

# USO Y EVALUACIÓN DE ENUNCIADOS EN PROBLEMAS CONTEXTUALES PARA LA COMPRESIÓN DE LOS PARÁMETROS (m Y b) DE UNA FUNCIÓN LINEAL $y=mx+b$ , EN GRADO OCTAVO<sup>1</sup>

Use and evaluation of affirmations in contextual problems for the understanding of the parameters (m and b) of a linear function  $y = mx+b$ , in eighth grade

*Jhon Jair Angulo Valencia<sup>2</sup>, Oscar Yovany Checa Ceron<sup>3</sup>*

- 
- 1 Artículo derivado de una indagación realizada como requisito parcial para obtener el título de Mg. en la Enseñanza de las ciencias exactas naturales, derivado de charla que se sostuvieron con los docentes de la institución, en el mes de enero del año 2016
  - 2 Universidad Nacional de Colombia – Sede Palmira. Contacto: [jjangulov@unal.edu.co](mailto:jjangulov@unal.edu.co)
  - 3 Universidad Nacional de Colombia – Sede Palmira. Contacto: [oychecac@unal.edu.co](mailto:oychecac@unal.edu.co)

## Resumen

Este proyecto de indagación pedagógica describió elementos asociados al uso y adaptación de una propuesta multiregistro para la construcción de los parámetros ( $m$  y  $b$ ), propios de una función lineal, en distintos registros de representación semiótica. Se tomó en consideración elementos como: comunicación, visualización, representación, articulación entre sistemas de representación semiótica, entre otros, que permitieron la adaptación de una situación didáctica contextual con enunciados problemas cercanos a las estudiantes.

## Palabras clave

Representación semiótica, comprensión, didáctica, visualización, comunicación, contexto, función lineal.

## Abstract

This project of pedagogical inquiry described elements associated with the use and adaptation of a multiregistration proposal for the construction of the parameters ( $m$  and  $b$ ) characteristic of a linear function, in different registers of semiotic representation. It was taken into consideration elements such as: communication, visualization, representation, articulation between systems of semiotic representation among others, which allowed the adaptation of a contextual didactic situation with enunciated problems close to the students.

## Keywords:

Semiotic representation, comprehension, didactics, visualization, communication, context, linear function.

## I. INTRODUCCIÓN

En el presente artículo se explican algunos elementos propios de la teoría semiótica cognitiva del investigador Duval [1], [2], [3], relacionados con la forma como el sujeto puede alcanzar la comprensión de un objeto matemático de estudio, pues considera como punto de partida que “no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin la actitud de representar” [1]. Esta actividad genera la necesidad de hacer emerger otro elemento asociado a la comunicación, como lo es la enunciación de las propiedades explícitas de un objeto de estudio. No es suficiente hacer una representación de un objeto matemático si no se toma conciencia de lo representado.

Para el desarrollo se toman algunos elementos planteados por el MEN [4], [5], donde se describe al contexto sociocultural del individuo como un medio que

favorece a la comprensión problemas cercanos a los estudiantes. En este sentido, la propuesta se organizó de la siguiente forma.

Se inicia con el planteamiento del problema, tomando como referencia que en el año 2015 el MEN expidió y difundió los derechos básicos de aprendizaje, para expresar por cada grado un conjunto de actividades que los estudiantes deben saber desarrollar al terminar un año lectivo. Se analizó el Derecho Básico de Aprendizaje (DBA) 7, V1, del grado octavo. Esta propuesta para comprender los parámetros propios de una función lineal se ejemplifica mediante una memorización de una ecuación y, posteriormente, realizar reemplazos en las ecuaciones y para dichos parámetros. Este hecho desvirtúa uno de los objetivos propios del pensamiento variacional, que es describir situaciones matemáticas donde el centro de análisis sea el cambio y la transformación.

Enseguida, se presenta la revisión de investigaciones, en las que se muestra el análisis de situaciones didácticas que dinamizan el uso “función lineal”. Entre estas indagaciones sobresale la realizada por Posada y Balbín [6], quienes plantean que, en el caso particular del concepto de función, se ha hecho evidente que las actuales estrategias de enseñanza son insuficientes para lograr que los estudiantes reconozcan en este concepto una herramienta fundamental en la modelación de fenómenos que implican variación y cambio de magnitudes. De igual forma, también se describen algunas dificultades que se encuentran en la enseñanza de la función lineal, algunas reportadas desde investigaciones y otras desde la experiencia, dando paso, a la formulación del problema. Para finalizar, se exponen los objetivos de indagación, donde se comunica lo que se espera del proyecto.

Otro elemento importante en el desarrollo de esta indagación es el desarrollo metodológico; se toma en consideración la teoría de las situaciones didácticas planteadas por Brousseau [7], ya que propone un conjunto de situaciones didácticas (acción, formulación, devolución del problema, validación e institucionalización) que permiten comprender un determinado objeto de conocimiento.

## II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

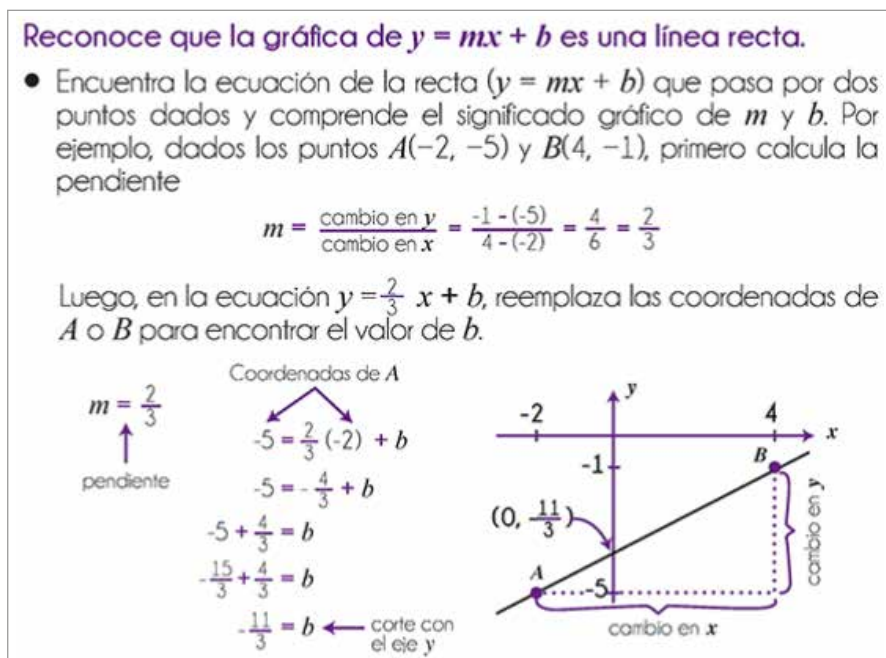
### Justificación

La educación matemática se ha mostrado como una disciplina en la que se indaga sobre las dificultades enseñanza y aprendizaje asociados a los procesos de visualización, representación, uso de las TIC, la enunciación, la significación, el uso de libros y materiales educativos. Esto muestra la preocupación de investigadores

por presentar algunas alternativas que puedan ser consideradas en el aula de clase. Sin embargo, se hace evidente que si bien hay muchas indagaciones alrededor de los objetos matemáticos y la forma didáctica como estos pueden ser abordados, aún se reportan algunas dificultades.

Prueba de ello se evidencia en la construcción de documentos como los Lineamientos curriculares de educación matemática [4], [5] y los Estándares básicos de competencias [5]. Pese a su ajuste en la propuesta de orden nacional, presentan directrices generales para el abordaje de situaciones matemáticas en el aula de clases. Este hecho lo que refleja realmente es una preocupación profunda por mostrar elementos básicos en los currículos existentes, pues solo se intenta ordenar cuando se desean evidenciar cambios significativos.

