

# Verformungen und Spannungen von Kegelradverzahnungen effizient berechnet

Von der Fakultät Maschinenwesen  
der  
Technischen Universität Dresden

zur

Erlangung des akademischen Grades  
**Doktoringenieur**  
**(Dr.-Ing.)**  
angenommene Dissertation

vorgelegt von  
**Dipl.-Ing. Steffen Schaefer**  
geboren am 4. April 1978 in Dresden

Tag der Einreichung: 9. November 2017

Tag der Verteidigung: 23. April 2018

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht

Prof. Dr.-Ing. habil. Thorsten Schmidt

Vorsitzender der  
Prüfungskommission: Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion (IMM) der Technischen Universität Dresden sowie im Anschluss daran neben meiner beruflichen Tätigkeit in der Industrie. Durch das Forschungsvorhaben "BECAL – Belastungs- und Beanspruchungsmodell" der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) wurde die Arbeit finanziell und durch den FVA-Arbeitskreis „Kegelräder“ fachlich gefördert.

Besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Berthold Schlecht, der mir die Promotion unter hervorragenden wissenschaftlichen Arbeitsbedingungen am IMM ermöglichte und die Dissertation mit stetem Interesse unterstützt und wohlwollend begleitet hat. Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Thorsten Schmidt für das dem Thema entgegengebrachte Interesse sowie für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens, Herrn Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber für den Kommissionsvorsitz, Herrn Prof. Dr.-Ing. Christoph Leyens für die Durchführung der Nebenfachprüfung und Herrn Prof. Dr.-Ing. Steffen Ihlenfeldt für die Mitwirkung in der Promotionskommission.

Mein Dank gilt meinem Oberingenieur, Herrn Dr.-Ing. Michael Senf, der mich in das Fachgebiet der Kegelradverzahnungen einführte und meine Tätigkeit mit großer Übersicht und Erfahrung begleitet hat. Das freundschaftliche Verhältnis und das mir entgegengebrachte Vertrauen trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei. Meinen Kollegen aus dem Kegelradteam Frau Birgit Hutschenreiter, Herrn Dr.-Ing. Stefan Schumann und Herrn Marcus Merder sowie allen anderen Kollegen aus dem IMM danke ich für die sehr gute Zusammenarbeit. Mein Dank gilt auch den Vertretern der Mitgliedsfirmen des FVA-Arbeitskreises "Kegelräder", speziell Herrn Dr.-Ing. Ralf Heß (Flender GmbH), Herrn Dr.-Ing. Carsten Hünecke (Klingelberg GmbH) sowie Herrn Uwe Trempler (Klingelberg GmbH). Dem Technischen Leiter der SCHOTTEL GmbH, Herrn Stefan Kaul, und im Besonderen meinem Vorgesetzten, dem Entwicklungsleiter der SCHOTTEL GmbH, Herrn Manfred Heer, danke ich für die Unterstützung während der Fertigstellung meiner Dissertation.

Meinen lieben Eltern sowie meiner Schwester möchte ich für die unermüdliche und stets aufmunternde Unterstützung während der Promotionszeit und auf meinem Lebensweg von ganzem Herzen danken. Schließlich möchte ich mich ganz besonders bei meiner Frau Krisztina sowie unseren Töchtern Sophie Marie und Anna Rosa für das entgegengebrachte Verständnis, den Rückhalt und die Motivation bedanken. Ihnen widme ich diese Arbeit in Liebe.

