MENENTUKAN NILAI KETIDAKTERATURAN GRAF KEMBANG API YANG DIPERUMUM

Edy Saputra, Nurdin, dan Hasmawati

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin (UNHAS), Jln. Perintis Kemerdekaan Km. 10 Makassar 90245, Indonesia

Abstrak : Pelabelan-k tidak teratur dari suatu graf G adalah pelabelan sisi pada G dengan range $\{1,2,3,\ldots, k\}$ sedemikian sehingga setiap dua titik berbeda. Pelabelan-k total tidak teratur sisi dari suatu graf G adalah pelabelan sisi dan titik pada G dengan range $\{1,2,3,\ldots, k\}$ sedemikian sehingga setiap dua sisi berbeda. Pelabelan-k total tidak teratur titik dari suatu graf G adalah pelabelan sisi dan titik pada G dengan range $\{1,2,3,\ldots, k\}$ sedemikian sehingga setiap dua titik berbeda. Nilai ketidakteraturan dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k tidak teratur. Nilai total ketidakteraturan sisi dan titik dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur sisi dan titik.

Penelitian ini bertujuan menentukan nilai ketidakteraturan, nilai total ketidakteraturan sisi dan nilai total ketidakteraturan titik graf kembang api. Hasil penelitian diperoleh nilai ketidakteraturan graf $F_{m,3}$, nilai total ketidakteraturan titik graf $F_{m,N}$ dan nilai total ketidakteraturan sisi graf $F_{m,N}$. Sebagai berikut :

$s(F_{m,3}) \quad = m + 1.$

$tvs(F_{m,N}) = maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}.$

$tes(F_{m,N}) = maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}.$

kata kunci : graf kembang api, nilai ketidakteraturan, nilai total ketidakteraturan sisi, nilai total ketidakteraturan titik, pelabelan tidak teratur, pelabelan total tidak teratur sisi, pelabelan total tidak teratur titik.

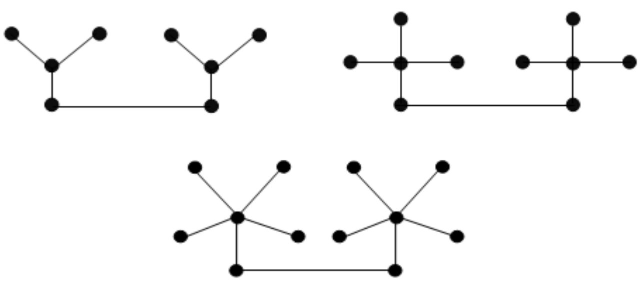
1. Pendahuluan

Pelabelan graf merupakan salah satu materi graf yang berkembang dan mendapat perhatian saat ini. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Menurut, Gallian (2011) menyatakan bahwa pelabelan graf adalah pemberian label bilangan bulat tak negatif (Z^+) pada titik atau sisi atau keduanya dengan memenuhi aturan-aturan tertentu.

Konsep pelabelan tidak teratur pada suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 1986. Namun, makalah mereka "*Irregular network*" baru terbit pada tahun 1988. Pada tahun 2002, Bača dkk. memperkenalkan pelabelan tidak teratur lainnya yang didasarkan pada pelabelan total, yaitu pelabelan total tidak teratur sisi dan pelabelan total tidak teratur titik. Topik penelitian ini adalah pelabelan tidak teratur, pelabelan total tidak teratur titik dan pelabelan total tidak teratur sisi pada graf kembang api *(firecrackers).*

2. Tinjauan Pustaka

Definisi 2.1 *Graf kembang api adalah suatu graf yang diperoleh dari concatenasi graf bintang dengan titik concatenasinya adalah daun.*



Gambar Graf kembang api

Definisi 2.2 *Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf yang tidak memuat sisi terisolasi atau dua titik terisolasi. Fungsi $f : E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ disebut pelabelan-k tidak teratur (irregular k-labeling) pada G, jika untuk setiap $x, u \in V$ dengan $x \neq u$, berlaku*

$$wt(x) \neq wt(u)$$

di mana,

$$wt(x) = \sum_{xy \in E} f(xy) \text{ dan } wt(u) = \sum_{uv \in E} f(uv)$$

Definisi 2.3 *Nilai ketidakteraturan (irregularity strength) dari G, dinotasikan dengan $s(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k tidak teratur.*

Definisi 2.4 *Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf. Fungsi $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ disebut pelabelan-k total tidak teratur sisi (edge irregular total k-labeling) pada G, jika untuk setiap dua sisi xy dan uv yang berbeda dalam E dengan $xy \neq uv$, berlaku*

$$wt(xy) \neq wt(uv)$$

di mana, $wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$ dan $wt(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$

Definisi 2.5 *Nilai total ketidakteraturan sisi (total edge irregularity strength) dari G, dinotasikan dengan $tes(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur sisi.*

Definisi 2.6 *Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf. Fungsi $f: V \cup E \to \{1, 2, \cdots, k\}$ disebut pelabelan-k total tidak teratur titik (vertex irregular total k-labeling) pada G, jika untuk setiap $x, u \in V$ dengan $x \neq u$, berlaku*

$$\mathrm{wt(x)} \neq \mathrm{wt(u)}$$

di mana, $wt(x) = f(x) + \sum_{xy \in E} f(xy)$ dan $wt(u) = f(u) + \sum_{uv \in E} f(uv)$

Definisi 2.7 *Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari G, dinotasikan dengan $tvs(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik*

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Pelabelan tidak teratur graf kembang api

Lemma 1.

