

# BEBERAPA SIFAT HASIL KALI KRONECKER RANTAI MARKOV BERDIMENSI HINGGA

ANDI KRESNA JAYA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, andikresna@yahoo.com

## *Abstrak*

Pada paper ini akan dibahas tentang Rantai Markov yang diperoleh dari perkalian kronecker dua Rantai Markov berdimensi hingga. Pembahasan akan diawali dengan beberapa definisi Rantai Markov dengan Matriks Peluang transisinya dan diagram transisi antar keadaannya. Demikian pula dengan hasil kali kroneckernya, akan diperlihatkan bagaimana Ruang keadaan, Matriks peluang transisi dan diagram transisi antar keadaannya. Hasil utama pembahasannya adalah beberapa sifat Rantai Markov hasil perkalian kronecker yang mempertahankan semua sifat yang ada pada dua Rantai Markov awal.

Kata kunci: *perkalian kronecker, rantai markov, matriks peluang transisi, ruang keadaan, diagram transisi*

## 1. Pendahuluan

Menurut Henderson, Pukelsheim, dan Searle, di *On The History of The Kronecker Product* yang dinyatakan ulang oleh Schacke di [1], hasil kali kronecker dua buah matriks diperkenalkan oleh Johann Georg Zehfuss sekitar tahun 1858 sampai dengan 1868. Notasi hasil kali kronecker ini kemudian digunakan oleh Leopold Kronecker sekitar tahun 1880 dalam beberapa perkuliahannya. Kemudian salah seorang mahasiswanya, Hensel, mempopulerkan notasinya dengan nama *kroncker product* (hasil kali kronecker). Hasil kali kronecker ini kemudian menjadi topik tersendiri dalam kajian teori matriks hingga saat ini. Banyak buku Teori Matriks ataupun Aljabar membahas hasil kali kronecker. Notasi ini kemudian merambah pula ke konsep graph, yang dapat mengasosiasikan sebuah graph dengan sebuah matriks adjacennya. Hasil kali dua buah matriks adjacent dari dua buah graph kemudian lebih dikenal sebagai *Graph Kronecker* (graph kronecker), sebagaimana dinyatakan oleh Lengkovec di [2] atau Moreno dkk di [3]. Graph kronecker kadang juga disebut *Tensor Graph* (graph tensor), Weichsel [4].

Topik lain yang juga berkaitan dengan matriks dan graph, adalah Rantai Markov (dengan ruang waktu diskrit). Rantai Markov dapat dipandang sebagai graph berarah. Qian Jing [5], merekonstruksi matriks transisi untuk *reversible Markov chain* (rantai Markov reversible). Beberapa buku teks tentang Proses Stokastik selalu menempatkan Rantai Markov dan matriks transisinya sebagai sebuah konsep penting. Matriks transisi yang dimaksud di sini adalah matriks transisi peluang perpindahan antar keadaan/state yang juga dikenal dengan nama

matriks stokastik. Pada paper ini akan dibahas bentuk hasil kali kronecker rantai markov berdimensi hingga yang berkaitan dengan matriks stokastik berorde 2 yang dibahas di [6].

## 2. Rantai Markov

Misalkan  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  adalah proses stokastik dengan kemungkinan kejadian-kejadian. Untuk mudahnya kejadian-kejadian ini dinyatakan sebagai nilai-nilai bilangan bulat positif  $\{1, 2, 3, \dots\}$ . Proses stokastik ini mempunyai sifat Markov, jika peluang berpindahnya dari keadaan  $X_n = i$  ke keadaan  $X_{n+1} = j$  dinyatakan dalam bentuk

$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ , untuk  $i, j, i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$  bilangan bulat positif dan  $n$  adalah bilangan bulat tak negatif. Peluang berpindahnya dari keadaan (state)  $i$  ke state  $j$  tidak dipengaruhi oleh keadaan sebelum  $X_n = i$ . Perpindahan dari keadaan  $i$  ke keadaan  $j$  kemungkinannya sebesar  $p_{ij}$ . Jika banyaknya kejadian ini berhingga,  $\{1, 2, \dots, m\}$  maka