Rheinböllen, den 01.05.2018

Steffen Schaefer



# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen, Abkürzungen und Indizes .....</b>	<b>III</b>
<b>1 Einleitung.....</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand der Technik.....</b>	<b>9</b>
2.1 Zahnkontaktsimulation.....	9
2.2 Die Verzahnungsgeometrie als Basis der Zahnkontaktsimulation .....	10
2.3 Methoden für die Zahnkontaktsimulation .....	11
2.3.1 Komplexe Methoden für die Verformungs- und Spannungsberechnung .....	13
2.3.2 Näherungsmethoden für die Verformungs- und Spannungsberechnung.....	15
2.4 Verzahnungen mit Sondermerkmalen .....	18
<b>3 Zahnkontaktsimulation auf Basis der Einflusszahlenmethode .....</b>	<b>23</b>
3.1 Herangehensweise bei der Betrachtung .....	23
3.2 Zerlegung der Verformungen und Spannungen in lineare und nicht lineare Anteile .....	23
3.3 Annahmen für die Formulierung des Zahnkontaktproblems .....	24
3.4 Bestimmung der potenziellen Zahnkontakte .....	27
3.5 Einflusszahlenmethode .....	28
3.6 Lösung des reibungsfreien Zahnkontaktproblems .....	29
3.7 Radkörpereinfluss.....	34
3.8 Wechselwirkung zwischen den Zähnen .....	34
<b>4 Näherungsweise Biegeverformungsberechnung.....</b>	<b>39</b>
4.1 Vereinfachung der Verzahnungsgeometrie.....	39
4.2 Berechnungsmethode .....	41
4.3 Allgemeine Verformungsabklingfunktion .....	41
4.3.1 Allgemeine Verformungsabklingfunktion für den unendlich langen Zahn .....	41
4.3.2 Allgemeine Abklingfunktion für den endlich langen Zahn .....	45
4.3.3 Berechnung der Zahnverformung unter Einzelast mittels FEM .....	49
4.3.4 Einfluss der Kraftangriffshöhe und der Profilform.....	50
4.3.5 Fehlverhalten der allgemeinen Verformungsabklingfunktion .....	56
4.3.6 Einfluss der veränderlichen Normalschnittgeometrie .....	57
4.4 Bezugswert der Biegeverformung .....	58
4.4.1 Näherungslösung.....	58
4.4.2 Wahl einer Methode zur Verbesserung der Bezugswertberechnung.....	64
4.4.3 Auswahl des BEM-Verfahrens.....	65
4.4.4 Verfahrensbeschreibung für das BEM-Programm-Modul .....	66
4.4.5 Auswertung der BEM-Verformungen an der Stelle einer Streckenlast .....	69
4.4.6 Überprüfung des BEM-Programm-Moduls und Genauigkeitsbewertung .....	70
4.4.7 Effiziente Berechnung des BEM-Bezugswerts.....	73

4.5	Korrekturen für den Ersatzzahn.....	77
4.5.1	Stirnseitenunstetigkeit .....	77
4.5.2	Krümmungseigenschaften des Zahnes .....	82
4.6	Zahnberandungseinfluss .....	82
4.7	Berechnung der verbesserten Biegeverformungseinflusszahlen .....	85
<b>5</b>	<b>Näherungsweise Berechnung der Kontaktverformung und -spannung .....</b>	<b>87</b>
5.1	Vereinfachung der Kontaktgeometrie .....	87
5.2	Berechnung der Kontaktverformungseinflusszahl und der Kontaktspannung mit der ZZM..	89
5.3	Komplexe Einflüsse auf die Kontaktverformung und -spannung .....	91
5.3.1	Wechselwirkungseinfluss .....	91
5.3.2	Zahnberandungseinflüsse .....	95
5.4	Erweiterung der ZZM zur Berücksichtigung von Kopfkanten .....	100
5.5	Verbesserte Berechnung der Kontaktverformungseinflusszahl und der Pressung.....	107
<b>6</b>	<b>Näherungsweise Berechnung der Zahnfußspannung .....</b>	<b>109</b>
6.1	Berechnungsmethode .....	109
6.2	Allgemeine Spannungsabklingfunktion .....	110
6.2.1	Allgemeine Spannungsabklingfunktion für den unendlich und endlich langen Zahn ..	110
6.2.2	Einfluss der Kraftangriffshöhe und der Profilform.....	113
6.2.3	Fehlerverhalten der allgemeinen Spannungsabklingfunktion .....	117
6.3	Bezugswert der Zahnfußspannung .....	118
6.4	Korrektur für den Ersatzzahn.....	120
6.4.1	Einfluss des Schrägungswinkels auf die Zahnbreitenlage des Zahnfußspannungsmaximums .....	121
6.4.2	Stirnseitenunstetigkeit .....	121
6.4.3	Einfluss der Zahnwindung auf die Zahnfußspannung .....	125
6.4.4	Einfluss der Flankenlinienkrümmung auf die Zahnfußspannung .....	128
6.5	Berechnung der Zahnfußspannung nach der verbesserten Methode.....	130
<b>7</b>	<b>Verifikation und Validierung der verbesserten Berechnungsmethoden .....</b>	<b>133</b>
7.1	Herangehensweise bei der Verifikation und Validierung.....	133
7.2	Verifikation .....	135
7.2.1	Allgemeine Vorbetrachtungen zur Genauigkeit.....	135
7.2.2	Sensibilitätsstudie .....	138
7.3	Validierung .....	149
7.3.1	Vorgehensweise bei der Validierung .....	149
7.3.2	Ausgewählte Messungen von Paul .....	149
7.3.3	Tragbildvergleich an Praxisverzahnungen .....	155
7.4	Konvergenzverhalten bei der Zahnkontaktsimulation mit BECAL-BEM.....	160
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>163</b>
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>167</b>
	<b>Anhang .....</b>	<b>181</b>

