

## ABSTRAK

### BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF GABUNGAN BINTANG

Oleh

Hasmawati

NIM : 30104001

Bilangan Ramsey  $R(G, H)$  untuk suatu graf  $G$  dan  $H$  adalah bilangan bulat terkecil  $n$  sedemikian sehingga untuk sebarang graf  $F$  dengan  $n$  titik memenuhi sifat:  $F$  memuat  $G$  atau komplemen dari  $F$  memuat  $H$ . Batas bawah bilangan Ramsey  $R(G, H)$  yang diberikan oleh Chvátal dan Harary adalah  $R(G, H) \geq (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$ , dengan  $\chi(H)$  adalah bilangan kromatik graf  $H$  dan  $C(G)$  adalah banyaknya titik pada komponen terbesar graf  $G$ . Sejak adanya batas bawah ini, kajian bilangan Ramsey berkembang pesat. Salah satu topik yang paling banyak dikaji adalah bilangan Ramsey untuk graf pohon. Hal ini disebabkan oleh struktur pohon yang berbeda-beda. Struktur yang paling sederhana adalah lintasan dan bintang. Karena itu, pengkajian bilangan Ramsey untuk graf pohon umumnya dimulai dengan pengkajian bilangan Ramsey untuk lintasan atau bintang.

Hasil kajian Baskoro dkk. (2002) tentang bilangan Ramsey untuk pohon dan roda menunjukkan bahwa struktur yang paling berpengaruh pada penentuan bilangan Ramsey untuk pohon adalah bintang, meskipun struktur bintang tersebut adalah struktur pohon yang paling sederhana. Dalam disertasi ini, kami mengkaji penentuan bilangan Ramsey untuk bintang versus beberapa graf tertentu,  $R(S_n, H)$ , serta bilangan Ramsey untuk gabungan bintang versus  $H$ ,  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, H)$ , dengan  $H$  adalah roda atau graf bipartit lengkap. Kami membuktikan bahwa bilangan Ramsey untuk bintang dan roda,  $R(S_n, W_m) = 3n - 2$  untuk  $n \geq 3$  dan  $m$  ganjil dengan  $3 \leq m \leq 2n - 1$ . Berdasarkan hasil ini, dapat ditunjukkan bahwa  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m) = R(S_{n_k}, W_m) + n_1 + \dots + n_{k-1}$ , untuk  $m = 4$  dan  $m$  ganjil. Selain itu, kami menentukan bilangan Ramsey untuk bintang dan roda berorde genap,  $R(S_n, W_m)$ , dan  $R(kS_n, W_m)$  untuk  $m = 2n - 4$ ,  $m = 2n - 2$ ,  $m = 2n - 8$ , atau  $m = 2n - 6$ .

Kajian bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap,  $R(S_n, K_{t,m})$ , belum banyak dilakukan. Dalam disertasi ini, kami mengkaji  $R(S_n, K_{t,m})$  untuk  $n, t$  yang kecil dan beberapa  $m$  tertentu. Kami menentukan  $R(S_n, K_{2,2})$  untuk  $n = 6$ , atau 8, dan  $R(S_6, K_{2,m})$  untuk  $m = 3, 4, 6, 5, 4n - 7$ , atau  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$ , serta  $R(S_n, K_{2,2})$  untuk  $n = 6$ , atau 8. Setelah itu, ditentukan  $R(kS_{1+p}, K_{2,2})$  untuk  $p \geq 3$  dan  $k \geq 2$ .

Pada bagian akhir disertasi ini, ditunjukkan bahwa bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas pohon dan roda berorde lima,  $R(\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}, W_4)$ , bernilai sama dengan  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4)$  jika  $n_i$  ganjil untuk setiap  $i$ . Setelah itu, kami menunjukkan suatu hasil yang besar dari penelitian ini bahwa untuk  $H$  dan  $G_i$  graf sebarang dan terhubung, jika  $|G_i| > (|G_i| - |G_{i+1}|)(\chi(H) - 1)$  dan  $R(G_i, H) = (\chi(H) - 1)(|G_i| - 1) + 1$  untuk setiap  $i$ , maka  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) = R(G_k, H) + \sum_{i=1}^{k-1} |G_i|$ .

**Kata Kunci:** graf, bilangan Ramsey graf, komplemen, pohon, bintang, roda, graf bipartit lengkap.

## ABSTRACT

### THE RAMSEY NUMBERS FOR UNION OF STARS

By

Hasmawati

30104001

For given graphs  $G$  and  $H$ , the Ramsey number  $R(G, H)$  is the smallest natural number  $n$  such that for every graph  $F$  of order  $n$ : either  $F$  contains  $G$  or the complement of  $F$  contains  $H$ . Chvátal and Harary established a useful lower bound for finding the exact Ramsey numbers  $R(G, H)$ , namely  $R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(C(H) - 1) + 1$ , where  $\chi(G)$  is the chromatic number of  $G$  and  $C(H)$  is the number of vertices of the largest component of  $H$ . Since then the Ramsey numbers  $R(G, H)$  for many combinations of graphs  $G$  and  $H$  have been extensively studied by various authors. One of the most popular topics in this area is the Ramsey numbers for trees. This is due to the fact that trees have various structures. The simplest structures are path and stars. Therefore, it is natural that initially a study of Ramsey numbers for trees almost always considers paths and stars.

In their results on the Ramsey number for trees versus wheels, Baskoro et al. (2002) showed that stars have significant effects on the numbers despite stars are one of the simplest trees. In this dissertation, we study the Ramsey numbers for graphs involving stars,  $R(S_n, H)$ , where  $H$  are wheels or complete bipartite graphs. Furthermore, we investigate the Ramsey numbers for disjoint union of stars versus  $H$ ,  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, H)$ . We prove that  $R(S_n, W_m) = 3n - 2$  for  $n \geq 3$  and  $m$  is odd,  $3 \leq m \leq 2n - 1$ . Based on this result, we show that  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m) = R(S_{n_k}, W_m) + n_1 + \dots + n_{k-1}$ , for  $m = 4$  and  $m$  is odd. In addition, we determine the Ramsey number for stars versus wheels with even order,  $R(S_n, W_m)$ , and  $R(kS_n, W_m)$  for  $m = 2n - 4$ ,  $m = 2n - 2$ ,  $m = 2n - 8$ , or  $m = 2n - 6$ .

There are only a few results known on the Ramsey numbers for stars versus complete bipartite graphs,  $R(S_n, K_{t,m})$ . In this dissertation, we study the Ramsey number for stars versus complete bipartite graphs,  $R(S_n, K_{t,m})$ , for small  $n$  and  $t$ , and for some value of  $m$ . We determine  $R(S_n, K_{2,2})$  for  $n = 6$ , or  $8$ , and  $R(S_6, K_{2,m})$  for  $m = 3, 4, 6, 5, 4n - 7$ , or  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$ . Furthermore, we determine  $R(S_n, K_{2,2})$  for  $n = 6$ , or  $8$ , and  $R(kS_{1+p}, K_{2,2})$  for  $p \geq 3$  and  $k \geq 2$ .

In the last part of this dissertation, we show that the Ramsey numbers for disjoint union of tree versus small wheel,  $R(\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}, W_4)$ , have same values as

$R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4)$  if  $n_i$  is odd and  $2n_{i+1} \geq n_i$  for every  $i$ . For combination of trees and complete graphs, we determine  $R(\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}, K_m)$  for any  $m$ . We also prove a general result, for connected graphs  $H$  and  $G_i$ , if  $|G_i| > (|G_i| - |G_{i+1}|)(\chi(H) - 1)$  and  $R(G_i, H) = (\chi(H) - 1)(|G_i| - 1) + 1$  for every  $i$ , then  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) = R(G_k, H) + \sum_{i=1}^{k-1} |G_i|$ .

*Keywords : graph, the graph Ramsey number, complement, tree, star, wheel, complete bipartite graph*

BILANGAN RAMSEY UNTUK GRAF  
GABUNGAN BINTANG

Oleh

Hasmawati

NIM : 30104001

Institut Teknologi Bandung

Menyetujui

Tim Pembimbing

Tanggal : 14 Desember 2007

Ketua

---

(Prof. Dr. Edy Tri Baskoro,)

Anggota

Anggota

---

(Dr. Hilda Assiyatun)

---

(Dr. M. Salman A. N.)

## PEDOMAN PENGGUNAAN DISERTASI

Disertasi Doktor yang tidak dipublikasikan terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Institut Teknologi Bandung, dan terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada pengarang dengan mengikuti aturan HaKI yang berlaku di Institut Teknologi Bandung. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau peringkasan hanya dapat dilakukan seijin pengarang dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Memperbanyak atau menerbitkan sebagian atau seluruh disertasi haruslah seijin Direktur Program Pascasarjana, Institut Teknologi Bandung.

*Barang siapa menghendaki dunia hendaklah dengan ilmu,  
barang siapa menghendaki akhirat hendaklah dengan ilmu,  
dan barang siapa menghendaki keduanya juga hendaklah  
dengan ilmu. (HR. Bukhari Muslim)*

*Karya ini untuk yang kucinta  
Suamiku Abdul Basir,  
yang kusayang anak-anakku : Reyhan Bashir, Ufairah Damara Bashir, dan  
Ilmiyyana Iffatunnafsiyah Bashir*

## KATA PENGANTAR / UCAPAN TERIMA KASIH

*Bismillahirrahmanirrahim*

Maha Suci Allah yang telah mempertemukan penulis dengan orang-orang arif dan bijak yang mengajarkan lebih banyak hal-hal yang lebih bernilai dari pada sekedar bimbingan dalam penelitian dan penulisan. Karena itu, disertasi ini sebagai hasil rangkaian penelitian penulis selama mengikuti Program S3 Matematika di ITB, sesungguhnya adalah manifestasi dedikasi orang-orang arif dan bijak yang pernah penulis temui.

Penulis dapat mengikuti Program S3, salah satunya karena mendapat izin yang tulus dari suami tercinta Abdul Basir. Ia dengan penuh kesabaran senantiasa memberikan dorongan baik moril maupun materil. kepadanya penulis hormat dan berterima kasih yang sebesar-besarnya.

Demi kelancaran penyelesaian disertasi ini, Prof. Dr. Edy Tri Baskoro sebagai ketua Tim Pembimbing, di sela-sela kesibukannya yang sangat padat, tanpa kenal lelah, senantiasa memberikan bimbingan dan arahan ketika penulis mengalami kesulitan. Selama pembimbingan, beliau dengan segala kearifannya sewaktu-waktu bersedia menurunkan posisi beberapa langkah dari seorang pembimbing menjadi seorang teman diskusi. Hal ini benar-benar menolong penulis. Dr. Hilda Assiyatun sebagai anggota Tim pembimbing walaupun juga sibuk tetap senantiasa bersedia berdiskusi dan telaten memberikan bimbingan kepada penulis. Dr. M. Salman A. N. juga sebagai anggota Tim Pembimbing yang meskipun sangat sibuk masih bersedia membimbing dan mengarahkan penulis. Kepada mereka, penulis sangat berterima kasih.

Penulis merasa sangat bersyukur masih memiliki kedua orang tua dan kedua mertua yang dengan tulus senantiasa mendukung dan berdoa untuk penulis, memiliki banyak saudara, di Enrekang dan di Takalar yang senantiasa segera



mengulurkan bantuannya ketika penulis membutuhkannya. Penulis memiliki adik-adik seperjuangan Kasbawati dan Andi Wahidah sebagai teman diskusi dan bercanda tawa yang menyenangkan, serta Harianti (Anti) yang telah bersedia mengasuh anak-anak penulis. Hanya ungkapan terima kasih yang mampu penulis sampaikan. Putra putriku tercinta, Rey, Ara dan Iffa dibalik keaktifan dan kenakalan kalian sesungguhnya itu adalah hiburan terbaik bagiku. Kalian semua adalah penyemangat dan menjadi cahaya yang menerangi jalanku.

Penulis juga berterima kasih kepada:

Dr. Yudi Soeharyadi sebagai Sekretaris Program Magister dan Doktor Prodi Matematika atas nasehat, dorongan dan bantuan-bantuan lainnya. Hal itu sangat membantu dalam pelaksanaan penelitian ini.

Tim Pembaca dan Tim Penguji, Dr. Saladin Uttunggadewa, Dr. Irawati, Dr. Purwanto dan Dr. Rinovia Simanjuntak atas kritik dan saran serta kesediaannya menjadi penguji pada ujian tertutup dan sidang terbuka disertasi ini.

Rekan-rekan Mahasiswa S3, putra maupun putri khususnya yang berada di ruang 207: Erna, Yuni, Titi, Tita dan Lyra, serta seluruh staf dan karyawan Program Studi Matematika ITB, rekan-rekan di Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin atas kebersamaan, do'a dan seluruh bantuannya dalam bentuk apapun. Semuanya itu, turut mempercepat proses penyelesaian disertasi ini.

Kepada Departemen Pendidikan dan Kebudayaan atas bantuan Beasiswa Pendidikan Pascasarjana (BPPs) yang diterima penulis selama mengikuti pendidikan doktor ini.

Semua itu hanya dengan perkenan Allah SWT, dzat Yang Maha Pengasih, Yang Maha Mengetahui dan Penguasa ilmu dunia akhirat, yang mampu membalas semua kebaikan mereka. *Jazzaakumullahu khairan katsiiran*. Amin...

Bandung, 1 Desember 2007

Penulis

# DAFTAR ISI

<b>ABSTRAK</b>	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>iii</b>
<b>PEDOMAN PENGGUNAAN DISERTASI</b>	<b>vi</b>
<b>UCAPAN TERIMA KASIH</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b>	<b>xii</b>
<b>I Pendahuluan</b>	<b>1</b>
I.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
I.2 Permasalahan dan Tujuan Penelitian . . . . .	4
I.3 Hasil Penelitian . . . . .	5
I.4 Garis Besar Penulisan . . . . .	6
<b>II Konsep Dasar dan Tinjauan Pustaka</b>	<b>8</b>
II.1 Konsep Dasar . . . . .	8
II.1.1 Graf dan subgraf . . . . .	8
II.1.2 Himpunan bebas dan keterhubungan . . . . .	11
II.1.3 Beberapa jenis graf . . . . .	13
II.1.4 Jumlah dan gabungan graf-graf . . . . .	17
II.1.5 Pewarnaan dan dekomposisi . . . . .	18
II.2 Tinjauan Pustaka . . . . .	18
II.2.1 Bilangan Ramsey klasik . . . . .	19
II.2.2 Bilangan Ramsey graf . . . . .	21
II.2.3 Survey perkembangan bilangan Ramsey graf . . . . .	24
<b>III Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Bintang dan Beberapa Graf Tertentu</b>	<b>32</b>

III.1 Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Bintang dan Roda . . . . .	32
III.2 Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Bintang dan Graf Bipartit Lengkap . . . . .	40
<b>IV Bilangan Ramsey untuk Graf Gabungan</b>	<b>53</b>
IV.1 Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Gabungan Bintang dan Graf- Graf Tertentu . . . . .	54
IV.1.1 Bilangan Ramsey untuk kombinasi gabungan bintang dan roda . . . . .	55
IV.1.2 Bilangan Ramsey untuk kombinasi gabungan bintang dan graf bipartit lengkap . . . . .	63
IV.2 Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Gabungan Sebarang Graf dan Beberapa Graf Tertentu . . . . .	66
<b>V Kesimpulan</b>	<b>71</b>
<b>DaftarPustaka</b>	<b>74</b>
<b>RIWAYAT HIDUP PENULIS</b>	<b>78</b>

## DAFTAR LAMBANG

LAMBANG	Nama	Pemakaian pertama kali pada hal.
$\alpha(G)$	Kardinalitas himpunan bebas tebesar dari graf $G$	10
$B_{n_1, \dots, n_k}$	Graf multipartit yang terdiri dari $k$ partisi	14
$C(G)$	Kardinalitas komponen terbesar graf $G$	21
$C_m$	Siklus dengan $m$ titik	11
$c(G)$	Panjang lingkaran terbesar $G$	11
$d_G(v_i)$	Derajat titik $v_i$ pada graf $G$	8
$\Delta(G)$	Derajat maksimum dari $G$	8
$\Delta_n$	Subhimpunan dari $\Gamma_m$ , dengan $n$ anggota	1
$\delta(G)$	Derajat minimum dari $G$	8
$E$	Himpunan sisi dari $G$	7
$F_n$	Kipas dengan $n + 1$ titik	16
$G(V, E)$	Graf dengan himpunan titik $V$ dan himpunan sisi $E$	7
$\bar{G}$	Komplemen graf $G$	7
$G_n$	Graf $G$ dengan $n$ titik	9
$G + \{uv\}$	Graf $G$ tambah sisi $uv$	9
$G[S]$	Subgraf dari $G$ yang diinduksi oleh himpunan titik $S$	9
$G \setminus H$	Subgraf dari $G$ yang diinduksi oleh himpunan titik $V(G) \setminus V(H)$	9
$G - e$	Subgraf dari $G$ dengan menghilangkan sisi $e$ dari $G$	9

LAMBANG	Nama	Pemakaian pertama kali pada hal.
$G - x$	Subgraf dari $G$ dengan menghilangkan titik $x$ dari $G$	10
$\cup_{i=1}^k G_i$	Gabungan saling lepas graf $G_i$	16
$G_1 + G_2$	Graf jumlah	16
$g(G)$	Panjang lingkaran terkecil $G$	11
$\Gamma_m$	Himpunan yang terdiri dari $m$ anggota	1
$H_s$	Graf pesta dengan $2s$ titik	13
$J_m$	Graf Jahangir dengan $m + 1$ titik	13
$K_m$	Graf lengkap dengan $m$ titik	4
$K_{s,m}$	Graf bipartit lengkap dengan $s + m$ titik	4
$K_{n_1, \dots, n_k}$	Graf multipartit lengkap yang terdiri dari $k$ partisi	15
$\kappa(G)$	Keterhubungan graf $G$	11
$M_n$	Kincir dengan $2n + 1$ titik	16
$N_S(v_i)$	Himpunan tetangga titik $v_i$ pada himpunan $S$	8
$n m$	$n$ membagi habis $m$	8
$O_S(v_1, \dots, v_n)$	Himpunan gabungan tetangga dari titik $v_1, \dots, v_n$ pada himpunan $S$	8
$P_n$	Lintasan dengan $n$ titik	3
$R(G, H)$	Bilangan Ramsey untuk graf $G$ dan $H$	2
$R(G_1, \dots, G_k)$	Bilangan Ramsey untuk graf $G_1, \dots, G_k$	2

LAMBANG	Nama	Pemakaian pertama kali pada hal.
$R(n_1, n_2)$	Bilangan Ramsey klasik dua warna	18
$ S $	Kardinalitas himpunan $S$	8
$S_n$	Bintang dengan $n$ titik	3
$T_n$	Pohon dengan $n$ titik	3
$T_n(s)$	Pohon berakar dengan $n$ titik	12
$V$	Himpunan titik dari $G$	7
$W_m$	Roda dengan $m + 1$ titik	3
$\chi(G)$	Bilangan kromatik $G$	17
$Z_S(v_i, \dots, v_n)$	Himpunan tetangga bersama dari titik $v_1, \dots, v_n$ pada himpunan $S$	8

# Bab I Pendahuluan

## I.1 Latar Belakang Masalah

Teori Ramsey adalah suatu area penelitian dalam teori graf yang sedang berkembang pesat dan mempunyai banyak aplikasi. Dalam makalah Rosta (2004) disebutkan bahwa teori Ramsey mempunyai aplikasi pada teori bilangan, analisis harmonik, ruang metrik, teori ergodik, teori informasi, metoda probabilistik, dan lain-lain. Meskipun tergolong area yang baru dalam bidang kombinatorik, khususnya dalam teori graf, teori ini telah mendapat perhatian dari banyak peneliti. Akibatnya, kajian ini berkembang sangat pesat dan telah memperoleh banyak hasil (lihat makalah survey Radziszowski, 2004).

Teorema Ramsey awalnya dikembangkan dalam konteks himpunan takberhingga, dan kemudian diteruskan ke dalam konteks himpunan berhingga dengan argumentasi yang sama dan padat. Teorema Ramsey tersebut disajikan sebagai berikut.

**Teorema I.1** (Ramsey, 1930). *Untuk setiap bilangan bulat positif  $n, r$  dan  $k$  terdapat bilangan bulat terkecil  $M_0$  sedemikian sehingga jika  $m \geq M_0$  dan semua  $k$ -subhimpunan dari suatu  $m$ -himpunan  $\Gamma_m$  dikelompokkan (menurut sebarang aturan) ke dalam kelas-kelas yang saling lepas  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, r$ , maka  $\Gamma_m$  akan memuat suatu  $n$ -subhimpunan  $\Delta_n$  dengan semua  $k$ -subhimpunan dari  $\Delta_n$  menjadi anggota dari  $C_i$  yang sama.*

Sebelum membahas aplikasi teorema Ramsey kedalam teori graf terlebih dahulu diberikan definisi mengenai graf. Graf  $G(V, E)$  adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan titik berhingga tak kosong  $V = V(G)$  dan himpunan sisi  $E = E(G)$ , yaitu himpunan bagian dari himpunan pasangan tak terurut anggota-anggota  $V$ .

Misalkan  $G(V, E)$  adalah suatu graf. Jika  $e = uv \in E(G)$ , maka  $u$  disebut *tetangga* dari  $v$ , demikian juga sebaliknya. Banyaknya titik yang bertetangga dengan  $v$  disebut sebagai *derajat* dari  $v$ . Graf  $G$  dengan  $n$  titik dan setiap dua titiknya bertetangga disebut *graf lengkap*, dan dinotasikan  $K_n$ . Graf  $G$  dikatakan *bipartit* jika  $V(G)$  dapat dipartisi kedalam dua subhimpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$ , sedemikian sehingga untuk setiap sisi  $e = uv \in E(G)$ , berlaku  $u \in V_1$  dan  $v \in V_2$  atau  $v \in V_1$  dan  $u \in V_2$ . Graf  $G$  dikatakan *graf bipartit lengkap*, jika  $E(G) = \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$ .

Pada tahun 1935, Erdős dan Szekeres mengkaji dan mengaplikasikan teorema Ramsey ke dalam teori graf yang menghasilkan *teorema Ramsey untuk graf lengkap*, (lihat Surahmat, 2003). Dalam hal ini, objek permasalahannya adalah graf lengkap. Jika graf pada teorema tersebut bukan hanya graf lengkap tetapi berlaku untuk sebarang graf, maka teorema disebut *teorema Ramsey graf*. Graf yang dimaksud di sini adalah graf sederhana dan berhingga. Teorema Ramsey untuk sebarang graf dijabarkan sebagai berikut.

**Teorema I.2** *Untuk sebarang graf  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , terdapat bilangan bulat terkecil  $M_0$  sedemikian sehingga jika semua sisi pada graf lengkap  $G$  dengan paling sedikit  $M_0$  titik diwarnai dengan  $k$  warna, maka terdapat subgraf dari  $G$  dengan semua sisi berwarna sama isomorfik dengan graf  $G_i$  untuk suatu  $i, 1 \leq i \leq k$ .*

Bilangan  $M_0 = R(G_1, G_2, \dots, G_k)$  disebut *bilangan Ramsey* untuk pasangan graf  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Untuk  $k = 2$ ,  $R(G_1, \dots, G_k)$  disebut *bilangan Ramsey graf dua warna* dan disebut *bilangan Ramsey graf multiwarna* untuk  $k > 2$ . Jika untuk setiap  $i$ ,  $G_i$  adalah graf lengkap, maka bilangan  $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$  disebut *bilangan Ramsey klasik*. Graf lengkap dengan  $m$  titik dinotasikan dengan  $K_m$ .

Konsep awal bilangan Ramsey adalah konsep bilangan Ramsey klasik dua warna yang diberikan oleh Erdős dan Szekeres. Karena masalah ini sangat sulit, beberapa peneliti memperumum konsep bilangan Ramsey klasik menjadi konsep



bilangan Ramsey graf sebarang. Diantara beberapa peneliti itu adalah Greenwood dan Gleason (1955), Gerencsér dan Gyárfás (1967) serta Chvátal dan Harary (1972). Greenwood dan Gleason memberikan batas atas secara umum untuk bilangan Ramsey klasik. Sedangkan Chvátal dan Harary memberikan batas bawah untuk bilangan Ramsey graf dua warna, (lihat Chvátal dan Harary, 1972).

**Definisi I.1** *Diberikan graf  $G$  dan  $H$ , bilangan Ramsey graf dua warna  $R(G, H)$  adalah bilangan asli terkecil  $m$  sedemikian sehingga jika semua sisi pada graf lengkap  $K_m$  diwarnai dengan dua warna, maka  $K_m$  memuat subgraf yang semua sisinya berwarna sama isomorfik dengan  $G$  atau  $H$ .*

Sejak Chvátal dan Harary memberikan batas bawah untuk  $R(G, H)$ , kajian bilangan Ramsey tersebut banyak mendapat kemajuan, dan hingga saat ini telah menghasilkan lebih dari 403 paper, (lihat survey Radziszowski, (2004)). Dari sekian banyak hasil yang telah diperoleh, bilangan Ramsey untuk pohon versus graf lainnya adalah topik yang paling banyak diminati. Hal ini disebabkan oleh struktur pohon yang berbeda-beda. Sebagai contoh, struktur lintasan berbeda dengan struktur bintang.

Berikut ini disajikan beberapa definisi dari berbagai jenis graf tertentu. *Lintasan* (path)  $P$  dengan  $n$  titik,  $n \geq 1$  adalah graf yang titik-titiknya dapat diurutkan dalam suatu barisan  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sedemikian sehingga  $E(P) = \{u_i u_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\}$ . Graf  $G$  dikatakan *terhubung* jika untuk setiap dua titik  $u$  dan  $v$  pada graf tersebut terdapat suatu lintasan yang memuat  $u$  dan  $v$ . Siklus  $C_n$  adalah graf dengan  $V(C_n) = V(P_n)$  dan  $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_1 v_n\}$ . *Pohon*  $T_n$  adalah graf terhubung berorde  $n$  yang tidak memuat siklus. Sedangkan *bintang* adalah pohon yang mempunyai satu titik berderajat  $n-1$  dan titik lainnya berderajat satu, dinotasikan dengan  $S_n$ . *Roda*  $W_k$  adalah suatu graf yang dibentuk dari siklus  $C_k$  dengan menambahkan satu titik, sebut  $x$ , dan menambahkan  $k$  sisi dari titik  $x$  ke semua titik di  $C_k$ .

Pada tahun 1967, Gerencsér dan Gyárfás mengkaji bilangan Ramsey untuk lintasan dan lintasan  $R(P_n, P_m)$ . Bilangan Ramsey untuk lintasan dan graf lengkap  $R(P_n, K_m)$  dikaji oleh Parsons (1973). Kemudian Chvátal (1977) memperluas kajian tersebut, yaitu menentukan bilangan Ramsey untuk pohon dan graf lengkap  $R(T_n, K_m)$ . Namun, penentuan  $R(T_n, G)$  untuk sebarang graf  $G$  belum diketahui. Pada tahun 2001, Surahmat dan Baskoro mengkaji bilangan Ramsey untuk lintasan dan roda. Hasilnya adalah  $R(P_n, W_4) = 2n - 1$  untuk  $n \geq 3$  dan  $R(P_n, W_5) = 3n - 2$ . Setelah itu, mereka melanjutkan kajiannya dan menghasilkan bilangan Ramsey untuk bintang dan roda  $R(S_n, W_4) = 2n - 1$  untuk  $n$  ganjil,  $R(S_n, W_4) = 2n + 1$  untuk  $n$  genap, dan  $R(S_n, W_5) = 3n - 2$  untuk  $n \geq 3$ . Setahun kemudian Baskoro dkk. (2002) memperluas kajian itu dengan menentukan bilangan Ramsey untuk pohon dan roda. Hasil yang diperoleh adalah  $R(T_n, W_5) = 3n - 2$  untuk  $n \geq 3$  dan  $R(T_n, W_4) = 2n - 1$  untuk  $n \geq 4$ , yang berlaku bagi semua pohon  $T_n$  kecuali bintang  $S_n$ . Baru-baru ini, Salman dkk. mengkaji bilangan Ramsey untuk lintasan dan beberapa graf tertentu, (lihat Salman dan Broersma, (2006, 2007)).

Melalui pengertian lintasan dan bintang di atas, diketahui bahwa lintasan dan bintang adalah pohon yang strukturnya paling sederhana. Karena itu, pengkajian bilangan Ramsey untuk pohon pada umumnya diawali dengan penentuan bilangan Ramsey untuk lintasan atau bintang. Kajian bilangan Ramsey untuk lintasan dan graf-graf lain sudah banyak. Namun tidak demikian halnya untuk bilangan Ramsey graf yang memuat bintang. Lebih jauh, ketidakberlakuan bintang  $S_n$  pada bilangan Ramsey  $R(T_n, W_4)$  merupakan suatu fenomena tersendiri. Semua itu, menunjukkan bahwa kajian tentang penentuan bilangan Ramsey untuk bintang adalah hal yang menarik dan perlu dilakukan.

## I.2 Permasalahan dan Tujuan Penelitian

Pengkajian bilangan Ramsey untuk bintang dan bintang telah tuntas, begitu pula untuk bintang dan pohon serta siklus. Untuk bintang dan roda, pengkajian

bilangan Ramseynya untuk beberapa kasus juga telah tuntas, tetapi masih ada kasus yang belum dikaji. Bilangan Ramsey untuk bintang dan roda  $R(S_n, W_m)$ , untuk  $m$  ganjil dan  $n \geq m - 1 \geq 2$  serta  $m = 4, 6$ , atau  $8$  telah diketahui. Namun untuk pasangan  $n$  dan  $m$  yang lain masih belum diketahui.