Misalkan $F_{m,3}$ adalah suatu graf kembang api yang memiliki m daun,maka $s(F_{m,3}) \geq m + 1$.

Bukti.

Karena $F_{m,3}$ memiliki m daun dan $m + 2$ titik berderajat dua, apabila bobot titik diurutkan dengan titik m derajat satu mempunyai bobot terkecil seterusnya ke bobot titik berderajat dua, maka bobot terbesar dari titik yang berderajat dua tidak kurang dari $2m + 2$. Karena $2m + 2$ adalah jumlah dari dua bilangan asli maka label yang terbesar yang digunakan tidak kurang dari $\frac{2m+2}{2}$. Dengan demikian, diperoleh

$$s(F_{m,3}) \geq m + 1 \blacksquare$$

Lemma 2.

Misalkan $F_{m,3}$ adalah suatu graf kembang api yang memiliki m daun,maka $s(F_{m,3}) \leq m + 1$.

Bukti

Untuk membuktikan bahwa $s(F_{m,3}) \leq m + 1$,akan dikonstruksi fungsi pelabelan pada $F_{m,3}$.

$\lambda(y_i y_{i,j}) = i, \quad 1 \leq i \leq m, j = 1$

$\lambda(x_i y_i) = m, \quad 1 \leq i \leq m - 1$

$\lambda(x_m y_m) = m + 1,$

$\lambda(x_1 x_2) = m,$

$\lambda(x_{m-1} x_m) = m + 1,$

Perhatikan bahwa dengan menggunakan pelabelan λ, diperoleh bobot titik-titik dari $F_{m,N}$ adalah sebagai berikut.

1. Untuk $1 \le i \le m, j = 1$, diperoleh
$wt(y_{i,j}) = \lambda(y_i y_{i,j}) = i.$
2. Untuk $1 \le i \le m-1, j = 1$, diperoleh
$wt(y_i) = \lambda(y_i y_{i,j}) + \lambda(x_i y_i)$
$= i + m$
3. Untuk $j = 1$, diperoleh
$wt(y_m) = \lambda(y_m y_{m,1}) + \lambda(x_m y_m)$
$= m + (m+1)$
4. $wt(x_1) = \lambda(x_1 x_2) + \lambda(x_1 y_1)$
$= m + m$
5. $wt(x_m) = \lambda(x_{m-1} x_m) + \lambda(x_m y_m)$
$= (m+1) + (m+1).$

Selanjutnya untuk menentukan fungsi pelabelan dan bobot titik yang tersisa, akan dikontruksi bobot sementara pada titik x_i untuk $i = 2, \dots, m-2$. Namun sebelumnya, panjang i dibagi menjadi dua buah yaitu i_1 dan i_2 . Sebagai berikut.

1. Misalkan *m* genap dimana $i_1 = 2, \dots, \frac{m}{2} - 1$ dan $i_2 = \frac{m}{2}, \dots, m-2.$, diperoleh
$$\lambda(x_{i_1} x_{i_1+1}) = m - i, \qquad 1 \le i_1 \le m_1$$
Untuk $1 \le i_2 \le m_2$, diperoleh
Misalkan i_2 ganjil,
   - misalkan i_2= 1, maka $\lambda(x_1 x_{1+1}) = \lambda(x_{m_1} x_{m_1+1}) - 1$
   - untuk i_2 = 3, maka $\lambda(x_3 x_{3+1}) = \lambda(x_1 x_{1+1}) + 2$
   - untuk i_2 = 5, maka $\lambda(x_5 x_{5+1}) = \lambda(x_3 x_{3+1}) + 2$

     $\vdots$
   - untuk $i_2 = m_2$, maka $\lambda(z_{m_2}) = wt(x_{(m_2-2)} x_{(m_2-2)+1}) + 2$

   Misalkan i_2 genap
   - misalkan i_2= 2, maka $\lambda(x_2 x_{2+1}) = \lambda(x_1 x_{1+1})$ + 2
   - untuk i_2 = 4, maka $\lambda(x_4 x_{4+1}) = \lambda(x_2 x_{2+1}) + 2$
   - untuk i_2 = 6, maka $\lambda(x_6 x_{6+1}) = \lambda(x_4 x_{4+1}) + 2$