## Formelzeichen, Abkürzungen und Indizes<sup>1</sup>

$a_B$	mm/N	Biegeverformungseinflusszahl
$a_{BB}$	mm/N	BEM-Bezugswert-Einflusszahl für die Biegeverformung
$a_H$	mm	halbe Abplattungsbreite resultierend aus der Kontaktverformung
$a_{HR}$	mm/N	Verformungseinflusszahl des Halbraumes
$a_v$	mm	Hypoid-Achsversatz
$b$	mm	Zahnbreite
$b_A$	mm	abgewickelte Zahnbreite
$b_{TL\text{eff}}$	%	Traglinienlänge bezogen auf die Zahnbreite
$cd_A$	mm	Kopffasenhöhe
$cd_B$	mm	Stirnseitenfasenbreite
$cd_C$	mm	Stirnseiten-Kopf-Fasenhöhe
$d_{HR}$	mm	Dicke eines Halbraumstreifens
$d_m$	mm	mittlerer Teilkegeldurchmesser
$E$	–	Biegeverformungsabklingfunktion für den endlich langen Zahn
$E$	MPa	Elastizitätsmodul
$E_\infty$	–	allgemeine Biegeverformungsabklingfunktion am unendlich langen Zahn
$\hat{E}_\infty$	–	Maximalwert der Biegeverformungsabklingfunktion
$\hat{E}_{\infty P}$	–	profilformabhängiger Maximalwert der Biegeverformungsabklingfunktion
$\hat{E}_{\infty Z}$	–	zähnezahlabhängiger Maximalwert der Biegeverformungsabklingfunktion
$e_H$	mm/N	Kontaktverformungseinflusszahlen

<sup>1</sup> Formelzeichen, Abkürzungen und Indizes für Hilfsgrößen werden nicht explizit erläutert.

---

$e_{HR}$	mm/N	Verformungseinflusszahlensumme zweier Halbräume im Kontakt
$e_{ij}$	mm/N	Gesamtverformungseinflusszahl von Kontaktpartner I und II
$F$	N	Normalkraft
$F$	–	Spiegelungsebene Ferse
$f_{A\infty k}$	–	allgemeine Abklingfunktion
$f_{AK}$	mm	Anfangsklaffmaß
$f_H$	mm	Annäherung der Kontaktpartner resultierend aus der Kontaktverformung
$f_{HR}$	mm	Gesamtverschiebung in Form einer Starrkörpertranslation des Halbraumes
$f_{kav}$	–	Korrekturfaktor für Einfluss einer konkaven Flankenlinienkrümmung bei der Zahnfußspannungsberechnung
$f_{N2D}$	mm	Zahnbiegeverformung in Kontaktnormalenrichtung unter Wirkung einer konstanten Streckenlast (Bezugswert)
$f_{N3D}$	mm	Zahnbiegeverformung in Kontaktnormalenrichtung am endlich langen Zahn unter Wirkung beliebiger Lastverteilungen
$f_P$	mm	Gesamtverformung für ein Kontaktpunktpaar
$f_{RK}$	mm	Restklaffen nach der Belastung
$f_{Wk}$	–	Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion
$f_{zwe}$	–	Korrekturfaktor für den Zahnwindungseinfluss bei der Zahnfußspannungsberechnung
$h^*$	–	relative Zahnhöhe bezogen auf den Normalmodul
$k_{hap}$	–	Zahnkopfhöhenfaktor
$k_{hfp}$	–	Zahnfußhöhenfaktor
$k_\alpha$	–	Kopfkantenwinkel-Korrekturfunktion für die Spiegelung der Halbraumverformungseinflussfunktion
$l$	mm	berücksichtigte Dicke bei Annäherungsberechnung (Kontaktverformungsanteil)
$m_n$	mm	Normalmodul
$q$	N/mm	Streckenlast