Berbeda dengan bilangan Ramsey untuk bintang dan beberapa jenis graf di atas, bilangan Ramsey untuk bintang dan bipartit lengkap,  $R(S_n, K_{s,m})$ , pada umumnya belum diketahui. Beberapa yang diketahui, diantaranya adalah  $R(S_4, K_{s,m})$  untuk  $s, m \geq 2$  dan  $R(S_5, K_{2,m})$  untuk  $m \geq 2$ . Untuk  $n, s$ , dan  $m$  yang lain, nilai  $R(S_n, K_{s,m})$  belum diketahui. Situasi serupa juga terjadi pada  $R(\cup_{i=1}^k G_i, H)$  untuk sebarang graf  $G_i$  dan  $H$ .

Pada penelitian ini, dilakukan pengkajian bilangan Ramsey graf dua warna  $R(G, H)$  dengan  $G$  adalah graf gabungan bintang  $S_n$  dan  $H$  adalah roda  $W_m$ , graf bipartit lengkap  $K_{s,m}$  atau graf lengkap  $K_m$ . Kajian pada penelitian ini dimulai dengan menentukan bilangan Ramsey untuk bintang dan roda,  $R(S_n, W_m)$ , untuk  $m$  ganjil,  $n \leq m$  dan  $m$  genap,  $m \geq 8$ . Kemudian dilanjutkan dengan menentukan  $R(S_n, K_{2,m})$  untuk beberapa  $n$  dan  $m$ . Berdasarkan nilai  $R(S_n, W_m)$  dan  $R(S_n, K_{2,m})$  tersebut, ditentukan  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, H)$  serta dicari kaitannya dengan  $R(\cup_{i=1}^k T_{n_i}, H)$ , dimana  $H$  adalah roda, graf bipartit lengkap, atau graf lengkap. Metode yang dipergunakan pada pencarian  $R(\cup_{i=1}^k T_{n_i}, H)$  diperumum dalam mencari bilangan Ramsey untuk graf gabungan,  $(R(\cup_{i=1}^k G_i, H))$ , dengan  $G_i$  dan  $H$  graf sebarang.

### I.3 Hasil Penelitian

Hasil-hasil yang diperoleh dalam penelitian ini adalah bilangan Ramsey untuk bintang dan roda  $R(S_n, W_m)$  untuk  $m$  ganjil dan  $3 \leq m \leq 2n - 1$ , serta  $R(S_n, W_m)$  untuk  $n$  ganjil dan  $m$  genap,  $m = 2n - 2, 2n = 4, 2n - 6$ , atau  $2n - 8$ . Untuk  $m$  tersebut, jika  $m$  ganjil diperoleh  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m)$  dan jika  $m$  genap diperoleh  $R(kS_n, W_m)$ . Bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas

dari beberapa pohon belum banyak yang diketahui. Hasil yang diperoleh adalah bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas pohon dan roda berorde kecil,  $R(\cup_{i=1}^k T_{n_i}, W_m)$  untuk  $m = 4$ , atau  $5$ , serta bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas pohon dan graf lengkap,  $R(\cup_{i=1}^k T_{n_i}, K_m)$  untuk sebarang  $m$  dan  $n$ . Selain itu, juga telah diperoleh bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap  $R(S_n, K_{2,m})$ , untuk  $n = 6$  atau  $n = 8$  dan  $m = 2, 3, 4, 5, 6, 4n - 7$  atau  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$  and  $k \in N$ .

Hasil lain yang telah diperoleh dalam disertasi ini adalah bilangan Ramsey gabungan bintang dan graf bipartit lengkap  $R(kS_n, K_{2,2})$  dan bilangan Ramsey gabungan saling lepas sebarang graf  $R(\cup_{i=1}^k G_{n_i}, H)$ .

## I.4 Garis Besar Penulisan

Untuk memahami kajian penentuan bilangan Ramsey diperlukan beberapa definisi, notasi, dan istilah-istilah dari teori graf. Definisi, notasi, serta istilah-istilah tersebut merupakan konsep dasar teori graf dan dibahas terlebih dahulu, sebelum membahas penentuan bilangan Ramsey.

Secara ringkas, isi disertasi ini disusun sebagai berikut. Pada bab pertama disajikan gambaran singkat penelitian, permasalahan dan hasil-hasil yang telah diperoleh dalam penelitian. Pada Bab II disajikan konsep dasar teori graf dan tinjauan pustaka. Pada bagian pertama Bab II disajikan definisi-definisi dasar, notasi dan istilah-istilah dalam teori graf. Selain itu, pada bagian ini juga disajikan definisi bilangan Ramsey, istilah dan notasi-notasi pada Teori Ramsey. Pada bagian kedua bab ini, disajikan beberapa hasil tentang bilangan Ramsey graf dua warna, khususnya yang terkait dengan materi yang dibahas dalam disertasi ini. Hasil utama penelitian ini dibahas pada Bab III dan IV. Pada Bab III dibahas kajian penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan graf-graf tertentu,  $R(S_n, H)$  dengan  $H$  adalah roda atau graf bipartit lengkap. Bilangan Ramsey untuk gabungan bintang dan  $H$ ,  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, H)$ , dengan  $H$

adalah graf-graf yang telah disebutkan di atas dibahas pada Bab IV. Pada bagian ini, juga disajikan penentuan bilangan Ramsey untuk kombinasi dua graf sebarang,  $R(\cup_{i=1}^k G_{n_i}, H)$ .

Teorema maupun lemma sebagai hasil orisinal dari penelitian ini yang dibahas pada Bab III dan IV diberi tanda ★. Bagian parsial dari beberapa hasil orisinal tersebut telah ditulis dalam beberapa makalah dan telah disubmit ke beberapa jurnal, baik nasional maupun internasional. Sebagian dari makalah tersebut telah terbit dan yang lainnya sudah diterima untuk diterbitkan.

Bab V adalah bagian akhir disertasi ini yang berisi ringkasan atau kesimpulan hasil penelitian.

## Bab II Konsep Dasar dan Tinjauan Pustaka

Pembahasan bilangan Ramsey pada bab-bab berikutnya menggunakan definisi, notasi, dan konsep dasar teori graf yang sesuai dengan rujukan Chartrand dan Lesniak (1996), serta Diestel (1999). Definisi, notasi dan konsep dasar yang belum disajikan pada Bab I, akan diuraikan pada Subbab II.1. Pada Subbab II.2, diuraikan pengertian bilangan Ramsey serta hasil-hasil yang telah diperoleh, khususnya yang terkait dengan materi penelitian ini.

### II.1 Konsep Dasar

Pada subbab ini dibahas beberapa definisi dasar dan istilah dalam graf serta notasi-notasi yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya. Untuk kepentingan pengertian graf sederhana dan berhingga didefinisikan himpunan  $[S]^k = \{Y : Y \subset S, |Y| = k\}$ , dengan  $S$  adalah himpunan berhingga dan tidak kosong.

#### II.1.1 Graf dan subgraf

Graf  $G(V, E)$  adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan berhingga tak kosong  $V = V(G)$  dan himpunan  $E = E(G)$  dengan  $E \subseteq [V]^2$ . Himpunan  $V$  disebut *himpunan titik* dari  $G$  dan himpunan  $E$  disebut *himpunan sisi* dari  $G$ . Setiap  $u$  atau  $v$  di  $V(G)$  disebut *titik* dan setiap  $e = \{u, v\}$  di  $E(G)$  disebut *sisi*. Selanjutnya, sisi  $e = \{u, v\}$  ditulis  $uv$ . Titik  $u$  disebut *tetangga* (neighbor) dari titik  $v$  jika  $e = uv$  untuk suatu  $e \in E(G)$ . Lebih lanjut, titik  $u$  dan  $v$  dikatakan *titik-titik bertetangga* (adjacent), sedangkan sisi  $e$  dikatakan *terkait* (incident) dengan titik  $u$  dan  $v$ . Dua sisi  $e_1$  dan  $e_2$  pada  $G$  disebut *sisi-sisi bertetangga* jika  $e_1$  dan  $e_2$  terkait pada satu titik yang sama.

Graf  $F$  disebut *komplemen* dari graf  $G$ , jika  $V(F) = V(G)$  dan  $uv \in E(F)$  jika dan hanya jika  $uv \notin E(G)$ . Komplemen dari graf  $G$  dinotasikan dengan

$\overline{G}$ . Dua graf  $G$  dan  $H$  disebut *isomorfik* jika terdapat pemetaan satu-satu dan pada  $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$  sedemikian sehingga untuk setiap  $x, y \in V(G)$  berlaku  $xy \in E(G)$  jika dan hanya jika  $\phi(x)\phi(y) \in E(H)$ .

*Kardinalitas* himpunan  $S$  dinotasikan dengan  $|S|$ , adalah banyaknya anggota dari  $S$ . *Orde* graf  $G$  adalah  $|V(G)|$ , *ukuran* graf  $G$  adalah  $|E(G)|$ . Graf  $G$  berorde  $m$  dinotasikan dengan  $G_m$ . Misalkan  $n$  dan  $m$  adalah dua bilangan bulat,  $m \equiv 0 \pmod{n}$  menyatakan  $n$  *membagi habis*  $m$ .

Misalkan  $v_i$  adalah sebarang titik pada  $G$  dan  $S \subseteq V(G)$ . Didefinisikan  $N_S(v_i) = \{w \in S : wv_i \in E(G)\}$  dan  $N_S[v_i] = N_S(v_i) \cup \{v_i\}$ . Didefinisikan pula

$$Z_S(v_1, v_2, \dots, v_n) = N_S(v_1) \cap N_S(v_2) \cap \dots \cap N_S(v_n)$$

dan

$$O_S(v_1, v_2, \dots, v_n) = N_S(v_1) \cup N_S(v_2) \cup \dots \cup N_S(v_n).$$

Jika  $S = V(G)$ , maka digunakan  $N(v_i)$  dan  $N[v_i]$  yang menyatakan berturut-turut  $N_{V(G)}(v_i)$  dan  $N_{V(G)}[v_i]$ . *Derajat* titik  $v_i$ , dinotasikan dengan  $d_G(v_i)$ , adalah  $|N(v_i)|$ . Derajat maksimum dari  $G$  adalah  $\Delta(G) = \max\{d_G(v_i) : v_i \in V(G)\}$ , dan derajat minimum dari  $G$  adalah  $\delta(G) = \min\{d_G(v_i) : v_i \in V(G)\}$ . Graf  $G$  disebut graf *r-regular* jika  $\Delta(G) = \delta(G) = r$ .

**Teorema II.1** Misalkan  $G$  adalah sebarang graf berorde  $n$  dan berukuran  $q$ . Jika  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , maka

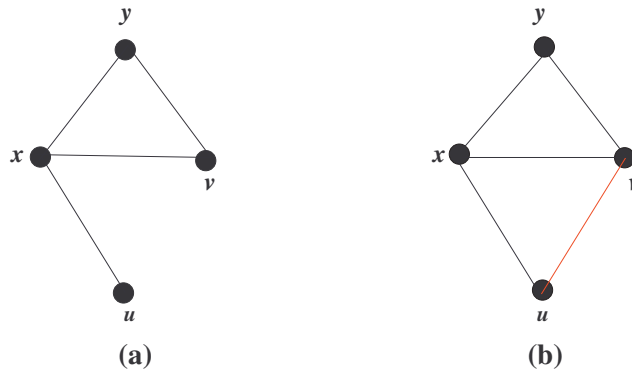
$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2q.$$

**Akibat II.1** Lemma Handshaking. *Banyaknya titik yang berderajat ganjil pada suatu graf adalah genap.*

Bukti Teorema II.1 dan Akibat II.1 dapat dilihat pada rujukan Chartrand dan Lesniak (1996).

Misalkan  $e_1$  dan  $e_2$  adalah dua sisi pada graf  $G_n$ . Sisi  $e_1$  dan  $e_2$  dikatakan *saling bebas* jika  $e_1$  dan  $e_2$  tidak bertetangga. Secara serupa, dua titik pada  $G_n$  dikatakan *saling bebas* jika kedua titik tersebut tidak bertetangga. Graf  $G_n$  dikatakan *graf lengkap*, dinotasikan dengan  $K_n$  jika setiap dua titik pada  $G_n$  bertetangga.

Misalkan  $u$  dan  $v$  adalah dua titik pada graf  $G$  yang tidak bertetangga. Graf  $G + \{uv\}$  adalah suatu graf baru dengan himpunan titik  $V(G + uv) = V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G + uv) = E(G) \cup \{uv\}$ . Contoh graf baru tersebut dapat dilihat pada Gambar II.1.(b).



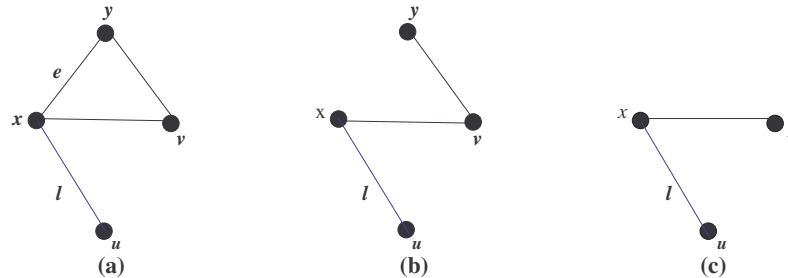
Gambar II.1. (a) Graf  $G$  dan (b) Graf  $G + uv$ .

Graf  $H(V', E')$  disebut *subgraf* dari  $G$  jika  $V' \subseteq V(G)$  dan  $E' \subseteq E(G)$ . Selanjutnya, subgraf  $H$  dari  $G$  ditulis  $H \subseteq G$ . Subgraf  $H$  dikatakan subgraf *maksimal* dari  $G$  jika  $H$  memuat semua sisi  $xy \in E(G)$  untuk semua  $x, y \in V'$ . Untuk sebarang himpunan  $S \subseteq V(G)$ , subgraf *terinduksi* oleh  $S$  dari  $G$  adalah subgraf maksimal dari  $G$  dengan himpunan titik  $S$  dan dinotasikan dengan  $G[S]$ . Subgraf  $G[V(G) \setminus V(H)]$  dinotasikan dengan  $G \setminus H$ .

Misalkan  $G(V, E)$  adalah sebarang graf. Misalkan pula  $A \subseteq V$  dan  $B \subseteq E$ . Didefinisikan  $V \setminus A = \{u \in V : u \notin A\}$  dan  $E \setminus B = \{e \in E : e \notin B\}$ . Graf  $G - A$  adalah suatu subgraf dari  $G$  dengan  $V(G - A) = V \setminus A$  dan  $E(G - A) =$



$E \setminus \{xy : x \in A \text{ atau } y \in A\}$ . Graf  $G - B$  adalah suatu subgraf dari  $G$  dengan  $V(G - B) = V$  dan  $E(G - B) = E \setminus B$ . Khususnya untuk  $A = \{x\}$  dan  $B = \{e = xy\}$ , subgraf  $G - B$  ditulis  $G - e$  dan subgraf  $G - A$  ditulis  $G - x$ . Contoh subgraf-subgraf tersebut dapat dilihat pada Gambar II. 2.



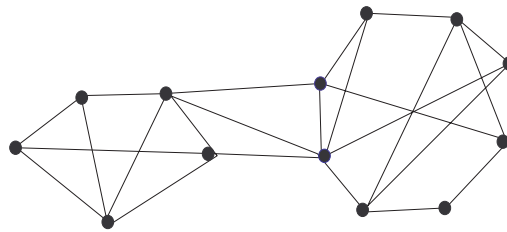
Gambar II.2. (a) Graf  $G$ , (b) Subgraf  $G - e$ , dan (c) subgraf  $G - y$ .

## II.1.2 Himpunan bebas dan keterhubungan

Misalkan  $G(V, E)$  adalah suatu graf berorde  $n$  dan  $X \subseteq V$ . Himpunan  $X$  disebut *himpunan bebas* jika untuk setiap dua titik  $x, y \in X$  berlaku  $xy \notin E(G)$ . Misalkan  $Y$  adalah himpunan bebas dari  $G$ . Jika untuk setiap himpunan bebas  $X$  dari  $G$  berlaku  $|X| \leq |Y|$ , maka  $Y$  disebut himpunan bebas terbesar dari  $G$ . Kardinalitas himpunan bebas terbesar dari  $G$  dinotasikan dengan  $\alpha(G)$ . Sebagai contoh  $\alpha(S_n) = n - 1$ .

Misalkan  $H \subseteq G$ . Subgraf  $H$  disebut suatu *komponen* dari  $G$  jika  $H$  merupakan subgraf terhubung maksimal. Selanjutnya, misalkan  $H$  adalah graf terhubung dan  $A \subseteq V(H)$ , serta  $B \subset E(H)$ . Himpunan  $A$  disebut *himpunan titik pemisah* dalam  $H$ , jika  $H - A$  bukan graf terhubung. Secara serupa, himpunan  $B$  disebut *himpunan sisi pemisah* dalam  $H$ , jika  $H - B$  juga bukan graf terhubung. Misalkan  $A$  dan  $B$  berturut-turut merupakan himpunan titik pemisah dan himpunan sisi pemisah. Jika  $A = \{v\}$  dan  $B = \{e\}$ , maka  $v$  disebut *titik potong* (cut vertex) dan  $e$  disebut *jembatan* (bridge). Sebagai contoh, pada Gambar II.2 titik  $x$  adalah titik potong dan sisi  $l$  adalah jembatan.

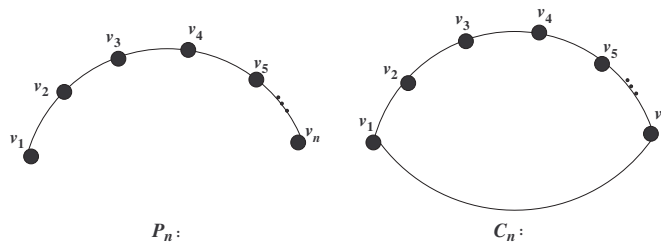
Misalkan  $G(V, E)$  adalah graf sebarang dan  $k$  bilangan bulat tak negatif. Graf  $G$  disebut *terhubung- $k$*  ( $k$ -connected) jika  $|G| > k$  dan  $G - X$  terhubung untuk setiap  $X \subseteq V$  dengan  $|X| < k$ . *Keterhubungan* (connectivity)  $\kappa(G)$  adalah bilangan bulat terbesar  $k$  sehingga  $G$  merupakan graf terhubung- $k$ . Jelas,  $\kappa(G) = 0$  jika hanya jika  $G$  tak terhubung, dan  $\kappa(K_n) = n - 1$ . Graf  $G$  pada Gambar II.3 berikut mempunyai  $\kappa(G) = 2$ .



$G$ :

Gambar II.3.

Jika  $P_n$  dan  $C_n$  untuk  $n \geq 3$  berturut-turut adalah lintasan dan siklus dengan orde  $n$ , maka *panjang*  $P_n$  adalah  $n - 1$ , yaitu banyaknya sisi pada  $P_n$  dan panjang siklus  $C_n$  adalah  $n$ , (lihat Gambar II.4).

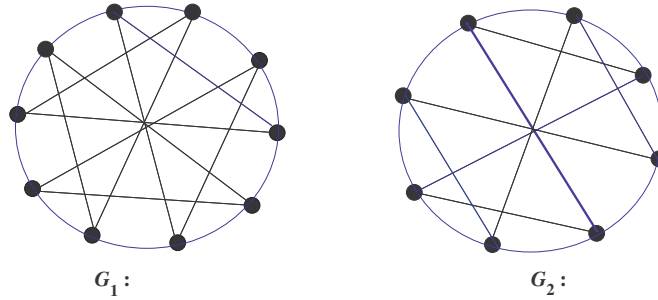


Gambar II.4. (a) Lintasan  $P_n$  dan (b) Siklus  $C_n$ .

Panjang siklus terbesar pada suatu graf  $G$  dinotasikan dengan  $c(G)$ , sedangkan panjang siklus terkecil dinotasikan dengan  $g(G)$ .

**Lema II.1** (Dirac, 1952). *Misalkan  $G$  adalah graf berorde  $n \geq 3$  dan  $\delta(G) = \delta$ . Jika  $G$  adalah graf terhubung-2, maka  $c(G) \geq \min\{2\delta, n\}$ .*

Graf  $G$  dengan orde  $n$  disebut *pansiklis* (pancyclic) jika  $G$  memuat semua siklus  $C_l$  dengan  $3 \leq l \leq n$ , dan disebut *pansiklis lemah* (weakly pancyclic) jika  $G$  memuat siklus  $C_h$  untuk  $g(G) \leq h \leq c(G)$ . Graf  $G_1$  pada Gambar II.5 adalah pansiklis lemah dengan  $g(G) = 4$  dan  $G_2$  adalah pansiklis karena memuat semua siklus  $C_l$  untuk  $3 \leq l \leq 8$ .

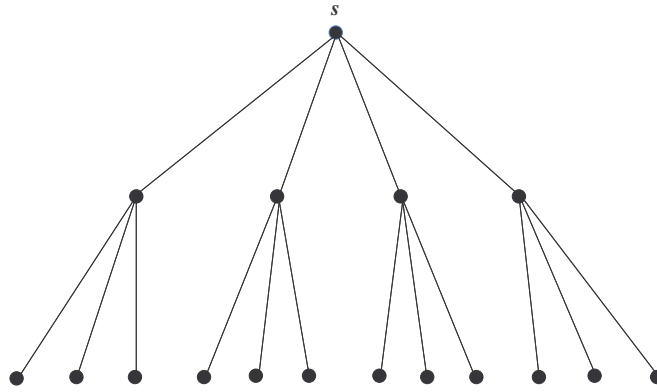


Gambar II.5. Graf pansiklis lemah  $G_1$  dan graf pansiklis  $G_2$ .

### II.1.3 Beberapa jenis graf

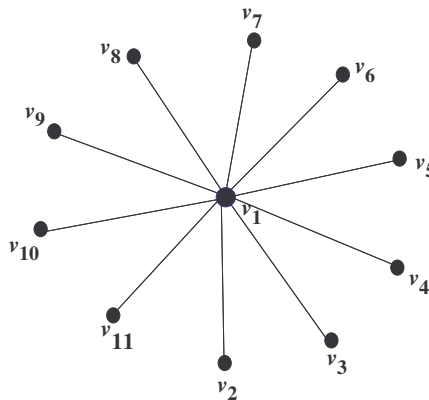
Pada subbab ini akan dibahas beberapa definisi, diantaranya definisi pohon bercabang, bintang, rim roda, kipas, kincir, dan graf multipartit.

Misalkan  $T_n$  adalah graf pohon berorde  $n$ . Titik-titik berderajat satu pada  $T_n$  disebut *daun* dan titik-titik yang berderajat lebih dari satu disebut *ruas*. *Pohon berakar* adalah pohon yang mempunyai satu titik tertentu sebagai akar. Pohon berakar berorde  $n$  dengan akar  $s$ , dinotasikan dengan  $T_n(s)$ . Pohon berakar  $T_n(s)$  disebut *pohon bercabang- $k$*  ( $k$ -ary tree) jika  $\Delta(T_n(s)) = k + 1$ . Pohon berakar  $T_n(s)$  disebut *pohon sempurna bercabang- $k$*  (perfect  $k$ -ary tree) jika  $d_T(s) = k + 1$  atau  $d_T(s) = k$  dan setiap ruasnya kecuali mungkin akar  $s$  berderajat  $k + 1$ , serta semua daunnya berjarak sama dari akar  $s$ . Pohon  $T_{17}(s)$  pada Gambar II.6 adalah pohon sempurna bercabang-3 dan mempunyai titik sebanyak 17.



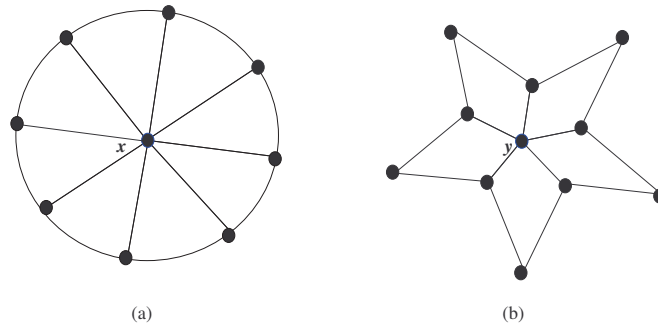
Gambar II.6. Pohon sempurna bercabang 3,  $T_{17}(s)$ .

Walaupun definisi bintang telah disajikan pada Bab I, berikut ini disajikan kembali definisi bintang dengan cara yang lain. *Bintang*  $S_n$  adalah suatu pohon dengan  $V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E(S_n) = \{v_1v_{i+1} : i = 1, 2, \dots, n - 1\}$ . Titik  $v_1$  disebut *pusat* dari  $S_n$ . Graf pada Gambar II.7 adalah bintang  $S_{11}$  dengan pusat  $v_1$ .



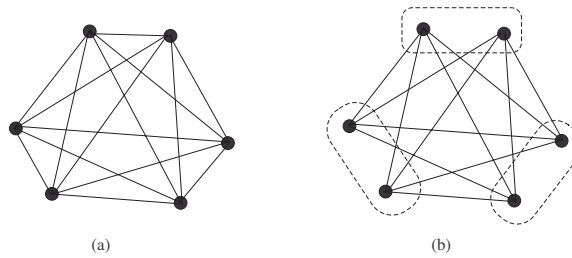
Gambar II.7. Bintang  $S_{11}$ .

Misalkan  $W_k$  adalah roda dengan poros  $x$ , lihat Gambar II.8 (a). Siklus  $C_k$  pada  $W_k$ , yaitu siklus dengan semua titik terkait dengan titik  $x$  disebut *rim* roda. Graf  $J_m$  (graf Jahangir) adalah graf berorde  $m + 1$  yang dibentuk dari siklus  $C_m$  untuk  $m$  genap dengan menambahkan satu titik, sebut  $y$ , kemudian menghubungkan titik  $y$  tersebut ke  $\frac{m}{2}$  titik di  $C_m$  secara bergantian. Pada Gambar II.8 (b) adalah graf Jahangir  $J_{10}$ .



Gambar II.8. (a)  $W_8$  dan (b)  $J_{10}$ .

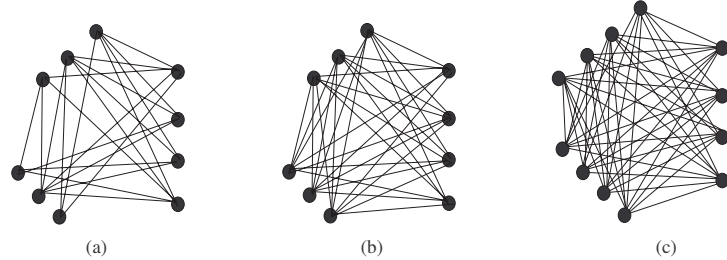
Graf  $H_s$  (graf pesta) adalah suatu graf yang diperoleh dari graf lengkap  $K_{2s}$  dengan cara menghapus sebanyak  $s$  sisi yang saling bebas. Bagian (a) pada Gambar II.9 adalah graf lengkap  $K_6$  dan bagian (b) adalah graf pesta  $H_3$ .



Gambar II.9. (a)  $K_6$  dan (b)  $H_3$ .

Misalkan  $V_1, V_2, \dots, V_k$  adalah beberapa himpunan bagian dari himpunan titik  $V(G)$  pada suatu graf  $G$ . Untuk setiap  $i$ , himpunan  $V_i$  disebut *partisi* dari  $V(G)$  jika  $V_i \neq \emptyset$ , dan  $V(G) = \cup_{i=1}^k V_i$  serta  $V_i \cap V_j = \emptyset$  dengan  $i \neq j$ . Graf  $G$  disebut graf *k-partit* jika  $V(G)$  dapat dipartisi ke dalam  $k$  partisi himpunan bebas  $V_1, V_2, \dots, V_k$ . Graf *k-partit* untuk  $k \geq 2$  dengan  $|V_i| = n_i$  disebut graf *multipartit*, dinotasikan dengan  $B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Khusus untuk  $k = 2$ , graf  $B_{n_1, \dots, n_k}$  disebut graf *bipartit*. Graf multipartit  $B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  disebut graf *multipartit lengkap* jika setiap titik di setiap partisi bertetangga dengan semua titik di partisi-partisi lainnya. Graf multipartit lengkap dinotasikan dengan  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Menurut pengertian ini, bintang  $S_n$  merupakan graf bipartit lengkap dengan notasi  $K_{1, n-1}$ . Graf  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  disebut graf *multipartit lengkap seimbang* dino-

tasikan dengan  $K_{k \times t}$ , jika  $|V_i| = t$  untuk setiap  $i$ . Pada Gambar II.10: gambar (a) adalah graf multipartit  $B_{3,3,4}$ , gambar (b) adalah graf multipartit lengkap  $K_{3,3,4}$ , dan gambar (c) adalah graf multipartit lengkap seimbang  $K_{3 \times 4}$ .



Gambar II.10. Beberapa graf multipartit.

**Lema II.2** (Bondy, 1971). *Misalkan  $G$  adalah graf berorde  $n$ . Jika  $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ , maka  $G$  adalah pansiklis atau  $G = K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$  untuk  $n$  genap.*

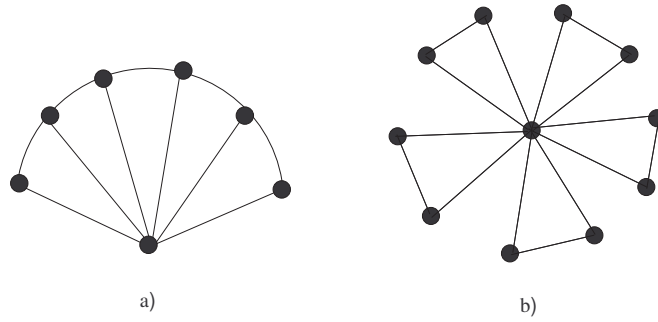
**Lema II.3** (Brandt dan Faudree, 1998). *Misalkan  $G$  adalah graf yang bukan bipartit. Jika  $G$  mempunyai  $\delta(G) \geq \frac{n+2}{3}$ , maka  $G$  adalah pansiklis lemah dengan panjang lingkaran terkecil 3 atau 4.*

Bukti Lemma II.2 dan Lemma II.3 berturut-turut dapat dilihat pada rujukan Bondy (1971) serta rujukan Brandt dan Faudree (1998).

