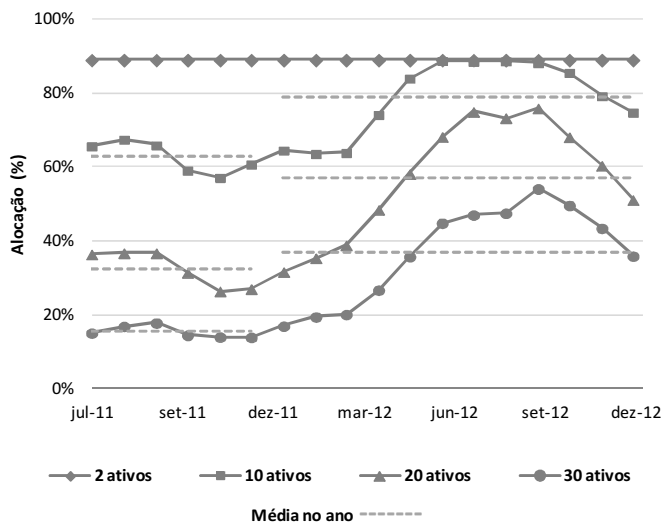


Figura 3
Alocação percentual em BOVA11 para quatro simulações

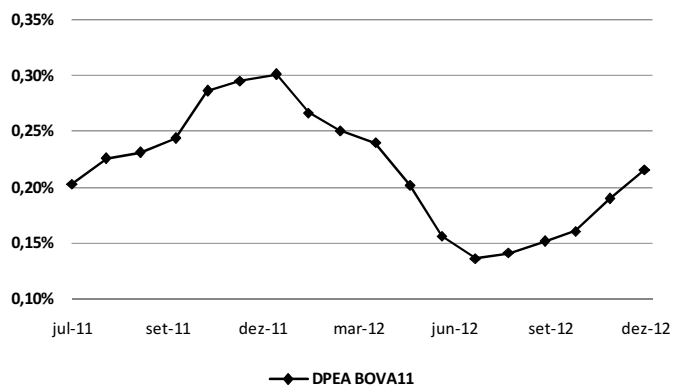


Figura 4
Desvio padrão do erro de aderência de BOVA11

A Figura 5 mostra a volatilidade anualizada do Ibovespa e do BOVA11 para o período de simulação. Uma comparação entre a Figura 4 e a Figura 5 indica que os períodos de maior volatilidade estiveram associados a períodos de menor aderência do BOVA11 em relação ao Ibovespa, enquanto períodos de menor volatilidade estiveram associados a períodos de melhor aderência.

A conclusão é que ao utilizarmos o modelo (12) devemos esperar percentuais maiores de alocação a ações quando da indexação em períodos de maior volatilidade no mercado acionário, exatamente quando os erros de aderência do BOVA11 em relação ao Ibovespa tendem a serem maiores, com o contrário ocorrendo em períodos de menor volatilidade no mercado acionário.

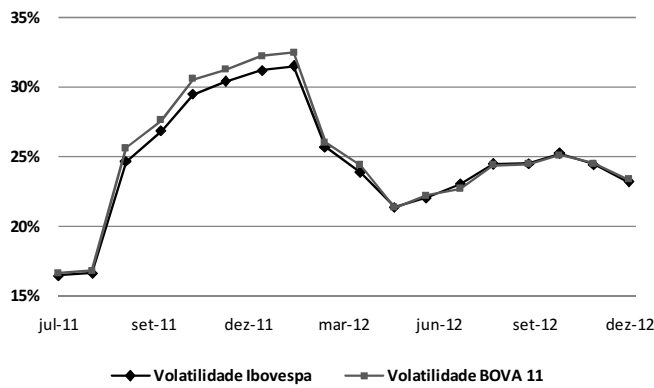


Figura 5
Volatilidade anualizada do Ibovespa e BOVA11

5.3 Terceiro Estudo Simulado: IBrX-100 com Ações e sem o BRAX11

Neste terceiro estudo simulado consideramos a indexação ao IBrX-100. Assim como no primeiro estudo simulado apresentado (quando da indexação ao Ibovespa), variamos a quantidade de ativos de forma crescente, de apenas dois ativos até trinta (ou seja, $n \in \{2, 3, \dots, 30\}$). A primeira simulação considera a indexação somente com duas ações (aquelas de maior peso no IBrX-100 ao final de 2012), passamos então para três ações, e assim por diante, até trinta ações.