---

$r_b$	mm	Grundkreisradius einer Stirnradverzahnung
$r_{Co}$	mm	Werkzeugradius oder auch Messerkopfradius
$r_{FK}$	mm	Flankenlinienkrümmungsradius
$r_{WR}$	mm	wirkender Radius
$S$	–	Zahnfußspannungsabklingfunktion für den endlich langen Zahn
$s$	1/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannungseinflusszahl
$S_\infty$	–	allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion am unendlich langen Zahn
$\hat{S}_\infty$	–	Maximalwert der Zahnfußspannungsabklingfunktion
$\hat{S}_{\infty P}$	–	profilformabhängiger Maximalwert der Zahnfußspannungsabklingfunktion
$\hat{S}_{\infty Z}$	–	zähnezahlabhängiger Maximalwert der Zahnfußspannungsabklingfunktion
$s_{BB}$	1/mm <sup>2</sup>	BEM-Bezugswert-Einflusszahl für die Zahnfußspannung
$T$	Nm	Drehmoment
$t_z$	mm	Abstand Teilkegelspitze zum Kreuzungspunkt
$x_h$	–	Profilverschiebungsfaktor
$x_{smn}$	–	theoretischer Profilseitenverschiebungsfaktor
$Z$	–	Spiegelungsebene Zehe
$z$	–	Zähnezahl
$z_v$	–	Ersatzzähnezahl
$\alpha_n$	°	Normaleingriffswinkel
$\beta$	°	Schrägungswinkel
$\delta$	°	Teilkegelwinkel
$\Delta b_A$	mm	abgewickelte Breite eines Zahnabschnittes
$\Delta b_K$	mm	Kontaktelementlänge
$\Delta E$	mm	Achsversatzänderung

---

$\Delta f_{F2DW}$	–	Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion für die Zahnfußspannungsberechnung
$\Delta f_{N2DW}$	–	Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion für die Biegeverformungsberechnung
$\Delta G$	mm	Tellerradeinbaumaßänderung
$\Delta P$	mm	Ritzeleinbaumaßänderung
$\Delta \xi$	mm	Breitenversatz bei der Zahnfußspannungsberechnung
$\Delta \Sigma$	°	Achswinkeländerung
$\eta$	mm	Zahnhöhenkoordinate im Ersatzzahn-Bezugssystem
$\eta^*$	mm	relative Zahnhöhenkoordinate im Ersatzzahn-Bezugssystem bezogen auf den Normalmodul
$\nu$	–	Querkontraktionszahl
$\xi$	mm	Zahnbreitenabstand von der Krafteinleitungsstelle für die Verwendung bei der Zahnfußspannungsberechnung
$\xi_S^*$	–	relativer Stirnseitenabstand bei der Zahnfußspannungsberechnung entweder von der Zehe oder der Ferse
$\xi_{SF}$	mm	Zahnbreitenkoordinate im Ersatzzahn-Bezugssystem mit Ursprung auf der Stirnseite der Ferse für die Verwendung bei der Zahnfußspannungsberechnung
$\xi_{SZ}$	mm	Zahnbreitenkoordinate im Ersatzzahn-Bezugssystem mit Ursprung auf der Stirnseite der Zehe für die Verwendung bei der Zahnfußspannungsberechnung
$\xi^*$	–	relativer Zahnbreitenabstand von der Krafteinleitungsstelle bezogen auf den Normalmodul für die Verwendung bei der Zahnfußspannungsberechnung
$\rho$	mm	Krümmungsradius
$\Sigma$	°	Achswinkel
$\sigma_F$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung
$\sigma_{F2D}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung unter Wirkung einer konstanten Streckenlast (Bezugswert)

$\sigma_{F3D}$	N/mm <sup>2</sup>	Zahnfußspannung am endlich langen Zahn unter Wirkung beliebiger Lastverteilungen
$\sigma_H$	MPa	Flankenpressung, Pressung oder auch Kontaktnormalspannung
$\varphi_z$	°	Gesamtverschiebung in Form einer Starrkörperrotation
$\chi$	mm	Zahnbreitenabstand von der Kraffteinleitungsstelle für die Verwendung bei der Verformungsberechnung
$\chi^*$	–	relativer Zahnbreitenabstand von der Kraffteinleitungsstelle bezogen auf den Normalmodul für die Verwendung bei der Verformungsberechnung
$\chi_s^*$	–	relativer Stirnseitenabstand bei der Verformungsberechnung entweder von der Zehe oder der Ferse
$\chi_{SF}$	mm	Zahnbreitenkoordinate im Ersatzzahn-Bezugssystem mit Ursprung auf der Stirnseite der Ferse für die Verwendung bei der Verformungsberechnung
$\chi_{SZ}$	mm	Zahnbreitenkoordinate im Ersatzzahn-Bezugssystem mit Ursprung auf der Stirnseite der Zehe für die Verwendung bei der Verformungsberechnung
$\psi$	–	EVZ-Korrekturfaktor der Halbraumverformung