**Teorema II.2**  *$G$  adalah graf bipartit jika dan hanya jika setiap siklus pada  $G$  mempunyai panjang genap.*

Bukti dapat dilihat pada buku rujukan Chartrand dan Lesniak (1996).

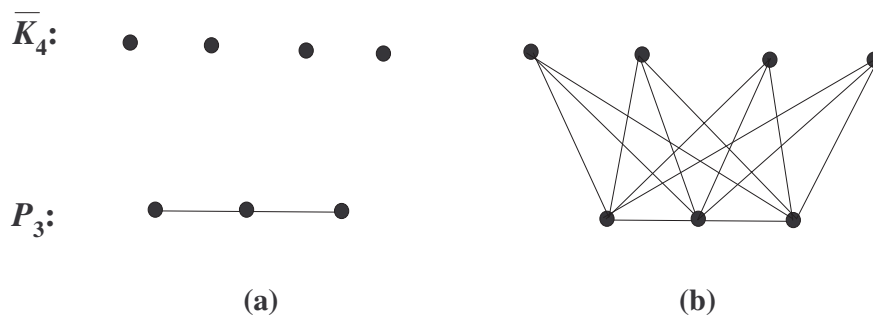
*Kipas*  $\varphi_n$  adalah graf berorde  $n+1$  yang dibentuk dari  $P_n$  dengan menambahkan satu titik  $x$  lalu menambahkan  $n$  sisi dari  $x$  ke semua titik di  $P_n$ . Sedangkan *kincir*  $M_n$  adalah graf berorde  $2n+1$  yang diperoleh dari  $nP_2$  dengan menambahkan satu titik  $x$  dan menambahkan  $2n$  sisi dari titik  $x$  ke semua titik di  $nP_2$ . Sebagai contoh lihat Gambar II.11.



Gambar II.11. (a) kipas  $\wp_6$  dan (b) kincir  $M_5$ .

### II.1.4 Jumlah dan gabungan graf-graf

Misalkan  $G_i$  adalah graf yang saling lepas dengan himpunan titik  $V_i$  dan himpunan sisi  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Graf gabungan  $G = \bigcup_{i=1}^k G_i$  adalah suatu graf dengan himpunan titik  $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$  dan himpunan sisi  $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$ . Definisi graf jumlah secara umum belum ada. Namun untuk jumlah dua graf, Zykov telah mendefinisikannya pada tahun 1952 seperti berikut: *Jumlah* (join)  $G = G_1 + G_2$  adalah suatu graf dengan  $V(G) = V_1 \cup V_2$  dan  $E(G) = X_1 \cup X_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$ . Contoh jumlah graf  $P_3 + \overline{K}_4$  dapat dilihat pada Gambar II.12.(b). dengan demikian, bintang  $S_n$  dapat didefinisikan sebagai  $K_1 + \overline{K}_{n-1}$ , roda  $W_m$  dapat didefinisikan sebagai  $K_1 + C_m$ , kipas  $\wp_n$  dapat didefinisikan sebagai  $K_1 + P_n$ , dan kincir  $M_n$  dapat didefinisikan sebagai  $K_1 + nP_2$ .



Gambar II.12. (a) graf  $P_3 \cup \overline{K}_4$  dan (b) graf  $P_3 + \overline{K}_4$ .

## II.1.5 Pewarnaan dan dekomposisi

*Pewarnaan titik* pada graf  $G$  adalah pemberian warna pada himpunan titik  $V(G)$  dengan aturan setiap titik diberi hanya satu warna dan dua titik yang bertetangga diberi warna berbeda. Graf  $G$  dikatakan *berwarna  $k$*  jika  $G$  dapat diwarnai dengan  $k$  warna. Bilangan asli terkecil  $k$  sedemikian sehingga  $G$  berwarna  $k$  disebut *bilangan kromatik* dari  $G$ , dinotasikan dengan  $\chi(G)$ .

Sebagai contoh:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3 & \text{untuk } n \text{ ganjil.} \end{cases}$$

dan

$$\chi(W_m) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 4 & \text{untuk } m \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Misalkan  $G$  adalah graf dan  $H_i \subseteq G$  untuk setiap  $i$ . *Dekomposisi* graf  $G$  adalah himpunan  $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  sedemikian sehingga  $E(G) = \cup_{i=1}^k E(H_i)$ ,  $V(H_i) = V(H_j)$  dan  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$  untuk setiap  $i \neq j$  dan  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , dengan  $E(H_i) \neq \emptyset$ . Dekomposisi dari graf  $G$  dinyatakan dengan  $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ . Sebagai contoh:  $K_4 = S_4 \oplus (C_3 \cup K_1)$  dan  $K_m = F_m \oplus \bar{F}_m$ .

Dalam tinjauan pustaka pada Subbab II.2 berikut dibahas konsep bilangan Ramsey klasik dan konsep bilangan Ramsey graf serta beberapa hasil yang telah diperoleh.

## II.2 Tinjauan Pustaka

Pada Bab I telah disebutkan bahwa konsep awal bilangan Ramsey adalah konsep bilangan Ramsey klasik. Karena itu, penyajian pada subbab ini dimulai dengan pengertian bilangan Ramsey klasik kemudian dilanjutkan dengan pengertian bilangan Ramsey graf.



## II.2.1 Bilangan Ramsey klasik

Pada tahun 1935, Erdős dan Szekeres mengkaji teori Ramsey dan kemudian mengaplikasikannya ke dalam teori graf. Kajian mereka itu menghasilkan teorema Ramsey klasik. Untuk kasus dua warna teori tersebut dinyatakan sebagai berikut.

**Teorema II.3** *Untuk setiap bilangan bulat  $n_1$  dan  $n_2$ , terdapat bilangan bulat terkecil  $M_0$  sedemikian sehingga jika  $m \geq M_0$ , maka setiap pewarnaan dua warna pada sisi-sisi graf lengkap  $K_m$  akan memuat subgraf yang semua sisinya berwarna sama dan isomorfik dengan  $K_{n_1}$  atau  $K_{n_2}$ .*

Bilangan  $M_0$  disebut *bilangan Ramsey klasik dua warna* yang selanjutnya disebut *bilangan Ramsey klasik*, dan dinotasikan dengan  $R(n_1, n_2)$  atau  $R(K_{n_1}, K_{n_2})$ . Pengertian  $R(n_1, n_2)$  dapat dinyatakan sebagai berikut.

**Definisi II.1** *Diberikan dua bilangan asli  $n_1$  dan  $n_2$ , **bilangan Ramsey klasik**  $R(n_1, n_2)$  adalah bilangan bulat terkecil  $m$  sedemikian sehingga setiap pewarnaan dua warna pada semua sisi  $K_m$ , katakanlah merah dan biru, akan memuat subgraf berwarna merah yang isomorfik dengan  $K_{n_1}$  atau subgraf berwarna biru yang isomorfik dengan  $K_{n_2}$ .*

Pewarnaan dua warna, merah dan biru, pada semua sisi graf lengkap  $K_m$  menghasilkan dua subgraf pada  $K_m$ , yaitu subgraf berwarna merah dan subgraf berwarna biru. Salah satu dari subgraf tersebut, katakanlah subgraf berwarna merah, merupakan subgraf pembangun  $K_m$  dan subgraf berwarna biru adalah komplement dari subgraf pembangun tersebut. Akibatnya, pengertian bilangan Ramsey klasik pada Definisi II.1 dapat dituliskan sebagai berikut.

**Definisi II.2** *Untuk sembarang dua bilangan asli  $n_1$  dan  $n_2$ , bilangan Ramsey  $R(n_1, n_2)$  adalah bilangan bulat terkecil  $m$  sedemikian sehingga untuk setiap graf  $F$  berorde  $m$  memenuhi sifat berikut:  $F$  memuat graf  $K_{n_1}$  atau  $\bar{F}$  memuat  $K_{n_2}$ .*

Karena setiap graf  $F$  memenuhi  $\overline{\overline{F}} = F$ ,  $R(n_1, n_2)$  pada Definisi II.2 bersifat simetri yaitu  $R(n_1, n_2) = R(n_2, n_1)$ . Erdős dan Szekeres (1935) membuktikan eksistensi bilangan Ramsey klasik  $R(n_1, n_2)$  dengan menunjukkan batas atas dan batas bawahnya. Batas atas dan batas bawah tersebut, berturut-turut, disajikan dalam dua teorema berikut.

**Teorema II.4** (Batas atas). *Untuk setiap bilangan asli  $n_1$  dan  $n_2$ ,  $R(n_1, n_2)$  senantiasa ada, dan memenuhi  $R(n_1, n_2) \leq \binom{n_1 + n_2 - 2}{n_1 - 1}$ .*

**Teorema II.5** (Batas bawah).  *$R(n_1, n_2) \geq 1 + (n_1 - 1)(n_2 - 1)$  untuk  $n_1 \geq 2$  dan  $n_2 \geq 2$ .*

Bukti Teorema II.4 dan Teorema II.5 dapat dilihat pada rujukan Erdős dan Szekeres (1935).

Walaupun kajian tentang penentuan bilangan Ramsey klasik  $R(n_1, n_2)$  telah berlangsung sejak tahun 1935, dan juga telah memperoleh banyak perhatian dari para peneliti teori graf, namun hasil yang diperoleh masih sangat sedikit. Sampai saat ini, hanya sembilan yang diketahui. Selain kesembilan bilangan tersebut, untuk bilangan lainnya yang diketahui barulah batas atas dan batas bawahnya. Pada tahun 2003, Lingsheng Shi memberikan batas atas yang lebih baik untuk  $R(9, 9)$  dan  $R(10, 10)$ . Dia menunjukkan bahwa  $R(9, 9) \leq 6588$  dan  $R(10, 10) \leq 23556$ . Batas atas sebelumnya dapat dilihat pada Tabel II.1.

Uraian di atas memberikan gambaran bahwa penentuan bilangan Ramsey klasik merupakan kajian yang sulit. Karena itu, pada perkembangan selanjutnya kajian ini diperumum, yakni grafnya tidak terbatas pada graf lengkap saja, tetapi berlaku untuk sembarang graf. Bilangan Ramsey untuk pasangan sembarang graf selanjutnya disebut *bilangan Ramsey graf*.

Tabel II.1. Batas atas dan batas bawah serta nilai eksak bilangan Ramsey klasik

$n_1$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$n_2$											
3	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>23</b>	<b>28</b>	<b>36</b>	40 43	46 51	52 59	59 69
4		<b>18</b>	<b>25</b>	35 41	49 61	56 84	69 115	92 149	97 191	128 238	133 291
5			43 49	58 87	80 143	101 216	121 316	141 442	157	181	205
6				102 165	111 298	127 495	169 780	178 1171	253	262	317
7					205 540	216 1031	232 1713	2826	405	416	511
8						282 1870	317 3583	6090			817
9							565 6625	580 12677			
10								798 23854			

## II.2.2 Bilangan Ramsey graf

Dorongan utama untuk memperluas konsep bilangan Ramsey klasik menjadi konsep bilangan Ramsey graf (kombinasi dua graf sebarang) adalah adanya harapan bahwa pada akhir kajian penentuan bilangan Ramsey graf akan diperoleh suatu metode dalam menentukan bilangan Ramsey klasik  $R(n_1, n_2)$  untuk  $n_1$  dan  $n_2$  yang lebih besar. Namun, sampai saat ini harapan tersebut belum menjadi kenyataan. Sejauh ini, graf sebagai objek dalam kajian ini masih tetap graf sebarang, belum graf lengkap. Karena penyajian pengertian bilangan Ramsey klasik dua warna dapat menggunakan istilah komplemen dari suatu graf (lihat Definisi II.2), pada penyajian pengertian atau konsep bilangan Ramsey graf dua warna juga dapat menggunakan istilah komplemen dari suatu graf. Definisi bilangan Ramsey graf dua warna adalah sebagai berikut.

**Definisi II.3** *Diberikan sebarang dua graf  $G$  dan  $H$ , bilangan Ramsey graf dua warna  $R(G, H)$  adalah bilangan asli terkecil  $n$  sedemikian sehingga untuk setiap graf  $F$  dengan  $n$  titik memenuhi sifat berikut:  $F$  memuat graf  $G$  atau  $\bar{F}$  memuat  $H$ .*

Pada dasarnya, konsep bilangan Ramsey graf dua warna dapat diperluas menjadi konsep bilangan Ramsey graf multiwarna. Pengertian bilangan Ramsey multiwarna dinyatakan sebagai berikut.

**Definisi II.4** Diberikan graf  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , bilangan Ramsey graf multiwarna  $R(G_1, G_2, \dots, G_k)$  adalah bilangan asli terkecil  $m$  sedemikian sehingga untuk setiap pewarnaan  $k$  warna pada semua sisi  $K_m$  akan memuat subgraf  $G_i$  untuk suatu  $i$  yang semua sisinya berwarna sama.

Pada penulisan selanjutnya, bilangan Ramsey graf dua warna hanya ditulis *bilangan Ramsey*. Banyak peneliti mengkaji bilangan Ramsey, diantaranya adalah Chvátal dan Harary (1972). Salah satu hasil fundamental dari mereka adalah batas bawah bilangan Ramsey  $R(G, H)$ . Sebelum menyajikan teorema batas bawah dari Chvátal dan Harary, terlebih dahulu disajikan definisi tentang graf kritis (*good-graph*.)

**Definisi II.5** Diberikan graf  $G$  dan  $H$ . Suatu graf  $F$  disebut **graf kritis** untuk  $G$  dan  $H$  jika  $F$  tidak memuat  $G$  dan  $\overline{F}$  tidak memuat  $H$ . Sebarang graf kritis untuk  $G$  dan  $H$  yang mempunyai  $n$  titik dinotasikan dengan  $(G, H, n) - \text{kritis}$ .

**Teorema II.6** Misalkan  $\chi(H)$  adalah bilangan kromatik graf  $H$  dan  $C(G)$  adalah banyaknya titik pada komponen terbesar graf  $G$ . Maka  $R(G, H) \geq (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$ .

**Bukti.** Pandang graf  $F := (\chi(H) - 1)K_{C(G)-1}$ . Graf  $F$  terdiri atas  $\chi(H) - 1$  graf lengkap dengan kardinalitas masing-masing  $C(G) - 1$ . Dengan demikian,  $F$  tidak memuat graf terhubung yang berorde paling sedikit  $C(G)$ . Akibatnya,  $F$  tidak memuat  $G$ . Komplemen dari  $F$  yaitu  $\overline{F}$  adalah graf multipartit  $K_{(\chi(H)-1) \times (C(G)-1)}$ . Jelas  $K_{(\chi(H)-1) \times (C(G)-1)}$  terdiri dari  $\chi(H) - 1$  partisi, sehingga tidak memuat graf dengan bilangan kromatik  $\chi(H)$ . Jadi,  $\overline{F}$  tidak memuat  $H$ . Karenanya, diperoleh  $R(G, H) \geq |F| + 1 = (\chi(H) - 1)(C(G) - 1) + 1$ . ■

Batas bawah yang diberikan oleh Chvátal dan Harary di atas, ditulis *batas bawah Chvátal-Harary*. Dengan adanya batas bawah Chvátal-Harary, batas bawah bilangan Ramsey  $R(G, H)$  secara umum telah diketahui. Dengan demikian, bilangan Ramsey  $R(G, H)$  adalah terbatas.  $R(G, H)$  terbatas di atas oleh bilangan Ramsey klasik dan terbatas di bawah oleh batas bawah Chvátal-Harary. Namun tidak demikian halnya untuk bilangan Ramsey graf multiwarna, meskipun batas atasnya telah diketahui, yakni

$$R(G_1, \dots, G_k) \leq R(n_1, \dots, n_k) \quad (\text{II.1})$$

dengan  $|G_i| = n_i$  untuk  $i = 1, \dots, k$ .

Berikut ini adalah beberapa batas bawah bilangan Ramsey yang diperoleh berdasarkan batas bawah Chvátal-Harary. Batas bawah bilangan Ramsey untuk pohon dengan roda adalah

$$R(T_n, W_m) \geq \begin{cases} 3n - 2 & \text{untuk } m \text{ ganjil,} \\ 2n - 1 & \text{untuk } m \text{ genap.} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Batas bawah bilangan Ramsey untuk pohon dengan graf lengkap adalah

$$R(T_n, K_m) \geq (m - 1)(n - 1) + 1. \quad (\text{II.3})$$

Batas bawah bilangan Ramsey untuk pohon dengan bipartit lengkap dan kipas berturut-turut adalah

$$R(T_n, K_{t,m}) \geq \text{maks}\{n, t + m\}, \quad (\text{II.4})$$

dan

$$R(T_n, F_m) \geq 2n - 1. \quad (\text{II.5})$$

Semua batas atas yang telah disebutkan di atas diperoleh melalui batas bawah Chvátal-Harary. Terdapat batas bawah lain untuk bintang dengan graf ter-

hubung lainnya, yakni yang diberikan oleh Cockayne (1974). Hasilnya adalah

$$R(S_{n+1}, H_m) > n + m - 3 \text{ jika } n \equiv 0, 2 \pmod{m-1}, \quad (\text{II.6})$$

dengan  $H_m$  adalah graf terhubung berorde  $m$ . Jika  $\chi(H_m) \geq 3$ , maka batas bawah Chvátal-Harary jauh lebih baik.

Terdapat beberapa kombinasi graf yang memiliki bilangan Ramsey sama persis dengan batas bawah Chvátal-Harary. Namun, tidak semua kombinasi graf berlaku demikian. Hal ini membuat kajian penentuan bilangan Ramsey  $R(G, H)$  menarik, karena tergantung pada struktur graf  $G$  dan  $H$  yang diberikan. Sebagai contoh, bilangan Ramsey untuk lintasan dan roda yang diberikan Parsons (1973) memenuhi batas bawah Chvátal-Harary, yakni

$$R(P_n, W_3) = 3n - 2 \text{ untuk } n \geq 3, \quad (\text{II.7})$$

(lihat Persamaan II.2). Sedangkan bilangan Ramsey untuk bintang dengan roda  $R(S_n, W_4) = 2n + 1$  untuk  $n$  genap, lebih besar dari batas bawah Chvátal-Harary, yakni  $2n - 1$ .

Sejak Chvátal dan Harary memberikan batas bawah untuk  $R(G, H)$  penentuan bilangan Ramsey  $R(G, H)$  berkembang pesat. Berdasarkan hasil survey Radziszowski (2004), hingga saat ini hasil kajian penentuan bilangan Ramsey sudah banyak dan disajikan dalam lebih dari 403 makalah. Beberapa diantara hasil-hasil itu, disajikan dalam pembahasan berikut.

### II.2.3 Survey perkembangan bilangan Ramsey graf

Gerencsér dan Gyárfás (1967) adalah peneliti pertama yang mengkaji bilangan Ramsey untuk graf sebarang. Mereka mencari bilangan Ramsey untuk lintasan  $P_n$  dan  $P_m$ . Hasilnya adalah

$$R(P_n, P_m) = n + \lfloor m/2 \rfloor - 1 \text{ untuk } n \geq m \geq 2. \quad (\text{II.8})$$

Saat itu, belum banyak peneliti yang berminat untuk mengkaji masalah bilangan Ramsey ini. Namun beberapa tahun kemudian, yakni sejak tahun 1972, ketika Chvátal dan Harary memberikan batas bawah secara umum, barulah kajian ini mendapat banyak perhatian. Faudree dkk. (1974) mengkaji bilangan Ramsey untuk lintasan  $P_n$  dan lingkaran  $C_m$ , dengan hasil

$$R(P_n, C_m) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{untuk } m \text{ ganjil dan } n \geq m - 1 \geq 2, \\ n + (m/2) - 1 & \text{untuk } m \text{ genap dan } n \geq m - 1 \geq 3. \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Serupa dengan masalah penentuan  $R(P_n, P_m)$ , penentuan  $R(P_n, C_m)$  untuk  $n \leq m$  merupakan masalah yang masih terbuka untuk dikaji.

Pada tahun 2001, Surahmat dan Baskoro mengkaji bilangan Ramsey untuk lintasan dan roda. Hasil yang diperoleh adalah

$$R(P_n, W_m) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{untuk } m \geq 4 \text{ genap dan } n \geq \frac{m}{2}(m - 2), \\ 3n - 2 & \text{untuk } m \geq 5 \text{ ganjil dan } n \geq \frac{m-1}{2}(m - 3). \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Chen dkk.(2005) memperumum hasil tersebut dengan menunjukkan bahwa bilangan Ramseynya masih sama bila  $n \geq m - 1 \geq 2$ . Melengkapi hasil di atas, M. Salman (2007) menghasilkan

$$R(P_n, W_m) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } n = 1 \text{ dan } m \geq 3, \\ m + 1 & \text{untuk } n = 2 \text{ dan } m \geq 3, \\ & \text{atau } n = 3 \text{ dan } m \text{ genap, } m \geq 4, \\ m + 2 & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } m \text{ ganjil, } m \geq 5, \\ 3n - 2 & \text{untuk } n = 3 \text{ dan } m = 3 \\ & \text{atau } n \geq 4 \text{ dan } m \text{ ganjil, } 3 \leq m \leq 2n - 1, \\ 2n - 1 & \text{untuk } n \geq 4 \text{ dan } m \text{ genap, } 4 \leq m \leq n + 1. \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Roda dengan 4 titik ( $W_3$ ) isomorfik dengan graf lengkap  $K_4$ . Karena itu, bilangan Ramsey untuk  $P_n$  dan  $W_3$  pada Persamaan II.7 sama dengan bilangan Ramsey untuk lintasan  $P_n$  dan graf lengkap  $K_4$ . Chvátal (1977) memperluas penentuan bilangan Ramsey untuk  $P_n$  dan  $K_4$  menjadi penentuan bilangan Ramsey untuk  $T_n$  dengan  $K_m$ . Hasilnya disajikan dalam teorema berikut.

**Teorema II.7** *Misalkan  $T_n$  adalah pohon dengan  $n$  titik dan  $K_m$  adalah graf lengkap dengan  $m$  titik. Jika  $n, m \geq 2$ , maka  $R(T_n, K_m) = (n - 1)(m - 1) + 1$ .*

**Bukti.** Dari Persamaan II.3 diketahui bahwa  $R(T_n, K_m) \geq (n - 1)(m - 1) + 1$ . Selanjutnya akan ditunjukkan  $R(T_n, K_m) \leq (n - 1)(m - 1) + 1$ . Pembuktian menggunakan induksi pada  $n + m$ . Perhatikan bahwa jika  $m = 2$  atau  $n = 2$  maka hasilnya trivial. Asumsikan Teorema benar untuk  $n + m - 1$ , sehingga:

$$(i). R(T_n, K_{m-1}) \leq (n - 1)((m - 1) - 1) + 1.$$

$$(ii). R(T_{n-1}, K_m) \leq ((n - 1) - 1)(m - 1) + 1.$$

Akan ditunjukkan Teorema benar untuk  $m + n$ . Ambil sebarang graf  $F$  dengan  $|F| = (n - 1)(m - 1) + 1$ . Menurut (i) diperoleh  $F$  memuat  $T_n$  atau  $\bar{F}$  memuat  $K_{m-1}$ . Jika  $F$  memuat  $T_n$  maka bukti selesai. Angaplah  $F$  tidak memuat  $T_n$ , maka  $\bar{F}$  memuat  $K_{m-1}$ . Sebut  $A = V(K_{m-1})$  dan  $H = V(F) \setminus A$ . Jelas  $|H| = ((n - 1) - 1)(m - 1) + 1$ , sehingga menurut (ii) diperoleh  $F[H]$  memuat  $T_{n-1}$  atau  $\bar{F}[H]$  memuat  $K_m$ . Jika  $\bar{F}[H]$  memuat  $K_m$ , maka bukti selesai. Misalkan  $\bar{F}[H]$  tidak memuat  $K_m$ , maka  $F[H]$  memuat  $T_{n-1}$ . Tulis  $B = V(T_{n-1})$ . Perhatikan hubungan antara titik di  $A$  dengan  $B$ . Perhatikan  $b \in B$ . Jika  $ba \in E(F)$  untuk suatu  $a \in A$  maka  $\{a\} \cup B$  membentuk  $T_n$  di  $F$ , kontradiksi. Jadi  $ba \notin E(F)$  untuk setiap  $a \in A$ . Akibatnya, diperoleh  $\{b\} \cup A$  membentuk  $K_m$  di  $\bar{F}$ . Dengan demikian, Teorema benar untuk  $n + m$ , sehingga  $R(T_n, K_m) \leq (n - 1)(m - 1) + 1$ . Jadi  $R(T_n, K_m) = (n - 1)(m - 1) + 1$ . ■

Penentuan bilangan Ramsey untuk siklus  $C_n$  dan  $C_m$  telah tuntas dan dilakukan oleh Rosta (1973), Faudree dkk. (1974), serta Karolyi dkk. (2001). Hasil-hasilnya dapat dilihat pada Radziszowski (2004). Baru-baru ini, Surahmat



(2006) mengkaji bilangan Ramsey untuk siklus  $C_n$  dan roda  $W_m$  dengan hasil sebagai berikut.

$$R(C_n, W_m) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{untuk } m \text{ genap dan } n \geq \frac{5m}{2} - 1, \\ 3n - 2 & \text{untuk } m \geq 5 \text{ ganjil dan } n > \frac{5m-9}{2}. \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Berikut ini adalah survey perkembangan kajian bilangan Ramsey untuk bintang  $S_n$  dengan beberapa graf tertentu. Burr dkk. (1973), menunjukkan bahwa

$$R(S_{n_1+1}, S_{n_2+1}, \dots, S_{n_k+1}) = \sum_{i=1}^k n_i - k + \varepsilon_t, \quad (\text{II.13})$$

dengan  $\varepsilon_t = 1$  jika banyaknya bilangan genap dari  $n_1, n_2, \dots, n_k$  adalah genap, dan  $\varepsilon_t = 2$  untuk yang lainnya. Akibatnya, bilangan Ramsey untuk bintang dan bintang adalah:

$$R(S_{n+1}, S_{m+1}) = \begin{cases} n + m - 1 & \text{untuk } m, n \text{ genap,} \\ n + m & \text{untuk yang lainnya.} \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Sebelumnya, yakni pada tahun 1972, Harary mengkaji masalah ini dan memperoleh hasil yang sama dengan hasil pada Persamaan II.14. Hasil pada Persamaan II.13 menunjukkan bahwa pengkajian bilangan Ramsey untuk pasangan beberapa bintang juga telah tuntas.

Serupa dengan pengkajian bilangan Ramsey untuk bintang dan bintang, pengkajian bilangan Ramsey untuk bintang dan pohon juga telah tuntas. Hal ini dilakukan oleh Burr (1974) dan Cockayne (1974). Burr dalam makalahnya menunjukkan bahwa untuk  $n \equiv 1 \pmod{m-1}$ ,  $R(S_{n+1}, T_m) = m + n - 1$ . Untuk  $n$  dan  $m$  yang lain,  $R(S_{n+1}, T_m) = m + n - 2$  (Cockayne (1974)).

Kajian bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap  $R(S_n, K_{s,m})$  telah dilakukan oleh Lawrence dan Parsons. Walaupun belum banyak, terdapat beberapa hasil yang mereka peroleh, diantaranya :  $R(S_{16}, K_{2,2}) = 20$  oleh

Lawrence (1973) dan  $R(S_8, K_{2,3}) = 13$  oleh Parsons (1975). Parsons pada tahun 1976 membuktikan batas atas bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap berorde kecil. Batas atas itu disajikan sebagai berikut.

$$\text{Untuk } p \geq 2, R(S_{n+1}, K_{2,2}) \leq n + \sqrt{n} + 1. \quad (\text{II.15})$$

Rosyida (2004) juga mengkaji masalah ini dan memperoleh beberapa hasil. Antara lain adalah batas atas secara umum yang disajikan dalam teorema berikut.

**Teorema II.8** *Misal  $n \in N$  dan  $n \geq 5$ . Jika  $3 \leq t \leq n - 1$  dan  $m \geq 2$ , maka  $R(S_n, K_{t,m}) \leq (t - 1)(n - 3) + (n - 1) + m$ .*

Batas atas lain yang diperolehnya adalah batas atas yang lebih khusus, yakni untuk  $t = 2$ . Batas atas itu disajikan sebagai berikut.

$$R(S_n, K_{2,m}) \leq 2n + m - 4 \text{ untuk } n \geq 4 \text{ dan } m \geq 2. \quad (\text{II.16})$$

Nilai eksak yang diperoleh Rosyida (2004) adalah bilangan Ramsey untuk bintang berorde kecil dan graf bipartit lengkap, berturut-turut disajikan dalam dua teorema berikut.

**Teorema II.9**  $R(S_4, K_{t,m}) = t + m + 2$  untuk  $t, m \geq 2$ .

**Teorema II.10**  $R(S_5, K_{2,m}) = \begin{cases} m + 5 & \text{untuk } m \text{ genap,} \\ m + 6 & \text{untuk } m \text{ ganjil.} \end{cases}$

Bukti Teorema II.8, II.9, dan II.10 dapat dilihat pada rujukan Rosyida (2004).