A Figura 6 resume estatísticas para os erros de aderência para as duas funções de perda (DPEA e EAAM) e diferentes valores de n . Desta figura observamos que:

1. Como no caso da Figura 1 para o Ibovespa, não há uma diferença significativa nos resultados quando do uso das duas funções de perda adotadas.
2. Uma comparação da Figura 6 e da Figura 1 revela que a indexação com ações no caso do IBrX-100 apresenta distribuições mais concentradas do que no caso do Ibovespa, quando considerando o mesmo número de ações na carteira simulada.
3. Há maior concentração da distribuição dos erros de aderência ao redor de zero com o aumento do número de ações, o que justifica a consideração de um maior número de ações para a indexação.

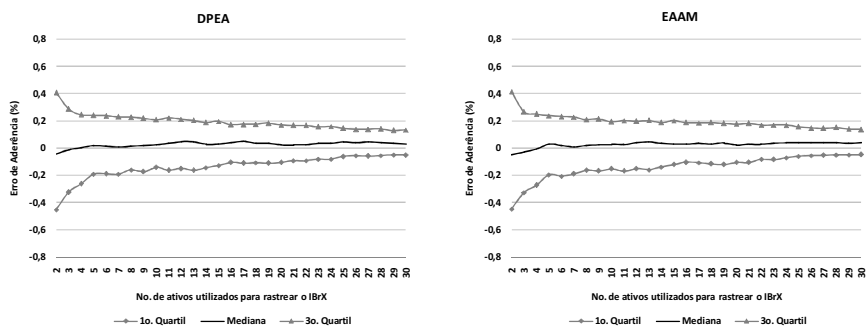


Figura 6
Estatísticas para os erros de aderências em BRAX11

5.4 Quarto Estudo Simulado: IBrX-100 com BRAX11 e Ações

Um último estudo simulado é realizado com o BRAX11 sempre disponível para investimento.

Iniciamos as simulações com uma carteira com o BRAX11 e a ação com maior peso na composição do IBrX-100 ao final de 2012, em um total de dois ativos ($n = 2$). Repetimos o estudo simulado no caso do BRAX11 e das duas ações com os maiores pesos, em um total de três ativos ($n = 3$). Continuamos as simulações até o estudo simulado com o BRAX11 e as 29 ações com os maiores pesos no índice, em um total de 30 ativos ($n = 30$). Ou seja, realizamos estudos simulados para valores de n tal que $n \in \{2, 3, \dots, 30\}$, sempre com um destes ativos sendo o BRAX11.

Diante da limitação imposta ao uso do BRAX11 pelo ambiente regulamentar de fundos de pensão, estabelecemos o limite máximo de investimento em R\$13 milhões (conforme a Tabela 2). Ou seja, para simplificar a incorporação desta restrição forçamos o valor máximo m_j correspondente ao BRAX11 em 2,5% ($\approx R\$13 \text{ milhões} / R\500 milhões) ao longo de todo este quarto estudo simulado.

A Figura 7 resume estatísticas para os erros de aderência para diferentes valores de n e as duas funções de perda adotadas. Desta figura observamos que:

1. Mais uma vez, não parece haver uma diferença significativa nos resultados quando do uso das duas funções de perda adotadas.
2. Quando comparamos a Figura 6 e a Figura 7 vemos que para as

simulações com poucos ativos ($n < 5$) os resultados com ações tende a obter distribuições para os erros de aderência mais concentradas ao redor do zero – consequência direta da limitação de investimento (no máximo 2,5%) no BRAX11. Para valores maiores de n os resultados destas duas figuras se equivalem.

3. Quando comparamos a Figura 2 e a Figura 7 vemos que para simulações com $n \geq 20$ os resultados são parecidos, mas, para carteiras com poucos ativos, o BRAX11 não consegue oferecer o mesmo nível de aderência obtido com o BOVA11 – consequência direta, de novo, da limitação de investimento no BRAX11.