### Indizes

0	erzeugendes Werkzeug
1	Ritzel
2	Rad oder auch Tellerrad
a	Zahnkopf
C	auf der Seite der Schubflanke (Coast Side)
D	auf der Seite der Zugflanke (Drive Side)
e	äußere Teilkegellänge (Ferse)
ges	Gesamt
i	innere Teilkegellänge (Zehe)

<i>i</i>	Zahnbreitenabschnitt der Auswertung oder Auswertungsposition
I	Bezeichnung für den 1. Kontaktpartner bei der Kontaktsimulation (Ritzel)
II	Bezeichnung für den 2. Kontaktpartner bei der Kontaktsimulation (Tellerrad)
<i>j</i>	Zahnbreitenabschnitt der Krafteinleitung oder Auswertungsposition
m	mittlere Teilkegellänge (Zahnmitte)

### **Abkürzungen**

BECAL	Bevel Gear Calculation (Software für die Zahnkontaktsimulation)
BEM	Boundary-Element-Method
DMS	Dehnungsmessstreifen
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FDM	Finite-Difference-Method
FEM	Finite-Element-Method
FMBEM	Fast-Multipole-Boundary-Element-Method
FMM	Fast-Multipole-Method
FPM	Finite-Prism-Method
FQP	Finite-Quasi-Prism
FSM	Finite-Strip-Method
HRM	Halbraum-Methode
MBS	Multi-Body Simulation
ZHM	Zylinder-Halbraum-Methode
ZZM	Zylinder-Zylinder-Methode

# 1 Einleitung

Für eine Leistungsübertragung mit hohem Wirkungsgrad zwischen nicht parallelen Wellen kommen bevorzugt Kegelradverzahnungen zum Einsatz. Wegen ihrer positiven Eigenschaften hinsichtlich Tragfähigkeit, Geräuschemission und der wirtschaftlichen Herstellbarkeit [Sc10] erfolgt die Übertragung großer Leistungen überwiegend mittels bogenverzahnter Kegelräder (Spiralkegelräder). Dabei kann die Leistungsübertragung verbunden mit einer Drehzahl- und Drehmomentwandlung realisiert werden. Sind die Wellen windschief, dann kommen Kegelradverzahnungen mit Achsversatz (Hypoidverzahnungen) zur Anwendung. Abbildung 1.1 zeigt die prinzipiellen Ausführungsmöglichkeiten bezüglich Lage der Wellen bzw. Radachsen im Raum. Theoretisch können Achswinkel  $\Sigma$  und Hypoid-Achsversatz  $a_v$  frei miteinander kombiniert werden. Abbildung 1.2 zeigt die Änderung des Normalmoduls  $m_n$ , Schrägungswinkels  $\beta$  sowie gegebenenfalls Profilverschiebungsfaktors  $x_n$  (bei Winkelkorrektur) über der Zahnbreite als weitere kegelradspezifische Sachverhalte. Bedingt durch diese kinematischen und geometrischen Eigenschaften, weisen Kegelradverzahnungen eine besonders große Sensitivität der Tragbildlage, -form und -größe (Tragbildcharakteristik) gegenüber dem Verlagerungsverhalten der Verzahnung auf. Die anwendungs- und betriebspunktspezifischen komplexen Zusammenhänge zwischen Tragbildcharakteristik, Verlagerungsverhalten, Achslage und veränderlicher Geometrie über der Zahnbreite werden im Weiteren als Verlagerungsempfindlichkeit bezeichnet. Abbildung 1.3 veranschaulicht die Thematik der Verlagerungsempfindlichkeit am Beispiel experimentell ermittelter Tellerradtragbilder für sechs verschiedene Drehmomente, vom lastlosen Tragbild bis hin zum Vollastragbild.