     $\vdots$
   - untuk $i_2 = m_2$, maka $\lambda(z_{m_2}) = wt(x_{(m_2-2)} x_{(m_2-2)+1}) + 2$
2. Misalkan *m* ganjil $i_1 = 2, \dots, \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ dan $i_2 = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \dots, m-2.$, diperoleh $\lambda(x_{i_1} x_{i_1+1}) = m - i, \ 1 \le i_1 \le m_1$
   Untuk $1 \le i_2 \le m_2$, diperoleh
   Misalkan i_2 ganjil, maka
   - misalkan i_2= 1, maka $\lambda(x_1 x_{1+1}) = \lambda(x_{m_1} x_{m_1+1})$
   - untuk i_2 = 3, maka $\lambda(x_3 x_{3+1}) = \lambda(x_1 x_{1+1}) + 2$
   - untuk i_2 = 5, maka $\lambda(x_5 x_{5+1}) = \lambda(x_3 x_{3+1}) + 2$

     $\vdots$
   - untuk $i_2 = m_2$, maka $\lambda(z_{m_2}) = wt(x_{(m_2-2)} x_{(m_2-2)+1}) + 2$

   Misalkan i_2 genap
   - misalkan i_2= 2, maka $\lambda(x_2 x_{2+1}) = \lambda(x_1 x_{1+1})$ + 2
   - untuk i_2 = 4, maka $\lambda(x_4 x_{4+1}) = \lambda(x_2 x_{2+1}) + 2$
   - untuk i_2 = 6, maka $\lambda(x_6 x_{6+1}) = \lambda(x_4 x_{4+1}) + 2$

     $\vdots$
   - untuk $i_2 = m_2$, maka $\lambda(z_{m_2}) = wt(x_{(m_2-2)} x_{(m_2-2)+1}) + 2$

Dari hasil-hasil tersebut, secara keseluruhan diperoleh,
$wt(y_{i,j}) < wt(y_{i+1,j}) < \cdots < wt(y_{m,j}) < wt(y_{i+1}) < \cdots < wt(y_{m-1,j}) < wt(x_p) < wt(y_q) < wt(x_q) \dots < wt(x_2) < wt(x_p) < wt(x_{m-1})$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label terbesar yang digunakan adalah $m+1$ Perhatikan bahwa untuk $1 \le i \le m, j = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda(y_i y_{i,j}) &= i < i+1 \le m+1 \\ \lambda(y_m y_{m,n_m}) &= m < m+1 \\ \lambda(x_1 x_2) &= m < m+1 \\ \lambda(x_{m-1} x_m) &= m+1 \le m+1 \end{aligned}$$

Karena itu $F_{m,N}$ memiliki suatu pelabelan-k total tidak teratur titik, dimana $k = m+1$ dengan demikian

$$S(F_{m,3}) \le m+1 \ \blacksquare$$

Dari lemma 1 dan lemma 2 diperoleh,

Teorema: *Misalkan $F_{m,3}$ adalah suatu graf kembang api, maka* $s(F_{m,3}) = m+1$

3.2 Pelabelan total tidak teratur titik graf kembang api

Lemma 1.

Misalkan $F_{m,N}$ adalah suatu graf kembang api yang mempunyai d_i titik berderajat i, dengan $i = 1, 2, 3$ maka

$$tvs(F_{m,N}) \ge maks\left\{\left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2+\mathrm{d}_3}{4}\right\rceil\right\}.$$

Bukti.

Karena $F_{m,N}$ memiliki d_1 titik berderajat satu, maka bobot terkecil dari titik-titik tersebut tidak kurang dari 2, dan bobot terbesarnya tidak kurang dari d_1+1. Karena bobot setiap titik-titik tersebut merupakan jumlah dari dua bilangan bulat positif, maka label terbesar pada $F_{m,N}$ yang dapat digunakan tidak kurang dari $\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil$. Selain titik berderajat satu, $F_{m,N}$ juga mempunyai titik berderajat dua sebanyak d_2. Apabila bobot titik diurutkan dengan titik d_1 derajat satu mempunyai bobot terkecil seterusnya ke bobot titik berderajat dua, maka bobot terbesar dari titik yang berderajat dua tidak kurang dari $d_1 + d_2 + 1$. Karena bobot ini merupakan jumlah dari tiga bilangan asli, maka label terbesar yang digunakan tidak kurang dari $\left\lceil\frac{d_1+d_2+1}{3}\right\rceil$. Akan tetapi $F_{m,N}$ juga mempunyai titik berderajat tiga. Apabila bobot titik diurutkan dengan titik berderajat satu mempunyai bobot terkecil dan titik berderajat tiga mempunyai bobot terbesar, maka bobot terbesar dari titik tersebut tidak kurang dari $d_1 + d_2 + d_3 + 1$. Karena bobot tersebut merupakan jumlah dari empat bilangan asli maka label yang digunakan tidak kurang dari $\left\lceil\frac{d_1+d_2+d_3+1}{4}\right\rceil$.Dengan demikian, diperoleh.

$$tvs(G) \ge maks\ \left\{\left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2+\mathrm{d}_3}{4}\right\rceil\right\}. \ \blacksquare$$

Lemma 2.