Dengan mengkombinasikan  $n, t$ , dan  $m$  untuk  $n$  besar,  $n \geq 5$  dan  $t, m \geq 2$ , muncul banyak masalah  $R(S_n, K_{t,m})$  yang masih terbuka untuk dikaji.

Baru-baru ini, Lortz (2006) mengkaji penentuan bilangan Ramsey untuk graf bipartit lengkap,  $R(K_{n,s}, K_{t,m})$  untuk  $n, s = 2$ , dan  $t = 3$ , serta  $3 \leq m \leq 10$ . Hasil yang diperolehnya adalah  $R(K_{2,2}, K_{3,m}) = 11$  untuk  $m = 3, 4$ ,  $R(K_{2,2}, K_{3,6}) =$

15,  $R(K_{2,2}, K_{3,7}) = 16$ ,  $R(K_{2,2}, K_{3,8}) = 17$  dan  $R(K_{2,2}, K_{3,9}) = 20$ . Untuk nilai  $n, s, t$ , dan  $m$  yang lain, penentuan  $R(K_{n,s}, K_{t,m})$  masih merupakan masalah terbuka untuk dikaji lebih lanjut.

Kajian penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan roda dilakukan oleh beberapa peneliti dan hasilnya sudah cukup banyak. Baskoro dkk. (2002) membuktikan bahwa jika  $n \geq 3$ , maka

$$R(S_n, W_4) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{untuk } n \text{ ganjil,} \\ 2n + 1 & \text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

dan

$$R(S_n, W_5) = 3n - 2. \quad (\text{II.18})$$

Chen dkk. (2004) menunjukkan  $R(S_n, W_6) = 2n + 1$  untuk  $n \geq 3$ . Dalam makalah yang sama, mereka membuktikan bahwa

$$R(S_n, W_m) = 3n - 2 \text{ untuk } m \text{ ganjil dan } n \geq m - 1 \geq 2. \quad (\text{II.19})$$

Dalam makalah preprint 2004, Zhang membuktikan bahwa jika  $5 \leq n \leq 10$ , maka

$$R(S_n, W_8) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{untuk } n \text{ ganjil,} \\ 2n + 2 & \text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Bilangan Ramsey untuk bintang dan roda berorde relatif sama telah dikaji oleh Korolova (2005). Korolova menunjukkan bahwa untuk  $m$  ganjil,  $R(S_n, W_m) = 3n - 2$  jika  $n = m, m + 1$  atau  $m + 2$ . Kombinasi bintang dan roda berorde genap secara umum bilangan Ramseynya masih belum diketahui, meskipun batas bawahnya telah diketahui, yakni

$$R(S_n, W_m) \geq 2n - 1 \text{ untuk semua } m \text{ genap.} \quad (\text{II.21})$$

Pada tahun 2005, Korolova memberikan batas bawah yang lebih baik yaitu

$$R(S_n, W_m) \geq 2n + 1 \text{ untuk } m \text{ genap dan } n \geq m \geq 6. \quad (\text{II.22})$$

Berikut ini, disajikan bagaimana cara Korolova membuktikan hasil II.22. Konstruksi suatu graf  $F$  dengan  $|F| = 2n$  dengan  $n = 2k + i$  untuk semua  $i \geq 0$  dan  $k \geq 3$  sebagai berikut. Bagi titik-titik  $F$  kedalam dua himpunan yang saling lepas, sebutlah:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k+i-1}\}$  dan  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{2k+i+1}\}$ , dengan  $E(F) = \{a_t b_j, b_t b_{t+1}, b_{2k+i+1} b_1 : 1 \leq t \leq 2k + i\}$ . Jelas,  $d_F(a_t) = d_F(b_j) = 2k + i + 1$  untuk semua  $t$  dan  $j$ . Subgraf  $F[B]$  merupakan suatu siklus berorde  $2k + i + 1$ . Dengan demikian,  $F$  memuat roda  $W_{2k+i+1}$  dengan pusat  $a_t$ , tetapi tidak memuat roda  $W_{2k}$ . Karena setiap titik di  $B$  bertetangga dengan setiap titik di  $A$  pada  $F$ , maka  $\overline{F}[B]$  dan  $\overline{F}[A]$  saling bebas di  $\overline{F}$ . Subgraf  $\overline{F}[A]$  dan  $\overline{F}[B]$  masing-masing adalah isomorfik dengan  $K_{2k+i-2}$ . Karena itu,  $\overline{F}$  tidak memuat  $S_{2k+i}$ . Jadi graf  $F$  merupakan graf kritis untuk  $S_{2k+i}$  dan  $W_{2k}$  untuk sebarang  $i$  dan  $k \geq 3$ . Dengan demikian, diperoleh  $R(S_n, W_m) \geq 2n + 1$  untuk  $m$  genap dan  $n \geq m \geq 6$ .

Bilangan Ramsey untuk pohon dengan graf-graf yang lain secara umum juga belum diketahui. Namun demikian, terdapat beberapa hasil parsial, seperti yang diberikan oleh Baskoro dkk. (2002). Hasilnya disajikan dalam teorema berikut.

**Teorema II.11** *Misalkan  $n \geq 3$  dan diberikan graf pohon  $T_n$  yang bukan bintang. Maka  $R(T_n, W_m) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{untuk } m = 4, \\ 3n - 2 & \text{untuk } m = 5. \end{cases}$*

Bukti dapat dilihat pada rujukan Baskoro dkk. (2002).

Hasil lain adalah yang diberikan oleh Burr dkk. (1989), (lihat makalah Chen (1997)). Dalam makalahnya, Chen menuliskan bahwa jika  $\Delta T_n = m$ , maka

$$R(T_n, K_{2,2}) = \max\{4, n + 1, R(S_{1+m}, K_{2,2})\}. \quad (\text{II.23})$$

Seperti yang telah disebutkan di atas bahwa masih tersisa beberapa masalah yang masih terbuka untuk dikaji. Diantara beberapa masalah tersebut dikaji penulis pada penelitian ini. Hasilnya dibahas secara detail pada Bab III dan IV.

## Bab III Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Bintang dan Beberapa Graf Tertentu

Kajian penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan bintang telah tuntas, dilakukan Burr dkk. (1973). Penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap juga telah dikaji, walaupun hasilnya masih sedikit. Hal ini dilakukan oleh Harary (1972), Lawrence (1973), Parsons (1975), dan Rosyida (2004). Kajian penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan roda hampir tuntas, dan dilakukan oleh beberapa peneliti, diantaranya: Baskoro dkk. (2002), Chen dkk. (2004), dan Korolova (2005). Kasus yang tersisa dikaji oleh penulis dan hasilnya disajikan pada Subbab III.1. Pada subbab berikutnya, dibahas kajian penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap.

### III.1 Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Bintang dan Roda

Kajian beberapa peneliti tentang bilangan Ramsey untuk bintang dan roda  $R(S_n, W_m)$  telah dibahas pada Bab II. Dalam pembahasan itu diketahui bahwa bilangan Ramsey untuk bintang berorde besar dan roda berorde kecil yang ganjil telah diperoleh. Pada subbab ini dibahas kajian bilangan Ramsey untuk bintang berorde kecil dan roda berorde besar, serta bilangan Ramsey untuk bintang berorde ganjil dan roda berorde genap.

Melalui Pertaksamaan II.2, diketahui bahwa batas bawah untuk  $R(S_n, W_m)$ , adalah

$$R(S_n, W_m) \geq \begin{cases} 3n - 2 & \text{untuk } m \text{ ganjil,} \\ 2n - 1 & \text{untuk } m \text{ genap.} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Selanjutnya, akan dikaji apakah batas bawah pada Pertaksamaan III.1 merupakan batas bawah terbaik. Dengan kata lain, akan diselidiki apakah batas bawah tersebut sudah sama dengan nilai  $R(S_n, W_m)$  yang dicari. Khususnya untuk bintang berorde kecil dan roda berorde ganjil, hasilnya disajikan dalam teorema berikut.

★ **Teorema III.1** *Misalkan  $n \geq 3$ . Jika  $m$  ganjil, dan  $3 \leq m \leq 2n - 1$ , maka  $R(S_n, W_m) = 3n - 2$ .*

**Bukti.** Menurut pertaksamaan III.1,  $R(S_n, W_m) \geq 3n - 2$  untuk  $m$  ganjil dan  $m \geq 3$ . Selanjutnya, cukup menunjukkan  $R(S_n, W_m) \leq 3n - 2$ . Misalkan  $F$  adalah sebarang graf berorde  $3n - 2$  dan tidak memuat  $S_n$ . Akan ditunjukkan  $\bar{F}$  memuat  $W_m$ . Misalkan  $x$  adalah sebarang titik di  $F$ . Karena  $F \not\supseteq S_n$ ,  $d_F(x) \leq n - 2$  untuk setiap  $x \in F$ . Sebut  $A = V(F) \setminus N[x]$ , dan  $T = F[A]$ . Mudah untuk diperiksa bahwa  $|T| \geq 2n - 1$ . Karena  $d_T(v) \leq n - 2$  untuk setiap titik  $v \in T$  dan  $|\bar{T}| = |T|$ , maka  $d_{\bar{T}}(v) \geq |T| - (n - 1) > \frac{|\bar{T}|}{2}$ . Menurut Lemma II.2,  $\bar{T}$  memuat siklus  $C_m$ , untuk  $3 \leq m \leq 2n - 1 \leq |\bar{T}|$ . Dengan demikian, diperoleh suatu roda  $W_m$  di  $\bar{F}$  yang berporos di  $x$ . Jadi,  $R(S_n, W_m) \leq 3n - 2$  untuk  $3 \leq m \leq 2n - 1$ . ■

Dari Teorema III.1 diketahui bahwa batas bawah pada Pertaksamaan III.1 merupakan batas bawah terbaik bagi  $R(S_n, W_m)$  untuk  $m$  ganjil, tetapi bukan yang terbaik untuk  $m$  genap. Hal ini dibuktikan oleh Korolova (2005) dengan memberikan batas bawah yang lebih besar untuk kasus  $n \geq m \geq 6$ , (lihat Pertaksamaan II.22).

Berikut ini adalah penentuan bilangan Ramsey  $R(S_n, W_m)$  untuk  $m$  genap. Terinspirasi oleh batas bawah Korolova (2005), yakni  $R(S_n, W_m) \geq 2n + 1$ , dikonstruksi graf kritis untuk  $S_n$  dan  $W_m$ , dimana  $m$  genap. Namun, graf kritis yang diperoleh adalah graf kritis untuk  $S_n$  dan  $W_m$ , dimana  $m$  genap dan tertentu dengan  $m \geq n \geq 5$ . Akibatnya,  $R(S_n, W_m)$  yang dihasilkan hanya untuk beberapa  $m$  genap. Hasil yang ada disajikan dalam teorema berikut.

★ **Teorema III.2** *Jika  $n$  ganjil dan  $n \geq 5$ , maka*

$$R(S_n, W_m) = \begin{cases} 3n - 4 & \text{untuk } m = 2n - 4 \text{ atau } m = 2n - 2, \\ 3n - 6 & \text{untuk } m = 2n - 8 \text{ atau } m = 2n - 6. \end{cases}$$

**Bukti.** Misalkan  $n$  ganjil,  $n \geq 5$  dan  $m = 2n - 4$  atau  $2n - 2$ . Pandang  $F \simeq K_{n-1} \cup K_{n-2, n-2}$ . Graf  $F$  berorde  $3n - 5$  dan  $(n - 2)$ -reguler atau  $\Delta(F) = n - 2$ . Jelas  $F$  tidak memuat  $S_n$ , karena  $\Delta(S_n) = n - 1$ . Tidak sulit untuk memeriksa bahwa  $\overline{F} \simeq \overline{K}_{n-1} + 2K_{n-2}$ . Roda terbesar yang termuat di  $\overline{F}$  adalah roda  $W_{2n-6}$  yang berpusat pada suatu titik di  $K_{n-2}$ . Dengan demikian,  $\overline{F}$  tidak memuat  $W_m$  untuk  $m = 2n - 4$  atau  $2n - 2$ . Jadi,  $R(S_n, W_m) \geq 3n - 4$ .

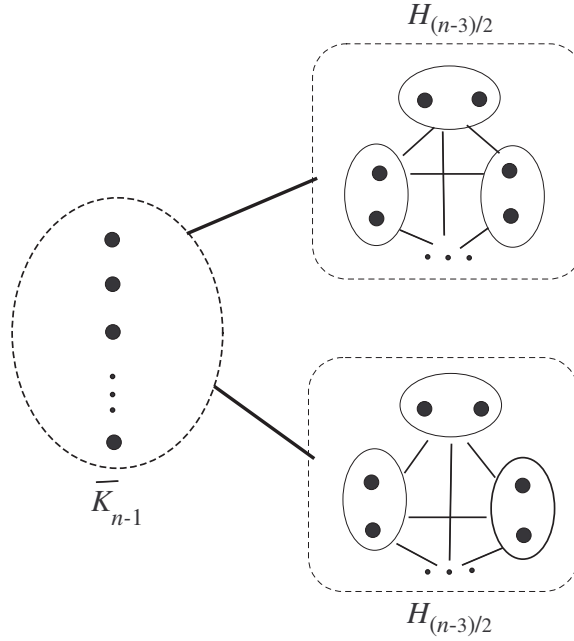
Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa  $R(S_n, W_m) \leq 3n - 4$ . Misalkan  $F$  adalah sebarang graf berorde  $3n - 4$  dan anggaplah  $F$  tidak memuat  $S_n$ . Akan ditunjukkan  $\overline{F}$  memuat suatu  $W_m$ . Karena  $F$  tidak memuat  $S_n$ ,  $d_F(v) \leq n - 2$  untuk setiap  $v \in F$ . Karena  $n$  ganjil, maka  $|F| = 3n - 4$  juga ganjil. Dengan demikian, tidak semua titik di  $F$  berderajat  $n - 2$  (ganjil).

Misalkan  $x_0 \in F$  dengan  $d_F(x_0) \leq n - 3$ . Tulis  $A = V(F) \setminus N[x_0]$ , dan  $T = F[A]$ . Mengingat setiap  $v \in T$ ,  $d_T(v) \leq n - 2$  dan  $|T| \geq 2n - 2$ , maka  $d_{\overline{T}}(v) \geq |T| - (n - 1) \geq \frac{|T|}{2}$ . Menurut Lemma II.2,  $\overline{T}$  memuat  $C_m$  untuk semua  $m$ ,  $3 \leq m \leq 2n - 2$ . Jadi  $\overline{T}$  memuat  $C_m$  untuk  $m = 2n - 4$  atau  $2n - 2$ . Dengan demikian,  $\overline{F}$  memuat suatu  $W_m$ , dengan rim  $C_m$  dan poros  $x_0$ . Jadi,  $R(S_n, W_m) \leq 3n - 4$  untuk  $m = 2n - 4$  atau  $2n - 2$ .

Untuk kasus  $n$  ganjil dan  $m = 2n - 8$  atau  $m = 2n - 6$ , pandang  $G \simeq K_{n-1} \cup [(\frac{n-3}{2})K_2 + (\frac{n-3}{2})K_2]$ . Graf  $G$  berorde  $3n - 7$  dan terdiri dari dua komponen. Komponen pertama adalah graf lengkap dengan titik-titik berderajat  $n - 2$ . Sedangkan komponen kedua adalah graf reguler berderajat  $n - 2$ . Jadi, graf  $G$  merupakan graf  $n - 2$ -reguler. Karena itu, derajat terbesar dari graf  $K_{n-1} \cup [(\frac{n-3}{2})K_2 + (\frac{n-3}{2})K_2]$  adalah  $n - 2$  sehingga tidak memuat  $S_n$ . Komplemen dari graf  $K_{n-1} \cup [(\frac{n-3}{2})K_2 + (\frac{n-3}{2})K_2]$  adalah graf  $\overline{K}_{n-1} + 2H_{\frac{n-3}{2}}$ . Jika



poros roda berada pada  $\overline{K}_{n-1}$ , maka rim terbesar roda adalah  $C_{n-3}$ . Untuk kasus lainnya, jika poros roda berada pada  $H_{\frac{n-3}{2}}$ , maka rim terbesarnya adalah  $C_{2n-10}$  (lihat Gambar III.1).



Gambar III.1. Graf  $\overline{K}_{n-1} + 2H_{\frac{n-3}{2}}$ .

Perhatikan bahwa untuk  $n$  ganjil dan  $n \geq 7$ , panjang siklus  $C_{n-3}$  selalu lebih kecil dari siklus  $C_{2n-10}$ . Dengan demikian, graf  $\overline{K}_{n-1} + 2H_{\frac{n-3}{2}}$  tidak memuat roda  $W_m$  untuk  $m = 2n - 6$  atau  $2n - 8$ . Untuk  $n = 5$ ,  $\overline{K}_{n-1} + 2H_{\frac{n-3}{2}}$  adalah graf yang memuat siklus  $C_4$  tetapi tidak memiliki titik yang bisa sebagai poros untuk membentuk  $W_4$ . Dengan demikian, untuk  $n$  ganjil dan  $n \geq 5$ , graf  $\overline{K}_{n-1} + 2H_{\frac{n-3}{2}}$  tidak memuat roda  $W_m$  untuk  $m = 2n - 6$  atau  $2n - 8$ . Karena itu, diperoleh  $R(S_n, W_m) \geq 3n - 6$ .

Sebaliknya, perhatikan sebarang graf  $F$  dengan  $|F| = 3n - 6$ . Dengan mengandaikan bahwa  $F \not\supseteq S_n$ , akan ditunjukkan  $\overline{F}$  memuat  $W_m$ . Misalkan terdapat  $x_0 \in F$  dengan  $d_F(x_0) \leq n - 5$ . Sebut  $A = V(F) \setminus N[x_0]$  dan  $T = F[A]$ . Akibatnya,  $|T| \geq 2n - 2$  dan  $\delta(\overline{T}) \geq |T| - (n - 1) \geq \frac{|T|}{2}$ . Menurut Lemma II.2,  $\overline{T}$

memuat suatu  $C_m$  untuk  $3 \leq m \leq 2n - 2$ . Jadi  $\overline{F}$  memuat  $W_m$  berporos di  $x_0$ , untuk  $m = 2n - 6$  atau  $m = 2n - 8$ .

Sekarang, anggaplah bahwa untuk setiap  $v \in F$ ,  $n - 4 \leq d_F(v) \leq n - 2$ . Karena  $F$  berorde ganjil, tidak mungkin semua titik-titik  $F$  berderajat ganjil. Oleh sebab itu, pasti terdapat paling sedikit satu titik  $v_0 \in F$  yang berderajat genap, yaitu  $d_F(v_0) = n - 3$ . Tulis  $B = V(F) \setminus N[v_0]$  dan  $T = F[B]$ . Mudah diperiksa bahwa  $|T| = 2n - 4$ . Karena setiap  $v \in T$ ,  $n - 4 \leq d_T(v) \leq n - 2$ . Akibatnya,  $n - 1 \geq d_{\overline{T}}(v) \geq n - 3$ . Selanjutnya, perhatikan dua kasus berikut ini.

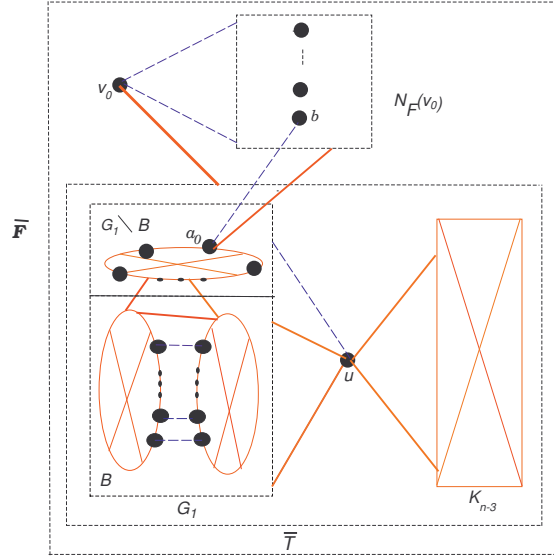
**Kasus 1.**  $\overline{T}$  bukan graf bipartit.

Misalkan  $\kappa(\overline{T}) = 0$ , yang berarti  $\overline{T}$  bukan graf terhubung. Mengingat bahwa  $n - 1 \geq d_{\overline{T}}(v) \geq n - 3$  dan  $n \geq 3$ , maka graf  $\overline{T}$  isomorfik dengan  $2K_{n-2}$ . Mudah dilihat bahwa graf  $T$  isomorfik dengan  $K_{n-2, n-2}$ . Karena  $\Delta(F) = n - 2$  dan  $d(v) = n - 2$  untuk setiap  $v \in T$ , maka tidak terdapat titik di  $T$  yang bertetangga dengan sebarang titik  $N[v_0]$  di  $F$ . Ini berarti, setiap titik di  $N[v_0]$  bertetangga dengan semua titik di  $\overline{T}$  pada  $\overline{F}$ . Karena itu,  $N[v_0]$  bersama-sama dengan titik-titik di salah satu komponen  $K_{n-2}$  pada  $\overline{T}$  membentuk suatu roda  $W_m$  yang berpusat di sebarang titik pada komponen  $K_{n-2}$  lainnya. Jadi, untuk kasus ini  $\overline{F}$  memuat  $W_m$  untuk  $m = 2n - 8$  atau  $2n - 6$ .

Selanjutnya, misalkan  $\kappa(\overline{T}) = 1$ . Ini artinya  $\overline{T}$  terhubung dan bukan graf lengkap. Karena itu, subgraf  $\overline{T} \setminus \{u\}$ , untuk suatu titik potong  $u$ , merupakan graf tak terhubung. Sebut  $G_1$  dan  $G_2$  adalah masing-masing komponen pada  $\overline{T} \setminus \{u\}$ . Oleh karena  $n - 1 \geq d_{\overline{T}}(v) \geq n - 3$ , maka  $|G_1| = n - 2$  dan  $G_2$  isomorfik dengan  $K_{n-3}$ . Mengingat bahwa  $\delta(\overline{T}) \geq n - 3$  dan  $\overline{T}$  terhubung, maka titik  $u$  harus bertetangga dengan semua titik di  $G_2$  dan bertetangga dengan paling sedikit satu titik di  $G_1$ .

Definisikan  $B = \{x \in G_1 : xu \in E(\overline{T})\}$ . Karena  $\delta(\overline{T}) \geq n - 3$  dan  $|G_1| = n - 2$ ,

setiap titik  $x \in G_1 \setminus B$  harus bertetangga dengan setiap titik lain di  $G_1$  pada  $\overline{T}$  (lihat Gambar III.2).



Gambar III.2. Gambaran pembuktian kasus  $\kappa(\overline{T}) = 1$ .

Demikian halnya jika terdapat dua titik  $x, y$  pada  $G_1$  yang tidak bertetangga di  $\overline{T}$ , maka  $x$  dan  $y$  keduanya berada di  $B$ . Lebih lanjut, karena  $\delta(\overline{T}) \geq n - 3$ , untuk setiap titik  $x \in B$ , terdapat paling banyak satu titik lain pada  $B$  yang tidak bertetangga dengan  $x$ . Karena itu, sisi-sisi pada  $\overline{G_1}$  di  $T$  (jika ada) merupakan suatu matching, dalam arti sisi-sisi tersebut saling bebas. Himpunan sisi-sisi yang saling bebas ini tidak memuat semua titik  $G_1$  karena  $|G_1|$  ganjil. Dengan demikian, terdapat satu titik di  $G_1$ , sebut  $a_0$ , yang bertetangga dengan semua titik lain pada  $G_1$  di  $\overline{T}$ . Karena setiap titik  $x \in G_1$  bertetangga dengan semua titik  $G_2$  di  $F$ , dan  $\Delta(F) \leq n - 2$  sementara  $|G_2| = n - 3$ , maka titik  $x$  masih mungkin bertetangga dengan paling banyak satu titik pada  $N(v_0)$  di  $F$ , (lihat Gambar III.2). Dengan demikian, setiap titik  $x \in G_1$  bertetangga dengan paling sedikit  $|N[v_0]| - 1$  titik di  $N[v_0]$  pada  $\overline{F}$ . Mengingat bahwa  $|(N[v_0] \setminus \{b\}) \cup G_1 \setminus \{a_0\}| = 2n - 6$ , subgraf yang diinduksi oleh  $(N[v_0] \setminus \{b\}) \cup G_1 \setminus \{a_0\}$ , dimana  $(a_0, b) \in E(F)$ , memuat suatu siklus  $C_m$  untuk  $m = 2n - 8$  atau  $2n - 6$ . Siklus  $C_m$  bersama-sama dengan titik  $a_0$  membentuk roda  $W_m$  di  $\overline{F}$ .

Lebih lanjut, jika  $\kappa(\overline{T}) \geq 2$ , maka  $\overline{T}$  merupakan graf terhubung-2. Menurut Lemma II.1,  $c(\overline{T}) \geq \min\{2(n-3), 2n-4\}$ , dimana  $c(\overline{T})$  adalah panjang siklus terbesar pada  $\overline{T}$ . Perhatikan bahwa  $\delta(\overline{T}) \geq \frac{|\overline{T}|+2}{3} \geq \frac{|\overline{T}|+2}{3}$ , apabila  $n \geq 7$  dan  $\overline{T}$  bukan graf bipartit. Berdasarkan Lemma II.3  $\overline{T}$  merupakan graf pansiklis lemah, yaitu  $\overline{T}$  memuat semua siklus  $C_m$  untuk  $g(\overline{T}) \leq m \leq 2n-6 \leq c(\overline{T})$ , dengan  $g(\overline{T})$  adalah 3 atau 4. Jadi,  $\overline{T}$  memuat  $C_m$  untuk  $m = 2n-8$  atau  $2n-6$ . Karena itu,  $\overline{F}$  memuat  $W_m$  yang berporos di  $v_0$  untuk  $m = 2n-8$  atau  $2n-6$ .

Berikut ini adalah pembuktian untuk  $n = 5$  dengan  $\kappa(\overline{T}) \geq 2$ . Jika  $n = 5$ , maka  $|\overline{T}| = 6$ . Labeli titik-titik pada  $\overline{T}$  sebagai  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ . Jika untuk setiap  $i, i = 1, 2, \dots, 6$ ,  $d_{\overline{T}}(u_i) = 2$ , maka  $d_T(u_i) = 3 = n-2 = \Delta(F)$ . Dengan demikian, setiap titik pada subgraf  $T$  tidak bertetangga dengan semua titik di  $N[v_0]$ . Akibatnya, setiap titik di  $\overline{T}$  bertetangga dengan semua titik di  $N[v_0]$ . Karenanya, subgraf yang diinduksi oleh  $\{u_i, u_r, u_j, v_0, v_s\}$  dimana  $u_i u_r, u_i u_j \in E(\overline{T})$  dan  $v_s \in N[v_0]$  membentuk roda  $W_4$  dengan poros  $u_i$ . Jika terdapat  $u_i \in \overline{T}$  dengan  $d_{\overline{T}}(u_i) = 3$ , maka banyaknya titik  $u_i$  paling sedikit dua dan genap. Dengan tidak mengurangi perumuman bukti, dimisalkan  $u_1$  bertetangga dengan  $u_6, u_2$  dan  $u_3$ . Karena  $d_{\overline{T}}(u_4) \geq 2$ , maka  $u_4$  akan bertetangga dengan paling sedikit dua titik di  $N_{\overline{T}}(u_1) \cup \{u_5\}$ . Jika kedua titik itu anggota dari  $N_{\overline{T}}(u_1)$ , maka  $\overline{T}$  memuat  $C_4$ . Siklus  $C_4$  bersama-sama dengan  $v_0$  membentuk  $W_4$ . Hal serupa terjadi untuk titik  $u_5$ . Misalkan  $u_4$  dan  $u_5$  masing-masing bertetangga dengan hanya satu titik di  $N_{\overline{T}}(u_1)$ . Mengingat  $\kappa(\overline{T}) \geq 2$ , maka tetangga  $u_4$  dan  $u_5$  di  $N_{\overline{T}}(u_1)$  adalah berbeda, katakanlah berturut-turut  $u_6$  dan  $u_3$ . Jika  $u_6$  dan  $u_3$  bertetangga maka  $\overline{T}$  memuat  $C_4$ , sehingga  $C_4$  bersama-sama dengan  $v_0$  membentuk  $W_4$  di  $\overline{F}$ . Asumsikan,  $u_6$  dan  $u_3$  tidak bertetangga, maka  $d_{\overline{T}}(u_i) = 2$  untuk  $i = 4, 5, 6$ . Ini artinya titik  $u_4, u_5, u_6$  bebas dari  $N[v_0]$  di  $F$ . Akibatnya,  $N[v_0] \cup \{u_4, u_5, u_6\}$  memuat suatu  $W_4$  di  $\overline{F}$  dengan poros  $u_4$ .

**Kasus 2.**  $\overline{T}$  adalah graf bipartit dengan himpunan partisi  $V_1$  dan  $V_2$ .

Karena  $n - 1 \geq d_{\overline{T}}(v) \geq n - 3$  dan  $|\overline{T}| = 2n - 4$ , kemungkinan yang terjadi adalah  $|V_1| = n - 3$  dan  $|V_2| = n - 1$ , atau  $|V_1| = n - 2$  dan  $|V_2| = n - 2$ . Jika  $|V_1| = n - 3$  dan  $|V_2| = n - 1$ , maka  $\overline{T}$  isomorfik dengan  $K_{n-1, n-3}$ . Karena itu,  $\overline{T}$  memuat suatu  $C_m$  untuk  $m = 2n - 8$  atau  $2n - 6$ . Siklus  $C_m$  bersama-sama dengan titik  $v_0$  membentuk suatu  $W_m$  di  $\overline{F}$ .