Kegelradverzahnungen kommen für ein breites Anwendungsspektrum mit großen Stückzahlen zum Einsatz. Sie werden für den mobilen Betrieb in der Kraftfahrzeug-, Luftfahrt-, Schifffahrt- und Schienenfahrzeugindustrie ebenso wie für den stationären Betrieb in Industriegetrieben benötigt. Als Vertreter typischer Anwendungsfälle wird in Abbildung 1.4 der Einsatz in einem Fahrzeug-Achsgetriebe und in Abbildung 1.5 der Einsatz in steuerbaren Schiffsantrieben (Ruderpropeller) dargestellt.

Die Herstellung von Kegelradverzahnungen erfolgt in der Regel besonders wirtschaftlich und zuverlässig auf hochspezialisierten Kegelradverzahnmaschinen. Dabei bewegt sich die geometrische Gestaltung der Kegelradverzahnung in den Grenzen der Herstellbarkeit, die durch die Maschinenkinematik und den Einsatz von Standardwerkzeugen vorgegeben werden. Im Bereich großer Module ist die Fertigungskapazität auf Kegelradverzahnmaschinen international stark beschränkt. Wird temporär zusätzliche Fertigungskapazität benötigt, können Ke-

gelradverzahnungen auch auf Freiformfräsmaschinen hergestellt werden. Der sinnvollen geometrischen Gestaltung sind in diesem Fall nur wirtschaftliche Grenzen gesetzt.