Como muestra de esa preocupación, para el segundo semestre del año 2015, el MEN presentó los derechos básicos de aprendizaje, como una iniciativa que intenta darle solución a los problemas de orden curricular que se presentan en las áreas de lenguaje y matemáticas. Esta actividad analizada desde algunos “derechos” básicos de matemáticas que se presentan en el documento, muestra algunas dificultades, como la siguiente:



**Figura 1:** Tomada de los DBA 7 V1 del grado 8°

En esta actividad se evidencia una dificultad relacionada con la significación de lo que se entiende por “comprensión”, dado que, en el caso de los DBA, se plantea como una ejercitación técnica el aprendizaje de una ecuación y su utilización, pensando que con esto se garantiza ser consciente de lo aprendido. Ahora bien, es evidente la insuficiencia al realizar uno, dos o tres ejercicios, para decir que se comprende un fenómeno determinado, ya que esto no obliga a dar cuenta de procesos argumentativos, justificativos o descriptivos, tales como la oralidad, conversión y tratamiento.

Pecharromán [8] argumenta que “la comprensión de los objetos matemáticos es el reconocimiento de la funcionalidad organizativa o interpretativa del contexto que representa el objeto y el desarrollo de la capacidad de uso de esta funcionalidad”. Esto deja en evidencia que la capacidad de comprender no es lineal, sino más bien holística, interpretativa y argumentativa, que implica movilizar actividades donde el estudiante pueda reconocer características propias de un objeto de estudio, enunciar las propiedades y realizar tratamientos y conversiones sobre el objeto abordado. En este sentido, Duval [2] sitúa la conversión desde la toma de conciencia y significado del objeto matemático, esto es, ser capaz de representarlo en distintos registros, pero además que tenga claridad entre el objeto y su representación.

## **Antecedentes**

Realizando una revisión literaria de algunas teorías propuestas por el MEN [5], se encuentra que el pensamiento variacional tiene que ver con

el reconocimiento, la percepción, la identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

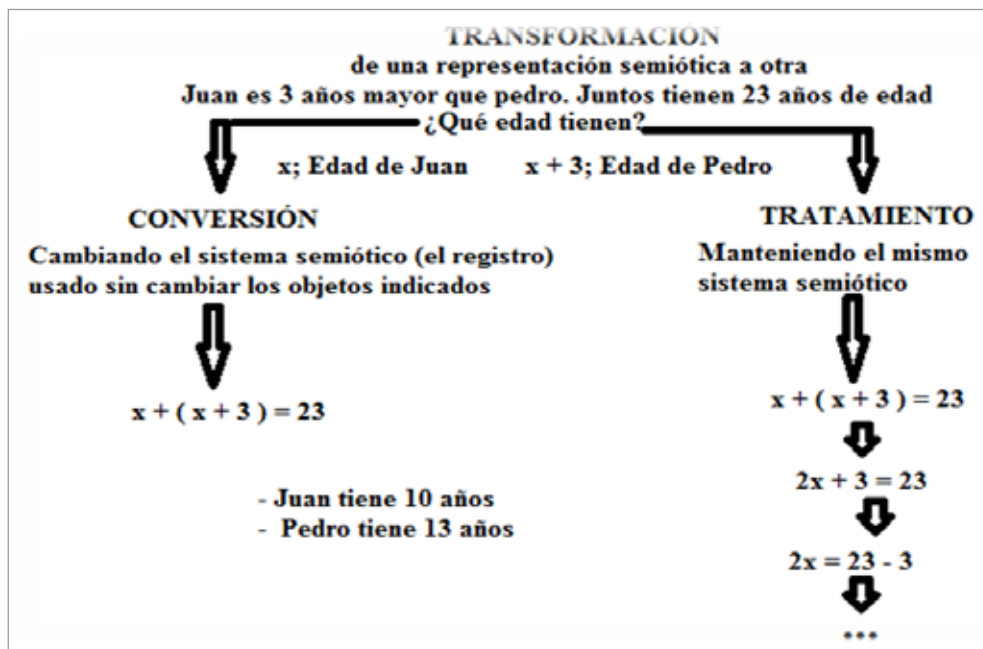
Este hecho muestra la necesidad de abordar situaciones didácticas que vinculen dicho pensamiento, desde actividades matemáticas que recrean la variación y el cambio, significación de los términos de una actividad y, sobre todo, la discriminación y enunciación de los elementos de un objeto de estudio.

Bravo, Tavera y Tibocha [9] plantean que en la enseñanza del concepto “función lineal”, se deben dar a conocer todos los significados atribuidos a los parámetros de dicha función tales como pendiente, punto intercepto, representación gráfica,

entre otros, para de esa forma generar comprensión. De igual manera, Posada y Villa [6] plantean que, en el caso particular del concepto de “función”, se ha hecho evidente que las actuales estrategias de su enseñanza son insuficientes para lograr que los estudiantes reconozcan allí una herramienta fundamental en la modelación de fenómenos que implican variación y cambio de magnitudes. Por su parte, Ospina [10] considera que es indispensable que el estudiante reconozca la diferencia que hay de la función lineal de sus distintos registros de representación.

Ante lo anterior, Duval [1] plantea que existen dos tipos de transformaciones que permiten el paso de un registro a otro, y a así encontrar las unidades significativas de cada registro. Estas son:

- Un tratamiento T sería una transformación interna al sistema o al registro: una transformación intra sistémica o intra registro
- La conversión C Es una transformación externa de un sistema o registro a otro, es decir, una transformación inter registro o trans-registro.



**Figura 2:** Transformaciones semióticas (Adaptado de Pontón, s.f).

Como se puede apreciar en la Figura 2, no es suficiente con realizar la conversión de un registro de representación a otro, si no se tienen en cuenta los tratamientos que se deben realizar dentro del registro, y de esa forma, encontrar la correspondencia de un valor o parámetro asociado que presente la solución de la situación planteada.

## **Descripción de la problemática**

En el análisis de algunas investigaciones se tiene que la función lineal, se reporta que las mayores dificultades en la enseñanza de este concepto, está relacionada con el análisis y comprensión que se da en el cambio de un registro de representación a otro, así como también de las operaciones internas dentro de un mismo registro, lo cual traduce específicamente a la conversión y tratamientos de registros de representación. Ante ello, Duval [3], plantea que el problema que la mayoría de los estudiantes encuentra es tan profundo que la conversión puede ser considerada como un umbral de la comprensión. ¡La conversión de representación semiótica aparece a menudo como un truco que no puede ser bien aprendido y que no es enseñado!

Este hace evidente la profunda dificultad que presentan los estudiantes ante este tipo de situaciones, ya que el ser humano habla con mucha propiedad de lo que considera que sabe, y la conversión al no ser enseñada deja un obstáculo en el entendimiento de situaciones que requieren la movilización de dicho proceso. En ese mismo orden de ideas, Ospina sugiere que es indispensable que el estudiante reconozca la función lineal y sus representaciones en los diferentes registros. Por ello, se hace necesario que el estudiante identifique unidades significantes, encuentre la correspondencia de las unidades de una representación con respecto a las unidades estructurales de la otra representación y haga conversiones de una representación semiótica a otra en diferentes registros. Lo anterior muestra que hay una gran dificultad en la transformación de conversión en el abordaje de esta situación.

Ante lo anterior y observando el plan de área de matemáticas de la institución educativa X, se encuentra que el discurso y ejemplificación que se maneja para el abordaje de los objetos matemáticos se centran en un libro de texto sugerido para ese grado, es decir, las actividades y desarrollo temático se realiza de acuerdo con lo planteado en el material pedagógico (libro de texto), dejando de lado elementos de orden contextual que podrían enriquecer la actividad asociada a la enseñanza. A partir de esto, el MEN [4], plantea que el acercamiento de los estudiantes a las

matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas.

Este hecho podría ser considerado como un elemento central en el aprendizaje, dado que por un lado sitúa al estudiante en contextos conocidos para él, lo cual permite hacer emerger elementos que quizás en el diseño o adaptación de las situaciones no hayan sido tenidas en cuenta por el docente, y, por otro lado, se crean aprendizajes significativos. A partir del surgimiento de los elementos asociados a las actividades propuestas, se crea la generalización de patrones consiguiendo un aprendizaje consciente. Estos elementos son considerados por Duval [2] como toma de conciencia sobre lo aprendido, es a lo que él llama objetivación, que es tener claridad y coherencia sobre lo que se hace, se dice y se presenta.

