View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by IMHOTEP: African Journal of Pure and Applied Mathematics

SUITES AUTOMATIQUES ET PAPIERS PLIES

Théodore TAPSOBA

Résumé *: Nous montrons qu'aucune suite automatique minimale non périodique, point fixe d'une substitution injective uniforme, n'est une suite de pliage.*

Abstract *: We show that there is no minimal nonperiodic automatic sequence, fixed point of an injective constant-length substitution, which is a paperfolding sequence.*

1. INTRODUCTION

Une suite finie $m = (m_0, m_1, ..., m_n)$ dans un ensemble A de symboles (ou lettres) sera vue le plus souvent comme un mot (fini) $m_0m_1...m_n$ sur l'alphabet A et par extension, une suite $u : \mathrm{IN} \to A$ sera vue comme un mot infini $u = u_0u_1u_2....$. Une méthode simple pour construire de tels mots est de procéder par itérations d'une substitution. Chaque lettre d'un mot m est remplacée par un mot et ainsi de suite. On obtient ainsi des mots infinis dont les régularités ont retenu en premier lieu l'attention ([22], [23], [2], [9]).

Une suite point fixe d'une substitution uniforme f sur un alphabet A est dite automatique. Une suite de pliage est la suite de monts et vallées obtenue en dépliant un morceau de papier auparavant plié une infinité de fois.

Le but de cette note est de montrer qu'aucune suite automatique minimale non périodique, point fixe d'une substitution injective uniforme, n'est une suite de pliage.

Classification AMS 1991 : 11 B 85, 68 Q 45, 68 R 15.
Mots-clés : suite automatique, substitution uniforme, suite de pliage, mot rythmé.

2. PRELIMINAIRES

Soit A* le monoïde libre engendré par un ensemble A appelé alphabet. Les éléments de A sont appelés lettres et ceux de A*, mots. Pour tout mot v de A, |v| désigne la longueur de v, c'est-à-dire le nombre de ses lettres. L'élément neutre de A* est le mot vide noté ε . C'est un mot de longueur zéro. Soit $a \in A$; on note simplement a* pour l'ensemble {a}* des mots finis formés de la seule lettre a . Le mot infini formé de la lettre a est noté a^∞ . Un mot v est dit facteur de w si w = xvy avec x et y dans A*. On écrit alors v | w . Si $x = \varepsilon$ (resp. $y = \varepsilon$), v est dit préfixe (resp. suffixe) de w . Un préfixe ou suffixe de w est dit strict s'il est différent de w.

On appelle substitution, une application $f : A \to A^*$. Cette application se prolonge de manière naturelle en morphisme $A^* \to A^*$ de monoïdes . Une substitution f est dite de longueur constante ou uniforme de module σ si $\sigma = | f(i) |$ pour toute lettre i de A, croissante si $| f(i) | \geq 2$. S'il existe une lettre a de A telle que f(a) = am avec | m | > 0, alors l'ensemble des mots infinis de préfixe a possède un point fixe $u = amf(m)f^2(m)...f^k(m)...$.

Soit k un entier ≥ 2 . On désigne par $< k >$ l'alphabet {0, 1, ..., k - 1} et par $< k >^r$ l'ensemble des mots de longueur $r \geq 1$, $< k >^0 = \{\varepsilon\}$, $< k >^* = \cup < k >^r$. Un k-automate est la donnée d'un quintuplet (A, E, a, φ, τ) avec :

(i) A alphabet, A = {a, b, c, ... } ,

(ii) E alphabet,

(iii) a un point de A,

(iv) φ application, $\varphi : A \times < k > \to A$,

(v) τ application, $\tau : A \to E$.

Pour tout (x, s) dans $A \times < k >$, on pose : $\varphi (x, s) = s(x)$, ou plus simplement x.s . On prolonge alors $\varphi : A \times < k > \to A$ en une application , encore notée φ ,

$\varphi : A \times < k >^* \to A$.

Si n est un entier positif dont la représentation en base k est $e_g e_{g-1}...e_0$, on pose, pour tout x dans A, $\varphi (x, n) = x\, e_g e_{g-1}...e_0$ (à n = 0 on associe le mot vide, avec $\varphi(x, \varepsilon) = x$). Ainsi, lorsque n parcourt IN, a.n décrit une suite infinie d'éléments dans A et $\tau(a, n)$ décrit une suite infinie d'éléments dans E.

On dit qu'une suite $t \in E^{IN}$ est k-reconnaissance s'il existe un k-automate (A, E, a, φ, τ) tel que : $t = (t_n)_{n\in IN} = (\tau\ (a.n))_{n\in IN}$. (Le lecteur intéressé pourra trouver dans [11] de nombreux exemples sur les suites reconnaissables).