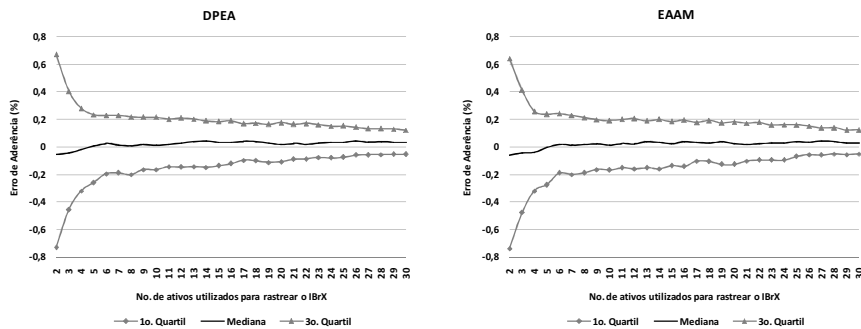


Figura 7
Estatísticas para os erros de aderência com BRAX11

A Figura 8 ilustra as alocações percentuais em BRAX11 para quatro valores de n com a função de perda DPEA. A limitação de investimento em BRAX11 leva o modelo (12) a alocar o máximo permitido (ou seja, 2,5%) na maioria das vezes. Em outras palavras, para gestores de fundos de pensão que usam o IBrX-100 como índice de referência, as limitações impostas pelo ambiente regulatório são consideráveis quando comparadas àquelas relacionadas ao Ibovespa. É, portanto, necessária a utilização de ações na indexação ao IBrX-100, o que limita as vantagens listadas na segunda seção oferecidas pelos FI em comparação a fundos indexados.

Ainda no que se refere à Figura 8, é interessante mencionar que, para o caso em que $n=30$, os períodos em que a alocação no BRAX11 não atingem 2,5% ocorrem exatamente em momentos em que os erros de aderência deste

FI em relação ao IBrX-100 são maiores, assim como havíamos mencionado para o BOVA11, conforme ilustrado pela Figura 3, e explicado com o uso da Figura 4 e da Figura 5.

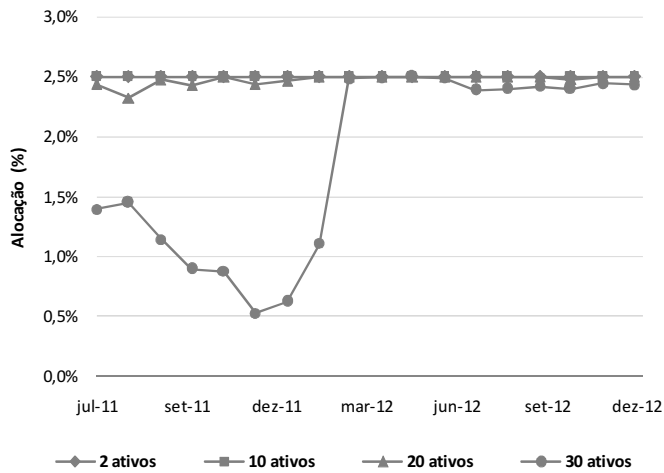


Figura 8
Alocação percentual em BRAX11 para quatro simulações

6. Conclusões

Documentamos neste trabalho a utilização de FI combinados a ações para a gestão passiva de recursos de fundos de pensão no Brasil. Verificamos que os FI oferecem vantagens quando comparados a fundos indexados na gestão passiva de recursos no mercado financeiro brasileiro. Estas vantagens estão relacionadas não apenas a menores custos, mas principalmente a questões operacionais e de efetividade da indexação (com melhor controle do nível de aderência ao índice de referência escolhido).

Ilustramos que o tamanho do mercado e o ambiente regulamentar ainda são os dois grandes empecilhos para a indexação de carteiras com FI por parte dos grandes fundos de pensão no Brasil. É possível, entretanto, utilizar FI e ações de forma combinada para mitigar tais limitações, como mostrado nesse artigo. Mais ainda, os resultados apresentados levantam questões importantes sobre a efetividade da colocação de percentuais regulatórios sobre o tamanho de posições (Tabela 1) para a limitação dos riscos de mercado no caso de fundos de pensão. Lembremos que tais percentuais

não encontram suporte na teoria de finanças e, conforme verificado neste artigo, podem até mesmo dificultar a boa aderência de carteiras passivas de fundos de pensão aos índices de mercado.