Para abordar la problemática de introducir la función lineal de una manera significativa y comprensiva, se han tomado en consideración las dificultades reportadas por algunas investigaciones de Duval [1], entre las que sobresalen:

- La única vía para dar cuenta de la pendiente de una recta es por medio de la ecuación, sin atribuirle ningún significado: el concepto de pendiente de una línea recta está siendo restringido a una interpretación relacionada al remplazo de un par de puntos en la ecuación , considerando este proceso como elemento suficiente para poder dar cuenta del grado de inclinación de una línea recta. Por ejemplo, dados los puntos A (a, b) y B (c, d), determinar la pendiente y ecuación de la línea recta que pasa por dichos puntos. Esta actividad resulta ser memorística, porque solamente consiste en reemplazar los valores asociados a una ecuación.
- Para la representación de una expresión algebraica a tabular, se hace uso único de la vía de punteo: en el proceso de conversión de registros, se discriminan las variables visuales que permitan crear una representación inicialmente mental y luego semiótica que posibiliten el cambio de registro. Estos elementos tales como: signos, variables y coeficientes no cobran ningún significado visual sino más bien operatorio. Por ejemplo, dada la expresión , perteneciente a una línea recta, representar la expresión en un registro cartesiano. Para



realizar esta actividad el estudiante comúnmente le da valores a  $x$ , y de esa forma encuentra las correspondencia en  $y$  ( $x,y$ ).

Con lo anterior, se ha hecho evidente que la mayor dificultad que presentan los estudiantes es que no son conscientes que una recta está constituida por infinitos puntos; sin embargo, solo son necesarios dos para trazarla.

- Hay una imposibilidad de encontrar la ecuación de una recta partiendo de una gráfica cartesiana: al discriminar las variables visuales que ofrece una gráfica, los estudiantes no toman conciencia de la importancia que tienen cada uno de los elementos presentes entre la recta y los puntos de cortes con los ejes. Tales como dirección de la gráfica e intercepto con el eje  $y$ .
- Estas situaciones de enseñanza obligan a reconsiderar la forma como se está “transmitiendo” este concepto en la enseñanza del álgebra, dado que, entre los errores reportados desde Duval [1] se encuentra que se confunde la pendiente de una recta con la altura  $y$ , de la mano con eso, se crea un problema al no encontrar una correspondiente equivalencia con dicho concepto, pero, aun así, se sigue enseñando.
- Se plantean sistemas mono registros, es decir, se hace énfasis en problemas que poseen una única estructura, tienen la misma intención, marco y finalidad; que no dan pie para que el estudiante piense y desarrolle un pensamiento matemático, sino que más bien lo llevan a mecanizar. Además, se utiliza el libro de texto como único instrumento que orienta los procesos educativos, y en algunos casos no se tiene en cuenta su elección.

Por todo lo anterior, la indagación buscó analizar lo siguiente: a qué favorece el uso y adaptación de enunciados problemas propios de una localidad  $X$ , para que los estudiantes de grado 8° puedan hacer conversiones y tratamientos en distintos registros de representación que generen comprensión de los parámetros ( $m$  y  $b$ ) de una función lineal.

### III. ELEMENTOS TEÓRICOS

En el siguiente apartado se presentan algunas consideraciones de orden teórico que fundamentan la pertinencia de este artículo. Estas consideraciones situadas desde el marco de la teoría semiótica cognitiva propuesta por Duval [1], [2], [3], argumenta sobre la necesidad de representar para poder comunicar y a su vez,

generar un aprendizaje consciente, denominado comprensión. De igual forma, se presentan algunos elementos de orden didácticos y curriculares planteados por el MEN [4], [5].

### Elementos Didácticos

La matemática como constructo sociocultural es una necesidad de todos los grupos humanos para poder explicar y darle sentido a todo aquello que les rodea, Respecto a lo anterior Valoyes & Malagón [11] exponen que, “la actividad matemática es una actividad viva realizada por los diversos grupos humanos y condicionada por las herramientas simbólicas que la cultura pone a su disposición. A su vez, la cultura se enriquece como producto de la actividad matemática”.

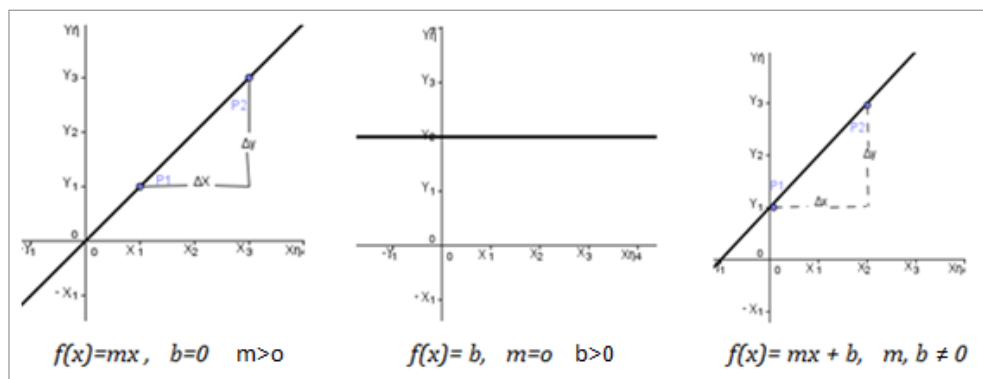
- **Función lineal**

Es una Función lineal si, donde, es un número real y. A  $m$  se le denomina pendiente de la función, y, a  $(b)$  como el componente del intercepto en el eje  $y$ .

$f(x) \Rightarrow$   $m$ , determina el cambio en  $f(x)$  a medida que  $x$  también lo hace  $f(x)$ .

- Si  $m < 0$ , a medida que  $x$  aumenta,  $f(x)$  disminuye
- Si  $m > 0$ , a medida que  $x$  aumenta,  $f(x)$  también lo hace.
- Si  $m = 0$ , entonces la gráfica de la función  $f(x)$  es paralela al eje  $x$ , y para cualquier valor de  $x$ ,  $f(x)$  siempre será una función constante.

**Figura 3:** Análisis de la pendiente de una función lineal



**Figura 4:** Representación cartesiana de una función lineal

Para calcular se considera la siguiente expresión, donde mide el cambio de dirección vertical al mover de un punto P1 a otro P2, y al mismo tiempo mide el cambio horizontal para ir de P1 a P2. De este modo, cuando se observan las gráficas en relación con las expresiones, el valor de la pendiente  $m$  y el del punto de corte en el eje Y ( $0, b$ ), determinan el comportamiento y sentido de la dirección de la recta. Sin embargo, es importante tener en cuenta, que el concepto de “Función lineal” es un subconjunto de lo que se entiende por función, y que su naturaleza está ligada con cantidades directamente proporcionales y covariacionales.

Se asume como cantidades directamente proporcionales la presentación de una variación o razón de cambio por unidad que incrementa o disminuye un producto de acuerdo a una condición dada, cuyo único valor fijo  $b$  es igual a cero. En esta situación, la gráfica cartesiana pasa por el origen de coordenadas (Ver figura 4a). Y como covariacionales, si, además de presentarse la situación anterior interviene la variación de dos variables simultáneamente. De esto queda que, toda gráfica está determinada por las unidades significantes que componen su expresión algebraica, lo cual se resume en la siguiente tabla.