Sekarang, asumsikan  $|V_1| = n - 2$  and  $|V_2| = n - 2$ . Jika  $\overline{T}$  isomorfik dengan  $K_{n-2, n-2}$ , maka jelas  $\overline{F}$  memuat  $W_m$  berpusat  $v_0$  untuk  $m = 2n - 8$  atau  $m = 2n - 6$ . Anggaplah  $\overline{T}$  tidak isomorfik dengan  $K_{n-2, n-2}$ , yakni terdapat titik pada  $\overline{T}$  berderajat  $n - 3$ . Jika demikian halnya, maka titik-titik pada  $\overline{T}$  dapat diurutkan dan dilabeli sedemikian sehingga titik-titik pada partisi  $V_1$  berlabel:  $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$ ; titik pada partisi  $V_2$  berlabel:  $u_1, u_2, \dots, u_{n-2}$ ; dan  $u_i v_i \notin E(\overline{T})$  untuk suatu  $i \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$ . Untuk  $j = 3, 4, \dots, n - 2$  diperoleh siklus  $C_{2j} : (u_1, v_j, u_2, v_1, u_3, v_2, \dots, u_{j-1}, v_{j-2}, u_j, v_{j-1}, u_1)$  di  $\overline{T}$ . Siklus  $C_{2j}$  untuk  $j = 3, 4, \dots, n - 2$  bersama-sama dengan titik  $v_0$  membentuk  $W_m$  di  $\overline{F}$  untuk  $m = 2n - 8$  atau  $2n - 6$ . Untuk  $n = 5$ , dalam hal ini  $C_{2j} = 6$ , struktur graf  $F$  tercakup pada struktur graf  $F$  untuk  $n = 5$  pada kasus  $\kappa(\overline{T}) \geq 2$  di atas. Dengan demikian, pembuktian untuk  $n = 5$  pada kasus  $\overline{T}$  adalah graf bipartit telah tercakup pada pembuktian  $n = 5$  pada kasus  $\kappa(\overline{T}) \geq 2$ .

Dari semua kasus di atas diketahui bahwa graf  $F$  senantiasa memuat  $S_n$  atau  $W_m$  untuk  $m = 2n - 8$  atau  $2n - 6$ ,  $n$  ganjil dengan  $n \geq 5$ . Jadi, diperoleh  $R(S_n, W_m) = 3n - 6$ . ■

Hasil kajian  $R(S_n, W_m)$  yang disajikan pada Teorema III.1 dan Teorema III.2 telah ditulis dalam satu makalah dan juga telah dipresentasikan pada International Workshop on Graph Labelling (IWOGL-2004) di Batu Malang. Makalahnya dimuat dalam journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing (JCMCC), (lihat Hasmawati dkk. (2005)).

## III.2 Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Bintang dan Graf Bipartit Lengkap

Kajian penentuan bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap  $R(S_n, K_{t,m})$  untuk nilai  $n, t$  dan  $m$  tertentu, telah dilakukan oleh Harary (1972), Lawrence (1973), Parsons (1976), Chen (1997) dan Rosyida (2004), (lihat Survey perkembangan Bilangan Ramsey Graf pada Subbab II.2). Dalam makalahnya, Parsons (1976) memberikan batas atas bilangan Ramsey untuk bintang berorde besar dan graf bipartit lengkap berorde kecil. Batas atas itu disajikan dalam teorema berikut.

**Teorema III.3** Untuk  $p \geq 2$ ,  $R(S_{n+1}, K_{2,2}) \leq n + \sqrt{n} + 1$ .

Bukti dapat dilihat pada Parsons (1976).

Batas bawah untuk masalah bilangan Ramsey tersebut di atas diberikan oleh Chen (1997). Dia membuktikan bahwa

$$R(S_{n+1}, K_{2,2}) \geq n + \sqrt{n} - 6n^{11/40}. \quad (\text{III.2})$$

Pada teorema berikut disajikan batas atas yang diberikan oleh Rosyida.

**Teorema III.4**  $R(S_n, K_{2,m}) \leq 2n + m - 4$  untuk  $n \geq 4$  dan  $m \geq 2$ .

Bukti dapat dilihat pada Rosyida (2004).

Walaupun masalah penentuan  $R(S_n, K_{t,m})$  telah dikaji oleh beberapa peneliti, namun hasil yang diperoleh masih belum banyak. Karena itu, masalah terbuka yang tersisa masih sangat banyak, diantaranya penentuan  $R(S_n, K_{t,m})$  untuk  $n > 5$  dan  $R(S_n, K_{2,m})$  untuk  $n \geq 6$  dan  $m \geq 2$ . Dalam Subbab III.2 ini, disajikan hasil utama penentuan  $R(S_n, K_{2,m})$  untuk  $n = 6$  atau  $n = 8$  serta beberapa nilai  $m$  tertentu. Hasil utama tersebut disajikan dalam beberapa lemma dan teorema.

★ **Teorema III.5**  $R(S_6, K_{2,2}) = 8$ .

**Bukti.** Menurut batas atas Parsons,  $R(S_6, K_{2,2}) \leq 8$ . Sekarang tinggal menentukan batas bawahnya. Diberikan graf  $4$ -*regular*, namakan  $F$ , dengan  $|F| = 7$ , yang komplementnya isomorfik dengan  $C_7$ . Karena  $F$  adalah graf reguler berderajat  $4$ , dipastikan  $F$  tidak memuat  $S_6$ . Sangat jelas bahwa  $\overline{F} \simeq C_7$  tidak memuat  $K_{2,2}$ . Jadi, diperoleh  $R(S_6, K_{2,2}) \geq 8$ . ■

★ **Teorema III.6**  $R(S_8, K_{2,2}) = 10$ .

**Bukti.** Graf  $F \simeq H_4 \cup K_1$  berorde  $9$  dan mempunyai  $\Delta(F) = 6$ , sehingga tidak memuat  $S_8$ . Sedangkan komplementnya merupakan graf kincir  $M_4$ , yaitu graf yang terdiri dari empat segitiga yang mempunyai satu titik sekutu. Dengan demikian,  $\overline{F}$  tidak memuat  $K_{2,2}$ . Karenanya diperoleh  $R(S_8, K_{2,2}) \geq 10$ . Sebaliknya, dengan menggunakan batas atas Parsons, diperoleh  $R(S_8, K_{2,2}) \leq 10$ . Jadi,  $R(S_8, K_{2,2}) = 10$ . ■

Dua lemma berikut menyajikan karakteristik tertentu dari suatu graf, yang terkait dengan eksistensi subgraf tertentu.

★ **Lemma III.1** *Misalkan  $G$  adalah graf berorde  $2n + m - 5$ , untuk  $n \geq 5$  dan  $m \geq 3$ . Jika  $\Delta(G) \leq n - 2$  dan  $G$  memuat  $K_3$  atau  $K_{2,3}$ , maka  $\overline{G}$  memuat  $K_{2,m}$ .*

**Bukti.** Jika  $G$  memuat suatu  $K_3$ , maka pilih dua titik pada  $K_3$ . Namakan  $u$  dan  $v$ . Jika  $G$  memuat suatu  $K_{2,3}$ , maka pilih dua titik pada  $K_{2,3}$  yang masing-masing berderajat tiga, juga namakan  $u$  and  $v$ . Karena  $d(x) \leq n - 2$  untuk setiap titik  $x \in G$  dan  $n \geq 3$ , maka  $|N[u] \cup N[v]| \leq 2n - 5$ . Tulis  $B = G \setminus (N[u] \cup N[v])$ . Karena  $|G| = 2n + m - 5$  dan  $|N[u] \cup N[v]| \leq 2n - 5$ , maka  $|B| \geq m$ . Dengan demikian, subgraf  $\overline{G}[\{u, v\} \cup B]$  memuat suatu  $K_{2,m}$ . ■

★ **Lemma III.2** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung  $(n - 2)$ -regular berorde  $2n + m - 5$ , dengan  $n \geq 4$  dan  $m \geq 3$ . Jika  $G$  tidak memuat  $K_3$  dan  $K_{2,3}$ , maka  $\overline{G}$  tidak memuat  $K_{2,m}$ .

**Bukti.** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung  $(n - 2)$ -regular berorde  $2n + m - 5$  dengan  $n, m \geq 3$ . Misalkan  $G$  tidak memuat  $K_3$  dan  $K_{2,3}$ . Untuk sebarang dua titik  $u, v$  pada  $G$ ,  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$  jika  $u, v$  tidak bertetangga dan  $|N(u) \cap N(v)| = 0$  jika  $u, v$  bertetangga. Akibatnya,  $|N[u] \cup N[v]| \geq 2n - 4 \forall u, v \in G$ . Tulis  $A = G \setminus N[u] \cup N[v]$ . Karena  $|G| = 2n + m - 5$  dan  $d(x) = n - 2$  untuk setiap  $x \in G$ , maka  $|A| \leq m - 1$ . Dengan demikian, graf bipartit lengkap terbesar yang termuat di  $\overline{G}$  adalah  $K_{2,m-1}$ . Jadi,  $\overline{G}$  tidak memuat  $K_{2,m}$ . ■

Kedua lemma di atas sangat membantu dalam membuktikan teorema-teorema berikut.

★ **Teorema III.7**  $R(S_6, K_{2,3}) = 10$ .

**Bukti.**

Pandang graf  $F$  dengan  $|F| = 9$  yang himpunan titik dan himpunan sisinya berturut-turut seperti berikut:

$$V_F = \{v_i : 0 \leq i \leq 8\}$$

dan

$$E_F = \{v_i v_{i+1}, v_i v_{i+3}\}$$

dengan  $i$  dinyatakan dalam modulo 9. Graf  $F$  adalah 4-regular yang berarti  $\Delta(F) = 4$ . Jadi tidak memuat  $S_6$ . Lebih jauh, dapat diperiksa bahwa setiap dua titik  $u, v \in \overline{F}$ ,  $|N_{\overline{F}}(u) \cap N_{\overline{F}}(v)| \leq 2$ . Dengan demikian,  $\overline{F}$  tidak memuat  $K_{2,3}$ . Jadi,  $R(S_6, K_{2,3}) \geq 10$ . Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $R(S_6, K_{2,3}) \leq 10$ .



Misalkan  $F_1$  adalah sebarang graf berorde 10, dan anggaplah tidak memuat  $S_6$ . Akan ditunjukkan bahwa  $\overline{F}_1 \supseteq K_{2,3}$ . Misalkan terdapat  $u \in F_1$  dengan  $d_{F_1}(u) \leq 3$ . Misalkan pula  $w$  adalah sebarang titik di  $N(u)$ . Karena  $F$  tidak memuat  $S_6$ ,  $d_{F_1}(v) \leq 4$  untuk setiap  $v \in F_1$ . Akibatnya,  $|N[u] \cup N[w]| \leq 7$ . Jika  $B = F_1 \setminus N[u] \cup N[w]$ , maka  $|B| \geq 10 - 7 = 3$ . Karena itu,  $\overline{F}_1[\{u, w\} \cup B]$  memuat suatu  $K_{2,3}$ .

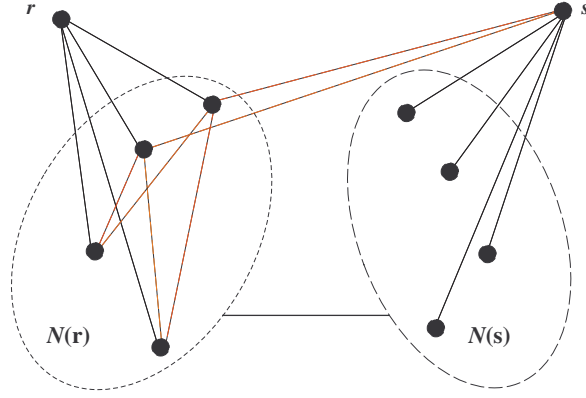
Sekarang, anggaplah bahwa  $d_{F_1}(v) = 4$  untuk setiap  $v$  di  $F_1$ . Misalkan  $r, s \in F_1$  dengan  $rs \notin E(F_1)$ . Tulis  $X = O_{F_1}(r, s) \setminus Z_{F_1}(r, s)$  dan  $Q = F_1 \setminus N[r] \cup N[s]$ . Diperoleh bahwa  $|Q| = |Z_{F_1}(r, s)|$ . Jika  $N(r)$  atau  $N(s)$  bukan himpunan bebas, maka  $F_1$  memuat  $K_3$ . Menurut Lemma III.1,  $\overline{F}_1$  memuat  $K_{2,3}$ . Asumsikan  $N(r)$  dan  $N(s)$ , dua-duanya, merupakan himpunan bebas. Jika  $|Z_{F_1}(r, s)| \geq 3$ , jelas  $\overline{F}_1[\{r, s\} \cup Q]$  memuat suatu  $K_{2,3}$ .

Jika  $|Z_{F_1}(r, s)| = 2$ , maka  $|X| = 4$ . Karena  $N(r)$  dan  $N(s)$  keduanya merupakan himpunan bebas, maka setiap titik di  $Z_{F_1}(r, s)$  tidak bertetangga dengan semua titik di  $X$ . Akibatnya, setiap titik di  $Z_{F_1}(r, s)$  bertetangga dengan semua titik pada  $X$  di  $\overline{F}_1$ . Jadi,  $\overline{F}_1[Z_{F_1}(r, s) \cup X]$  memuat suatu  $K_{2,3}$ .

Jika  $|Z_{F_1}(r, s)| = 1$ , graf  $\overline{F}_1[(Z \cup \{s\}) \cup N(r)]$  atau  $\overline{F}_1[(Z \cup \{r\}) \cup N(s)]$  memuat suatu  $K_{2,3}$ . Untuk kasus  $|Z_{F_1}(r, s)| = 0$ , subgraf yang diinduksi oleh  $N(s) \cup \{r\}$  atau  $N(r) \cup \{s\}$  di  $\overline{F}_1$  membentuk  $K_5$ . Sangat jelas bahwa  $K_5$  memuat  $K_{2,3}$ . Karena itu,  $\overline{F}_1$  senantiasa memuat  $K_{2,3}$  (lihat Gambar III.3). Jadi, diperoleh  $R(S_6, K_{2,3}) \leq 10$ . ■

★ **Teorema III.8**  $R(S_6, K_{2,4}) = 11$ .

**Bukti.** Misalkan  $F$  adalah graf berorde 11. Anggaplah  $F$  tidak memuat  $S_6$ . Akan ditunjukkan bahwa  $\overline{F} \supseteq K_{2,4}$ . Karena  $F$  tidak memuat  $S_6$ , maka  $d_F(v) \leq 4$  untuk setiap  $v$  di  $F$ . Jika terdapat  $u \in F$  dengan  $d(u) \leq 3$ , maka  $|N[u] \cup N[s]| \leq 7$  untuk sembarang  $s \in N(u)$ . Tulis  $B = F \setminus N[u] \cup N[s]$ .



Gambar III.3. Gambaran pembuktian kasus  $|Z| = 0$ .

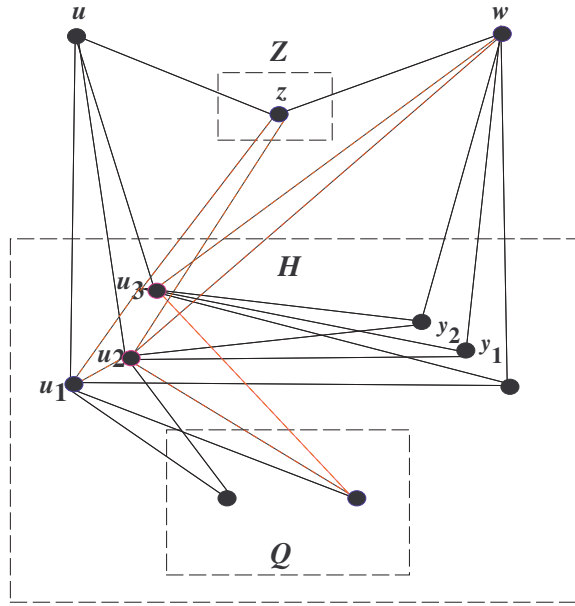
Karena  $|F| = 11$ ,  $|B| \geq 11 - 7 = 4$ . Dengan demikian,  $\overline{F}[\{u, s\} \cup B]$  memuat suatu  $K_{2,4}$ .

Sekarang anggaplah bahwa  $d_F(v) = 4$  untuk setiap titik  $v \in F$ . Misalkan  $u, w$  di  $F$  dengan  $(u, w) \notin E(F)$ . Tulis  $Q = F \setminus N[u] \cup N[w]$ ,  $U = O_F(u, w) \setminus Z_F(u, w)$  dan  $H = Q \cup U$ . Kenyataannya,  $|Q| = 1 + |Z_F(u, w)|$ . Karena  $u$  dan  $w$  tidak bertetangga dengan semua titik  $Q$  di  $F$ , maka  $u$  dan  $w$  bertetangga dengan semua titik  $Q$  di  $\overline{F}$ . Oleh sebab itu, jika  $|Z_F(u, w)| \geq 3$ , maka  $|Q| \geq 4$ , sehingga  $\overline{F}[\{w, u\} \cup Q]$  memuat  $K_{2,4}$ .

Selanjutnya, perhatikan kasus  $0 \leq |Z_F(u, w)| \leq 2$ . Jika  $N(u)$  atau  $N(w)$  bukan himpunan bebas, maka  $F \supseteq K_3$ . Menurut Lemma III.1,  $\overline{F}$  memuat suatu  $K_{2,4}$ . Asumsikan  $N(u)$  dan  $N(w)$  dua-duanya merupakan himpunan bebas. Jika  $|Z_F(u, w)| = 2$ , maka  $|U| = 4$ . Akibatnya,  $\overline{F}[Z_F(u, w) \cup U]$  memuat  $K_{2,4}$ .

Misalkan  $|Z_F(u, w)| \leq 1$ . Tulis  $X = N(u) \setminus Z_F(u, w)$  dan  $Y = (N(w) \setminus Z_F(u, w)) \cup Q$ . Karenanya,  $4 \geq |X| \geq 3$  dan  $4 \geq |Y| \geq 3$ , serta  $|L| = 5$ . Notasikan anggota-anggota  $X$  dengan  $u_i$ . Selanjutnya, ambil sembarang dua titik di  $X$ , sebut  $u_1$  dan  $u_2$ . Karena  $d_L(u_i) = 3$  untuk setiap  $i$ ,  $5 \geq |O_L(u_1, u_2)| \geq 3$ . Jika  $4 \geq |O_L(u_1, u_2)| \geq 3$ , maka  $2 \leq |Z_L(u_1, u_2)| \leq 3$ . Dengan demikian,  $F[\{u_1, u_2\} \cup$

$(Z_L(u_1, u_2) \cup \{u\})$ ] membentuk  $K_{2,3}$ . Menurut Lemma III.1,  $\overline{F}$  memuat  $K_{2,4}$ . Sekarang, anggaplah  $|O_L(u_1, u_2)| = 5$ . Dalam hal ini  $|Z_L(u_1, u_2)| = 1$ . Mengingat  $d_L(u_i) = 3$  untuk setiap  $i$ , maka  $|Z_L(u_i, u_j)| \geq 2$  untuk suatu  $i \in \{1, 2\}$  dan untuk suatu  $j \in \{3, 4\}$ . Tulis  $Z_L(u_i, u_j) = \{y_1, y_2\}$ . Dengan demikian,  $F[\{u_i, u_j\} \cup \{u, y_1, y_2\}]$  memuat  $K_{2,3}$ . Menurut Lemma III.1  $\overline{F}$  memuat  $K_{2,4}$  (lihat Gambar III.4). Karena itu,  $R(S_6, K_{2,4}) \leq 11$ .



Gambar III.4. Gambar pembuktian kasus  $|Z_F(u, w)| = 1$ .

Berikut ini akan diberikan suatu graf yang merupakan graf kritis untuk  $S_6$  dan  $K_{2,4}$ . Keberadaan graf kritis ini menunjukkan bahwa  $R(S_6, K_{2,4}) \geq 11$ .

Perhatikan graf  $F_1$  dengan himpunan titik

$$V_{F_1} = \{v_i : 0 \leq i \leq 9\}$$

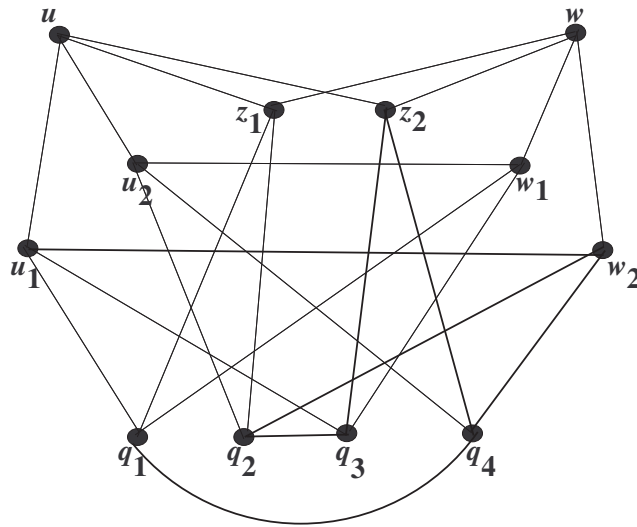
dan himpunan sisi

$$E_{F_1} = \{v_i v_{i+1}, v_i v_{i+3} : 0 \leq i \leq 9\},$$

dengan  $i$  dinyatakan dalam modulo 10. Graf  $F_1$  graf berorde 10, dan juga merupakan graf 4-regular sehingga tidak memuat  $S_6$ . Tidak sulit untuk memeriksa bahwa setiap dua titik  $u, v$  pada  $\overline{F}_1$  mempunyai tetangga bersama paling banyak 3. Dengan kata lain,  $|Z_{\overline{F}_1}(u, v)| \leq 3$  untuk setiap dua titik  $u, v$  di  $F_1$ . Karena itu,  $\overline{F}_1$  tidak memuat  $K_{2,4}$ . Dengan demikian,  $R(S_6, K_{2,4}) \geq 11$ . ■

★ **Teorema III.9**  $R(S_6, K_{2,5}) = 13$ .

**Bukti.** Perhatikan graf  $F$  pada Gambar III.5.



Gambar III.5. Graf  $F$ .

Graf  $F$  tersebut berorde 12 dan reguler berderajat 4, sehingga tidak memuat  $S_6$ . Lebih lanjut, setiap dua titik  $u, v \in F$ ,  $|Z_F(u, v)| = 0$  jika  $(u, v) \in E(F)$  dan  $|Z_F(u, v)| \leq 2$  jika  $(u, v) \notin E(F)$ . Dengan demikian,  $F$  tidak memuat  $K_3$  dan  $K_{2,3}$ . Menurut Lemma III.2,  $\overline{F}$  tidak memuat  $K_{2,5}$ . Jadi,  $F$  adalah graf kritis untuk  $S_6$  dan  $K_{2,5}$ . Ini menunjukkan  $R(S_6, K_{2,5}) \geq 13$ . Sebaliknya, menurut pertaksamaan II.16,  $(S_6, K_{2,5}) \leq 13$ . ■

★ **Teorema III.10**  $R(S_6, K_{2,6}) = 13$ .

**Bukti.** Graf  $F$  pada Gambar III.5 juga merupakan graf kritis untuk  $S_6$  dan  $K_{2,6}$ . Dengan demikian,  $R(S_6, K_{2,6}) \geq 13$ . Selanjutnya, akan ditunjukkan

bahwa  $R(S_6, K_{2,6}) \leq 13$ . Misalkan  $F_1$  adalah sebarang graf dengan  $|F_1| = 13$ . Andaikan  $F_1$  tidak memuat  $S_6$ . Akan ditunjukkan  $\overline{F_1}$  memuat  $K_{2,6}$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $S_6$ ,  $d_{F_1}(v) \leq 4$  untuk setiap titik  $v \in F_1$ . Misalkan terdapat  $u \in F_1$  with  $d_{F_1}(u) \leq 3$ . Karena  $d_{F_1}(v) \leq 4$  untuk setiap  $v \in F_1$ ,  $|N[u] \cup N[s]| \leq 7$  untuk suatu titik  $s \in N(u)$ . Jika  $B = F_1 \setminus N[u] \cup N[s]$ , maka  $|B| \geq 13 - 7 = 6$ . Karenanya,  $\overline{F_1}[\{u, s\} \cup B]$  memuat suatu  $K_{2,6}$ .

Misalkan untuk setiap titik  $v \in F_1$ ,  $d_{F_1}(v) = 4$ . Jika terdapat  $u, v \in F_1$  dengan  $|Z_{F_1}(u, v)| \geq 3$ , maka  $F_1 \supseteq K_{2,3}$ . Menurut Lemma III.1,  $\overline{F_1} \supseteq K_{2,6}$ . Andaikan  $F_1$  tidak memuat  $K_{2,3}$ . Akan ditunjukkan  $F_1 \supseteq K_3$ . Karena  $d_{F_1}(v) = 4$  untuk setiap titik  $v \in F_1$  dan  $|F_1| = 13$ , maka terdapat paling sedikit dua titik di  $F_1$  yang tidak bertetangga, namakan  $u$  dan  $w$ . Definisikan  $Q = F_1 \setminus N[u] \cup N[w]$ ,  $X = N(u) \setminus Z_{F_1}(u, w)$  dan  $Y = N(w) \setminus Z_{F_1}(u, w)$ . Notasikan anggota-anggota pada  $Q, X$  dan  $Y$  berturut-turut sebagai  $q_i, u_i$  dan  $w_i$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $K_{2,3}$ , maka  $|Z_{F_1}(u, w)| \leq 2$ . Selanjutnya, perhatikan dua kasus berikut.

**Kasus 1** Jika  $|Z_{F_1}(u, w)| = 2$ .

Untuk  $|Z_{F_1}(u, w)| = 2$ , maka  $|Q| = 5$ ,  $|X| = 2$  dan  $|Y| = 2$ . Jika  $N(u)$  atau  $N(w)$  bukan himpunan bebas, katakanlah  $u_1 u_2 \in E(F_1)$  dengan  $u_1, u_2 \in N(u)$ , maka  $\{u, u_1, u_2\}$  membentuk  $K_3$  di  $F_1$ . Menurut Lemma III.1,  $\overline{F_1} \supseteq K_{2,6}$ . Sekarang, anggaplah  $N(u)$  dan  $N(w)$  keduanya merupakan himpunan bebas dan tulis  $Z_{F_1}(u, w) = \{z_1, z_2\}$ . Jika  $|Z_Q(z_1, z_2)| \geq 1$ , maka  $|Z_{F_1}(z_1, z_2)| \geq 3$ . Karena itu  $F_1[\{z_1, z_2\} \cup (Q \cup \{u, w\})]$  memuat  $K_{2,3}$ , suatu kontradiksi. Jadi, seharusnya  $|Z_Q(z_1, z_2)| = 0$ . Karena  $d_{F_1}(v) = 4$  untuk setiap titik  $v \in F_1$ , setiap titik pada  $Z_{F_1}(u, w)$  masih harus bertetangga dengan dua titik pada  $Q$ , dan setiap titik pada  $X$  atau  $Y$ , berturut-turut, harus bertetangga dengan tiga titik pada  $Q \cup Y$  atau  $Q \cup X$ . Karena  $|Z_Q(z_1, z_2)| = 0$ , dapat dimisalkan  $N_Q(z_1) = \{q_1, q_2\}$  dan  $N_Q(z_2) = \{q_3, q_4\}$ .

Selanjutnya, perhatikan dua titik pada  $X$ , sebut  $u_1$  dan  $u_2$ . Mengingat  $|Q| = 5$  dan  $|Y| = 2$ , serta setiap titik pada  $X$  harus bertetangga dengan tiga titik pada

No.	$u_1$		$u_2$	
	$ N_Q(u_1) $	$ N_Y(u_1) $	$ N_Q(u_2) $	$ N_Y(u_2) $
1	3	0	3	0
2	3	0	2	1
3	3	0	1	2
4	2	1	2	1
5	2	1	1	2
6	1	2	1	2

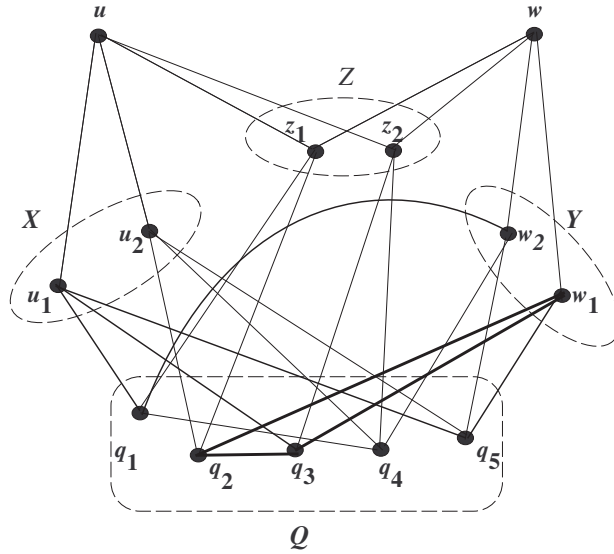
Tabel III.1. Semua kombinasi ketetanggaan antara  $u_1$  dan  $u_2$ .

$Q \cup Y$ , maka akan terdapat beberapa kombinasi ketetanggaan  $u_1$  dan  $u_2$  pada  $Q$  dan  $Y$ . Kombiasi-kombinasi ketetanggaan tersebut diberikan pada Table III.1.