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Peluang transisi  $p_{ij}$  dapat disajikan dalam bentuk matriks orde  $m$  sebagai berikut

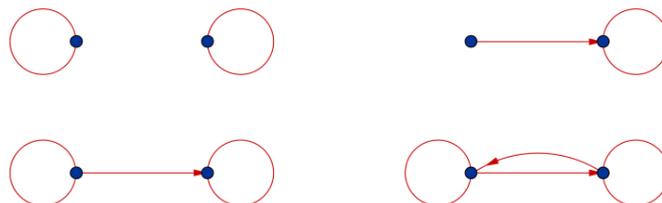
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

dan dikenal sebagai matriks transisi satu langkah atau matriks stokastik.

Misalkan untuk rantai Markov dengan ruang keadaan berdimensi 2 bentuk matriks stokastiknya secara umum dapat dinyatakan

$$\begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{pmatrix},$$

dengan  $p_{11}, p_{22} \in [0, 1]$  Bentuk rantai Markov berdasarkan kelas keadaannya ada tiga, yaitu rantai Markov dengan dua kelas recurrent, 1 kelas transient dan 1 kelas recurrent, atau hanya 1 kelas recurrent. Pada gambar 1 diperlihatkan empat rantai Markov dengan dua keadaan. Diagram 1a menunjukkan ada dua kelas recurrent, diagram 1b dan 1c menunjukkan rantai markov dengan 1 kelas transient dan 1 kelas recurrent. Sedangkan 1d adalah rantai Markov dengan 1 kelas recurrent.



gambar 1. Empat bentuk rantai Markov dengan dua keadaan

### 3. Perkalian Kronecker

Hasil kali kronecker dua buah matriks,  $A = (a_{ij})$  dan  $B = (b_{kl})$  didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 1:**

Hasil kali kronecker antara matriks  $A = (a_{ij})$  yang berordo  $r \times s$  dengan matriks  $B = (b_{kl})$  yang berordo  $p \times q$  dinyatakan dalam bentuk

$$A \otimes B = (a_{ij}B). \quad \square$$

Beberapa sifat tentang hasil kali kronecker telah diulas di [7], berikut hanya ditampilkan yang terkait dengan hasil kali kronecker untuk dua buah matriks persegi.

**Teorema 1:**

Misalkan  $A = (a_{ij})$  matriks berordo  $r$  dan  $B = (b_{kl})$  matriks berordo  $p$  maka berlaku

- a. Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks simetri, maka  $A \otimes B$  simetri
- b. Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks non singular, maka  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
- c. Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks normal, maka  $A \otimes B$  normal
- d. Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks orthogonal, maka  $A \otimes B$  ortogonal. □

**Teorema 2:**

Misalkan  $A = (a_{ij})$  matriks berordo  $r$  dan  $B = (b_{kl})$  matriks berordo  $p$  yang mempunyai nilai eigen masing-masing adalah  $\lambda_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$  dan  $\mu_j, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Maka  $A \otimes B$  mempunyai  $rp$  nilai eigen yaitu

$$\lambda_i \mu_j, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, p. \quad \square$$

**Teorema 3:**

Misalkan  $A = (a_{ij})$  matriks berordo  $r$  dan  $B = (b_{kl})$  matriks berordo  $p$ . Maka

- a.  $tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B) = tr(B \otimes A)$
- b.  $det(A \otimes B) = (det A)^r (det B)^p = det(B \otimes A).$  □

Misalkan  $A = (a_{ij})$  matriks stokastik berordo  $p$  dan  $B = (b_{kl})$  adalah matriks stokastik yang ordonya  $q$ . Misalkan  $J_m$  adalah matriks  $m \times m$  dengan semua entri-entrinya adalah 1. Maka  $AJ_p = J_p$  dan  $AJ_q = J_q$ , sebagaimana telah dijabarkan pada [6]. Jika  $A$  dan  $B$ , keduanya adalah matriks stokastik, dan  $J_{pq}$  adalah matriks ordo  $pq$  dengan entri-entrinya 1, maka

$$\begin{aligned} (A \otimes B)J_{pq} &= \left( \sum_{j=1}^p \sum_{l=1}^q a_{ij} b_{kl} \right) \\ &= \left( \sum_{j=1}^p a_{ij} \left( \sum_{l=1}^q b_{kl} \right) \right) \\ &= (1_{ik}) \end{aligned}$$

untuk  $i = 1, 2, \dots, p$  dan  $k = 1, 2, \dots, q$ . Sehingga diperoleh sifat invariant stokastik untuk hasil kali kronecker dan dinyatakan dalam teorema berikut.