**TABLA 1: RELACIÓN ENTRE LOS PARÁMETROS DE UNA FUNCIÓN LINEAL Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA**

PARAMETROS	UNIDADES SIGNIFICANTES	REPRESENTACIÓN GRAFICA
$m$	$m=0$	La línea recta es paralela al eje $x$
	$m<0$	La línea recta es descendente de izquierda a derecha
	$m>0$	La línea recta es creciente de izquierda a derecha
$b$	$b=0$	La línea recta intercepta por el origen de coordenadas $(0,0)$
	$b>0$	La línea recta intercepta “ $b$ ” unidades al eje “ $y$ ” por encima del eje “ $x$ ” en las coordenadas $(0, b)$
	$b<0$	La línea recta intercepta “ $b$ ” unidades al eje “ $y$ ” por debajo del eje “ $x$ ” en las coordenadas $(0, b)$

### **a. Elementos de la teoría semiótica cognitiva: la representación y la necesidad de representar**

Ante la que tiene el ser humano de dar a conocer lo que piensa y realiza, se ve en la necesidad de usar distintos medios para ejecutar dicha acción. Estos medios, motivados por la acción de comunicar, se ven obligados a la actividad de representar. Por ello, Duval [2] argumenta que “no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación”. Esta actividad de orden cognitivo muestra la necesidad de poder comunicar algo que se desee exteriorizar, dado que él autor diferencia algunos tipos de representaciones entre los que sobresalen; las representaciones conscientes, las representaciones externas, y las representaciones mentales, entre otras. Por su parte, las representaciones conscientes son “aquellas que capturan de ipso-facto los elementos característicos de un objeto de estudio”, no obstante, genera la necesidad de hablar de representaciones no consciente, como aquellas que el sujeto realiza sin asociar ningún significado a lo representado. El pasaje de lo no consciente a lo consciente lo que el autor denomino objetivación, lo que traduce a la toma de consciencia sobre lo representado.

De igual forma Duval [2] destaca las representaciones mentales, como aquellas que moviliza un sujeto bajo la necesidad de comunicar algo, pero que, mediante las representaciones externas, se dan a conocer. Esto es, el conjunto de signos y símbolos que bien codificado intentan transmitir un mensaje, que bien tratado muestra el resultado esperado. Por tal razón, Duval [2] plantea que “la noción de representación resulta entonces esencial en tanto que forma bajo la cual una información puede describirse y tomarse en cuenta en un sistema de tratamiento... lo cual trata de una codificación de la información”. Este hecho que resulta de la vinculación de un conjunto de signos y símbolos que bien articulados intentan comunicar una idea, da la entrada a lo que Duval [1] denomino representaciones semióticas, donde de se admiten como expresiones fiables de las representaciones mentales, planteándose la hipótesis de una correspondencia directa entre lo mental y lo externo, es decir la comunicación representativa de lo que se piensa.

Se puede percatar entonces la relación que se establece entre las representaciones mentales y las externas. Sin embargo, es vital tener en cuenta que las representaciones semióticas son fundamentales para la producción y modificación de las representaciones mentales, pues el fundamento de estas se centra en la necesidad reflexionar sobre lo que se comunica y no únicamente en comunicar.

## **b. Elementos necesarios para generar comprensión de un objeto matemático**

Duval [2], [3] plantea que no se puede confundir un objeto con su representación, y ante esta dificultad propone que es necesario disponer de otras representaciones semióticas del objeto representado y reconocerlas como una misma representación del objeto matemático presentada en otros registros. Es a esto a lo que él llama “registros semióticos de representación”, pues en el análisis de una función lineal se puede hacer uso de una información presentada en lengua natural (el costo de la asesoría de una clase de matemáticas tiene un valor de “m” pesos por hora y un costo fijo de “b” por el transporte). Esta información presentada en otro registro como el algebraico permite involucrar otros elementos como la designación, lo cual traduce a la etiquetación de los símbolos a tratar (sea x, el número de horas, c(x) el valor a pagar por las horas trabajadas, entonces  $c(x) = m \cdot x + b$ , es el costo a pagar).

Estas situaciones para Duval [3] esbozan la necesidad de coordinación interna que debe haber entre los registros, pues “el obstáculo mayor para la realización espontánea de esta coordinación es la importancia de los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas”. Este hecho genera la necesidad de involucrar una operación cognitiva que permita el cambio comprensible de un registro a otro. La operación es la de Conversión, dado que la especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representaciones semióticas presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema a otro. [2]

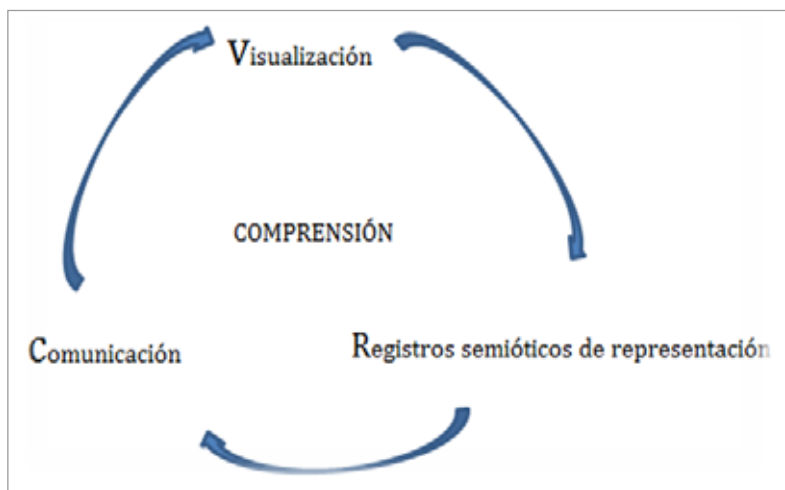
Esta actividad según Duval [3] presenta una gran dificultad en la enseñanza de las matemáticas, dado que “la conversión de representación semiótica aparece a menudo como un truco que no puede ser bien aprendido y que no es enseñado”. Esta dificultad se presenta puesto que no hay reglas que precise el proceso que se da a la hora de realizar la conversión. Sin embargo, este hecho es el que enriquece esta actividad cognitiva.

En este sentido, de acuerdo con Duval [3], se considera que para el aprendizaje de los objetos matemáticos es indispensable apelar a la noción de múltiples registros de representación semiótica, que a su vez presupone la consideración de tres

actividades cognitivas fundamentales. En primer lugar, la identificación de marcas perceptibles propias de un registro de representación, la segunda consiste en la transformación interna propia de un registro de representación (tratamiento) y la tercera consiste en el cambio de registro que se da de un sistema de representación a otro (conversión).

**c. ¿Cómo acceder a la comprensión de un objeto matemático según la teoría semiótica cognitiva?**

De acuerdo con Duval [2] La actividad cognitiva centra su atención en las formas de representación y comunicación que realiza un sujeto sobre algún objeto Matemático, nociones que, al intentar ser comunicadas, generan la necesidad de representar, siendo esa representación una vía para dar cuenta de lo que se habla. Ahora bien, Para dar cuenta de lo aprendido y no confundir el objeto con su representación se hace uso de distintos registros, y es a partir de la toma de conciencia de lo aprendido que podemos hablar de comprensión. Esto es.



**Figura 5:** Elementos que median en la comprensión de un objeto matemático

Como se aprecia en la figura 5, la comprensión de un objeto matemático no es una actividad que resulta de un momento a otro, sin que antes se hayan alcanzado algunas competencias asociadas a lo que se ve, lo que se dice y lo que se representa. Por tanto, se hace indispensable que, a la hora de hablar de comunicación, se tenga en cuenta que es una actividad cognitiva que centra su atención en la forma como el sujeto presenta una determinada información a sus semejantes, la cual por el condicionamiento de entender lo que se plantea, debe ser lo más claro posible.

De igual forma, la visualización, que esta mediada por las aprehensiones centra su atención en la pertinencia y necesidad que tiene el sujeto de tomar y apropiarse de las características y propiedades de un objeto matemático, para lo cual, se hace necesario explicitar el conjunto de Marcas lingüísticas presentes en cada situación, teniendo en cuenta que esta son palabras claves que conducen a la respuesta esperada. No obstante, las representaciones semióticas resultan como un medio que permiten exteriorizar lo que se quiere comunicar.

Finalmente, se quiere dejar claro, que los elementos mencionados con anterioridad, no se efectúan de forma aislada, menos como un condicionamiento que de uno sigue otro, sino más bien que entre ellos debe existir una coordinación y articulación interna, que posibilite, que de la posibilidad de abordar un objeto matemático a partir de los tres elementos actúen en sinergia.