**Subkasus 1.1** Kombinasi 1.

Untuk kombinasi ini, titik  $u_1$  dan  $u_2$  masing-masing bertetangga dengan tiga titik di  $Q$  dan tidak ada titik di  $Y$ . Karena  $F_1$  tidak memuat  $K_{2,3}$ , maka untuk setiap dua titik  $u_i, u_j \in N(u)$ ,  $|Z_Q(u_i, u_j)| \leq 1$ . Karena itu,  $u_1$  dan  $u_2$  masing-masing harus bertetangga dengan tepat satu titik di  $N_Q(z_1)$  dan satu titik di  $N_Q(z_2)$ . Akibatnya,  $u_1$  dan  $u_2$  pasti bertetangga dengan  $q_5$ . Tanpa mengurangi pembuktian secara umum, dimisalkan  $q_1, q_3, q_5 \in N_Q(u_1)$ ,  $q_2, q_4, q_5 \in N_Q(u_2)$ , dan  $q_5$  bertetangga dengan  $w_1$  dan  $w_2$ . Anggaplah  $q_2$  bertetangga dengan  $q_3$ , dan  $q_1$  bertetangga dengan  $q_4$ . Karena setiap dua titik  $u, w \in F_1$  berlaku  $|Z_{F_1}(u, w)| \leq 2$  ( $F_1 \not\cong K_{2,3}$ ), maka titik  $w_1$  atau  $w_2$  harus bertetangga dengan  $q_2$  dan  $q_3$ . Akibatnya,  $w_i, q_2, q_3$  untuk suatu  $i \in \{1, 2\}$ , membentuk  $K_3$  di  $F_1$  (lihat Gambar III.6).

Graf reguler berderajat 4 yang tidak memuat  $K_{2,3}$  untuk masing-masing kombinasi dalam Tabel III.1 dikonstruksi dengan cara serupa. Karena itu, konfigurasi ketetanggaan titik  $u_1$  dan  $u_2$  serta titik-titik lain di  $F_1$  pada kombinasi 2 dan 3 adalah serupa dengan konfigurasi ketetanggaan titik-titik pada kombinasi 1. Ketiga kasus ini, pada akhirnya memperlihatkan bahwa  $F_1$  senantiasa memuat  $K_3$ . Berikutnya, akan dikaji konfigurasi ketetanggaan titik-titik pada kombinasi 4, 5 dan 6.

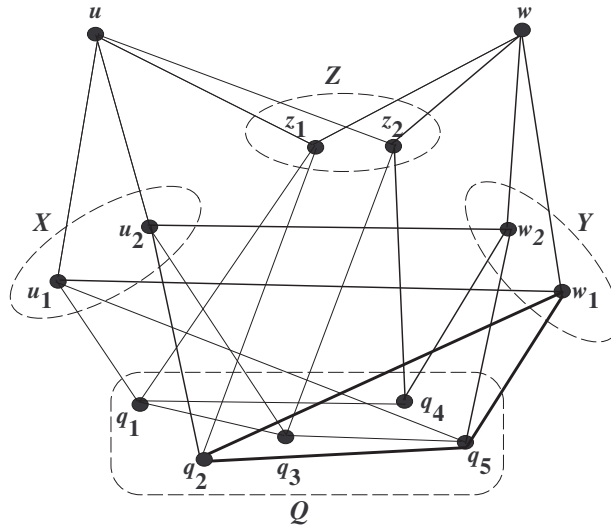


Gambar III.6. Gambaran pembuktian  $|Z_{F_1}(u, w)| = 2$  pada kombinasi 1.

**Subkasus 1.2** Kombinasi 4. Untuk kombinasi ini, dapat diasumsikan bahwa  $u_1$  bertetangga dengan  $q_1, q_5$ , dan  $u_2$  bertetangga dengan  $q_2, q_3$ . Dengan demikian,  $u_1$  dan  $u_2$  masing-masing masih harus bertetangga dengan satu titik di  $Y$ , katakanlah berturut-turut  $w_1$  dan  $w_2$ . Jika  $N_{Q \cup Y}(u_i)$  untuk suatu  $i \in \{1, 2\}$  bukan himpunan bebas, maka  $F_1$  memuat suatu  $K_3$ . Anggaplah bahwa untuk  $i = 1, 2$ ,  $N_{Q \cup Y}(u_i)$  merupakan himpunan bebas. Karena  $d_{F_1}(q_i) = 4$ , titik  $q_1$  bertetangga dengan dua titik di  $\{q_3, q_4, w_2\}$ , dan titik  $q_2$  bertetangga dengan dua titik di  $\{q_4, q_5, w_1\}$ . Misalkan  $q_1$  bertetangga dengan  $q_3$  dan  $q_4$ . Kemudian  $q_2$  bertetangga dengan  $q_5, w_1$ . Misalkan pula  $w_2$  bertetangga dengan  $q_4$  dan  $q_5$ . Untuk menghindari  $K_{2,3}$ ,  $w_1$  harus bertetangga dengan  $q_5$ . Akibatnya,  $w_1, q_5, q_2$  membentuk  $K_3$  di  $F_1$  (lihat Gambar III.7).

Konfigurasi ketetangaan titik-titik di  $F_1$  pada kombinasi 5 dan 6 juga serupa dengan konfigurasi ketetangaan titik-titik pada kombinasi 4. Ini artinya, pada setiap kombinasi, jika  $F_1$  tidak memuat  $K_{2,3}$ , maka  $F_1$  senantiasa memuat  $K_3$ .

*Catatan.* Perhatikan bahwa kasus  $|Z_{F_1}(u, w)| = 2$  di atas menyatakan  $F_1$  memuat  $K_{2,2}$ . Karena itu, dengan mencermati seluruh bukti pada Kasus 1, dapat disimpulkan bahwa ketika  $F_1$  tidak memuat  $K_{2,3}$  tetapi memuat suatu



Gambar III.7. Gambar pembuktian  $|Z_{F_1}(u, w)| = 2$  pada kombinasi 4.

$K_{2,2}$ , maka  $F_1$  pasti memuat suatu  $K_3$ .

**Kasus 2** Jika  $0 \leq |Z_{F_1}(u, w)| \leq 1$ .

Tulis  $E(N(u), Q \cup Y) = \{uv : u \in N(u), v \in Q \cup Y\}$ . Misalkan pula  $s \in N(u)$ . Jika  $s \in Z_{F_1}(u, w)$ , maka  $s$  harus bertetangga dengan dua titik di  $Q$ . Tetapi jika  $s \in X$ , maka  $s$  harus bertetangga dengan tiga titik di  $Q \cup Y$ . Dengan demikian,  $12 \geq |E(N(u), Q \cup Y)| \geq 11$ . Karena  $|Q \cup Y| = 7$ , maka terdapat paling sedikit satu titik di  $Q \cup Y$ , sebut  $q'$  mendapat paling sedikit dua sisi yang berasal dari  $N(u)$ . Karena itu,  $F_1$  memuat suatu  $K_{2,2}$ . Jadi,  $F_1$  tidak memuat  $K_{2,3}$  tetapi memuat  $K_{2,2}$ . Menurut Kasus 1,  $F_1$  memuat  $K_3$ .

Dari Kasus 1 dan 2 di atas, diketahui bahwa  $F_1$  senantiasa memuat  $K_{2,3}$  atau  $K_3$ . Menurut Lemma III.1, dapat disimpulkan bahwa  $F_1$  memuat suatu  $K_{2,6}$ . Dengan demikian, diperoleh  $R(S_6, K_{2,6}) \leq 13$ . ■

Dua teorema berikut adalah hasil penentuan  $R(S_6, K_{2,m})$  untuk nilai  $m$  yang besar baik ganjil maupun genap.



★ **Teorema III.11** Jika  $n \geq 4$  dan  $m = 4n - 7$ , maka  $R(S_6, K_{2,m}) = m + 8$ .

**Bukti.** Menurut Teorema III.4,  $R(S_6, K_{2,m}) \leq m + 8$  untuk  $m \geq 2$ . Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $R(S_6, K_{2,m}) \geq m + 8$  untuk  $m = 4n - 7$  dan  $n \geq 4$ . Konstruksi suatu graf  $F$  dengan  $|F| = 4n$  sebagai berikut. Bagi titik-titik  $F$  ke dalam dua himpunan yang saling lepas yakni:  $A = \{u_i : 0 \leq i \leq 2n - 1\}$  dan  $B = \{v_i : 0 \leq i \leq 2n - 1\}$ , untuk  $n \geq 4$ . Definisikan

$$E_F = \{u_i v_i, u_i v_{i+2}, u_i v_{i+5}, u_i v_{i+9} : 0 \leq i \leq 2n - 1, u_i \in A, v_i \in B\}$$

dengan  $i + j$  dinyatakan dalam modulo  $2n$  untuk suatu  $j \in \{0, 2, 5, 9\}$ .

Mudah dilihat bahwa  $F$  adalah graf  $4$ -*reguler*, sehingga tidak memuat  $S_6$ . Juga mudah diperiksa bahwa setiap  $u, v \in \overline{F}$ ,  $|N(u) \cap N(v)| = 0$  jika  $(u, v) \in E(F)$  dan  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$  jika  $(u, v) \notin E(F)$ . Karenanya,  $F$  tidak memuat  $K_3$  dan  $K_{2,3}$ . Menurut Lemma III.2,  $\overline{F}$  tidak memuat  $K_{2,m}$ . Jadi,  $R(S_6, K_{2,m}) \geq 4n + 1 = m + 8$  untuk  $m = 4n - 7$  dan  $n \geq 4$ . Dengan demikian, diperoleh  $R(S_6, K_{2,m}) = m + 8$  untuk  $m = 4n - 7$  dan  $n \geq 4$ . ■

★ **Teorema III.12**  $R(S_6, K_{2,m}) = m + 8$  untuk  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$  and  $k \in N$ .

**Bukti.** Menurut Teorema III.4,  $R(S_6, K_{2,m}) \leq m + 8$  untuk  $m \geq 2$ . Selanjutnya, menunjukkan bahwa  $R(S_6, K_{2,m}) \geq m + 8$  untuk  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$ .

Konstruksi suatu graf  $F$  sebagai berikut. Misalkan  $T_l(s)$  adalah pohon sempurna bercabang-3, dengan  $l = 5 + 4(\sum_{i=1}^k 3^i)$  dan  $k \in N$  serta  $d(s) = 4$ . Dapat ditulis  $l = m + 7$  untuk  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$ .

Ruas dari  $T_l(s)$  yang terkait dengan daun berjumlah  $4 \cdot 3^{k-1}$ . Lebih jauh, himpunan daun-daun yang terkait pada ruas yang sama disebut sebagai partisi. Dengan demikian, pohon  $T_l(s)$  mempunyai  $4 \cdot 3^{k-1}$  partisi. Partisi-partisi tersebut dibagi kedalam  $3^{k-1}$  grup, sehingga masing-masing grup mempunyai empat partisi.

Notasikan grup-grup itu sebagai  $S_1, S_2, \dots, S_{3^{k-1}}$ . Untuk  $i \in \{1, 2, \dots, 3^{k-1}\}$ , tulis keempat partisi pada setiap grup  $S_i$  sebagai berikut.  $S_i(V_1) = \{u_j : 0 \leq j \leq 2\}$ ,  $S_i(V_2) = \{v_j : 0 \leq j \leq 2\}$ ,  $S_i(V_3) = \{w_j : 0 \leq j \leq 2\}$ , dan  $S_i(V_4) = \{t_j : 0 \leq j \leq 2\}$ . Kemudian definisikan

$$E_{S_i} = \{u_j v_j, v_j w_j, w_j t_j, t_j u_j, u_j w_{j+1}, v_j t_{j+1} : 0 \leq j \leq 2\},$$

dengan  $j + 1$  bermodulo 3. Graf  $F$  adalah graf 4-*reguler* dengan  $V(F) = V(T_i(s))$  dan  $E(F) = E(T_i(s)) \cup_{i=1}^{3^{k-1}} E_{S_i}$ . Sangat jelas bahwa  $F$  tidak memuat  $S_6$  dan  $|F| = |T| = m + 7$  untuk  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$ . Juga mudah diperiksa bahwa setiap dua titik  $u, v \in F$ ,  $|N(u) \cap N(v)| = 0$  jika  $(u, v) \in E(F)$ , dan  $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$  jika  $(u, v) \notin E(F)$ . Karenanya,  $F$  tidak memuat  $K_3$  dan  $K_{2,3}$ . Menurut Lemma III.2,  $\overline{F}$  memuat  $K_{2,m}$ . Jadi,  $R(S_6, K_{2,m}) \geq m + 8$  untuk  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$ . ■

Teorema-teorema di atas telah ditulis dalam dua makalah. Masing-masing makalah dipresentasikan pada seminar *S3 Matematika Indonesia* di UPI tanggal 8 April 2006 dan pada *International Conference on Mathematics and Statistics (ICOMS-I)*, 19 - 21 Juni 2006.

Berdasarkan bilangan Ramsey  $R(S_n, H)$  yang telah diketahui pada Bab III ini, akan ditentukan bilangan Ramsey  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, H)$  dengan  $n_i$  untuk setiap  $i$  tidak harus sama. Kajian tersebut dibahas pada Bab IV.

## Bab IV Bilangan Ramsey untuk Graf Gabungan

Kajian penentuan bilangan Ramsey untuk suatu graf dengan gabungan saling lepas beberapa graf telah dilakukan oleh Burr dkk. (1975). Burr dkk. menunjukkan bahwa jika graf  $G$  berorde  $n_1$  dan graf  $H$  berorde  $n_2$ , serta  $\alpha(G)$  dan  $\alpha(H)$  masing-masing adalah kardinalitas himpunan bebas terbesar dari  $G$  dan  $H$ , maka

$$n_1s + n_2t - D \leq R(sG, tH) \leq n_1s + n_2t - D + k, \quad (\text{IV.1})$$

dengan  $D = \min\{s\alpha(G), t\alpha(H)\}$  dan  $k$  adalah suatu konstanta yang bergantung pada  $G$  dan  $H$ .

Berdasarkan asumsi pada Persamaan IV.1, dalam makalah yang sama, mereka menunjukkan bahwa terdapat bilangan konstanta  $n_3$  dan  $C_1$ , sehingga

$$R(nG, nH) = n(n_1 + n_2 - D) + C_1, \text{ untuk } n \geq n_3. \quad (\text{IV.2})$$

Jika  $G$  dan  $H$  pada persamaan di atas, keduanya adalah graf lengkap, maka bilangan Ramseynya sudah diperoleh. Hasil itu diberikan oleh Burr pada tahun (1987), yaitu

$$R(nK_s, nK_t) = n(s + t - 1) + R(K_{s-1}, K_{t-1}) - 2, \text{ untuk } n \text{ yang besar.} \quad (\text{IV.3})$$

Setahun setelah itu, yakni pada tahun 1988, Burr memperumum Persamaan IV.3 dengan hasil sebagai berikut. Jika  $n$  dan  $m$  besar, dan  $m \leq n$ , maka

$$R(mK_s, nK_t) = m(s - 1) + nt + R(K_{s-1}, K_{t-1}) - 2. \quad (\text{IV.4})$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa Burr dkk. hanya mengkaji bilangan Ramsey untuk graf-graf yang digandakan berkali-kali. Ini berarti graf yang diamati

terdiri dari beberapa komponen yang isomorfik. Pada bab ini penulis menyelidiki bilangan Ramsey untuk graf yang terdiri dari beberapa komponen yang orde atau strukturnya tidak harus sama. Pada Subbab IV.1 dibahas kajian bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas bintang dengan graf-graf tertentu,  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, H)$ . Sedangkan kajian bilangan Ramsey untuk gabungan sebarang graf ( $R(\cup_{i=1}^k G_i, H)$ ) dibahas pada Subbab IV.II. Pembuktian teorema pada bab ini pada umumnya menggunakan induksi matematika.

Sebelum membahas masing-masing bagian tersebut, terlebih dahulu disajikan batas atas bilangan Ramsey untuk graf yang digandakan berkali-kali  $R(kG, H)$ .

★ **Teorema IV.1** *Untuk graf  $G$  dan  $H$  yang terhubung dan  $k \geq 1$ ,  $R(kG, H) \leq R(G, H) + (k - 1)|V(G)|$ .*

**Bukti.** Misalkan  $G$  dan  $H$  adalah graf terhubung. Dengan menggunakan induksi atas  $k$ , akan ditunjukkan bahwa  $R(kG, H) \leq R(G, H) + (k - 1)|V(G)|$ . Pertaksamaan ini jelas dipenuhi untuk  $k = 1$ . Selanjutnya, asumsikan teorema benar untuk setiap  $r < k$ . Misalkan  $F$  adalah graf berorde  $R(G, H) + (k - 1)|V(G)|$ . Andaikan  $\bar{F}$  tidak memuat  $H$ . Menurut hipotesa induksi  $F$  memuat  $(k - 1)G$ . Jika  $T = F \setminus (k - 1)G$ , maka  $|T| = R(G, H)$ . Karena  $\bar{T}$  tidak memuat  $H$ ,  $T$  harus memuat  $G$ . Akibatnya,  $F$  memuat  $(k - 1)G \cup G$ . Jadi,  $R(kG, H) \leq R(G, H) + (k - 1)|V(G)|$ . ■

## IV.1 Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Gabungan Bintang dan Graf-Graf Tertentu

Penentuan bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas bintang dengan graf-graf tertentu  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, H)$  terbagi atas dua bagian. Bagian pertama adalah penentuan bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas bintang dan roda  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m)$ . Sedangkan bagian kedua adalah penentuan bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas bintang dan graf bipartit lengkap  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, K_{t,m})$ .

### IV.1.1 Bilangan Ramsey untuk kombinasi gabungan bintang dan roda

Pada bagian ini akan ditentukan penentuan bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas bintang dan roda  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m)$  dimana  $R(S_{n_i}, W_m)$  untuk setiap  $i$  telah diketahui. Hasil utama penentuan  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m)$  untuk sebarang  $n_i$  disajikan dalam tiga teorema berikut.

★ **Teorema IV.2** *Misalkan  $n_i$  adalah bilangan asli untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ . Misalkan pula  $n_i \geq n_{i+1} \geq 3$  untuk setiap  $i$ .*

1. *Jika  $n_i$  genap dan  $2n_{i+1} \geq n_i + 2$  untuk setiap  $i$ , maka  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4) = 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  untuk  $k \geq 2$ .*
2. *Jika  $n_i$  ganjil dan  $2n_{i+1} \geq n_i + 1$  untuk setiap  $i$ , maka  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4) = R(S_{n_k}, W_4) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  untuk  $k \geq 1$ .*

#### Bukti. Bukti Teorema bagian pertama

Misalkan  $n_i$  genap,  $n_i \geq 4$  untuk setiap  $i$  dan  $k \geq 2$ . Definisikan  $\ell = \frac{-2 + \sum_{i=1}^k n_i}{2}$ . Diberikan graf  $F \simeq (H_\ell + K_1) \cup H_{\frac{n_k}{2}}$ . Graf  $F$  berorde  $2n_k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  dan terdiri dari dua komponen. Komponen pertama adalah subgraf  $H_\ell + K_1$  dengan orde  $\sum_{i=1}^k n_i - 1$ . Mudah diperiksa bahwa  $H_\ell + K_1$  memuat  $\bigcup_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$ , tetapi tidak memuat  $\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}$ . Sedang komponen kedua adalah graf pesta  $H_{\frac{n_k}{2}}$ . Jelas bahwa  $H_{\frac{n_k}{2}}$  berorde  $n_k$  dengan  $\Delta(H_{\frac{n_k}{2}}) = n_k - 2$ . Telah diketahui bahwa  $\Delta(S_{n_k}) = n_k - 1$ . Jadi komponen kedua tidak memuat  $S_{n_k}$ . Dengan demikian,  $F$  tidak memuat  $\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}$ . Perhatikan bahwa  $\overline{F} \simeq \ell K_2 \cup K_1 + \frac{n_k}{2} K_2$ . Berarti  $\overline{F}$  adalah graf terhubung dan memuat  $C_4$ , tetapi tidak memiliki titik yang bertetangga dengan semua titik di  $C_4$ . Akibatnya,  $\overline{F}$  tidak memuat  $W_4$ . Karena itu,

$$R\left(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4\right) \geq 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i. \quad (\text{IV.5})$$

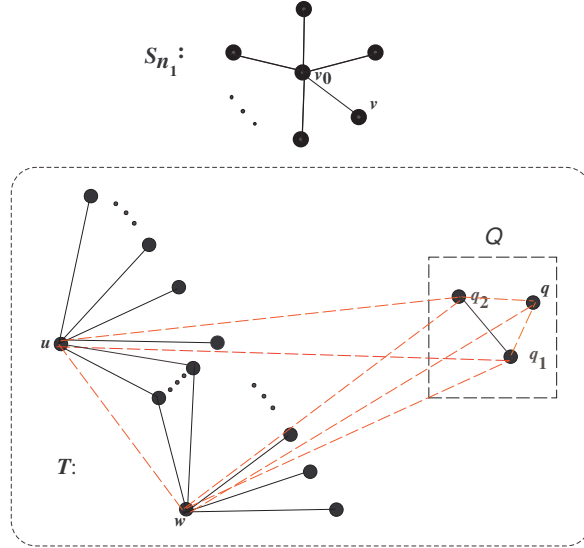
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4) \leq 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  untuk  $k \geq 2$ .

*Pembuktian dilakukan dengan dua tahap.*

*Tahap pertama.* Akan ditunjukkan bahwa  $R(S_{n_1} \cup S_{n_2}, W_4) \leq 2n_2 + n_1$ . Misalkan  $F_1$  adalah graf berorde  $2n_2 + n_1$ . Anggaplah bahwa  $\overline{F_1}$  tidak memuat  $W_4$ . Mengingat bahwa  $2n_2 \geq n_1 + 1$ , maka  $2n_2 + n_1 \geq 2n_1 + 1$ . Karena itu  $|F_1| \geq 2n_1 + 1$ . Menurut Persamaan II.17,  $|F_1| \geq R(S_{n_1}, W_4)$ . Karena  $\overline{F_1}$  tidak memuat  $W_4$  dan  $|F_1| \geq R(S_{n_1}, W_4)$ , jelas  $F_1$  memuat  $S_{n_1}$ . Tulis  $V(S_{n_1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n_1-1}\}$  dengan pusat  $v_0$ , dan  $T = F_1 \setminus S_{n_1}$ . Dalam hal ini  $|T| = 2n_2$ .

Jika terdapat titik  $u \in T$  dengan  $d_T(u) \geq (n_2 - 1)$ , maka  $T$  memuat  $S_{n_2}$ , yang berarti  $F_1$  memuat  $S_{n_2} \cup S_{n_1}$ . Bukti selesai. Karena itu, anggaplah bahwa setiap titik  $u \in T$ ,  $d_T(u) \leq (n_2 - 2)$ . Misalkan  $u$  dan  $w$  adalah sebarang dua titik pada  $T$  yang memenuhi  $(u, w) \notin E(T)$ . Dinotasikan  $Z = Z_T(u, w)$ ,  $O = O_T(u, w)$ ,  $H = O \cup \{u, w\}$ , dan  $Q = T \setminus H$ . Andaikan  $d_T(u) \leq n_2 - 3$ . Maka  $0 \leq |Z| \leq n_2 - 3$ ,  $2 \leq |H| \leq 2n_2 - 3$  dan  $2n_2 - 2 \geq |Q| \geq 3 + |Z|$ . Jika terdapat titik  $q \in Q$  yang tidak bertetangga dengan paling sedikit dua titik lain di  $Q$ , sebut  $q_1$  dan  $q_2$ , maka  $\overline{T}$  akan memuat suatu  $W_4 = \{q_1, u, q_2, q, w\}$  dengan pusat  $w$ , suatu kontradiksi, (lihat Gambar IV.1). Karena itu, setiap titik  $q \in Q$  tidak bertetangga dengan paling banyak satu titik lain di  $Q$ . Dengan kata lain, setiap titik  $q \in Q$  bertetangga dengan paling sedikit  $|Q| - 2$  titik lain di  $Q$ . Jadi,  $d_Q(q) \geq |Q| - 2$  untuk setiap  $q \in Q$ .

Definisikan  $E(O \setminus Z, Q) = \{uv : u \in O \setminus Z, v \in Q\}$ . Jika terdapat  $x \in O \setminus Z$  tidak bertetangga dengan paling sedikit dua titik di  $Q$ , sebut  $q_1$  and  $q_2$ , maka  $\overline{T}$  akan memuat  $W_4 = \{q_1, x, q_2, u, w\}$  yang berpusat di  $w$  atau  $u$ , juga suatu kontradiksi. Karena itu, setiap  $x \in O \setminus Z$  bertetangga dengan paling sedikit



Gambar IV.1. Ilustrasi pembuktian  $R(S_{n_1} \cup S_{n_2}, W_4) \leq 2n_2 + n_1$ .

$|Q| - 1$  titik di  $Q$ . Akibatnya,

$$|E(O \setminus Z, Q)| \geq |O \setminus Z| \cdot (|Q| - 1). \quad (\text{IV.6})$$

Sementara itu, setiap titik  $q \in Q$  terkait dengan paling banyak  $(n_2 - 2) - d_Q(q) \leq (n_2 - 2) - (|Q| - 2) = n_2 - |Q|$  sisi pada  $O \setminus Z$ . Jadi

$$|E(O \setminus Z, Q)| \leq |Q| \cdot (n_2 - |Q|). \quad (\text{IV.7})$$

Dari Persamaan IV.6 dan IV.7 diperoleh

$$|O \setminus Z| \cdot (|Q| - 1) \leq |E(O \setminus Z, Q)| \leq |Q| \cdot (n_2 - |Q|). \quad (\text{IV.8})$$

Sekarang, akan diperlihatkan bahwa  $|O \setminus Z| \cdot (|Q| - 1) > |Q| \cdot (n_2 - |Q|)$ , yang menunjukkan adanya suatu kontradiksi. Tulis

$$|O \setminus Z| \cdot (|Q| - 1) = |O \setminus Z| \cdot |Q| - |O \setminus Z|. \quad (\text{IV.9})$$

Perhatikan bahwa  $|O \setminus Z| = |T| - 2 - |Q| - |Z|$  atau

$$|O \setminus Z| = 2n_2 - 2 - |Q| - |Z|. \quad (\text{IV.10})$$

Substitusi Persamaan IV.10 ke Persamaan IV.9, diperoleh

$$|O \setminus Z| \cdot (|Q| - 1) = |Q| \cdot (n_2 - |Q|) + |Q| \cdot (n_2 - 2 - |Z|) + |Q| - n_2 - (n_2 - 2 - |Z|). \quad (\text{IV.11})$$

Mengingat  $|Q| \geq 3 + |Z|$ , maka

$$|Q| \cdot (n_2 - 2 - |Z|) + |Q| - n_2 - (n_2 - 2 - |Z|) > 0. \quad (\text{IV.12})$$

Substitusi Pertaksamaan IV.12 ke dalam Pertaksamaan IV.11 diperoleh

$$|O \setminus Z| \cdot (|Q| - 1) > |Q| \cdot (n_2 - |Q|). \quad (\text{IV.13})$$

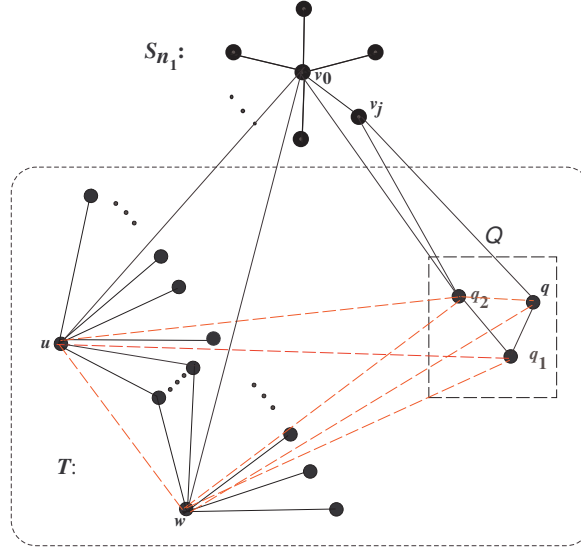
Jadi tidak terdapat  $u \in T$  dengan  $d(u) \leq n_2 - 3$ . Dengan demikian, setiap titik  $u \in T$ ,  $d_T(u) = n_2 - 2$ . Jelas,  $|Q| = 2 + |Z|$ .

Selanjutnya, andaikan  $F_1[Q]$  adalah subgraf lengkap. Maka setiap titik  $q \in Q$ ,  $d_Q(q) = |Q| - 1$ . Akibatnya, setiap titik di  $Q$  terkait dengan  $(n_2 - 2) - d_Q(q) = n_2 - 1 - |Q|$  sisi dari  $O \setminus Z$ . Berdasarkan Pertaksamaan IV.6 dan IV.7, diketahui bahwa  $|O \setminus Z| \cdot (|Q| - 1) \leq |Q| \cdot (n_2 - 1 - |Q|)$ . Sementara itu, menurut pertaksamaan IV.13,  $|O \setminus Z| \cdot (|Q| - 1) > |Q| \cdot (n_2 - 1 - |Q|)$ . Suatu hal yang tidak mungkin terjadi. Karena itu,  $F_1[Q]$  bukan subgraf lengkap.

Sekarang, pilih dua titik di  $Q$  yang tidak bertetangga, namakan  $q$  dan  $q_2$ . Kemudian misalkan  $Y = \{q, q_2\} \cup \{u, w\}$ . Dalam hal ini  $Y$  adalah himpunan titik bebas. Jika terdapat suatu titik  $v \in V(S_{n_1})$  yang bertetangga dengan paling banyak satu titik di  $Y$  sebut  $q$ , maka  $\{v, u, q, q_2, w\}$  akan membentuk roda  $W_4$  pada  $\overline{F}_1$ , dengan pusat  $w$ , suatu kontradiksi. Karena itu, setiap titik  $v \in V(S_{n_1})$  bertetangga dengan paling sedikit dua titik di  $Y$ . Anggaplah  $v_0$  dan  $v_j$  di  $V(S_{n_1})$  berturut-turut bertetangga dengan  $y_1, y_2$  dan  $y_3, y_4$  di  $Y$ . Mudah diperiksa bahwa paling sedikit dua titik dari tetangga-tetangga  $v_0$  dan



$v_j$  berbeda. Tanpa mengurangi keumuman pembuktian, dimisalkan  $y_1 \neq y_3$ . Karena  $Y$  bebas, maka diperoleh dua graf bintang baru, namakan  $S_{n_1}'$  dan  $S_{n_2}$ , dengan  $V(S_{n_1}') = S_{n_1} \setminus \{v_j\} \cup \{y_1\}$  berpusat di  $v_0$  dan  $V(S_{n_2}) = N[y_3] \cup \{v_j\}$  berpusat di  $y_3$  (lihat Gambar IV.2).