Misalkan $F_{m,N}$ adalah suatu graf kembang api yang mempunyai d_i titik berderajat i, dengan i = $1, 2, 3$ maka

$$tvs(F_{m,N}) \le maks\left\{\left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2+\mathrm{d}_3}{4}\right\rceil\right\}.$$

Bukti

Untuk membuktikan bahwa $tvs(G) \le maks\left\{\left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2+\mathrm{d}_3}{4}\right\rceil\right\}$ maka akan dikonstruksi suatu pelabelan total tidak teratur titik pada $F_{m,N}$.

Definisikan $c_0 = 0$ dan $c_m = \sum_{i=1}^{m}(n_i)$

Dengan demikian diperoleh pelabelan total pada $F_{m,N}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \lambda(y_{i,j}) &= \left\lceil\frac{j+c_{i-1}}{2}\right\rceil,\ 1 \le i \le m, \qquad 1 \le j \le n_i \\ \lambda(y_i y_{i,j}) &= \left\lceil\frac{j+c_{i-1}+1}{2}\right\rceil,\ \ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n_i \\ \lambda(x_i y_i) &= maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}, \qquad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$\lambda(x_i x_{i+1}) = maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}, \qquad i = 1, \dots, m-1$

Perhatikan bahwa dengan menggunakan pelabelan λ, diperoleh bobot titik-titik dari $F_{m,N}$ adalah sebagai berikut.

1. Untuk $1 \le i \le m, 1 \le j \le n_i$, diperoleh,
   $wt(y_{i,j}) = \lambda(y_{i,j}) + \lambda(y_i y_{i,j})$
   $= \left\lceil\frac{j+c_{i-1}}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{j+c_{i-1}+1}{2}\right\rceil$

Untuk titik yang lain, yaitu titik x_i dan y_i untuk setiap i = 1,..,m, dilakukan dengan cara sebagai berikut.

Definisikan bobot sementara titik x_i dan y_i yaitu

1. Untuk $2 \le i \le m-1$, diperoleh
   $w(x_i) = \lambda(b_i b_{i-1}) + \lambda(x_i y_i) + \lambda(b_i b_{i+1})$
   $= k + k + k = 3k$
2. $w(x_1) = \lambda(x_1 y_1) + \lambda(x_1 x_2)$
   $= k + k = 2k$
3. $w(x_m) = \lambda(x_m y_m) + \lambda(x_{m-1} x_m)$
   $= k + k = 2k$
4. Untuk $1 \le i \le m, 1 \le j \le n_i$, diperoleh
   $w(y_i) = \lambda(x_i y_i) + \sum_{j=1}^{n_i}\left(\lambda(y_i y_{i,j})\right)$
   $= k + \sum_{i=1}^{n_i}(b)$

dimana

$k = maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}, b = \left\lceil\frac{j+c_{i-1}+1}{2}\right\rceil$.

Selanjutnya mengurutkan bobot titik sementara

$$w(z_1) \le w(z_2) \le w(z_3) \le \cdots \le w(z_{2m}).$$

Definisikan $\lambda(z_1) = maks\{wt(y_{m,n_m}) + 1 - w(z_1), 1\}$
$wt(z_1) = w(z_1) + \lambda(z_1)$

Untuk i = 2,…,m, diperoleh
$\lambda(z_i) = maks\{wt(z_{i-1}) + 1 - w(z_i), 1\}$
$wt(z_i) = w(z_i) + \lambda(z_i)$.

Maka diperoleh, urutan bobot semua titik di $F_{m.N}$ adalah sebagai berikut
$wt(y_{1,1}) < wt(y_{1,2}) < \cdots < wt(y_{1,n_1}) < wt(y_{2,1}) < \cdots < wt(y_{2,n_2}) < \cdots < wt(y_{m,1}) < wt(y_{m,2}) \dots < wt(y_{m,n_m}) < wt(z_1) < wt(z_2) < \cdots < wt(z_{2m})$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label terbesar yang digunakan adalah $maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}$

Perhatikan bahwa untuk $1 \le i \le m, 1 \le j \le n_i - 1$, diperoleh

$$\lambda(y_{i,j}) = \left\lceil\frac{j+c_{i-1}}{2}\right\rceil < \left\lceil\frac{(n_m-1)+1+c_{i-1}}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \le maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}$$

$$\lambda(y_{m.n_m}) = \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \le maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}$$

Perhatikan bahwa untuk $1 \le i \le m, 1 \le j \le n_i - 1$, diperoleh

$$\lambda(y_{i,j} y_j) = \left\lceil\frac{i+c_{j-1}+1}{2}\right\rceil < \left\lceil\frac{(n_m-1)+1+c_{i-1}+1}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$$

$$\leq maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}$$

Perhatikan bahwa untuk $i = m$ dan $j = n_m$, diperoleh

$$\lambda\left(y_{m,n_m}y_{n_m}\right) = \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil \leq maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}$$

Karena itu $F_{m,N}$ memiliki suatu pelabelan-*k* total tidak teratur titik, dimana $k = maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}$ dengan demikian

$$tvs(T_{n,m}) \leq maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\} \quad \blacksquare$$

Dari lemma 1 dan lemma 2 diperoleh,

Teorema: *Misalkan $F_{m,N}$ adalah suatu graf kembang api yang mempunyai d_i titik berderajat i, dengan i = 1, 2, 3 maka*

$$tvs\left(F_{m,N}\right) = maks\left\{\left\lceil\frac{d_1+1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{d_1+1+d_2+d_3}{4}\right\rceil\right\}.$$

3.3 Pelabelan total tidak teratur sisi graf kembang api

Lemma 1.