#### **a. Elementos curriculares**

El desarrollo teórico de las distintas situaciones abordadas en esta indagación, se toman en consideración algunos elementos, documentos e ideas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, tales como: Estándares Básicos de Competencias [5] y Lineamientos Curriculares de Matemáticas [4]; en los que se evidencia el nivel de competencia y desarrollo que deben alcanzar los estudiantes en un determinado grado.

En la estructuración del MEN [4], [5] tres ejes o aspectos importantes en el desarrollo del proceso educativo: Procesos Generales, Conocimientos Básicos, y el contexto.

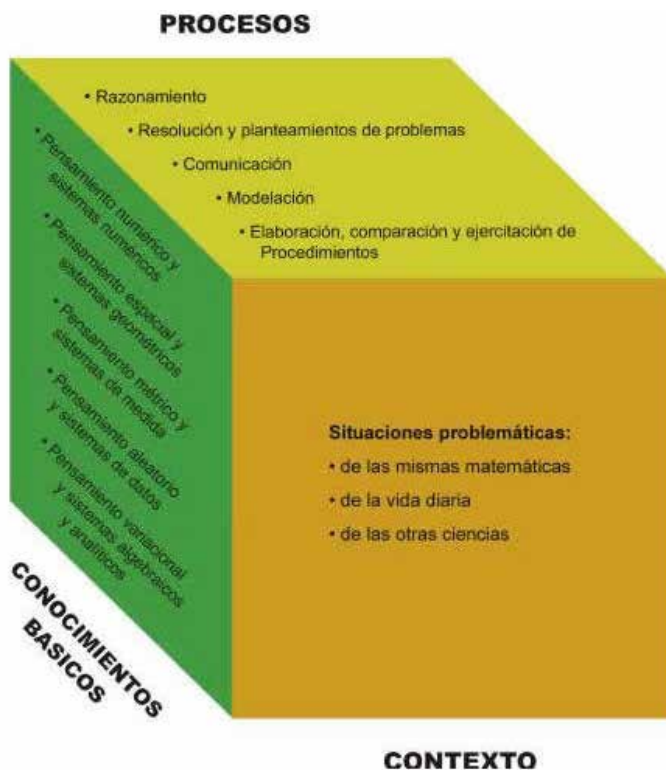


Figura 6: Elementos importantes dentro del proceso educativo.

Tomado de MEN [4].

## i. Procesos Generales

Los procesos generales son las acciones de pensamiento que desarrollan los estudiantes en un ambiente propicio para aprender y desarrollar el conocimiento matemático; dentro de estos procesos se tienen: el razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Para efectos de este trabajo se ha considerado: la modelación, la resolución y planteamiento de problemas como los procesos fundamentales a desarrollar en los estudiantes mediante el trabajo con las actividades propuestas en una situación situada en el municipio de Buenaventura.

## ii. Conocimientos Básicos

Hace referencia a las competencias que se consideran fundamentales y además permiten el desarrollo del pensamiento matemático. Estos tienen que ver con



los 5 tipos de pensamientos y los correspondientes sistemas. Cabe aclarar, que, aunque para el desarrollo del pensamiento matemático son necesarios los cinco tipos de pensamiento, solo se centrará la atención en el pensamiento variacional.

### **iii. El contexto**

Se refiere al entorno, que le proporciona y ofrece al estudiante las posibilidades de trabajar teniendo en cuenta lo sociocultural, matemático y escolar en este caso se localiza: el contexto matemático y el sociocultural. El contexto matemático, es el ambiente por medio del cual los estudiantes acceden al conocimiento matemático, estos se incorporan a través de la formulación de los enunciados del problema provenientes de las mismas matemáticas, pero como un acercamiento a ellas; donde se evidencia el razonamiento, la lógica y las inferencias como procesos que realiza el estudiante para darle solución a una situación problema. Esto lo proporciona el contexto como espacio que propicia la interacción entre estudiante, saber matemático y el medio. Por otro lado, el contexto sociocultural proporciona los elementos significativos que se deben tener en cuenta para el desarrollo del acto educativo; ya que es el ambiente donde se desenvuelve el individuo, propiciando la familiaridad con los contenidos educativos. En este sentido el MEN [4] plantea que

Es útil recomendar o tener en cuenta que el contexto extraescolar o sociocultural para el diseño y planeación de las actividades y situaciones de clase no puede servir de excusa para no trabajar también situaciones problema relacionadas con el contexto escolar o institucional.

Este hecho, muestra la necesidad de situar los conocimientos que se abordan en clase, pues es una de las únicas posibilidades que se tiene de enriquecer la actividad matemática con situaciones argumentativas donde el estudiante pone de manifiesto distintas variables que quizás al inicio de una actividad planteada, no se había considerado.

## **IV. METODOLOGÍA**

De acuerdo con Brousseau [7], se considera que las clases de matemáticas deben ser orientadas a través de cinco (5) clases de situaciones didácticas que permiten que, en clases, se construya conocimiento y a su vez generar una previa comprensión de los conceptos. Estas situaciones son: situación de acción, de formulación, de validación, devolución del problema e institucionalización.

Situación de acción: inicialmente de forma individual a cada estudiante se le planteara una situación, donde tendrá que poner en juego sus estrategias a utilizar frente al desarrollo del problema, a través de un medio matemático que lo llevara a poner en escena su conocimiento.

Situación de formulación: luego de haber planteado sus hipótesis frente al enunciado problema presentado, él estudiante deberá estar en la capacidad de formular hipótesis, plantearse nuevos problemas a partir del que se había propuesto, y así brindar resultados que den respuestas al problema planteado.

Situación de validación: en compañía de un compañero o compañeros, el estudiante tendrá que argumentar sobre lo que desarrollo de la situación abordada, para saber si el resultado hallado es correspondiente al problema planteado. Aquí se debe evaluar el hecho de abordar los enunciados problemas y actividades que permitan juzgar la pertinencia de los medios utilizados, de tal forma que, los planteamientos se han un acto social reconocido entre los estudiantes.

Devolución del problema: después que los estudiantes planteen, resuelvan y validen el problema, se les presentara otra situación en la cual verificaran si sus argumentos son pertinentes para cualquier situación, o en su defecto, si se hacía necesario corregirlos, o, si consideran que la respuesta encontrada se acomoda a algo muy particular de la situación planteada (deberán buscar una mejor estrategia que les permita dar cuenta de la generalidad de la situación planteada).

Situación de institucionalización: finalmente, el docente junto con los estudiantes se organizarán los argumentos que se habían planteados en el salón de clases, de tal manera que se pueda consolidar la concepción que tenían los estudiantes, buscando que quede claro para todas las consignas expuestas en la secuencia y en la que todos lleguen a un acuerdo, es decir, formalizar el conocimiento.

## V. ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES

Toda situación enmarcada dentro de un contexto particular, se recomienda que se analice teniendo en cuenta dos componentes: el semiótico y el disciplinar. Desde el marco teórico se hacen evidente algunos elementos propios de la teoría que enriquecen el diseño de las actividades, que de una u otra forma fortalecen componente disciplinar.

## A. Análisis Semiótico

En este apartado se describen algunos elementos propios de la teoría semiótica cognitiva, que enriquecen el desarrollo de las situaciones, entre estos elementos se destaca la designación, la representación, marcas lingüísticas, entre otros.

### 1) La designación

En el diseño de las actividades se hace evidente la necesidad de designar o enunciar las variables constitutivas de cada situación, para poder comunicar al lector, lo que debe entender al momento de analizar los resultados. Este hecho se convierte en un elementos importantes, dado que permite poder exteriorizar lo que hasta el momento el sujeto asume como convención propia, convirtiéndose así en una actividad colectiva.

### 2) La conversión

En cada situación planteada se hace se le genera la necesidad a el estudiante de tener que presentar una determinada información en un registro de representación distinto, al que se presenta de forma anticipada, que guarde la congruencia en la información. Este hecho, conduce a tener que movilizar procesos cognitivos relacionados con la articulación y correspondencia entre unos datos iniciales presentados en un registro, y otros mostrados en su correspondiente.