Gambar IV.2. Gambaran pembuktian  $R(S_{n_1} \cup S_{n_2}, W_4) \leq 2n_2 + n_1$ .

Jadi,  $F_1 \supseteq S_{n_1} \cup S_{n_2}$ . Karena itu,  $R(S_{n_1} \cup S_{n_2}, W_4) \leq 2n_2 + n_1$ .

*Tahap kedua.* Anggaplah teorema benar untuk setiap  $r < k$ . Akan ditunjukkan bahwa teorema juga benar untuk  $r = k$ , yakni  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4) \leq 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Misalkan  $F_2$  adalah graf berorde  $2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Anggaplah  $\overline{F_2}$  tidak memuat  $W_4$ . Akan ditunjukkan  $F_2 \supseteq \bigcup_{i=1}^k S_{n_i}$ . Menurut asumsi induksi,  $F_2 \supseteq \bigcup_{i=1}^{k-2} S_{n_i}$  dengan pusat berturut-turut  $v_1, v_2, \dots, v_{k-2}$ . Tulis  $T' = F_2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k-2} S_{n_i}$ . Jadi  $|T'| = 2n_k + n_{k-1}$ . Serupa dengan pembuktian pada tahap pertama,  $T'$  memuat  $S_{n_{k-1}} \cup S_{n_k}$ . Dengan demikian, diperoleh  $F_2$  memuat  $k$  graf bintang yang saling lepas, yaitu  $S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_{k-1}}$  and  $S_{n_k}$ . Karenanya diperoleh

$$R\left(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4\right) \leq 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i. \quad (\text{IV.14})$$

## Bukti Teorema bagian kedua

Misalkan  $n_i$  ganjil dan memenuhi  $2n_{i+1} \geq n_i$  untuk setiap  $i$ . Definisikan  $j = -1 + \sum_{i=1}^k n_i$ . Graf  $F_3 \simeq K_j \cup K_{n_k-1}$  berorde  $-2 + 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  dan terdiri dari dua komponen. Komponen pertama berorde  $-1 + \sum_{i=1}^k n_i$  sehingga hanya memuat  $\cup_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$  tetapi tidak memuat  $\cup_{i=1}^k S_{n_i}$ . Komponen kedua adalah graf lengkap berorde  $n_k - 1$  yang juga tidak memuat  $S_{n_k}$ . Jadi  $F_3$  tidak memuat  $\cup_{i=1}^k S_{n_i}$ .  $\overline{F_3}$  isomorfik dengan graf bipartit lengkap  $K_{kn-1, n-1}$ . Ini berarti bahwa  $\overline{F_3}$  memuat siklus genap termasuk  $C_4$ , tetapi tidak memuat  $W_4$ . Jadi,  $F_3$  merupakan graf kritis untuk  $\cup_{i=1}^k S_{n_i}$  dan  $W_4$ . Dengan demikian, diperoleh

$$R\left(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4\right) \geq -1 + 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i. \quad (\text{IV.15})$$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa  $R\left(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4\right) \leq -1 + 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Pembuktian menggunakan induksi atas  $k$ . Untuk  $k = 2$ , akan ditunjukkan bahwa  $R(S_{n_1} \cup S_{n_2}, W_4) \leq 2n_2 - 1 + n_1$ . Misalkan  $F'$  adalah graf sebarang dengan  $|F'| = 2n_2 - 1 + n_1 = 2n_1 - 1 + 2n_2 - n_1$ . Anggaplah  $\overline{F'}$  tidak memuat  $W_4$ . Akan diperlihatkan bahwa  $F'$  memuat  $S_{n_1} \cup S_{n_2}$ . Karena  $2n_2 \geq n_1$ ,  $|F'| \geq 2n_1 - 1$ . Menurut Persamaan II.17,  $F'$  memuat  $S_{n_1}$ . Misalkan  $T' = F' \setminus S_{n_1}$ . Akibatnya,  $|T'| = 2n_2 - 1$  sehingga  $T'$  memuat  $S_{n_2}$ . Karenanya  $F'$  memuat  $S_{n_1} \cup S_{n_2}$ . Jadi benar  $R(S_{n_1} \cup S_{n_2}, W_4) \leq 2n_2 - 1 + n_1$ . Asumsikan teorema benar untuk setiap  $r < k$ . Akan ditunjukkan bahwa teorema juga benar untuk  $r = k$ , yaitu  $R\left(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4\right) \leq -1 + 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Misalkan  $F_4$  adalah graf berorde  $-1 + 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Anggaplah  $\overline{F_4}$  tidak memuat  $W_4$ . Menurut hipotesa induksi,  $F_4$  memuat  $\bigcup_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$ . Tulis  $L = F_4 \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$ . Jadi  $|L| = 2n_k - 1$ . Karena  $\overline{L}$  tidak memuat  $W_4$ , menurut Persamaan II.17,  $L \supset S_{n_k}$ . Dengan demikian,  $F_4$  memuat  $\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}$ . Karena itu diperoleh

$$R\left(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4\right) \leq -1 + 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i. \quad (\text{IV.16})$$

Jadi,  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4) = -1 + 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i = R(S_{n_k}, W_4) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . ■

★ **Teorema IV.3** Misalkan  $n_i \geq n_{i+1}$  dan  $3 \leq m \leq 2n_i - 1$  untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ . Jika  $m$  ganjil dan  $3n_{i+1} \geq 2n_i$  untuk setiap  $i$ , maka  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m) = R(S_{n_k}, W_m) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ .

**Bukti.** Pembuktian dimulai dengan mencari batas atas  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m)$ . Dengan menggunakan induksi atas  $k$  akan ditunjukkan bahwa  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m) \leq R(S_{n_k}, W_m) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Pertaksamaan ini dipenuhi untuk  $k = 1$ . Untuk  $k = 2$ , akan ditunjukkan bahwa  $R(S_{n_1} \cup S_{n_2}, W_m) \leq R(S_{n_2}, W_m) + n_1$ . Misalkan  $F$  adalah graf sebarang dengan  $|F| = R(S_{n_2}, W_m) + n_1 = 3n_2 - 2 + n_1$ . Andaikan  $\overline{F}$  tidak memuat  $W_m$ . Karena  $3n_{i+1} \geq 2n_i$ , maka  $3n_{i+1} + n_i - 2 \geq 3n_i - 2$ . Akibatnya,  $|F| \geq 3n_1 - 2$ . Karena  $\overline{F}$  tidak memuat  $W_m$ , menurut Teorema III.1  $F$  memuat  $S_{n_1}$ . Jika  $T = F \setminus S_{n_1}$ , maka  $|T| = 3n_2 - 2$ . Karena  $\overline{T}$  tidak memuat  $W_m$ , maka  $T$  memuat  $S_{n_2}$ . Jadi  $F$  memuat  $S_{n_1} \cup S_{n_2}$ . Sekarang asumsikan teorema benar untuk setiap  $r < k$ . Akan ditunjukkan teorema juga benar untuk  $r = k$ , yaitu  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m) \leq R(S_{n_k, w_m}) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ .

Misalkan  $F$  adalah graf sebarang dengan  $|F| = 3n_k - 2 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Anggaplah bahwa  $\overline{F}$  tidak memuat  $W_m$ . Menurut hipotesa induksi  $|F| \geq R(\bigcup_{i=1}^r S_{n_i}, W_m)$  untuk setiap  $r < k$ . Karena  $\overline{F}$  tidak memuat  $W_m$ , menurut definisi bilangan Ramsey  $F \supset \bigcup_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$ . Tulis  $A = F \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$  dan  $T = F[A]$ . Kenyataannya,  $|T| = 3n_k - 2$ . Karena  $\overline{T}$  tidak memuat  $W_m$ , maka menurut Teorema III.1,  $T \supseteq S_{n_k}$ . Jadi  $F$  memuat  $\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}$ . Dengan demikian,  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m) \leq 3n_k - 2 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ .

Berikutnya, akan dicari batas bawah  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m)$ . Didefinisikan  $\ell = -1 + \sum_{i=1}^k n_i$ . Diberikan graf  $G \simeq K_\ell \cup 2K_{n_k-1}$ .  $G$  berorde  $3n_k - 3 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  dan terdiri dari tiga komponen, yaitu  $G_1 = K_\ell$ ,  $G_2 = K_{n_k-1}$ , dan  $G_3 = K_{n_k-1}$ . Komponen pertama  $G_1$  hanya memuat  $\bigcup_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$ , tetapi tidak memuat  $\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}$ . Sedang komponen kedua dan ketiga berorde sama, yaitu  $n_k - 1$ , sehingga tidak memuat  $S_{n_k}$ . Dengan demikian,  $G$  tidak memuat  $\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}$ . Mudah untuk

diperiksa bahwa komplemen dari  $G$  adalah graf tripartit, dengan himpunan titik  $V(G_1), V(G_2)$  dan  $V(G_3)$ . Jika poros roda berada pada  $V(G_1)$ , maka rim roda ( $C_m$ ) berada pada kedua himpunan titik lainnya, yakni  $V(G_2)$  dan  $V(G_3)$ . Subgraf yang diinduksi oleh  $V(G_2)$  dan  $V(G_3)$  adalah bipartit lengkap. Menurut Teorema II.2, subgraf tersebut tidak memuat  $C_m$  untuk  $m$  ganjil. Dengan demikian,  $\overline{G}$  tidak memuat  $W_m$  untuk  $m$  ganjil. Karena itu,  $G$  merupakan graf kritis untuk  $\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}$  dan  $W_m$ ,  $m$  ganjil. Jadi,  $R(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m) \geq 3n_k - 2 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . ■

★ **Teorema IV.4** *Jika  $n$  ganjil,  $n \geq 5$ , maka  $R(kS_n, W_m) = R(S_n, W_m) + (k-1)n$  untuk  $m = 2n-2, 2n-4, 2n-6$ , atau  $2n-8$ .*

**Bukti.** Menurut Teorema IV.1,  $R(kS_n, W_m) \leq R(S_n, W_m) + (k-1)n$ .

Misalkan  $m = 2n-2$  atau  $m = 2n-4$ . Pandang  $F \simeq K_{kn-1} \cup K_{n-2, n-2}$ . Graf  $F$  berorde  $(3n-5) + (k-1)n$  dan terdiri dari dua komponen. Komponen pertama hanya memuat  $(k-1)S_n$ , tetapi tidak memuat  $kS_n$ , dan komponen kedua tidak memuat  $S_n$ . Jadi  $F$  tidak memuat  $kS_n$ . Sedangkan  $\overline{F}$  merupakan graf terhubung dengan siklus terbesar  $C_{2n-6}$ . Jadi  $\overline{F}$  tidak memuat  $W_m$  untuk  $m = 2n-2$  atau  $m = 2n-4$ . Karena itu,

$$R(kS_n, W_m) \geq (3n-4) + (k-1)n. \quad (\text{IV.17})$$

Untuk  $m = 2n-6$  atau  $m = 2n-8$ , pandang  $F \simeq K_{kn-1} \cup [(\frac{n-3}{2})K_2 + (\frac{n-3}{2})K_2]$ . Graf  $F$  terdiri dari dua komponen dan berorde  $2n-6 + kn-1 = 3n-6 + (k-1)n-1$ . Komponen pertama adalah graf lengkap berorde  $kn-1$  sehingga tidak memuat  $kS_n$ , dan komponen kedua adalah graf bipartit dengan masing-masing partisi memuat subgraf  $(\frac{n-3}{2})K_2$ . Graf bintang akan berpusat pada sembarang titik di salah satu partisi tersebut, sedangkan titik-titik lain dari bintang berada pada partisi lainnya. Dengan demikian, bintang terbesar yang termuat pada komponen kedua adalah  $S_{n-2}$ . Ini berarti bahwa komponen kedua tidak memuat  $S_n$ . Karena itu,  $F$  tidak memuat  $kS_n$ . Komplemen dari  $F$  memuat roda besar

$W_{2n-10}$  atau  $W_{n-3}$ . Untuk kasus  $n \geq 7$ , jelas bahwa  $2n - 10 > n - 3$  sehingga roda terbesar yang termuat di  $\overline{F}$  adalah  $W_{2n-10}$ . Dengan demikian,  $\overline{F}$  tidak memuat  $W_m$  untuk  $m = 2n - 6$  atau  $2n - 8$ . Karena itu,  $F$  adalah graf kritis bagi  $kS_n$  dan  $W_m$ . Jadi,

$$R(kS_n, W_m) \geq (3n - 6) + (k - 1)n \text{ untuk } m = 2n - 6 \text{ atau } 2n - 8. \quad (\text{IV.18})$$

Dari Pertaksamaan IV.17 dan IV.18 dan dengan memperhatikan Teorema III.2, diketahui bahwa  $R(kS_n, W_m) \geq R(S_n, W_m) + (k - 1)n$  untuk  $m = 2n - 2, 2n - 4, 2n - 6$  atau  $2n - 8$ . ■

### IV.1.2 Bilangan Ramsey untuk kombinasi gabungan bintang dan graf bipartit lengkap

Bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap  $R(S_n, K_{2,m})$ , dengan  $3 \leq n \leq 8$  dan beberapa nilai  $m$  tertentu telah dibahas pada Subbab III.2. Pada bagian ini, akan dibahas bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas  $k$  bintang dan graf bipartit lengkap  $R(kS_n, K_{2,2})$  untuk sebarang bilangan asli  $n$  dan  $k \geq 2$ . Pokok isi dituliskan dalam dua teorema yang pembuktiannya saling terkait. Untuk memudahkan pembaca, maka pencarian batas bawahnya dibahas tersendiri dan dituliskan dalam lemma berikut.

★ **Lemma IV.3** Untuk  $k \geq 2$  dan  $p \geq 3$ ,  $R(kS_{1+p}, K_{2,2}) \geq k(p + 1) + 1$ .

**Bukti.** Misalkan  $p \geq 3$  dan  $k \geq 2$ . Diberikan graf  $F := K_{k(p+1)-1} \cup K_1$ . Graf  $F$  berorde  $k(p + 1)$  dan terdiri dari dua komponen. Komponen pertama adalah  $K_{k(p+1)-1}$  dan komponen kedua adalah  $K_1$ . Subgraf lengkap  $K_{k(p+1)-1}$  hanya memuat  $(k - 1)S_{p+1}$ , tetapi tidak memuat  $kS_{p+1}$ . Sangat jelas bahwa  $K_1$  tidak memuat  $S_{p+1}$ . Dengan demikian,  $F$  tidak memuat  $kS_{p+1}$ . Tidak sulit untuk memeriksa bahwa  $\overline{F}$  adalah isomorfik dengan bintang  $K_{1,k(p+1)-1}$ , sehingga  $\overline{F}$  tidak memuat  $K_{2,2}$ . Karena itu, diperoleh  $R(kS_{1+p}, K_{2,2}) \geq k(p + 1) + 1$ . ■

★ **Teorema IV.5** Untuk  $p \geq 3$ ,  $R(2S_{1+p}, K_{2,2}) = 2(p+1) + 1$ .

**Bukti.** Misalkan  $F_1$  adalah graf berorde  $2(p+1) + 1$  untuk  $p \geq 3$ . Anggaplah  $\overline{F}_1$  tidak memuat  $K_{2,2}$ . Menurut batas atas Parsons pada Teorema II.15,  $R(S_{p+1}, K_{2,2}) \leq p + \sqrt{p} + 1$ . Jadi  $|F_1| \geq R(S_{1+p}, K_{2,2})$ . Karena  $\overline{F}_1$  tidak memuat  $K_{2,2}$ , maka  $F_1 \supseteq S_{1+p}$ . Misalkan titik pusat dari  $S_{1+p}$  dinotasikan  $v_0$  dan  $T = F_1 \setminus S_{1+p}$ . Jadi subgraf  $T$  berorde  $p+2$ .

Jika terdapat  $v \in T$  dengan  $d_T(v) \geq p$ , maka  $T$  memuat  $S_{1+p}$ , sehingga  $F_1$  memuat  $2S_{1+p}$ . Sekarang, anggaplah bahwa untuk setiap titik  $v \in T$ ,  $d_T(v) \leq (p-1)$ . Misalkan  $u$  adalah sebarang titik di  $T$ . Tulis  $Q = T \setminus N_T[u]$ . Jelas,  $|Q| \geq 2$ .

**Fakta 1** *Setiap titik  $s \in F_1$ ,  $s \neq u$  tidak bertetangga dengan paling banyak satu titik di  $Q$ . (Jika terdapat titik  $s \in F_1$  dengan  $s \neq u$  yang tidak bertetangga dengan paling sedikit dua titik di  $Q$ , sebut  $q_1$  dan  $q_2$ , maka  $\overline{F}[\{s, u\} \cup \{q_1, q_2\}]$  akan memuat  $K_{2,2}$ , suatu kontradiksi.)*

Misalkan  $u$  bertetangga dengan paling sedikit  $p - |N_T(u)|$  titik di  $S_{1+p} - v_0$ , namakan  $v_1, \dots, v_{p-|N_T(u)|}$ . Menurut Fakta 1, titik  $v_0$  bertetangga dengan paling sedikit  $|Q| - 1$  titik di  $Q$ , sebut  $q_1, \dots, q_{p-|N_T(u)|}$ . Karena  $(p - |N_T(u)|) = |Q| - 1$ , maka titik-titik  $q_1, \dots, q_{p-|N_T(u)|}$  dapat menggantikan titik-titik  $v_1, \dots, v_{p-|N_T(u)|}$ . Dengan demikian, diperoleh dua bintang baru, namakan  $S'_{1+p}$  dan  $S''_{1+p}$ , dengan

$$V(S'_{1+p}) = (S_{1+p} \setminus \{v_1, \dots, v_{p-|N_T(u)|}\}) \cup \{q_1, \dots, q_{p-|N_T(u)|}\}$$

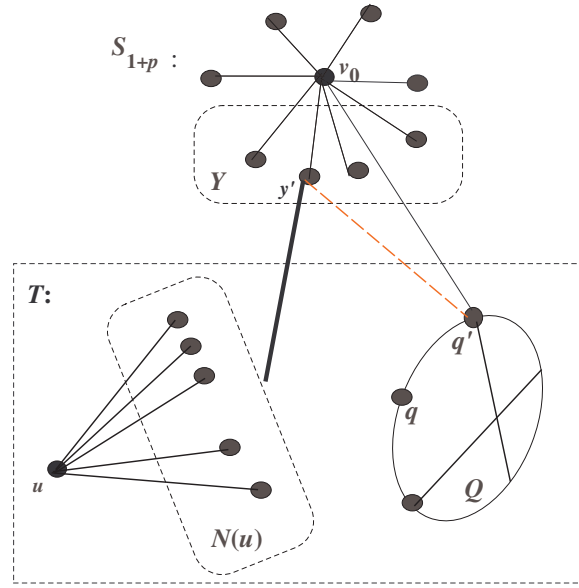
berpusat di  $v_0$  dan

$$V(S''_{1+p}) = N_T[u] \cup \{v_1, \dots, v_{p-|N_T(u)|}\}$$

berpusat di  $u$ . Jadi, diperoleh  $F_1 \supseteq 2S_{1+p}$ .

Sekarang, anggaplah bahwa titik  $u$  bertetangga dengan paling banyak  $p - |N_T(u)| - 1$  titik di  $S_{1+p} - v_0$ . Ini artinya titik  $u$  tidak bertetangga dengan paling sedikit  $|S_{1+p} - v_0| - (p - |N_T(u)| - 1) = |N_T(u)| + 1$  titik di  $S_{1+p} - v_0$ . Jika  $Y = \{y \in S_{1+p} - v_0 : yu \notin E(F_1)\}$ , maka  $|Y| \geq |N_T(u)| + 1 \geq 1$ .

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa terdapat  $y' \in Y$  yang bertetangga dengan semua titik di  $N_T(u)$ , (dapat dilihat pada Gambar IV.3).



Gambar IV.3. Gambaran bukti Teorema 1.

Andaikan setiap titik  $y \in Y$ , bertetangga dengan paling banyak  $|N_T(u)| - 1$  titik di  $N_T(u)$ . Karena  $|N_T(u)| < |Y|$ , terdapat paling sedikit satu titik, sebut  $r_0$  di  $N_T(u)$  sehingga  $r_0$  tidak bertetangga dengan paling sedikit dua titik di  $Y$ , sebut  $y_1$  dan  $y_2$ . Hal ini mengakibatkan,  $\overline{F_1}[u, r_0, y_1, y_2]$  membentuk suatu  $K_{2,2}$ , suatu kontradiksi. Jadi mestilah terdapat paling sedikit satu titik  $y' \in Y$  yang bertetangga dengan semua titik di  $N(u)$ . Akibatnya,  $|N_T(y')| \geq |N_T(u)| + |Q| - 1 = |T| - 2 = p$ . Sementara itu, menurut Fakta 1,  $y'$  tidak bertetangga dengan paling banyak satu titik di  $Q$ , sebut  $q'$ .

Jika  $v_0u \notin E(F_1)$ , maka  $v_0$  harus bertetangga dengan  $q'$ . Jika tidak demikian,  $\overline{F_1}[\{u, v_0, q', y'\}]$  memuat  $K_{2,2}$ . Dengan demikian, terdapat dua bintang yang

baru, namakan  $S_{1+p}^1$  dan  $S_{1+p}^2$ , dengan  $V(S_{1+p}^1) = N_T[y']$  berpusat di  $y'$  dan  $V(S_{1+p}^2) = (V(S_{1+p}) \setminus \{y'\}) \cup \{q'\}$ . Jika  $v_0u \in E(F_1)$ , maka juga terdapat dua bintang baru. Yang pertama adalah  $S_{1+p}^1$  dan yang kedua sebut  $S_{1+p}^3$  dengan  $V(S_{1+p}^3) = (V(S_{1+p}) \setminus \{y'\}) \cup \{u\}$ , dengan pusat  $v_0$ . Pada kasus  $y'$  bertetangga dengan semua titik di  $Q$  dan  $v_0u \notin E(F_1)$ , maka bintang yang kedua adalah  $S_{1+p}^4$  dengan  $V(S_{1+p}^4) = (V(S_{1+p}) \setminus \{y'\}) \cup \{q\}$ , untuk  $q \in Q$  dan  $v_0$  sebagai pusat. Kenyataan bahwa  $v_0q \in E(F_1)$  dijamin oleh Fakta 1. Dengan demikian,  $F_1 \supseteq 2S_{1+p}$ . Jadi,  $R(2S_{1+p}, K_{2,2}) \leq 2(p+1) + 1$ . ■

★ **Teorema IV.6** Untuk  $p \geq 3$  dan  $k \geq 2$ ,  $R(kS_{1+p}, K_{2,2}) = k(p+1) + 1$ .

**Bukti.** Teorema akan dibuktikan dengan menggunakan induksi. Asumsikan teorema benar untuk setiap  $2 \leq r < k$ . Akan ditunjukkan bahwa teorema juga benar untuk  $r = k$ , yakni  $R(kS_{1+p}, K_{2,2}) = k(p+1) + 1$ . Misalkan  $F_2$  adalah graf berorde  $k(p+1) + 1$ . Anggaplah  $\overline{F_2}$  tidak memuat  $K_{2,2}$ . Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $F_2 \supseteq kS_{1+p}$ . Menurut hipotesa induksi,  $F_2 \supseteq (k-1)S_{1+p}$ . Jika  $L = F_2 \setminus (k-2)S_{1+p}$ , maka  $|L| = 2(p+1) + 1$ . Menurut Teorema IV.5,  $|L| = R(2S_{1+p}, K_{2,2})$ . Karena  $\overline{L}$  tidak memuat  $K_{2,2}$ , berdasarkan definisi bilangan Ramsey  $L$  pasti memuat  $2S_{1+p}$ . Dengan demikian,  $F_2$  memuat  $(k-2)S_{1+p} \cup 2S_{1+p} = kS_{1+p}$ . Jadi,  $R(kS_{1+p}, K_{2,2}) \leq k(p+1) + 1$ . ■

## IV.2 Bilangan Ramsey untuk Kombinasi Gabungan Sebarang Graf dan Beberapa Graf Tertentu

Dalam subbab ini akan dibahas penentuan bilangan Ramsey untuk gabungan sebarang graf dan beberapa graf tertentu. Diantaranya, penentuan bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas pohon dan roda berorde empat serta penentuan bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas pohon dan graf lengkap. Hasilnya disajikan dalam dua teorema berikut.

★ **Teorema IV.7** Misalkan  $n_i$  adalah bilangan asli untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ . Misalkan pula  $n_i \geq n_{i+1} \geq 3$  untuk setiap  $i$ . Jika  $n_i$  ganjil dan  $2n_{i+1} \geq n_i$  untuk setiap  $i$ , maka  $R(\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}, W_4) = R(T_{n_k}, W_4) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  untuk  $k \geq 1$ .



Dari Persamaan II.17 dan Teorema II.11 diketahui bahwa jika  $n$  ganjil, maka  $R(T_n, W_4) = 2n - 1$  untuk sebarang pohon  $T_n$ . Berdasarkan hasil ini, Teorema IV.7 dapat dibuktikan dengan proses pembuktian serupa dengan proses pembuktian Teorema IV.2.2.

★ **Teorema IV.8** *Misalkan  $n_i$  adalah bilangan asli untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ . Misalkan pula  $n_i \geq n_{i+1}$  untuk setiap  $i$ . Jika  $n_i > (n_i - n_{i+1})(m - 1)$  untuk setiap  $i$ , maka  $R(\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}, K_m) = R(T_{n_k}, K_m) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  untuk sebarang  $m$ .*

**Bukti.** Misalkan  $n_i \geq n_{i+1}$  dan  $n_i \geq (n_i - n_{i+1})(m - 1)$  untuk setiap  $i$ . Pandang graf  $F = (m - 2)K_{n_k-1} \cup K_{\sum_{i=1}^k n_i-1}$ . Graf  $F$  berorde  $(m - 1)(n_k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$  dan tidak memuat  $\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}$ . Graf  $\overline{F}$  merupakan graf multipartit lengkap yaitu  $K_{\sum_{i=1}^k n_i-1, (m-2) \times (n_k-1)}$ . Mudah untuk dilihat bahwa setiap titik pada  $\overline{F}$  berderajat  $m - 2$ . Karena itu  $\overline{F}$  tidak memuat  $K_m$ . Jadi,  $R(\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}, K_m) \geq (m - 1)(n_k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$ .

Pembuktian selanjutnya menggunakan induksi. Tetapkan  $m$  dan aplikasikan induksi atas  $k$ . Untuk  $k = 2$ , akan ditunjukkan  $R(T_{n_1} \cup T_{n_2}, K_m) \leq (m - 1)(n_2 - 1) + n_1 + 1$ . Misalkan  $F_1$  graf berorde  $(m - 1)(n_2 - 1) + 1 + n_1$ . Anggaplah  $\overline{F_1}$  tidak memuat  $K_m$ . Karena  $n_1 \geq n_2$ , maka dapat ditulis  $n_1 - n_2 = q \geq 0$ . Substitusi  $n_2 = n_1 - q$ . Diperoleh  $|F_1| = (m - 1)(n_1 - q - 1) + n_1 + 1 = (m - 1)(n_1 - 1) - q(m - 1) + n_1 + 1$  atau  $|F_1| = (m - 1)(n_1 - 1) + 1 + [n_1 - (n_1 - n_2)(m - 1)]$ . Mengingat  $n_1 - (n_1 - n_2)(m - 1) \geq 0$ , maka  $|F_1| \geq (m - 1)(n_1 - 1) + 1$  atau  $|F_1| \geq R(T_{n_1}, K_m)$ . Karena  $\overline{F_1}$  tidak memuat  $K_m$ , menurut definisi bilangan Ramsey  $F_1 \supseteq T_{n_1}$ . Sekarang, misalkan  $H = F_1 \setminus T_{n_1}$ . Jelas,  $|H| = (m - 1)(n_2 - 1) + 1$ . Karena  $\overline{H}$  tidak memuat  $K_m$ , maka menurut Teorema II.7,  $H \supseteq T_{n_2}$ . Jadi,  $F_1$  memuat suatu subgraf  $T_{n_1} \cup T_{n_2}$ .

Selanjutnya, asumsikan teorema benar untuk setiap  $r < k$ . Akan ditunjukkan bahwa teorema juga benar untuk  $r = k$ , yaitu  $R(\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}, K_m) = (m - 1)(n_k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$ . Misalkan  $F_2$  adalah graf sebarang dengan orde  $(m - 1)(n_k -$

1) +  $\sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$ . Andaikan  $\overline{F_2}$  tidak memuat  $K_m$ . Berdasarkan hipotesa induksi,  $F_2$  memuat  $\bigcup_{i=1}^{k-1} T_{n_i}$ . Tulis  $Q = F_2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} T_{n_i}$ . Mudah dihitung bahwa  $|Q| = (m-1)(n_k-1) + 1$ . Menurut Teorema II.7,  $Q$  memuat  $T_{n_k}$  atau  $K_m$ . Karena  $\overline{Q}$  tidak memuat  $K_m$ ,  $Q$  memuat  $T_{n_k}$ . Dengan demikian,  $F_2$  memuat  $\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}$ . Jadi,  $R(\bigcup_{i=1}^k T_{n_i}, K_m) \leq (m-1)(n_k-1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$ . ■

Bahasan berikutnya adalah penentuan bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas graf  $G_i$  dan sebarang graf  $H$  dimana bilangan Ramsey  $R(G_i, H)$  untuk setiap  $i$  diketahui. Di sini,  $G_i$  untuk setiap  $i$  juga sebarang dan ordenya tidak harus sama. Dengan demikian, kajian ini merupakan perumuman dari beberapa kajian yang telah dibahas sebelumnya. Karena itu, Teorema IV.9 berikut, sebagai hasil utama kajian ini, merupakan perumuman dari beberapa teorema sebelumnya.