Lorsqu'un mot infini est point fixe d'une substitution uniforme sur un ensemble fini, on le dit encore automatique. On a en effet ([4]) le résultat suivant :

PROPOSITION 1 : Soit E un ensemble fini non vide, soit $t = (t_n)_n \in E^{IN}$ et soit k un nombre premier. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la suite t est k-reconnaissable ;

(ii) t est engendrée par une substitution uniforme de module k ;

(iii) il existe un corps fini K de caractéristique k et une injection $\beta : E \to K$ telle que $\beta(t) = \beta(t_n)$ soit algébrique sur K[X].

Remarque : Sans avoir à supposer k premier, l'équivalence entre (i) et (ii) a été établie par Cobham dans [5].

Une substitution f est dite primitive s'il existe un entier naturel n tel que pour tout couple (a, b) de lettres, b apparaît dans le mot $f^n(a)$.

Soit u un mot fini ou infini. L'ensemble des facteurs finis de u est noté F et celui des facteurs de longueur n, F(n). Il est clair que tout facteur d'un mot v est un mot de F et qu'il existe une lettre a telle que $va \in F$. Le facteur v de u est dit spécial si pour toute lettre i de A, vi est un facteur de u. FS désigne l'ensemble des facteurs spéciaux de u et FS(n), celui des facteurs spéciaux de longueur n .

Soit S le décalage défini par $S(a_0a_1a_2.....) = a_1a_2.....$ et soit Ω l'adhérence de l'ensemble $\{Sk(u), k\in IN\}$, où la distance d est définie par :

$$d(v, w) = \exp(- \inf\{n\in IN \ ; v_n \neq w_n \}).$$

La suite u est associée au système dynamique (Ω, T) (où T est la restriction de S à Ω) et est dite minimale si les seuls fermés invariants de Ω sous l'action de S sont l'ensemble vide et Ω .

La caractérisation suivante est classique ([7]) :

PROPOSITION 2 : Le mot u est minimal si et seulement si pour tout facteur m de u, il existe un entier j dépendant de m tel que :

$\forall k \in \mathrm{IN}$, $m \mid u_k u_{k+1} \ldots u_{k+j}$.

Lorsque u est point fixe d'une substitution f, nous avons ([16]) un critère de minimalité en fonction de f :

PROPOSITION 3 : Soit u un point fixe de la substitution f sur l'alphabet A. Si a est préfixe de u, avec $|f(a)| \geq 2$, et si toutes les lettres de A sont dans u, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est minimal et lim $|f^k(b)| = +\infty$ pour toutes les lettres b de A ;

(ii) il existe $L \leq \mathrm{Card}(A)$ tel que pour tout $b \in A$, $a \mid f^L(b)$;

(iii) pour tout $b \in A$, il existe $k(b) \in \mathrm{IN}$ tel que $a \mid f^{k(b)}(b)$.

Lorsque A = {1, 2}, on a ([18]) un critère de minimalité très simple :

PROPOSITION 4 : Soit u un mot infini point fixe d'une substitution f sur A = {1, 2} tel que 1 soit préfixe de u et $u \neq 1^\infty$.

(i) Supposons f croissante, alors : u minimale $\Leftrightarrow f(2) \notin 2^*$.

(ii) Supposons $|f(1)| \geq 2$ et $f(2) = 2$; alors : u minimale $\Leftrightarrow f(1) \in 1A^*1$.

III - SUITES AUTOMATIQUES

Soit u une suite minimale non périodique, point fixe d'une substitution injective uniforme f de module σ sur un alphabet A.

Une manière naturelle de découper (découpage de niveau k) le mot infini u consiste à faire intervenir les ensembles $E_k = \{\varepsilon\}\cup\{f^k(u[0, p-1]) ; p>0\}$, où u[i, j] désigne le mot $u_i u_{i+1}...u_j$ ($j\geq i$). J.C. Martin ([10}), qui est un des premiers à avoir étudié ces problèmes de découpage, qualifie de déterminée à l'ordre k une substitution f pour laquelle dès qu'un facteur m est assez long, le découpage de niveau k et les lettres dont m provient par f^k ne dépendent pas des rangs où m apparaît

D'autre part, tout facteur m de u peut se factoriser sous la forme :

(1) $$m = xf(v)y$$

avec les conditions :

(2) x suffixe strict d'un mot $f(v_1)$, y préfixe d'un mot $f(v_2)$ et v_1vv_2 facteur de u.