### 3) Tratamiento

En cada registro de representación, se le genera la necesidad al estudiante de crear un conjunto de procesos que permitan particularizar momentos, que conduzcan a las generalidades de patrones de cambio y variación. Estos momentos permiten a los estudiantes poder realizar hallazgos significativos que posibilitan realizar análisis de la situación presentada.

### 4) La representación

A lo largo de todo el diseño de la secuencia, se hace evidente una de las actividades más importantes categorizadas por Duval [2]: la actividad de representar, dado que según esté, no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin la actividad de representar, siendo esta actividad cognitiva una constante necesidad que debe experimentar un sujeto a la hora de poder adquirir un determinado conocimiento, y, en la secuencia didáctica diseñada, se hace necesaria esta actividad para poder abordar y comprender los fenómenos asociados a la función lineal  $y = mx + b$  en distintos registros de representación.

Según Duval [2], para que un objeto de conocimiento movilice algún tipo de aprendizaje significativo, debe ser representado al menos en dos registros de representación distintos. En concordancia con esto se muestra que, en cada actividad planteada dentro de una situación, se invita a los estudiantes a colocar en correspondencia por lo menos a dos registros distintos de representación, siendo el registro tabular, gráfico, lengua natural y expresión algebraica, los más comunes en desarrollo de las situaciones.

### 5) Marcas lingüísticas

Dentro de las representaciones escritas en lengua natural, se hace uso de un conjunto de términos que pueden ser considerados como indicadores que inducen al lector a dar una respuesta correspondiente a lo planteado, dado que al usar términos tales como: por cada, inversión total, utilidad, entre otros, genera un condicionamiento cognitivo asociado a la necesidad de interpretar cada uno de esos términos para poder responder a lo planteado. En este orden de ideas, el término por cada, invita al estudiante a tomar conciencia de hacer una suma generalizada de valores constantes que hacen que incrementen o disminuyan otras tales como el ingreso o utilidad. La inversión total, representa un costo generalizado que no aumenta ni disminuye los ingresos, afectando únicamente la utilidad, y la utilidad, se considera como el beneficio que muestra la ganancia o pérdida que dejan los productos comprados y vendidos, por tanto, se tiene que la utilidad se tiene como la diferencia entre los ingresos totales y los costos.

## VI. RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE UNA SECUENCIA

Para el desarrollo del trabajo de indagación, se tomó como herramienta de uso la secuencia didáctica diseñada de Angulo y Celorio [12], la cual se adaptó e implementó a un grupo de 10 estudiantes del grado 8º, privilegiando de ella, lo relacionado con la situación pesquera del municipio de Buenaventura, y tomando como objeto de análisis lo asociado a las transformaciones de tratamiento y conversión para la comprensión de los parámetros  $m$  y  $b$ , de una función lineal  $y = mx + b$ . De la aplicación se obtuvieron los siguientes resultados.

### A) Situación 1: Clasificando pescados y relacionando magnitudes

De los resultados encontrados en esta situación llama la atención algunos hallazgos evidenciados en algunos procesos que mostraron las estudiantes. Entre estos sobresalen los siguientes.

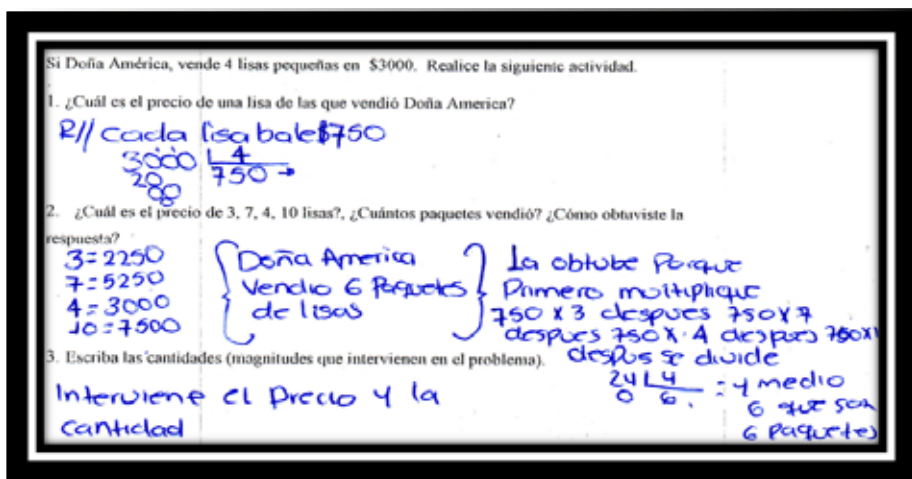


Figura 7: Analisis de la S1T123

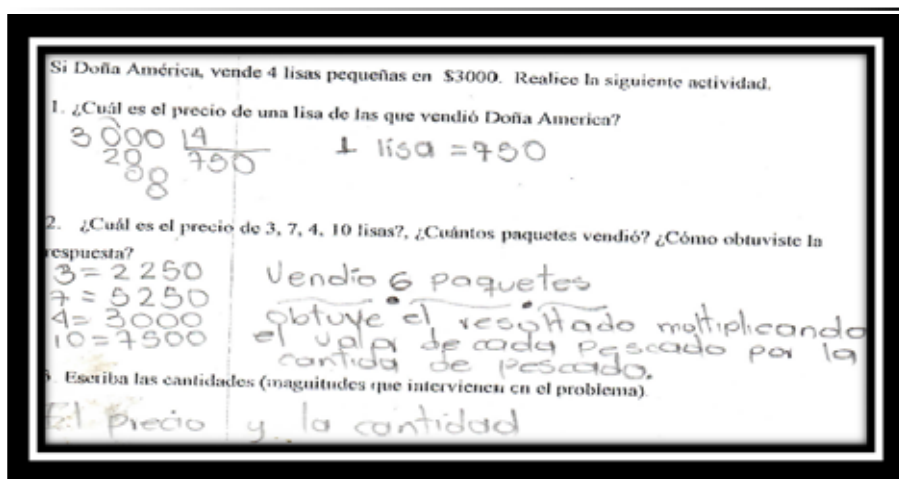


Figura 8: Análisis comparativo de la S1T123

Como se puede apreciar en ambas Figuras, se encuentran que ambas estudiantes responden de forma homologa la tarea 1 y 3. Sin embargo es significativo detallar lo plasmado en la tarea 2, dado que, por un lado, la Figura 1 privilegia la una respuesta que conduce a representar expresiones de forma algebraica, mientras que la Figura 2 muestra una respuesta presentada en lengua natural. Esto deja ver la importancia que tienen los registros de representación para poder dar cuenta de algún objeto de conocimiento, teniendo en cuenta que, para poder responder correctamente a lo planteado, se hizo uso de un reconocimiento de marcas lingüísticas, designaciones y un conjunto de tratamientos.

Por otro lado, en esta situación también se encontraron resultados asociados a conversiones, tratamientos, entre otros como se muestra a continuación.

4. ¿Cómo cambia el ingreso a medida que aumenta el número de lisas vendidas?

*Puede cambiar el ingreso depende y si aumenta las lisas de valor y el ingreso va siendo el mayor porque aumenta la cantidad de lisa aumenta el precio*

5. a. Realice una tabla que permita registrar el número de lisas vendidas y el ingreso.

CANTIDAD	PRECIO	INGRESO - valor
1	1250	1250
2	2500	2500
3	3750	3750

6. Justifique la validez de las siguientes afirmaciones (v)

- A mayor cantidad de peces vendidos, mayor es el ingreso. (v)
- En algún momento el ingreso puede ser cero. (v)
- El precio del paquete no varía, según lo vendido. (v)

*Ya que si no vende ninguna lisa no tiene ingresos, no gana nada*

7. Escriba una expresión que permita calcular el ingreso, según la cantidad de lisa.

$Q \times (P) = I$

*Q* lisa      *P* precio      *I* ingreso

Figura 9: Analisis de S1T456

4. ¿Cómo cambia el ingreso a medida que aumenta el número de lisas vendidas?

*Cambia dependiendo la cantidad de lisas que vende, y el ingreso aumenta de 1250 en 1250.*

5. a. Realice una tabla que permita registrar el número de lisas vendidas y el ingreso.