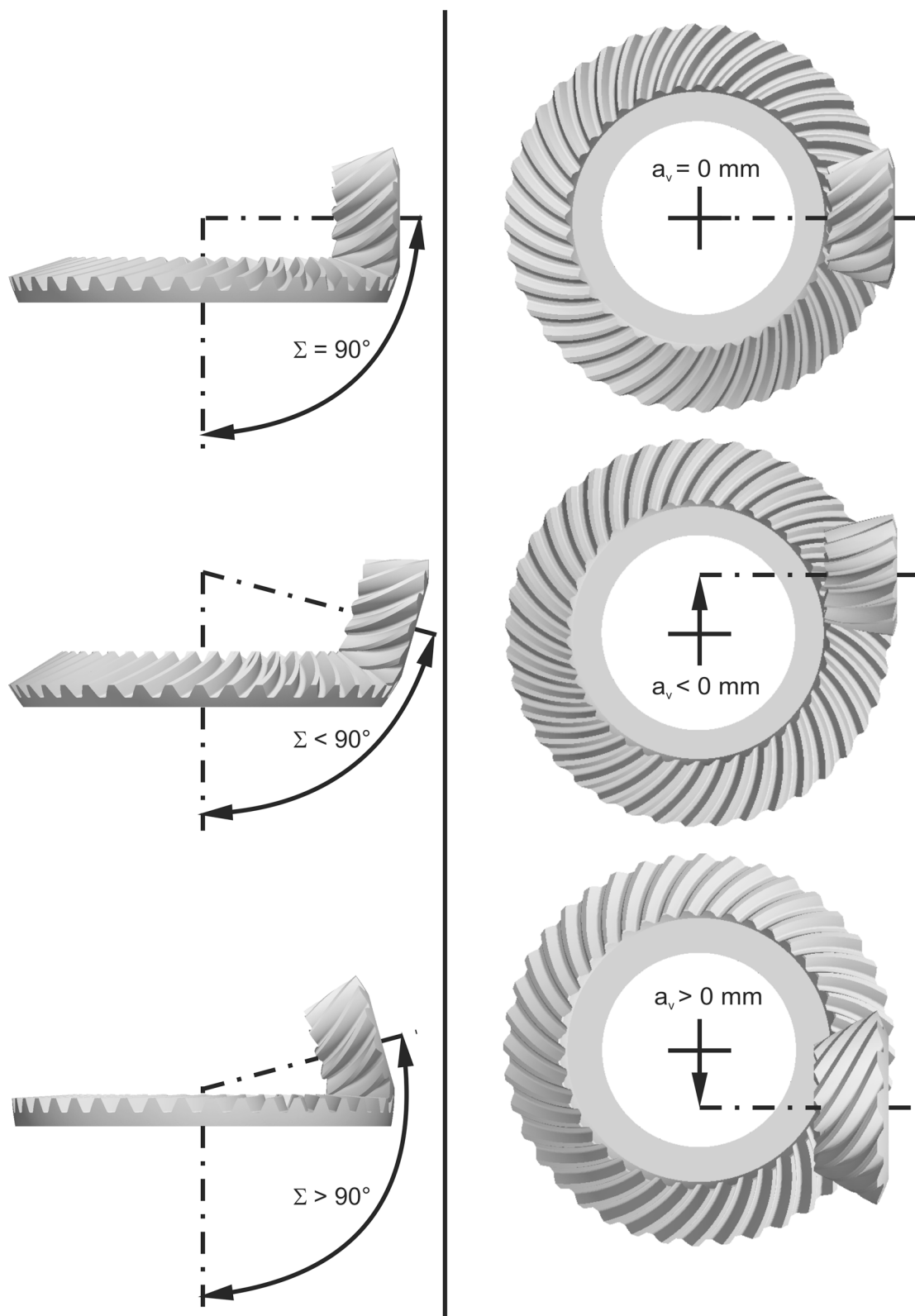


Abbildung 1.1: Mögliche Lagen der Wellen bzw. Radachsen im Raum

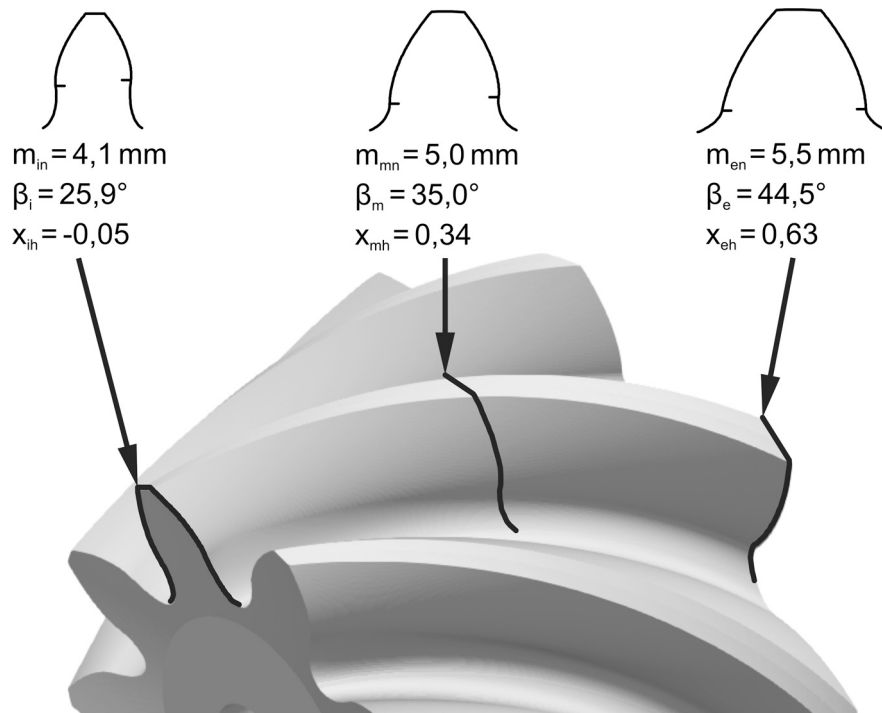


Abbildung 1.2: Darstellung der geometrischen Änderungen der Stirnschnitte über der Zahnweite eines Ritzels