Misalkan $F_{m,N}$ adalah suatu graf kembang api, maka $tes\left(F_{m,N}\right) \geq maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$.

Bukti.

Jika setiap titik di V diberi label dengan bilangan 1 dan setiap sisi secara berurutan diberi $1, 2, 3, \dots, |E|$ maka setiap dua sisi yang berbeda akan mempunyai bobot yang berbeda. Oleh karena itu, $tes \leq |E|$. Selanjutnya, misalkan λ merupakan pelabelan total tak teratur sisi pada G, maka bobot sisi pada G, maka bobot sisi pada G secara berurutan adalah $3, 4, 5, \dots, |E| + 2$. Karena$|E| + 2$ merupakan jumlah dari tiga buah bilangan bulat positif, sedikitnya terdapat satu label dengan nilai tidak kurang dari $\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil$. Kemudian misalkan $\Delta = \Delta(G)$ merupakan derajat maksimum titik dari G dan titik x mempunyai derajat Δ. Misalkan λ adalah suatu pelabelan total tak teratur sisi pada G dan $e_1, e_2, e_3, \dots, e_\Delta$ merupakan sisi yang terkait dengan titik x. Misalkan y_i merupakan titik ujung yang lain pada sisi e_i, atau $e_i = xy_i$. Karena $wt(e_i) = \lambda(x) + \lambda(e_i) + \lambda(y_i)$ berbeda untuk setiap i, dengan $1 \leq i \leq \Delta$, semua nilai $\lambda(e_i) + \lambda(y_i)$ harus berbeda. Akibatnya, $\lambda(e_i)$ atau $\lambda(y_i)$ harus bernilai tidak kurang dari $\frac{(\Delta+1)}{2}$ untuk suatu $i \in \{1, 2, 3, \dots \Delta\}$. Dengan demikian diperoleh

$$tes\left(F_{m,N}\right) \geq maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}. \blacksquare$$

Lemma 2

Misalkan $F_{m,N}$ adalah suatu graf kembang api, maka $tes\left(F_{m,N}\right) \leq maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$.

Bukti

Untuk membuktikan bahwa $tes(G) \leq maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$, maka dikonstruksi suatu pelabelan total tidak teratur pada $F_{m,N}$.

Untuk $i = 1$, dan $j = 1, 2, \dots, n_1$, pelabelan pada $F_{m,N}$ adalah sebagai berikut

$\lambda\left(y_{i,j}\right) = \left\lceil\frac{j+c_{i-1}+1}{2}\right\rceil$, $\lambda\left(y_i y_{i,j}\right) = \left\lceil\frac{j+c_{i-1}+2}{2}\right\rceil$, $\lambda(y_i) = 1$, $\lambda(x_i y_i) = 1$, $\lambda(x_i) = 1$

Untuk $2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, dimana i genap diperoleh

$\lambda(y_i) = k$, $\lambda\left(y_{i,n_i}\right) = k$

dimana

$$k = maks\left\{\left\lceil\frac{|E_i|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta_i+1}{2}\right\rceil\right\}$$

Kasus I jika $\lambda(y_i) = \left\lceil\frac{|E_i|+2}{3}\right\rceil = k_1$

Jika $n_i = k_1$, maka

$\lambda(y_{i,j}) \quad = j$, untuk $1 \leq j \leq n_i - 1$
$\lambda(y_i y_{i,j}) \ = \ |E_i| + 2 - (2k_1)$, untuk $1 \leq j \leq n_i$

Jika $n_i < k$, maka
$\lambda(y_i y_{i,j}) \ = \ |E_i| + 2 - (2k_1)$, untuk $1 \leq j \leq n_i$
Untuk $1 \leq j \leq n_i - 1$, diperoleh

- $j = n_i - 1$, maka $\lambda(y_{i,\, n_i - 1}) = k_1 - 1$
- $j = n_i - 2$, maka $\lambda(y_{i,\, n_i - 2}) = \lambda(y_{i,\, n_i - 1}) - 1$

  $\vdots$
- $j = 1$, maka $\lambda(y_{i,1}) = \lambda(y_{i,2}) - 1$

Jika $n_i > k$, maka
$\lambda(y_{i,j_1}) \quad = 1$, untuk $1 \leq j_1 \leq n_i - k_1$
Untuk $n_i - (k_1 - 1) \leq j_2 \leq n_i - 1$, diperoleh