**Teorema 4:**

Misalkan  $A = (a_{ij})$  dan  $B = (b_{kl})$  matriks stokastik masing-masing berordo  $p$  dan  $q$ , maka  $A \otimes B$  adalah matriks stokastik berordo  $pq$ .  $\square$

**4. Hasil kali kronecker Rantai Markov**

Jika pada graph kronecker, hasil kali kronecker dua graph diasosiasikan dengan perkalian kronecker matriks adjacent dari kedua matriks, maka untuk kronecker rantai Markov, hasil kalinya dikaitkan dengan hasil kali kronecker dari matriks transisi peluangnya. Misalkan  $X$  dan  $Y$  adalah rantai Markov dengan matriks transisi masing-masing adalah

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \text{ dan } Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

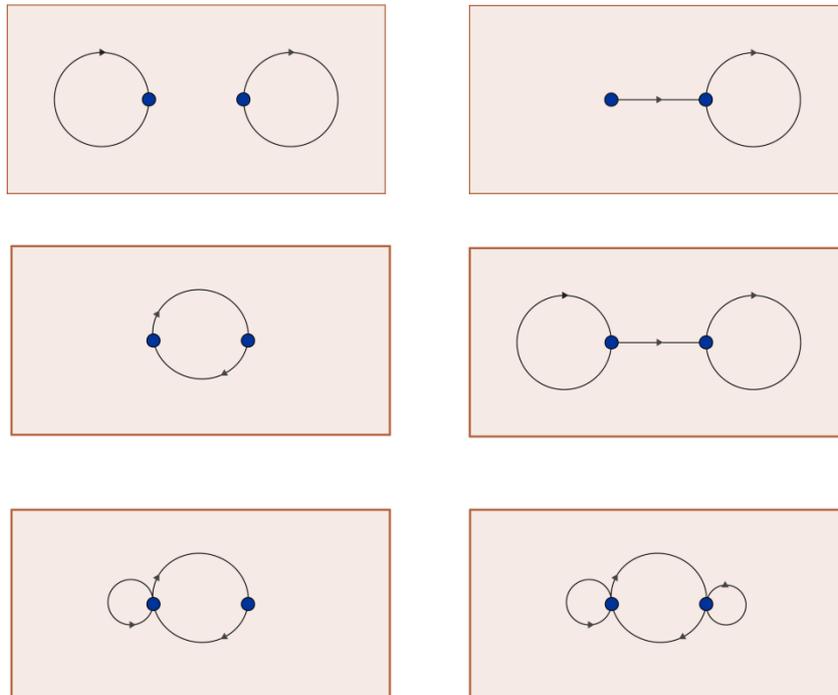
Hasil kali kronecker  $P$  dan  $Q$  adalah

$$P \otimes Q = \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{11}q_{12} & p_{12}q_{11} & p_{12}q_{12} \\ p_{11}q_{21} & p_{11}q_{22} & p_{12}q_{21} & p_{12}q_{22} \\ p_{21}q_{11} & p_{21}q_{12} & p_{22}q_{11} & p_{22}q_{12} \\ p_{21}q_{21} & p_{21}q_{22} & p_{22}q_{21} & p_{22}q_{22} \end{pmatrix},$$

maka hasil kali kronecker rantai Markov  $X \otimes Y$  mempunyai matriks transisi peluangnya  $P \otimes Q$ .