Propusemos um modelo de programação matemática que permite ao gestor minimizar uma função de perda (por ele escolhida) com o objetivo de obter a melhor aderência possível ao índice de referência escolhido. Este modelo pode ser resolvido com qualquer algoritmo de programação matemática para otimização global. Mais ainda, o modelo proposto permite a incorporação de custos de transação, limitações de investimento, restrições de giro para a carteira em momentos de reestruturação etc. Vários estudos simulados foram apresentados para os dois índices mais utilizados como referência pelos gestores de fundos de pensão no Brasil: Ibovespa e IBRX-100. Para tal, supusemos investimentos nas ações que compõem estes índices e em dois FI: BOVA11 (indexado ao Ibovespa) e BRAX11 (indexado ao IBRX-100). Estes estudos numéricos ofereceram várias informações úteis ao gestor de carteiras passivas como, por exemplo, o efeito do número de ações usadas sobre o erro de aderência obtido. Como consequência, estes estudos permitiram a determinação do número de ações que deve ser utilizado para controlar o erro de aderência em um nível considerado tolerável pelo gestor passivo.

Os resultados obtidos documentaram que o uso combinado de FI e ações conseguiu reduzir as limitações impostas pelo tamanho do mercado e limitações do ambiente regulamentar. Mais ainda, os resultados documentaram que o uso de ações em momentos de maior volatilidade do mercado foi particularmente interessante em função das dificuldades experimentadas pelos FI para manter um bom nível de aderência.

Em termos de trabalhos futuros, um primeiro passo interessante seria considerar FI em índices de renda fixa (por exemplo, o IMA-B), como forma de permitir aos gestores de fundos de pensão melhor diversificação quando gerindo recursos passivamente. Neste momento não há FI oferecidos no mercado de renda fixa, mas, acreditamos que o sucesso crescente observado no mercado acionário estimulará a criação deste novo mercado. Um segundo ponto interessante é adaptar o modelo proposto para a gestão híbrida de recursos (por exemplo, as estratégias chamadas nos mercados internacionais de *enhanced indexing*). Desta forma, é possível aos gestores de fundos de pensão alternar entre as gestões ativa e passiva, em função de suas expectativas/projeções para o mercado financeiro brasileiro.

Referências

- Aber, Jack W., Li, Dan, & Can, Luc. 2009. Price Volatility and Tracking Ability of ETFs. *Journal of Asset Management*, **10**, 210–221.
- Alexander, Carol, & Barbosa, Andreza. 2008. Hedging Index Exchange – Traded Funds. *Journal of Banking & Finance*, **32**, 326–337.
- Amenc, Noel, & Goltz, Felix. 2009. The Way Ahead for Exchange-Traded Funds: Results from a European Survey. *The Journal of Alternative Investments*, **12**, 50–64.
- Aragão, Diego D. 2011. *A Eficiência Da Precificação e Os Erros de Aderência Dos Exchange Traded Funds Do Mercado Brasileiro*. Escola de Economia de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo. Dissertação de Mestrado.
- Blackrock. 2012. *Landscape Global Handbook 2012*. Relatório Técnico, Blackrock Investment Institute, Reino Unido.
- Blackrock. 2013. *Investindo Em Fundos de Índices (ETFs): O Melhor de Dois Mundos*. Apresentação na VI Brazil Equity Ideas Conference, São Paulo.
- Blitz, David, Huij, Joop, & Swinkels, Laurens. 2012. The Performance of European Index Funds and Exchange-Traded Funds. *European Financial Management*, **18**, 649–662.
- BM&FBOVESPA. 2012a. *Carteira Teórica Do Ibovespa*. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoCarteiraTeorica.aspx?Indice=Ibovespa&idioma=pt-br>. Acesso em: 09.05.2014.
- BM&FBOVESPA. 2012b. *Carteira Teórica Do IBrX*. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoCarteiraTeorica.aspx?Indice=IBrX&idioma=pt-br>. Acesso em: 09.05.2014.
- BM&FBOVESPA. 2013. *Boletim ETF: Dezembro de 2012*. Relatório Técnico, BM&FBOVESPA, São Paulo.
- BNDES. 2004. *Sala de Imprensa 2004*. Disponível em http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/bndes/bndes_pt/Institucional/

Sala_de_Imprensa/Noticias/2004/20040706_not841.html.
Acesso em: 09.05.2014.