- $j_2 = n_i - (k_1 - 1)$, maka $\lambda(y_{i,\, n_i - (k_1 - 1)}) = 1$
- $j_2 = (n_i - (k_1 - 1)) + 1$, maka $\lambda\left(y_{i,(n_i - (k_1 - 1)) + 1}\right) = 2$

  $\vdots$
- $j_2 = n_i - 1$, maka $\lambda(y_{i,\, n_i - 1}) = k_1 - 1$

$\lambda(y_i y_{i,j_2}) = |E_i| + 2 - (2k_1)$, untuk $n_i - (k_1 - 1) \leq j_2 \leq n_i$

Untuk $1 \leq j_1 \leq n_i - k_1$, diperoleh

- $j_1 = n_i - k_1$, maka $\lambda(y_i y_{i,\, n_i - k_1}) = (k_1 - 2) + 1$
- $j_1 = (n_i - k_1) - 1$, maka $\lambda(y_i y_{i,(n_i - k_1) - 1}) = \lambda(y_i y_{i,\, n_i - k_1}) - 1$

  $\vdots$
- $j_1 = 1$, maka $\lambda(y_i y_{i,1}) = \lambda(y_i y_{i,2}) - 1$

  $\lambda(x_i y_i) \quad = \lambda(y_{i,1})$
  $\lambda(x_i) \quad = \lambda(y_i y_{i,1}) - 1$

Kasus II jika $\lambda(y_i) = \left\lceil \frac{\Delta_i + 1}{2} \right\rceil = k_2$

Jika $n_i = k_2$, maka
$\lambda(y_{i,j}) \quad = j$, untuk $1 \leq j \leq n_i - 1$
$\lambda(y_i y_{i,j}) \ = \ k_2$, untuk $1 \leq j \leq n_i$

Jika $n_i < k_2$, maka
$\lambda(y_i y_{i,j}) \quad = \ k_2$, untuk $1 \leq j \leq n_i$
Untuk $1 \leq j \leq n_i - 1$, diperoleh

- $j = n_i - 1$, maka $\lambda(y_{i,\, n_i - 1}) = k_2 - 1$
- $j = n_i - 2$, maka $\lambda(y_{i,\, n_i - 2}) = \lambda(y_{i,\, n_i - 1}) - 1$

  $\vdots$
- $j = 1$, maka $\lambda(y_{i,1}) = \lambda(y_{i,2}) - 1$

Jika $n_i > k_2$, maka
$\lambda(y_{i,j_1}) \quad = 1, \quad$ untuk $1 \leq j_1 \leq n_i - k_2$
Untuk $n_i - (k_2 - 1) \leq j_2 \leq n_i - 1$, diperoleh

- $j_2 = n_i - (k_2 - 1)$, maka $\lambda(y_{i,\, n_i - (k_2 - 1)}) = 1$

- $j_2 = (n_i - (k_2 - 1)) + 1$, maka $\lambda\left(y_{i,(n_i-(k_2-1))+1}\right) = 2$

  $\vdots$
- $j = n_i - 1$, maka $\lambda(y_{i,n_i-1}) = k_2 - 1$

  $\lambda(y_i y_{i,j_2}) = k_2$, untuk $n_i - (k_2 - 1) \leq j_2 \leq n_i$

Untuk $1 \leq j_1 \leq n_i - k_2$, diperoleh
- $j_1 = n_i - k_2$, maka $\lambda(y_i y_{i,n_i-k_2}) = (k_2 - 2) + 1$
- $j_1 = (n_i - k_2) - 1$, maka $\lambda(y_i y_{i,(n_i-k_2)-1}) = \lambda(y_i y_{i,n_i-k_2}) - 1$

  $\vdots$
- $j_1 = 1$, maka $\lambda(y_i y_{i,1}) = \lambda(y_i y_{i,2}) - 1$

$\lambda(x_i y_i) = \lambda(y_{i,1})$

$\lambda(x_i) = \lambda(y_i y_{i,1}) - 1$

Untuk $2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, dimana i ganjil diperoleh

$\lambda(y_i) = \lambda(x_i) = k$

$\lambda(y_{i,n_i}) = k - 1$

dimana

$k = maks\left\{\left\lceil\frac{|E_i|+2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{\Delta_i+1}{2}\right\rceil\right\}$

Kasus I jika $\lambda(y_i) = \left\lceil\frac{|E_i|+2}{3}\right\rceil = k_1$

Jika $n_i = k_1$, maka

$\lambda(y_{i,1}) = 1,$

$\lambda(y_i y_{i,1}) = (|E_i| + 2 - (2k_1)) - 1$

$\lambda(y_{i,j}) = j - 1$, untuk $2 \leq j \leq n_i - 1$

$\lambda(y_i y_{i,j}) = |E_i| + 2 - (2k_1)$, untuk $2 \leq j \leq n_i$

Jika $n_i < k_1$, maka

$\lambda(y_i y_{i,j}) = |E_i| + 2 - (2k_1)$, untuk $1 \leq j \leq n_i$

Untuk $1 \leq j \leq n_i - 1$, diperoleh
- $j = n_i - 1$, maka $\lambda(y_{i,n_i-1}) = k_1 - 2$
- $j = n_i - 2$, maka $\lambda(y_{i,n_i-2}) = \lambda(y_{i,n_i-1}) - 1$