Un facteur m de u est dit mot rythmé s'il n'existe qu'un seul triplet (v, x, y) vérifiant les conditions (1) et (2). Une substitution est dite rythmée s'il existe un entier L_0 tel que tout facteur de longueur plus grande que L_0 soit un mot rythmé.

Nous rappelons ici quelques propriétés (très simples) des facteurs et des facteurs spéciaux dont les preuves se trouvent dans [20] .

PROPOSITION 5 : S'il existe un facteur R de u rythmé et de longueur $\geq \sigma$, alors tout facteur de u dont R est un facteur est aussi un mot rythmé.

PROPOSITION 6 : Tout suffixe d'un facteur spécial est spécial.

Le corollaire suivant est immédiat :

COROLLAIRE : Si FS(p) est vide, alors pour tout $n \geq p$, FS(n) est vide.

Le résultat assez classique suivant, cité dans [17], a été démontré dans [19] et [21] :

PROPOSITION 7 : Il existe L_0 dépendant de σ et de Card(A) tel que tout facteur m de u, de longueur plus grande que L_0, soit un mot rythmé.

IV - SUITES DE PLIAGE

Une suite de pliage est la suite des monts et vallées obtenue en dépliant un morceau de papier auparavant plié une infinité de fois (voir par exemple [13], [14], [16]). En d'autres termes, la suite u(n) est une suite de pliage si et seulement si : u(4n) = 0 (resp. u(4n) = 1), u(4n + 2) = 1 (resp. 0), et u(2n + 1) est une suite de pliage.

On peut également obtenir des suites de pliage par l'intermédiaire des suites de Toeplitz ([8]). Signalons enfin que le principe de la "symétrie perturbée" (voir [12]) a aussi permis d'en générer ([3]).

Notre but est de voir s'il existe des substitutions dont le mot infini est une suite de pliage.

Si P(n) désigne le nombre de facteurs distincts de longueur n, on a ([1]) le résultat suivant :

PROPOSITION 8 : Pour toute suite de pliage, le nombre de facteurs distincts de longueur n, P(n) est obtenu comme suit : P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 12, P(5) = 18, P(6) = 23 et pour tout $n \geq 7$, P(n) = 4n.

Soit q(n) = P(n+1) - P(n). Pour des suites définies sur des alphabet de cardinal 2,

$$q(n) = P(n+1) - P(n) = \mathrm{Card}(FS(n)).$$

Ainsi, pour toute suite de pliage, Card(FS(n)) = 4 pour $n \geq 7$.

V - SUITES AUTOMATIQUES ET PAPIERS PLIES

Supposons A = {1, 2} et posons $\alpha = |P|$, où P est le plus grand préfixe commun à f(1) et f(2). On a ([21]) la méthode récurrente de détermination des facteurs spéciaux suivante :

PROPOSITION 9 : Soit k le plus petit entier tel que $\sigma k + \alpha \geq n$. Alors les facteurs spéciaux de longueur $n \geq L_0$ sont les suffixes de longueur $(n-\alpha)$ des images des facteurs spéciaux de longueur k auxquels on a concaténé à droite P.

Si nous posons $n = \sigma k + \alpha + r$, $0 \leq r \leq \sigma$, le corollaire ci-dessous est alors immédiat :

COROLLAIRE : Si μ est la longueur du plus grand suffixe commun à f(1) et f(2), on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Card}(FS(n)) = \mathrm{Card}(FS(k)), \text{ si } r > \mu \\ \mathrm{Card}FS(n)) < \mathrm{Card}(FS(k)), \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

Dans [15] il a été établi ce qui suit :

PROPOSITION 10 : Soit u un point fixe de substitution primitive de longueur constante déterminée à l'ordre 1. Si P(n) est de la forme an + b pour n assez grand, alors :

$$P(n) = a(n-1)$$

à partir d'un certain rang

Nous donnons ici la preuve du théorème suivant :

THEOREME : Aucune suite automatique minimale non périodique, point fixe d'une substitution injective uniforme, n'est une suite de pliage.