Cantidad	1	2	3	4	5
Precio	1250	2500	3750	4820	6250

6. Justifique la validez de las siguientes afirmaciones

- A mayor cantidad de peces vendidos, mayor es el ingreso.  
*✓. Porque el ingreso va aumentando de acuerdo a la cantidad de pescados vendidos.*
- En algún momento el ingreso puede ser cero.  
*✓. Siempre y cuando no se vende nada.*
- El precio del paquete no varía, según lo vendido.  
*✓. Porque el precio siempre va a ser el mismo por cada paquete vendido.*

7. Escriba una expresión que permita calcular el ingreso, según la cantidad de lisa.

$K \times 10000 = Y$

*K = La cantidad de paquetes vendidos*

*Y = El ingreso.*

Figura 10: Análisis comparativo de la S1T456

De acuerdo a las dos Figuras anteriores, se toman como elementos significativos los relacionados con la argumentación de la tarea 4, la justificación de la 6 y la expresión presentada en la 7. De esto sobre sale que, en ambas Figuras las estudiantes manifiestan que el ingreso aumenta en la media que cambia las unidades, de esta respuesta sobre sale lo expuesto en la Figura 4, donde sobre sale que hay una aproximación significativa del concepto razón de cambio. De igual forma, es importante analizar lo expuesto en la tarea 6, donde se aprecia que se responde correctamente a cada ítem presente en la actividad y además se muestran argumentos significativos y validos de los mismos. De todo lo ilustrado anteriormente, también llama la atención lo presente en la tarea 7, donde las estudiantes muestran una aproximación a una expresión algebraica a partir de un enunciado en lengua natural, lo cual privilegia la importancia de la conversión para la comprensión del objeto matemático.

### **1) Logros alcanzados en la situación 1.**

Al finalizar la situación 1, las estudiantes presentaban dominio sobre lo siguiente.

- Realizaban operaciones con los números reales correctamente, para representar cantidades que reflejaban el ingreso del pescador, lo cual mostraba un dominio de la actividad cognitivas de procesos llamada tratamientos.
- Reconocían las variables implicadas en la actividad, lo cual permitió ir aproximándose conscientemente a la actividad de designación.
- Relacionaban de forma correcta cantidad con ingresos y de igual forma realizaban tablas que justificara dicha relación o correspondencia, lo cual permitió la aproximación a la actividad cognitiva de conversión.

### **B. Situación 2: Platoneras, Razón de Cambio y Registros de Representación**

Al igual que en la situación 1, en esta sesión se muestran algunos de los resultados mas sobresalientes de esta situación, entre estos tenemos.



**Figura 11:** Análisis de la S2T7

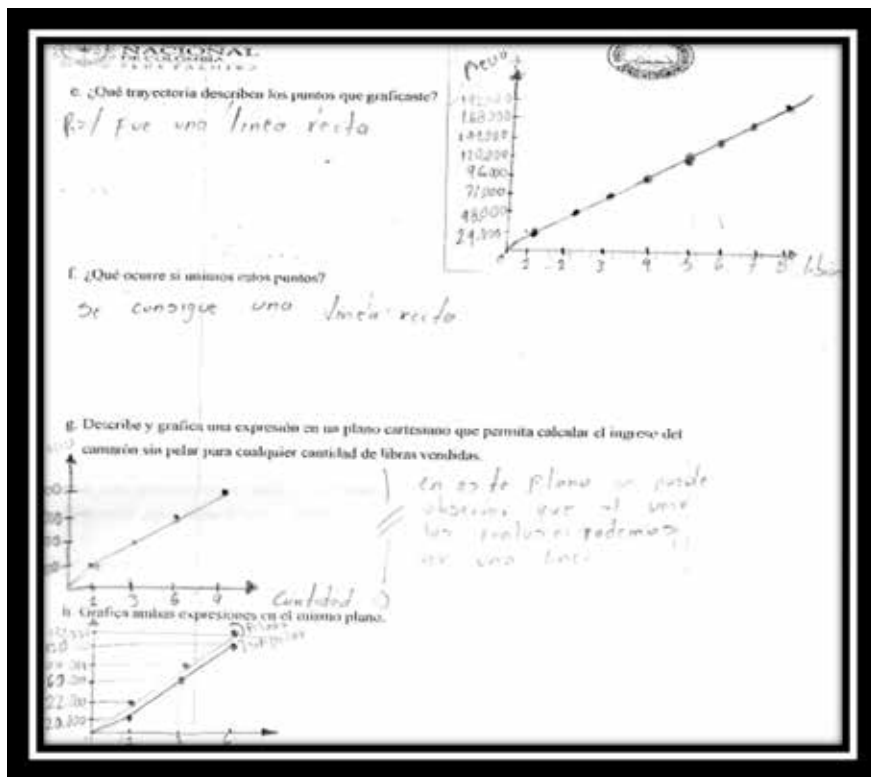
Como se aprecia en la Figura descrita con anterioridad, las estudiantes describían los tratamientos usados para dar cuenta de la pendiente como razón de cambio, donde a partir de un conjunto de operaciones y algunas conclusiones o análisis las estudiantes mostraban una aproximación a la comprensión de la función lineal. De la Figura sobresale que, los estudiantes realizaron los tratamientos correctamente, pero no concluyeron como se esperaba alrededor de la pendiente.



**Figura 12:** Análisis de la S2T3P6



Como se muestra en la Figura anterior, se aprecia que hubo un aprendizaje significativo de las estudiantes en la designación, representación y análisis de la situación. Esto se dice porque, se muestra que, aunque en términos muy generales las estudiantes ya representaban de forma general expresiones algebraicas, realizando designaciones oportunas de cada término. De igual forma, sobre sale el hecho de que las estudiantes pudieron argumentar alrededor de los hallazgos encontrados asociados a la pendiente, lo cual muestra una comprensión parcial de la situación porque, se alcanzaron algunas de las actividades cognitivas importantes como lo son: la representación, la designación, tratamientos, conversión, argumentación, entre otras, que justifican la presentación de los procesos realizados.



**Figura 13:** Análisis de la S2T3P8

Como se observa en la Figura anterior, las estudiantes en su mayoría presentaban dominio de la representación cartesiana para dar cuenta de ingresos de la venta de camarón. Esta situación permitió profundizar un poco más en el análisis significativo y funcional de la pendiente como razón de cambio, permitiendo observar así, la correlación directa entre la cantidad y el ingreso, que mediadas por un precio modelos patrones de variación lineal.

## 1) Logros alcanzados en la situación 2.

Al finalizar la situación 2, las estudiantes tenían dominio sobre lo siguiente.

- Representaban correctamente tablas, que mostrará información que se presentaba en lengua natural.
- Realizaban conversiones entre los registros algebraicos, lengua natural, tabular e introducción al cartesiano.
- Había una aproximación hacia un aprendizaje comprensivo de la pendiente

## C. Situación 3: Fenómenos cotidianos y Función Lineal

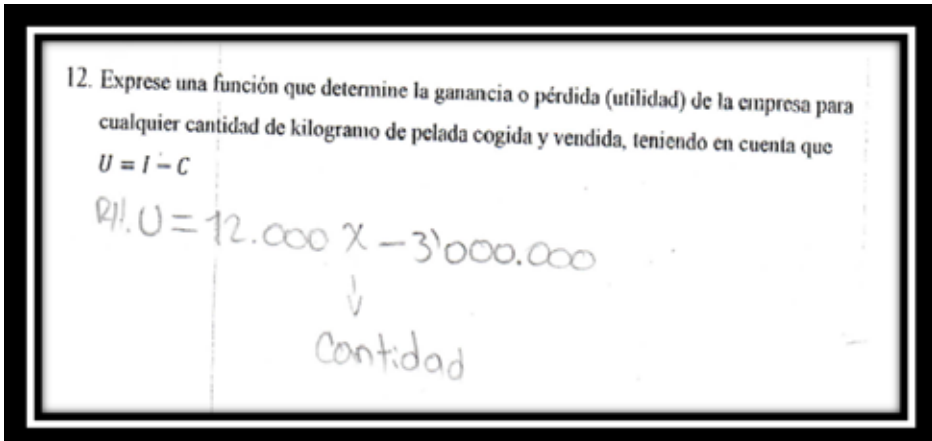
Después de haber terminado la situación 3, se obtuvieron los siguientes resultados.