  $\vdots$
- $j = 1$, maka $\lambda(y_{i,1}) = \lambda(y_{i,2}) - 1$

Jika $n_i > k$, maka

$\lambda(y_{i,j_1}) = 1,$ untuk $1 \leq j_1 \leq n_i - (k_1 - 1)$

Untuk $n_i - (k_1 - 2) \leq j_2 \leq n_i - 1$, diperoleh
- $j_2 = n_i - (k_1 - 2)$, maka $\lambda(y_{i,n_i-(k_1-2)}) = 1$
- $j_2 = (n_i - (k_1 - 2)) + 1$, maka $\lambda\left(y_{i,(n_i-(k_1-2))+1}\right) = 2$

  $\vdots$
- $j_2 = n_i - 1$, maka $\lambda(y_{i,n_i-1}) = k_1 - 2$

$\lambda(y_i y_{i,j_2}) = |E_i| + 2 - (2k_1)$, untuk $n_i - (k_1 - 2) \leq j_2 \leq n_i$

Untuk $1 \leq j_1 \leq n_i - (k_1 - 1)$, diperoleh
- $j_1 = n_i - (k_1 - 1)$, maka $\lambda(y_i y_{i,n_i-(k_1-1)}) = (k_1 - 2) + 1$

- $j_1 = (n_i - (k_1 - 1)) - 1$, maka $\lambda\left(y_i y_{i,(n_i-(k_1-1))-1}\right) = \lambda(y_i y_{i,n_i-(k_1-1)}) - 1$

  $\vdots$
- $j_1 = 1$, maka $\lambda(y_i y_{i,1}) = \lambda(y_i y_{i,2}) - 1$

$\lambda(x_i y_i) \quad = |E_i| + 2 - (2k_1)$

Kasus II jika $\lambda(y_i) \; = \left\lceil \frac{\Delta_i+1}{2} \right\rceil = k_2$

Jika $n_i = k_2$, maka

$\lambda(y_{i,1}) \quad = 1,$

$\lambda(y_i y_{i,1}) \quad = k_2 - 1$

$\lambda(y_{i,j}) \quad = j - 1$, untuk $2 \le j \le n_i - 1$

$\lambda(y_i y_{i,j}) \quad = k_2$, untuk $2 \le j \le n_i$

Jika $n_i < k_2$, maka

$\lambda(y_i y_{i,j}) \quad = k_2$, untuk $1 \le j \le n_i$

Untuk $1 \le j \le n_i - 1$, diperoleh

- $j = n_i - 1$, maka $\lambda(y_{i,n_i-1}) = k_2 - 2$
- $j = n_i - 2$, maka $\lambda(y_{i,n_i-2}) = \lambda(y_{i,n_i-1}) - 1$
- $j = n_i - 3$, maka $\lambda(y_{i,n_i-3}) = \lambda(y_{i,n_i-2}) - 1$

  $\vdots$
- $j = 1$, maka $\lambda(y_{i,1}) = \lambda(y_{i,2}) - 1$

Jika $n_i > k_2$, maka

$\lambda(y_{i,t}) \quad = 1$, untuk $1 \le t \le n_i - k_2$

Untuk $n_i - (k_2 - 2) \le j_2 \le n_i - 1$, diperoleh

- $j_2 = n_i - (k_2 - 2)$, maka $\lambda(y_{i,n_i-(k_2-2)}) = 1$
- $j_2 = (n_i - (k_2 - 2)) + 1$, maka $\lambda\left(y_{i,(n_i-(k_2-2))+1}\right) = 2$
- $j_2 = (n_i - (k_2 - 2)) + 2$, maka $\lambda\left(y_{i,(n_i-(k_2-2))+2}\right) = 3$

  $\vdots$
- $j_2 = n_i - 1$, maka $\lambda(y_{i,n_i-1}) = k_2 - 2$

$\lambda(y_i y_{i,j_2}) \quad = k_2$, untuk $n_i - (k_2 - 2) \le j_2 \le n_i$

Untuk $1 \le j_1 \le n_i - (k_2 - 1)$, diperoleh

- $j_1 = n_i - (k_2 - 1)$, maka $\lambda(y_i y_{i,n_i-(k_2-1)}) = (k_2 - 2) + 1$
- $j_1 = (n_i - (k_2 - 1)) - 1$, maka $\lambda\left(y_i y_{i,(n_i-(k_2-1))-1}\right) = \lambda(y_i y_{i,n_i-(k_2-1)}) - 1$

  $\vdots$
- $j_1 = 1$, maka $\lambda(y_i y_{i,1}) = \lambda(y_i y_{i,2}) - 1$

  $\lambda(x_i y_i) = k_2$

Berdasarkan definisi bobot sisi tersebut, telah ditunjukkan bahwa setiap bobot sisi berbeda.