PREUVE : Soit une suite automatique minimale non périodique u, point fixe d'une substitution injective uniforme. Si $P(1) \neq 2$, u n'est pas une suite de pliage (Prop. 8). Supposons $P(1) = 2$. En vertu de la Proposition 4, toute substitution minimale non périodique sur un alphabet de cardinal 2 est primitive. D'autre part, une telle sustitution est rythmée (Prop. 7). Ainsi, si la suite u considérée est déterminée à l'ordre 1, elle ne peut être une suite de pliage car cela contredirait la Proposition 10. Supposons donc u rythmée mais non déterminée à l'ordre 1 ; il existe alors un facteur m de longueur $\geq L_0$ qui s'écrit :

$$m = Bf(C)D$$

avec B suffixe de f(1) et f(2), et/ou D préfixe de f(1) et f(2). En utilisant la Proposition 8 ainsi que la Proposition 9 et son corollaire, on obtient ce qui suit :

(i) si $\mu \neq 0$, en considérant un entier $n \geq L_0$ de telle sorte que k = 7, 8 ou 9... et $r \leq \mu$, on obtient Card(FS(n)) < 4 et u n'est donc pas une suite de pliage ;

(ii) si $\mu = 0$, on choisit alors $n \geq L_0$ avec k = 4, 5 ou 6..., si bien que Card(FS(n) > 4 et cette fois encore u ne peut être une suite de pliage. □

REFERENCES

1 - J. P. ALLOUCHE : The number of factors in a paperfolding sequence. Bull. Austr. Math. Soc. 46 (1992), 23-32.

2 - S. ARSON : Démonstration de l'existence de suites asymétriques infinies. Mat. Sb. 44 (1937), 769-777.

3 - A. BLANCHARD & M. MENDES-FRANCE : Symétrie et transcendance. Bull. Sci. Math. 106 (1982), 325 -335.

4 - G. CHRISTOL, T. KAME, M. MENDES-FRANCE & G. RAUZY : Suites algébriques, automates et substitutions. Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 401-419.

5 - A. COBHAM : Uniform Tag Sequences. Math. Syst. Théorème. 6 (1972), 164-192.

6 - M. DEKKING, M. MENDES-FRANCE, A.VAN DER POORTEN : Folds ! Math. Intell. 4 (1982), 130 - 138, 173 - 181, 190-195.

7 - W H GOTTSCHALK, A. HEDLUNG : Topological dynamics. A.M.S. colloq. Publ., Vol 36, Providence R. I. (1968).

8 - K. JACOBS, M. KEANE : 0 - 1 sequences of Toeplitz type. Z. Warhrsch. Verw. Geb. 13 (1963), 123-131.

9 - LOTHAIRE : Combinatorics on words. Addison Wesley Reading MA (1982), Chap.. 12.

10 - J. C. MARTIN : Minimal flows arising from substitutions of non constant length. Math. Syst. Th. 7 (1973), 73-82.

11 - C. MAUDUIT : Automates finis et ensembles normaux. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 36, 2 (1986), 1-25.

12 - M. MENDES-FRANCE : Principe de la symétrie perturbée. Sém. Théorie des nombres Paris, (1979-1980).

13 - M. MENDES-FRANCE & A. VAN DER POORTEN : Arithmetic and analytic properties of paperfolding sequences (dedicated to K Mahler) . Bull. Austr. Math. Soc. 24 (1981), 123-131.

14 - M. MENDES-FRANCE & G. TENENBAUM : Dimensions des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro. Bull. Soc. Math. France 109 (1981), 207-215.

15 - B. MOSSE : Notions de reconnaissabilité pour les substitutions et complexité de suites automatiques. Prépublications du Laboratoire de Mathématiques Discrètes, Univ. d'Aix-Marseille, n°93-21 (1993).

16 - M. QUEFFELEC : Contribution à l'étude spectrale de suites arithmétiques. Paris-Nord ; Thèse d'Etat, (1984).

17 - G. RAUZY : Rotation sur les groupes, nombres algébriques et substitutions.
Sém. Théorie des nombres Bordeaux, Exp. 21 (1987-1988), 1-12.

18 - T. TAPSOBA : Complexité des suites automatiques. Thèse de 3° Cycle, Université d'Aix-Marseille II (1987).

19 - T. TAPSOBA : Sur la factorisation des mots. Annales de l'Université de Ouagadougou, Série B (1992), 41-56.

20 - T. TAPSOBA : Automates calculant la complexité des suites automatiques. Journal de Théorie des nombres de Bordeaux 6 (1994), 127-134.

21 - T. TAPSOBA : Special factors of automatic sequences. A paraître dans Journal of Pure and Applied Algebra.

22 - A. THUE : Uber unendliche zeichenreihen. Norske Vid. Selsk. Skr., I. Math. Nat. K1, Christiana 7 (1906), 1-22.

23 - A. THUE : Uber die gegenseitige lage gleicher teile genvisser zeichenreihen. Norske Vid. Selsk. Skr., I. Math. Nat. K1, Christiana 7 (1906), 1-22.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences et Techniques
Université de Ouagadougou
03 B.P. 7021 Ouagadougou
Burkina Faso
Fax : (226)-98-25-77
E- mail : theotaps@bobo.orstom.bf