★ **Teorema IV.9** *Misalkan  $H$  dan  $G_i$  adalah graf terhubung dengan  $|G_i| \geq |G_{i+1}|$ , untuk  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Jika  $|G_i| > (|G_i| - |G_{i+1}|)(\chi(H) - 1)$  dan  $R(G_i, H) = (\chi(H) - 1)(|G_i| - 1) + 1$  untuk setiap  $i$ , maka  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) = R(G_k, H) + \sum_{i=1}^{k-1} |G_i|$ .*

**Bukti.** Misalkan  $|G_i| = n_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ . Akan ditunjukkan bahwa  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) = (\chi(H) - 1)(n_k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$  jika  $R(G_i, H) = (\chi(H) - 1)(n_i - 1) + 1$  untuk setiap  $i$ . Diberikan graf  $F := (\chi(H) - 2)K_{n_k-1} \cup K_s$  dengan  $s = -1 + \sum_{i=1}^k n_i$ . Graf  $F$  berorde  $(\chi(H) - 1)(n_k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$  dan tidak memuat  $\bigcup_{i=1}^k G_i$ . Selanjutnya, dapat diperiksa bahwa  $\overline{F}$  terdiri dari  $\chi(H) - 1$  partisi. Ini berarti bahwa bilangan kromatik  $\overline{F}$  adalah  $\chi(H) - 1$ . Dengan demikian,  $\overline{F}$  tidak memuat graf dengan bilangan kromatik  $\chi(H)$ . Jadi,  $\overline{F}$  tidak memuat  $H$ . Karenanya,  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) \geq (\chi(H) - 1)(n_k - 1) + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ .

Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) \leq (\chi(H) - 1)(n_k - 1) + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa  $R(G_1 \cup G_2, H) \leq (\chi(H) - 1)(n_2 - 1) + n_1 + 1$ . Misalkan  $F_1$  adalah sebarang graf dengan  $|F_1| = (\chi(H) - 1)(n_2 - 1) + 1 + n_1$ . Andaikan  $\overline{F_1}$  tidak memuat  $H$ . Akan ditunjukkan  $F_1$  memuat

$G_1 \cup G_2$ . Misalkan  $n_1 - n_2 = q$  untuk suatu  $q$ . Dapat ditulis  $n_2 = n_1 - q$ . Karena  $|F_1| = (\chi(H) - 1)(n_1 - q - 1) + 1 + n_1 = (\chi(H) - 1)(n_1 - 1) + 1 + n_1 - (n_1 - n_2)(\chi(H) - 1)$  dan  $n_1 - (n_1 - n_2)(\chi(H) - 1) > 0$ , maka  $|F_1| \geq (\chi(H) - 1)(n_1 - 1) + 1 = R(G_1, H)$ . Jadi  $F_1$  memuat  $G_1$ .

Definisikan  $A = F_1 \setminus G_1$ , dan  $T = F_1[A]$ . Dengan demikian,  $|T| = (\chi(H) - 1)(n_2 - 1) + 1$ . Jadi,  $|T| = R(G_2, H)$ . Karena  $\overline{T}$  tidak memuat  $H$ , menurut definisi bilangan Ramsey  $T$  memuat  $G_2$ . Jadi,  $F_1$  memuat  $G_1 \cup G_2$ . Karenanya,  $R(G_1 \cup G_2, H) \leq (\chi(H) - 1)(n_2 - 1) + n_1 + 1$ .

Sekarang asumsikan teorema benar untuk setiap  $r < k$ . Akan ditunjukkan bahwa  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) \leq (\chi(H) - 1)(n_k - 1) + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . Misalkan  $F_2$  adalah graf berorde  $(\chi(H) - 1)(n_k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$ . Anggaplah  $\overline{F_2}$  tidak memuat  $H$ . Berdasarkan hipotesa,  $F_2$  senantiasa memuat  $\bigcup_{i=1}^{k-1} G_i$ . Misalkan  $Q = F_2 \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i$ . Mudah untuk dilihat bahwa  $|Q| = (\chi(H) - 1)(n_k - 1) + 1 = R(G_k, H)$ . Mengingat  $\overline{Q}$  tidak memuat  $H$ , maka  $Q$  pasti memuat  $G_k$ . Jadi,  $F_2$  memuat  $\bigcup_{i=1}^k G_i$ . Karena itu,  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) \leq (\chi(H) - 1)(n_k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$ .

Dengan demikian,  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) = (\chi(H) - 1)(n_k - 1) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$  atau  $R(\bigcup_{i=1}^k G_i, H) = R(G_k, H) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ . ■

Pada Tabel IV.1, disajikan beberapa bilangan Ramsey yang nilainya sama dengan batas bawah Chvátal-Harary. Dengan mengaplikasikan Teorema IV.9, dan memanfaatkan hasil-hasil pada Tabel IV.1, diperoleh banyak bilangan Ramsey untuk gabungan beberapa graf. Sebagai contoh, diperoleh  $R(kT_n, K_m)$ ,  $R(kC_n, W_m)$ ,  $R(kC_n, C_m)$ ,  $R(kK_{1,n}, C_m)$ ,  $R(k_1C_n \cup k_2S_n, W_m)$  untuk  $m$  ganjil,  $m \geq 5$  dan  $n \geq \frac{5m-9}{2}$ ,  $R(k_1C_n \cup k_2T_n \cup k_3S_n, W_5)$  dan  $R(k_1C_n \cup k_2T_{n-1} \cup k_3S_{n-3}, W_5)$ ,  $n \geq 8$ , untuk beberapa bilangan asli  $k, k_1, k_2$  dan  $k_3$ .

Tabel IV.1. Bilangan Ramsey  $R(G, H)$ 

$G, H$	$(\chi(H) - 1)(n(G) - 1) + 1$	interval	ref.
$T_n, W_5$	$3n - 2$	$n \geq 3$	[1]
$T_n, K_m$	$(n - 1)(m - 1) + 1$	sebarang $n, m$	[5]
$C_n, W_m$	$3n - 2$	$m$ ganjil, $m \geq 5, n \geq \frac{5m-9}{2}$	[10]
$S_n, W_m$	$3n - 2$	$m$ ganjil, $n \geq 3, m \leq 2n - 1$	[7]
$C_n, C_m$	$2n - 1$	$m$ ganjil, $3 \leq m \leq n$	[9]
$S_{1+n}, C_m$	$m$	$m$ genap $m \geq 2n$	[8]

Beberapa teorema pada Bab IV ini telah ditulis dalam tiga makalah. Dua makalah telah terbit melalui jurnal Discrete Mathematics (2006) dan (2007), (lihat Baskoro dkk. (2006) dan Hasmawati dkk. (2007)). Satu makalah lainnya akan diterbitkan pada Jurnal Computational Kyoto International Conference on Geometry and Graph Theory, 2007, Japan.

## Bab V Kesimpulan

Dalam disertasi ini telah dilakukan pengkajian bilangan Ramsey untuk graf-graf yang memuat bintang. Hasil-hasil yang telah diperoleh sebelumnya, yang terkait dengan masalah ini, antara lain: bilangan Ramsey untuk bintang dan roda  $R(S_n, W_m)$ , bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap  $R(S_n, K_{t,m})$ , dan bilangan Ramsey untuk pohon dan graf lengkap  $R(T_n, W_m)$ .

Bilangan Ramsey untuk bintang dan roda  $R(S_n, W_m)$  untuk  $m$  ganjil dan  $n \geq m - 1 \geq 2$ , diberikan oleh Chen dkk. (2004). Untuk  $m$  genap,  $R(S_n, W_4)$ ,  $R(S_n, W_6)$ , dan  $R(S_n, W_8)$  untuk  $n \geq 3$ , berturut-turut diberikan oleh Baskoro dkk. (2002), Chen dkk. (2004), dan Zhang (2004). Bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap,  $R(S_{16}, K_{2,2}) = 20$  diberikan oleh Lawrence (1973),  $R(S_8, K_{2,3}) = 13$  diberikan oleh Parsons (1975), dan hasil yang diberikan oleh Rosyida (2004) adalah  $R(S_4, K_{t,m})$  untuk  $t, m \geq 2$  dan  $R(S_5, K_{2,m})$  untuk  $m \geq 2$ .

Dalam disertasi ini, diperoleh hasil yang lebih umum untuk  $R(S_n, W_m)$  dengan  $m$  ganjil dan  $3 \leq m \leq 2n - 1$ . Juga telah diperoleh  $R(S_n, W_m)$  untuk  $n$  ganjil dan  $m$  genap,  $m = 2n - 2, 2n - 4, 2n - 6$ , atau  $2n - 8$ . Untuk nilai-nilai  $n_i \geq n_{i+1}$  /\*-untuk setiap  $i$  dan  $m$  ganjil,  $3 \leq m \leq 2n_i - 1$  untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ , jika  $3n_{i+1} \geq 2n_i$  untuk setiap  $i$ , maka dapat ditunjukkan bahwa

$$R\left(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_m\right) = R(S_{n_k}, W_m) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i.$$

Diperoleh Formula yang serupa, jika  $m = 4$  dan  $n_i$  ganjil,  $n_i \geq n_{i+1}$  serta  $2n_{i+1} \geq n_i + 1$  untuk setiap  $i$ . Untuk  $m = 4$  dan  $n_i$  genap serta  $n_i \geq n_{i+1}$  untuk setiap  $i$ , diperoleh  $R\left(\bigcup_{i=1}^k S_{n_i}, W_4\right) = 2n_k + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ , jika  $2n_{i+1} \geq n_i + 2$ .

Bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap yang telah diperoleh adalah  $R(S_8, K_{2,2})$ , dan  $R(S_6, K_{2,m})$  untuk  $m = 2, 3, 4, 5, 6, 4n - 7$  atau  $m = -2 + 4 \sum_{i=1}^k 3^i$ . Juga telah diperoleh  $R(kS_{1+p}, K_{2,2}) = k(p+1) + 1$  untuk  $p \geq 3$  dan  $k \geq 2$ , walaupun  $R(S_{1+p}, K_{2,2})$  untuk  $p = 6$  dan  $p > 8$  belum diketahui.

Bilangan Ramsey untuk pohon dan graf lengkap,  $R(T_n, K_m)$  untuk sebarang  $m$  dan  $n$  diberikan oleh Chvátal (1977), dan bilangan Ramsey untuk pohon dan roda berorde kecil,  $R(T_n, W_m)$  untuk  $m = 4$  atau  $m = 5$  diberikan oleh Baskoro dkk. (2002). Berdasarkan hasil-hasil tersebut, dalam disertasi ini diperoleh hasil yang lebih luas yaitu bilangan Ramsey untuk hutan dan roda  $R(\cup_{i=1}^k T_{n_i}, W_4)$  dan bilangan Ramsey untuk hutan dan graf lengkap  $R(\cup_{i=1}^k T_{n_i}, K_m)$ .

Hasil lain yang telah diperoleh adalah bilangan Ramsey untuk gabungan saling lepas sebarang graf  $R(\cup_{i=1}^k G_{n_i}, H)$ , jika  $H$  dan  $G_i$  graf sebarang dan terhubung, serta  $|G_i| > (|G_i| - |G_{i+1}|)(\chi(H) - 1)$  dan  $R(G_i, H) = (\chi(H) - 1)(|G_i| - 1) + 1$  untuk setiap  $i$ . Meskipun syarat yang diperlukan di sini ketat, namun melalui hasil ini sangat banyak bilangan Ramsey untuk kombinasi dua graf dapat diperoleh.

Pada penelitian ini diketahui bahwa nilai  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, H)$  sama dengan nilai  $R(\cup_{i=1}^k T_{n_i}, H)$  apabila  $R(S_{n_i}, H)$  untuk setiap  $i$  bernilai sama dengan batas bawah Chvátal-Harary. Lebih jauh, diketahui bahwa terdapat kaitan antara  $R(G_i, H)$  dengan  $R(\cup_{i=1}^k G_i, H)$  untuk suatu  $i$  apabila  $R(G_i, H)$  untuk setiap  $i$  bernilai sama dengan batas bawah Chvátal-Harary.

Masalah yang masih terbuka untuk dikaji lebih lanjut adalah:

**Masalah 1** *Menentukan bilangan Ramsey secara umum untuk bintang berorde genap dan roda berorde genap.*

**Masalah 2** Menentukan bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap  $R(S_n, K_{2,2})$  untuk  $n = 7$  dan  $n \geq 9$ .

**Masalah 3** Menentukan bilangan Ramsey untuk bintang dan graf bipartit lengkap  $R(S_n, K_{s,t})$  untuk  $n \geq 5$  dan  $s, t \geq 3$ .

**Masalah 4** Menentukan bilangan Ramsey untuk gabungan graf bintang dan graf bipartit lengkap  $R(\cup_{i=1}^k S_{n_i}, K_{s,t})$  untuk  $s, t \geq 3$ .

**Masalah 5** Menentukan bilangan Ramsey untuk gabungan graf sebarang, jika nilai bilangan Ramsey untuk kombinasi dua grafnya lebih besar dari batas bawah Chvátal-Harary.

## DAFTAR PUSTAKA

- Baskoro, E. T., Surahmat, Nababan, S. M., dan Miller, M. (2002) : On Ramsey numbers for tree versus wheels of five or six vertices, *Graph Combin.*, **18**, 717 - 721.
- Baskoro, E. T., dan Surahmat (2005) : The Ramsey numbers of path with respect to wheels, *Discrete Math.*, **294**, 275 - 277.
- Baskoro, E. T., Hasmawati, Assiyatun, H. (2006) : The Ramsey numbers for disjoint unions of trees, *Discrete Math*, **306**, 3297-3301.
- Bondy, J. A. (1971) : Pancyclic graph, *J. Combin. Theory Ser.B*, **11**, 80-84.
- Brandt, S., Faudree, R. J., dan Goddard, W. (1998) : Weakly pancyclic graph, *J. Graph Theory*, **27**, 141 - 176.
- Burr, S. A., dan Roberts, J. A. (1973) : On Ramsey numbers for stars, *Utilitas Math.*, **4**, 217 - 220.
- Burr, S. A. (1974) : Generalized Ramsey theory for graphs-a survey, in: R.A. Bari and F. Harary, *Graphs Combin.*, Springer, Berlin, 52-75.
- Burr, S. A. Erdős P., dan Spencer, J. H. (1975) : Ramsey theorem for multiple copies of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **209**, 87-89.
- Burr, S. A. (1983) : Diagonal Ramsey numbers for small graphs, *J. Graph Theory*, **7** ), 67 - 69.
- Burr, S. A. (1987) : On the Ramsey numbers  $R(G, nH)$  and  $R(nG, nH)$  when  $n$  is large, *Discrete Math.*, **65**, 215 - 229.
- Burr, S. A. (1988) : On Ramsey numbers for large disjoint unions of graphs, *Discrete Math.*, **70**, 277 - 293.
- Chartrand, G., dan Lesniak, L. CRC (1996) : Graphs and digraphs, 3<sup>th</sup>, *Chapman and Hall*.
- Chen, G. (1997) : A result on  $C_4$ -star Ramsey numbers, *Discrete Math.*, **163**, 243 - 246.
- Chen, Y. J., Zhang, Y .Q., dan Zhang, K. M. (2004) : The Ramsey numbers of stars versus wheels, *European J. Combin.*, **25**, 1067 - 1075.



- Chen, Y. J., Zhang, Y. Q. dan Zhang, K. M. (2005) : The Ramsey numbers of paths versus wheels, *Discrete Math.*, **290**, 85 - 87.
- Chvátal, V., dan Harary, F. (1972) : Generalized Ramsey theory for graphs, III, small off-diagonal numbers, *Pac. J. Math.*, **41**, 335 - 345.
- Chvátal, V. (1977) : Tree-complete graph Ramsey numbers, *J. Graph Theory*, **1**, 93.
- Cockayne, E. J. (1974), Tree-star Ramsey numbers : *J. Combin. Theory ser. B*, **17**, 183 - 187.
- Diestel, R. (1999) : Graph Theory, 2<sup>th</sup>, *Springer-Verlag*.
- Dirac, G. A. (1952) : Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.*, **2**, 69 - 81.
- Erdős, P., dan Szekeres, G. (1935) : A combinatorial problem in geometry, *Composito Math.*, **2** , 463 - 470.
- Faudree, R. J., dan Schelp, R. H. (1974) : All Ramsey number for cycles in graph, *Discrete Math.*, **8**, 313 - 329.
- Faudree, R. J., Lawrence, S. L., Parson, T. D., dan Schelp, R. H. (1974) : Path-cycle Ramsey numbers, *Discrete Math.*, **10**, 69 - 277.
- Gerencsér, L. dan Gyárfás, A. (1967) : On Ramsey-type problems, *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis, Eötvös Sect. Math.* , **10**, 167 - 170.
- Graham, R. L., Rothschild, B. L., dan Spencer, J. H. (1990) : *Ramsey Theory*, John Wiley and Sons, Secon Edition.
- Greenwood, R. E. dan Gleason, A. M. (1955) : Combinatorial relations and chromatic graph, *Canad. J. Math.*, **7**, 1 - 7.
- Grinstead, C., dan Roberts, S. (1982) : On the Ramsey numbers  $R(3, 8)$  and  $R(3, 9)$ , *J. Combin. Theory Ser. B*, **33**, 27 - 51.
- Harary, F. (1972) : Recent results on generalized Ramsey theory for graphs, in graph theory and applications, (Y. Alavi et al. eds.) Springer, Berlin, 125 - 138.
- Hasmawati, Baskoro, E. T., dan Assiyatun, H. (2005) : Star-wheel Ramsey

- numbers, *Combin. Math. Combin. Comput.*, **55**, 123 - 128.
- Hasmawati, Baskoro, E. T., dan Assiyatun, H. (2007) : The Ramsey numbers for disjoint unions of graphs, *Discrete Math*, to appear.
- Karolyi, G. dan Rosta, V. (2001) : Generalized and geometric Ramsey numbers for cycles, *Theoretical Computer Science*, **263** , 87 - 98.
- Kery, G. (1964) : On a Theorem of Ramsey (in hungarian), *Matematikai Lapok*, **15**, 204 - 224.
- Korolova, A. (2005) : Ramsey numbers of stars versus wheels of similar sizes, *Discrete Math.*, **292**, 107 - 117.
- Lawrence, S. L. (1973) : Cycle-star Ramsey numbers, *Notices Amer. Math. Soc*, **20**, A - 420.
- Lortz, R. (2006) : A note on the Ramsey numbers of  $K_{2,2}$  versus  $K_{3,6}$ , *Discrete Math.*, **306**, 2976 - 2982.
- Mckay, B. D., dan Radziszowski, S. P. (1995) :  $R(4, 5) = 25$ , *J. Graph Theory*, **19:3**, 309 - 322.
- Parsons, T. D. (1973) : The Ramsey numbers  $R(P_m, K_n)$ , *Discrete Math.*, **6**, 159 - 162.
- Parsons, T. D. (1974) : Path-star Ramsey numbers, *J. Combin. Theory, Ser. B*, **17** 51 - 58.
- Parsons, T. D. (1975) : Ramsey graphs and block designs I, *trans. Amer. Math. Society*, **209** 33 - 44.
- Parsons, T. D. (1976) : Ramsey graphs and block designs , *J. Combin. Theory, Ser. A*, **20**, 12 - 19.
- Radziszowski, S. P. (2004) : Small Ramsey numbers, *The Electronic Journal of Combinatorics*, #DS1.9, <http://www.combinatorics.org/>
- Ramsey, F. P. (1930) : On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **30**, 264 - 286.
- Rosta, V. (1973) : On a Ramsey type problem of J.A. Bondy and P. Erdős, i, II, *J. Combin. Theory, Ser. B*, **15**, 94 - 120.
- Rosta, V. (Des. 2004) : Ramsey theory application, *The Electronic Journal of*

- Rosyida, I. (2004) : Bilangan Ramsey untuk kombinasi graf bintang dan graf bipartit lengkap, *Tesis Magister Departemen Matematika ITB*, Indonesia.
- Salman, A. N. M. dan Broersma, H. J. (2006) : Path-fan Ramsey numbers, *Discrete Math.*, **154**, 1429 - 1436.
- Salman, A. N. M. dan Broersma, H. J. (2007) : On Ramsey numbers for path versus wheels, *Discrete Math.*, **307**, 975 - 982.
- Salman, A. N. M. dan Broersma, H. J. (2007): Path-kipas Ramsey numbers, *Discrete Appl. Math.*, **17**, 1878-1884.
- Schiermeyer, I. (2003) : All cycle-complete graph Ramsey numbers  $R(C_m, K_6)$ , *Journal of Graph Theory*, **44**, 251 - 260.
- Shi, L. (2003) : Upper bounds for Ramsey numbers, *Discrete Math.*, **6**, 251 - 265.
- Surahmat dan Baskoro, E. T. (2001) : The Ramsey number of a path or a star versus  $W_4$  or  $W_5$ , *Proceedings of the 12-th Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms*, Bandung, Indonesia, July 14 - 17, 165 - 170.
- Surahmat (2003) : *Disertasi* Bilangan Ramsey untuk graf roda, *Departemen Matematika ITB Indonesia*.
- Surahmat, Baskoro, E. T. and Tomescu, I. (2006) : The Ramsey number of large cycle versus odd wheels. Akan di publikasi pada jurnal *Discrete Mathematics*.
- Surahmat, Baskoro, E.T., dan Broersma H. J. (2004) : The Ramsey numbers of large cycle versus small wheels, *Electron. J. Combin. Number Theory*, **4**, #A1.
- Zhang, Y. Q., dan Zhang, K. M. (2006) : On Ramsey numbers  $R(S_n, W_8)$  for small  $n$ , *Department of Mathematics, Nanjing University, China*. Preprint.

## RIWAYAT HIDUP PENULIS

Penulis adalah anak pertama dari sembilan bersaudara, yang dilahirkan di Belajen Kabupaten Enrekang, Sulawesi Selatan, pada tanggal 25 Desember 1964 dari orang tua Bapak H. Syahrudin dan Ibu Hj. Becce.

Penulis mengikuti pendidikan dasar dan menengah pertama di Sudu Kecamatan Alla Kabupaten Enrekang, kemudian mengikuti pendidikan menengah atas di Enrekang dan lulus tahun 1983. Penulis menempuh program S1 di Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin antara tahun 1983 sampai dengan 1989, dan sejak tahun 1990 menjadi staf pengajar di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin. Tujuh tahun kemudian, tepatnya tanggal 21 November 1997, penulis menikah dengan Abdul Basir MCE dan dikaruniai seorang putera bernama Reyhan Bashir dan dua orang puteri yang masing-masing bernama Ufairah Damara Bashir dan Ilmiyyana Iffatunnafsiyah Bashir. Tahun 2001 penulis mendapat beasiswa dari Departemen Pendidikan Nasional Republik Indonesia BPPs untuk mengikuti pendidikan S2 di Departemen Matematika Institut Teknologi Bandung dan selesai tahun 2004. Pada tahun itu juga dengan beasiswa yang sama, penulis melanjutkan pendidikan ke program Doktor Bidang Matematika pada Kelompok Keilmuan Matematika Kombinatorika Program Pascasarjana ITB.

Selama mengikuti Program Doktor, penulis mengikuti beberapa kegiatan yang dijabarkan sebagai berikut.

### Hasil karya penelitian yang dipublikasikan

1. Hasmawati, E. T. Baskoro dan H. Assiyatun, Star-wheel Ramsey numbers, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **55** (2005), 123-128.
2. Hasmawati, E. T. Baskoro, H. Assiyatun dan M. Salman A. N., Bilangan Ramsey untuk kombinasi  $k$ -copy graf pohon dengan beberapa graf, *Proceeding Pertemuan Ilmiah Nasional dan Expo IPTEK MIPA UI*, Depok Indonesia, Nopember 18-26 (2005), 89.
3. E. T. Baskoro, Hasmawati, dan H. Assiyatun, The Ramsey numbers for disjoint unions of trees, *Discrete Math*, **306**, 3297-3301 (2006).
4. Hasmawati, E. T. Baskoro, dan H. Assiyatun, The Ramsey numbers for disjoint unions of graphs, *Discrete Math*, , to appear.
5. Hasmawati, E. T. Baskoro, H. Assiyatun dan M. Salman A. N., Complete bipartite Ramsey numbers, *Utilitas Math.*, to appear.
6. Hasmawati, H. Assiyatun, E. T. Baskoro, M. Salman, A. N., The Ramsey numbers for complete bipartite graphs, *MIHMI*, submitted.

7. Hasmawati, H. Assiyatun, E. T. Baskoro, M. Salman, A. N., Ramsey numbers on a union of identical stars versus a small cycle, *Proceeding Computational Kyoto International Conference on Geometry and Graph Theory 2007*, Japan.
8. Hasmawati, H. Assiyatun, E. T. Baskoro, M. Salman, A. N., The Ramsey numbers for disjoint union of stars, *proceeding International Conference and Workshop on Basic Science and Applied Sciences-ICOWOBAS 2007*, UNAIR, Surabaya.

### **Presentasi**

1. Menyajikan makalah pada The International Workshop On Graph Labeling (IWOGL-2004), 6-9 Desember 2004 di hotel Club Bunga, Batu Malang, Jawa timur.
2. Menyajikan makalah pada The International Conference On Applied Mathematics (ICAM-2005), 22-26 Agustus 2005, Aula Timur ITB.
3. Menyajikan makalah pada Pertemuan Ilmiah National MIPA 2005 dan Expo IPTEK, 25-26 November 2005 di UI Depok, Jawa Barat.
4. Menyajikan makalah pada seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika Se-Indonesia, 8 April 2006 di UPI Bandung.
5. Menyajikan makalah pada The First International Conference On Mathematics and Statistics (ICMNS-I, 2006), 19-21 Juni 2006 di Hotel Jayakarta, Bandung, Jawa Barat.
6. Menyajikan makalah pada Konferensi Nasional Matematika XIII, 24-27 Juli 2006, UNNES Semarang.
7. Menyajikan makalah pada International Conference On Mathematics and Natural Science (ICMNS-2006), ITB, 29-30 November 2006, Aula Barat ITB.
8. Menyajikan makalah pada International Conference On Graph Theory and Information Security (ICGTIS-2007), 10-13 February 2007, Aula Timur ITB.
9. Menyajikan makalah pada International Conference and Workshop on Basic Science and Applied Sciences (ICOWOBAS-2007), UNAIR, 6-8 Agustus 2007, Surabaya.

### **Workshop dan pertemuan Ilmiah**

1. Peserta pada Seminar Nasional Aljabar, 21 Mei 2005, Departemen Matematika ITB.
2. Peserta The Symposium on Research Based Learning, 17-18 November 2006, Prodi Fisika ITB.

### **Kegiatan lain**

1. Panitia Konferensi Internasional On Graph Theory and Information Security-ICGTIS, 10-13 February 2007, Aula Timur ITB.
2. Panitia Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika dan Pendidikan Matematika, 14 April 2007, Prodi Matematika ITB.
3. Panitia Konferensi Internasional On BioMathematics-ICOBM, 28-29 Agustus 2007, Aula Barat ITB.

## Index

- Baskoro, 25
- batas bawah Chvátal-Harary, 23
- bilangan kromatik, 18
- bilangan Ramsey graf dua warna, 2, 3
- bilangan Ramsey graf multiwarna, 2
- bilangan Ramsey klasik, 2
- bilangan Ramsey klasik dua warna, 19
- bintang, 3
- bipartit, 2
- Bondy, 16
- Brandt dan Faudree, 16
- Burr, 27
  
- Chen, 25
- Chvátal dan Harary, 22
- Cockayne, 27
  
- daun, 13
- Dekomposisi, 18
- Derajat, 9
  
- Faudree, 25
  
- Graf, 8
- Graf gabungan, 17
- graf jumlah, 17
- graf kritis, 22
- graf lengkap, 10
- Graf pesta, 15
  
- himpunan bebas, 11
- himpunan sisi, 8
- himpunan sisi pemisah, 11
- himpunan titik, 8
- himpunan titik pemisah, 11
  
- isomorfik, 9
  
- Jahangir, 14
  
- jembatan, 11
  
- Kardinalitas, 9
- Karolyi, 26
- Keterhubungan, 12
- kincir, 16
- Kipas, 16
- komplemen, 8
- komponen, 11
- Korolova, 29
  
- Lintasan, 3
- Lortz, 28
  
- maksimal, 10
- mod  $n$ , 9
- multipartit, 15
- multipartit lengkap, 15
- multipartit lengkap seimbang, 15
  
- Orde, 9
  
- pansiklis, 13
- pansiklis lemah, 13
- partisi, 15
- Pewarnaan titik, 18
- pohon, 3
- Pohon berakar, 13
- pohon bercabang- $k$ , 13
- pohon sempurna bercabang- $k$ , 13
- pusat, 14
  
- reguler, 9
- Roda, 3
- Rosta, 26
- Rosyida, 28
- ruas, 13
  
- saling bebas, 10
- sisi, 8
- subgraf, 10

Surahmat, 25

Teorema Ramsey, 1

Teorema Ramsey graf, 2

terhubung- $k$ , 12

terinduksi, 10

terkait, 8

tetangga, 8

titik, 8

titik potong, 11

trhubung, 3

ukuran, 9