$wt(x_1 y_1) < wt(y_1 y_{1,j}) < wt(y_1 y_{1,j+1}) \ldots < wt(y_1 y_{1,n_1}) < wt(x_{i_s} x_{i_s}) <$
$wt(x_{i_s} y_{i_s}) < wt(y_{i_s} y_{i_s,j}) < wt(y_{i_s} y_{i_s,j+1}) < \cdots < wt(y_{i_s} y_{i_s,n_i}) < wt(x_{i_t} x_{i_t}) <$
$wt(x_{i_t} y_{i_t}) < wt(y_{i_t} y_{i_t,j}) < wt(y_{i_t} y_{i_t,j+1}) \ldots < wt(y_{i_t} y_{i_t,j+1}) < \cdots <$
$wt\left(y_{i_t} y_{i_t,n_j}\right) < wt(x_{i_t} y_{i_t})$

dimana

s = genap

t = ganjil

Sehingga dapat disimpulkan bahwa bobot setiap sisi pada $F_{m,N}$ berbeda. Maka λ merupakan suatu pelabelan tidak teratur pada $F_{m,N}$.
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label terbesar yang digunakan adalah
$maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$
Perhatikan bahwa untuk $i = 1, 1 \le j \le n_i - 1$, diperoleh

$$\lambda(y_i) \; = 1 \; < maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$$

Perhatikan bahwa untuk $2 \le i \le m, 1 \le j \le n_i$, dimana *i* genap diperoleh

$$\lambda(y_i) \; = maks\left\{\left\lceil\frac{|E_i|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta_i+1}{2}\right\rceil\right\} \le maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$$

$$\lambda\left(y_i y_{i,n_i}\right) \; = maks\left\{\left\lceil\frac{|E_i|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta_i+1}{2}\right\rceil\right\} \le maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$$

Perhatikan bahwa untuk $2 \le i \le m, 1 \le j \le n_i$, dimana *i* ganjil diperoleh

$$\lambda(y_i) \; = maks\left\{\left\lceil\frac{|E_i|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta_i+1}{2}\right\rceil\right\} \le maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$$

$$\lambda(x_i) = maks\left\{\left\lceil\frac{|E_i|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta_i+1}{2}\right\rceil\right\} \le maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$$

Karena itu $F_{m,N}$ memiliki suatu pelabelan-*k* total tidak teratur sisi, dimana
$k = maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$dengan demikian

$$tvs(T_{n,m}) \le maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\} \quad \blacksquare$$

Dari lemma 1 dan lemma 2 diperoleh,
Teorema: *Misalkan $F_{m,N}$ adalah suatu graf kembang api maka*

$$tes\left(F_{m,N}\right) = maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}.$$

4. Kesimpulan dan Saran

4.1 Kesimpulan

Dengan menggunakan pelabelan tidak teratur, pelabelan total tidak teratur titik dan pelabelan total tidak teratur sisi pada $F_{m,N}$ tersebut diperoleh nilai ketidakteraturan graf $F_{m,3}$, nilai total ketidakteraturan titik graf $F_{m,N}$ dan nilai total ketidakteraturan sisi graf $F_{m,N}$. Sebagai berikut

$$s\left(F_{m,3}\right) = m + 1.$$

$$tvs\left(F_{m,N}\right) = maks\left\{\left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\mathrm{d}_1+1+\mathrm{d}_2+\mathrm{d}_3}{4}\right\rceil\right\}.$$

$$tes\left(F_{m,N}\right) = maks\left\{\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil,\left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}.$$

4.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan tidak teratur ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini dan bisa juga mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis graph yang berbeda

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Ahmad and M. Bača, "On vertex irregular total labelings," to appear in Ars Combinatoria.

[2] A. Joseph, Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling. (2011)

[3] J.A Bondy, & Murty U.S.R.: *Graph Theory*. Springer. (2008)

[4] K. Wijaya. dan Slamin, Total Vertex Irregular Labelings of Wheels, Fans, Suns, and Friendship Graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 56 (2008) 103–112.

[5] M. Bača, J. Jendroľ, M. Miller, and J. Ryan, On irregular total labellings, Discrete Math, 307 (2007) 1378-1388.

[6] Nurdin, On The Total Vertex Irregularity Strengths Of Quadtrees And Banana Trees, 18 (2012) 31-36.

[7] Nurdin, E.T. Baskoro, A.N.M. Salman, N.N. Gaos, On total vertex-irregular labellings for several types of tree, Util. Math., 83,277-290 (2010)

[8] S. Kamran, On edge irregularity strength of subdivision of star Sn.(2012)

[9] S. Kamran, A. Deeba, On tvs of Subdivision of Star Sn.(2011)

[10] W. C. Chen, H. I. L¨u, and Y. N. Yeh, Operations of interlaced trees and graceful trees, Southeast Asian Bull. Math., 21 (1997) 337–348