- Borges, Elaine C., Eid, William, & Yoshinaga, Cláudia E. 2012. Exchange Traded Funds versus Fundos Indexados No Brasil. *Revista de Finanças Aplicadas*, **1**, 1–15.
- Bruce, Brian B. 2009. *Exchange Traded Funds*. Institutional Investor Journal, New York.
- Bruce, Brian B., & Fuhr, Deborah. 2012. *ETFs & Indexing in European Markets*. New York: Institutional Investor Journal.
- CFA Institute. 2009. *Corporate Finance and Portfolio Management*. New Jersey: Wiley.
- Charupat, Narat, & Miu, Peter. 2013. Recent Developments En Exchange-Traded Funds: Pricing Efficiency, Tracking Ability and Effects on Underlying Securities. *Managerial Finance*, **39**, 427–443.
- Comissão de Valores Mobiliários. 2002. *Instrução 359/2002*. Disponível em <http://www.cvm.gov.br/asp/cvmwww/atos/exiatio.asp?File=%5Cinst%5Cinst359.htm>. Acesso em: 09/12/2013.
- Duarte Jr., Antonio M. 1997. Indexing Stock Portfolios in Brazil: Tracking the Ibovespa and the FGV100. *Emerging Markets Quarterly*, **1**, 20–26.
- Engle, Robert F., & Sarkar, Debojyoti. 2006. Premiums-Discounts and Exchange-Traded Funds. *ETFs and Indexing*, **1**, 35–53.
- Fabozzi, Frank F., & Markowitz, Harry M. 2011. *The Theory and Practice of Investment Management*. New Jersey: Wiley.
- Fusco, Richard A., McLeavey, Dennis W., Pinto, Jerald E., & Runkle, David E. 2007. *Quantitative Investment Analysis*. New Jersey: Wiley.
- Harper, Joel, Madura, Jeff, & Schnusenberg, Oliver. 2006. Performance Comparison Between Exchange-Traded Funds and Consed-End Country Funds. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, **16**, 104–122.
- Investment Company Institute. 2012. *Investment Company Fact Book: A Review of Trends and Activity in the U.S.* Technical Report, Investment Company Institute, Washington.

- Johnson, William F. 2009. Tracking Errors of Exchange Traded Funds. *Journal of Asset Management*, **10**, 253–262.
- Kostovetsky, Leonard. 2003. Index Mutual Funds and Exchange Traded Funds: A Comparison of Two Methods of Passive Investment. *Journal of Portfolio Management*, **21**, 80–92.
- Margin, John L., Tuttle, Donald L., Pinto, Jerald E., & W., McLeavey Denis. 2007. *Managing Investment Portfolios: A Dynamic Approach*. New Jersey: Wiley.
- Mattos, Igino Z. 2011. *Competição Inter Familiar – Exchange Traded Funds e Fundos de Investimentos Passivos*. Escola de Economia de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo. Dissertação de Mestrado.
- Meric, Ilhan, Dunne, Kathleen, McCall, Charles, & Meric, Gulser. 2010. Performance of Exchange-Traded Sector Index Funds in the October 9, 2007-March 9, 2009 Bear Market. *Journal of Finance and Accountancy*, **3**, 1–11.
- R-PROJECT. 2013. *The R Manuals*. Disponível em: <http://cran.r-project.org/manuals.html>. Acesso em: 09.05.2014.
- Rompotis, Gerasimos. 2009. Interfamily Competition on Index Tracking: The Case of the Vanguard ETFs and Index Funds. *Journal of Asset Management*, **10**, 263–278.
- Shin, Sangheon, & Soydemir, Gokçe. 2010. Exchange-Traded Funds, Persistence in Tracking Errors and Information Dissemination. *Journal of Multinational Financial Management*, **20**, 214–234.
- Taha, Hamdy A. 2008. *Pesquisa Operacional*. São Paulo: Prentice Hall.
- Yinyu, Ye. 1990. Interior-Point Algorithms for Global Optimization. *Annals of Operations Research*, **25**, 59–73.