**Definisi 2:**

Misalkan  $X = \{X_n, n = 0,1,2, \dots\}$  dan  $Y = \{Y_n, n = 0,1,2, \dots\}$  adalah dua rantai Markov dengan matriks transisi peluang masing-masing adalah  $P$  dan  $Q$ , maka  $X \otimes Y$  adalah sebuah rantai Markov dengan matriks transisinya adalah  $P \otimes Q$ .



gambar 2. Enam jenis Rantai Markov dengan 2 state

Misalkan rantai Markov  $X$  mempunyai ruang keadaan  $\{1,2\}$  dan ruang keadaan untuk rantai Markov  $Y$  adalah  $\{1,2\}$ , maka hasil kali kronecker  $X$  dan  $Y$  adalah

$$\{1,2\} \otimes \{1,2\} = \{11, 12, 21, 22\}.$$

Matriks peluang transisinya selanjutnya akan dinyatakan dalam bentuk

Untuk sebuah rantai Markov dengan 2 state, ada 6 kemungkinan bentuk rantainya, yang dapat dilihat pada gambar 2. Tanpa mengurangi berlaku umumnya bukti, label titik untuk state tidak diperhatikan. Di sini akan diperlihatkan bagaimana ruang keadaan dari kombinasi perkalian kronecker untuk rantai Markov 2 state dan sifat-sifatnya.

Pandang bentuk matriks transisi dua buah rantai Markov dengan dua state sebagai berikut:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{pmatrix} \text{ dan } Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 1 - q_{11} \\ 1 - q_{22} & q_{22} \end{pmatrix},$$

dengan  $p_{11}, p_{22}, q_{11}, q_{22} \in [0,1]$ . Maka hasil kali kroneckernya,  $P \otimes Q$  adalah

$$\begin{pmatrix} p_{11}q_{11} & p_{11}(1 - q_{11}) & (1 - p_{11})q_{11} & (1 - p_{11})(1 - q_{11}) \\ p_{11}(1 - q_{22}) & p_{11}q_{22} & (1 - p_{11})(1 - q_{22}) & (1 - p_{11})q_{22} \\ (1 - p_{22})q_{11} & (1 - p_{22})(1 - q_{11}) & p_{22}q_{11} & p_{22}(1 - q_{11}) \\ (1 - p_{22})(1 - q_{22}) & (1 - p_{22})q_{22} & p_{22}(1 - q_{22}) & p_{22}q_{22} \end{pmatrix}.$$

Bentuk rantai Markov yang diperoleh bergantung pada nilai  $p_{11}, p_{22}, q_{11}, q_{22} \in [0,1]$ .

Tinjau  $p_{11} = p_{22} = q_{11} = q_{22} = 1$ , maka diperoleh matriks hasil kali kronecker adalah matriks identitas. Hal ini berarti rantai Markov kroneckernya adalah rantai Markov dengan 4 state yang semua state adalah state recurrent.

Pandanglah sebuah rantai Markov dengan ruang keadaan  $\{1,2, \dots, n\}$  yang matriks transisi peluangnya adalah matriks simetri. Hal ini berarti peluang  $p_{ij} = p_{ji}$  untuk setiap  $i, j \in \{1,2, \dots, n\}$ . Matriks transisi peluangnya merupakan matriks stokastik ganda, yaitu matriks yang jumlah entri pada baris dan jumlah entri pada kolomnya adalah 1.

## Daftar Pustaka

- [1] Kathrin Schacke, *On the Kronecker Product*, 2013.
- [2] Jure Lenkovec, dkk, *Kronecker Graphs: An Approach to Modelling Networks*, Journal of Machine Learning, 2011.
- [3] Sebastian Moreno, dkk, *Tied Kronecker Product Graph Models to Capture Variance in Network Populations*, 2011.
- [4] Paul M Weichsel, *The kronecker product of Graphs*, Proceeding of The Mathematical Society, 47 – 52, 1962.
- [5] Qian Jing, *Construction of Transition Matrices of Reversible Markov Chain*, University of Windsor, Ontario Canada, 2009
- [6] Andi Kresna Jaya, *Masalah Nilai Karakteristik Invers Real Tak Negatif*, Tesis Magister, 2001.
- [7] Alan J. Laub, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, SIAM, 2005.