**Figura 14:** Analisis de la S3T1P567

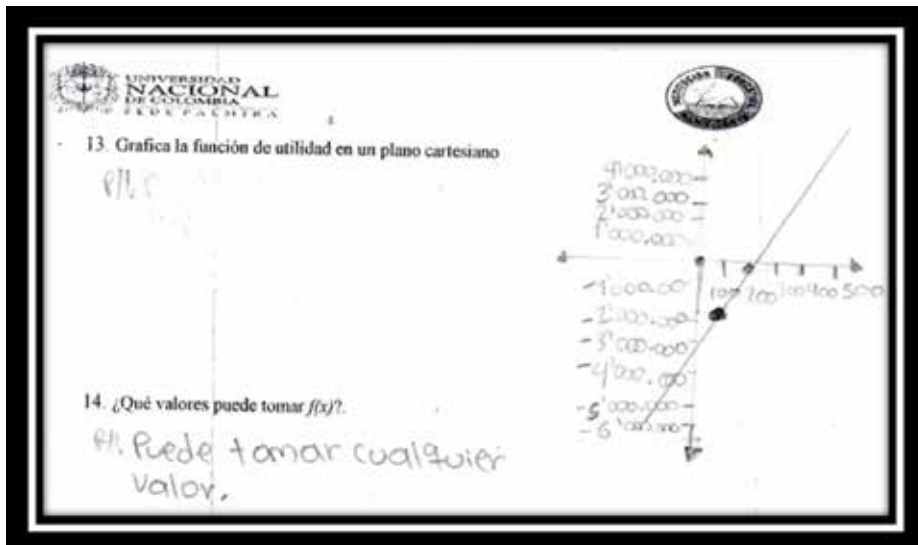
Como se aprecia en la Figura anterior, en esta situación y actividad se privilegió la vinculación de todos los términos que conforman la función lineal, tomando como punto de partida el análisis del intercepto en y. De esto sobresalió que las estudiantes en su mayoría pudieron representar el costo en lengua natural, así

como también en forma cartesiana, manifestando que el “costo para una faena no variaría porque es una cantidad fija que se invierte y no tiene incremento ni disminución”, de lo cual se analiza que, si la empresa no vende, entraría en pérdidas, lo cual en términos funcionales obedecería a una cantidad negativa.



**Figura 15:** Análisis de la S3T3P12

Como se muestra en la Figura anterior, las estudiantes en esta etapa de la secuencia ya eran capaces de representar en términos generales una expresión algebraica. Dejando ver los términos de forma explícita que conforman dicha expresión.



**Figura 16:** Análisis de la S3T3P13

Como se aprecia en la Figura anterior, las estudiantes representaban y sobre todo daban cuenta de cada uno de los términos de la función lineal. Dejando ver que el signo de la pendiente está directamente relacionado con la inclinación de la recta, y además que el costo total, al ser integrado en la expresión de utilidad, represento el intercepto en y.

Vale la pena destacar, que las estudiantes ya podían argumentar en lo que respecta al dominio y rango de la función, porque, aunque se sabe con son los números reales, no es fácil esa asimilación.

### 1) Logros alcanzados en la situación 3

- Al finalizar la situación 3, las estudiantes tenían dominio sobre lo siguiente.
- Reconocían todos los términos de la función lineal
- Realizaban conversiones entre los distintos registros de representación
- Comprendían y reconocían los términos de la función lineal en cada registro representado
- Argumentaban sobre cada elemento relacionado con la función.
- 

## VII. CONCLUSIONES

- La actividad de un docente no se debe centrar en la transmisión de contenidos descontextualizado, que él estudiante por autoridad debe aceptar. Sino más bien, se deben abordar elementos propios de la disciplina que obedezcan a un contexto particular que haga que lo transmitido cobre sentido y significado en la vida del educando, es decir, que tenga alguna funcionalidad. Porque un concepto al que no se le encuentre alguna función, tiende a ser un aprendizaje memorístico que con el tiempo se olvida. Ante esto se recomienda hacer uso de actividades propias del contexto local propio donde está inmerso el educado, dado que como lo plantea el MEN [4]:

"El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas".

Lo anterior tiene sentido, en tanto el medio donde se desenvuelve el individuo contribuye en su proceso de formación educativa; ya que es allí, donde se pueden tomar situaciones del entorno y vincularlas en el desarrollo de las actividades matemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje, para luego pasar a un tratamiento en las matemáticas, y así determinar tanto las propiedades como las operaciones del objeto matemático.

- La secuencia didáctica como herramienta que permita la construcción de concepto y análisis de los mismos, resulta ser un dispositivo potente para este acercamiento, dado que a partir de los análisis, tratamientos y conversión de los conceptos que parecen ser muy sencillos, se logra la conceptualización de aquellos que se consideran como MACROS, que satisfacen los objetivos propuestos.
- El análisis de pensamiento variacional permite que tanto el educando como el docente tomen conciencia de las situaciones relacionadas con la vida, hecho que resulta importante porque permite ser un puente que posibilita la reflexión de información con otras áreas que desde las matemáticas se puedan explicar.
- El análisis de la teoría semiótica cognitiva de Raymond Duval, permite que el docente tenga un soporte teórico importante que permite que este lo use como un elemento didáctico consiente a la hora de implementar sus clases, dado que entre tantas cosas Duval dice: No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar, sin la actividad de representa, lo cual deja ver que aunque somos conscientes que todo ser posee algún tipo de información no se puede asegurar que este sea consiente de ella, sino es capaz de comunicar, y para ello, lo debe representar.
- La función lineal no puede seguir siendo trabajada de forma fraccionada o peor aún de forma mecánica, donde por un lado se observa que un concepto no se relaciona con otros o que siempre se hace lo mismo. La función lineal debe ser abordada en toda su dimensión, lo cual implica la relación de las operaciones con los números reales y su representación en un sistema multirregistro.

De todo lo anterior, se hace importante manifestar que, desde el diseño, ejecución y análisis de las actividades, es necesario e indispensable pensar y repensar lo que se hace, y sobre todo como se hace, dado que el fin último de la educación

es formar estudiantes competentes e íntegros, capaces tomar decisiones que contribuyan de manera decisiva a su formación y a la comunidad. Esto implica que se deben hacer unos análisis previos de las situaciones, que conduzcan a la toma de decisión sobre el material a usar, para que este así dinamice los procesos de aprendizaje.

## VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Duval, R., “Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros”. En: E. Sánchez (ed.), *Antología en Educación Matemática*, pp. 125-139, México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN, 1998.
- [2] Duval, R., *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2º ed). Santiago de Cali: Peter Lang, 1999.
- [3] Duval, R., Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, pp. 143-168, 2006.
- [4] MEN, *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Autor, 1998.
- [5] MEN, *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Autor, 2006.
- [6] Posada, F. y Villa, J., “Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional”, tesis de maestría, Universidad de Antioquia- Medellín- Colombia, 2006.
- [7] Brousseau, G., *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2007.
- [8] Pecharromán, C., *El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica*, 2014 [En línea] Disponible en: <http://www.redalyc.org/pdf/405/40532665005.pdf>
- [9] Bravo, G., Tavera, C. y Tibocho, G., Propuesta para explorar la comprensión de aspectos de la función lineal. *Revista Emma*, pp.166-170, 1999.
- [10] Ospina, D., “Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto función lineal”, tesis de maestría, Universidad autónoma de Manizales: Manizales, 2012.
- [11] Valoyes, L. y Malagón, M. *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar*. Cali: Universidad del Valle, 2006.
- [12] Angulo, J. y Celorio, S., "Una secuencia didáctica como herramienta pedagógica para introducir el concepto de función lineal en grado 9º". En: G. Obando (ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, pp. 62-65, Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín, 2011.