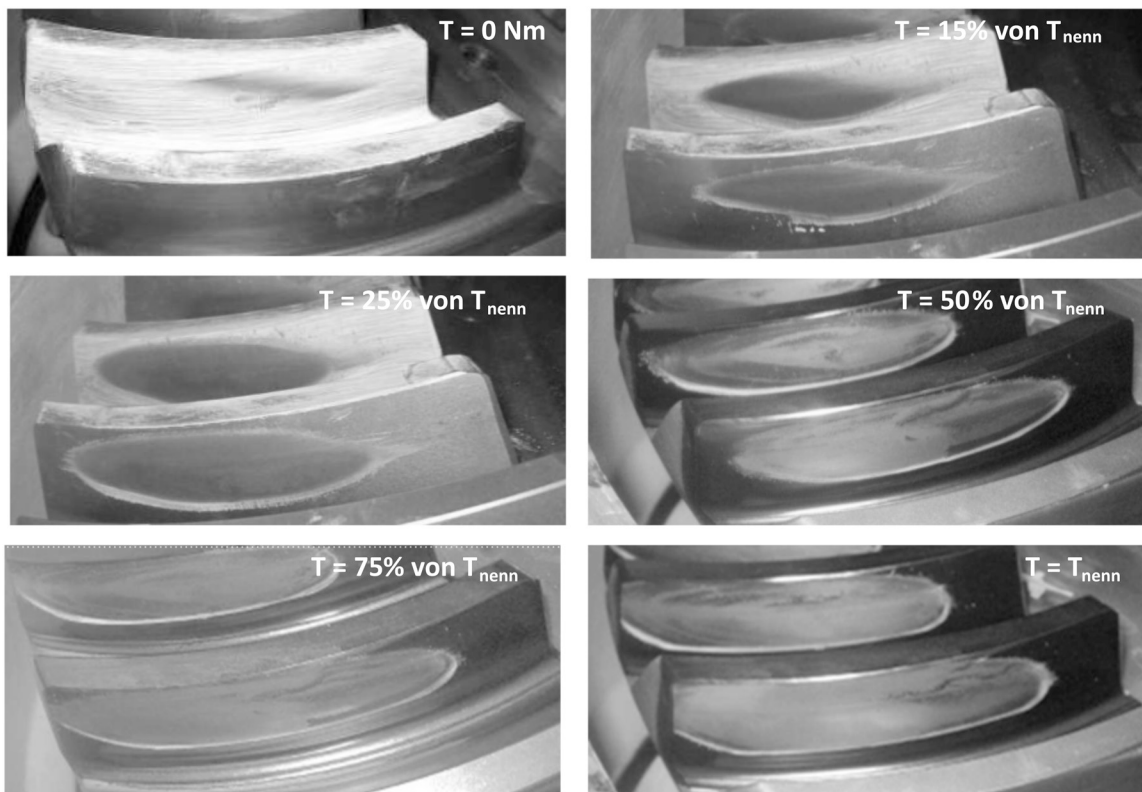


Abbildung 1.3: Auf einem Prüfstand der SCHOTTEL GmbH experimentell ermittelte Tragbilder für verschiedene Drehmomente auf einem Tellerrad

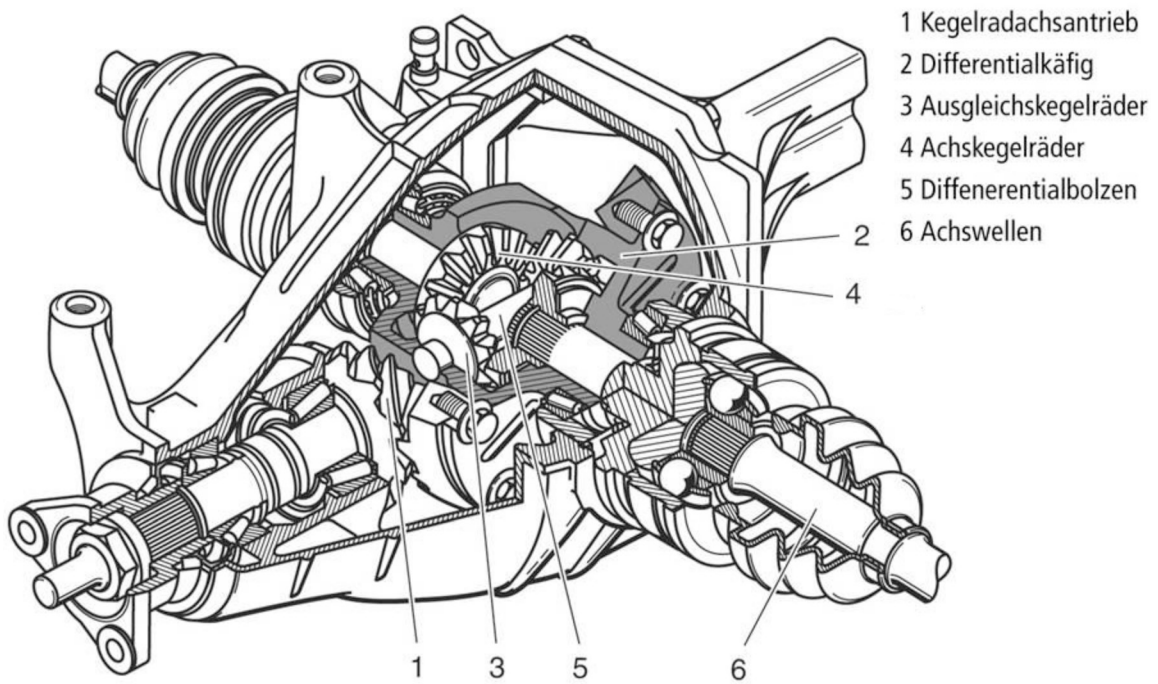


Abbildung 1.4: Hinterachsgetriebe eines PKW mit Differential, Abbildung entnommen aus [Sc10]

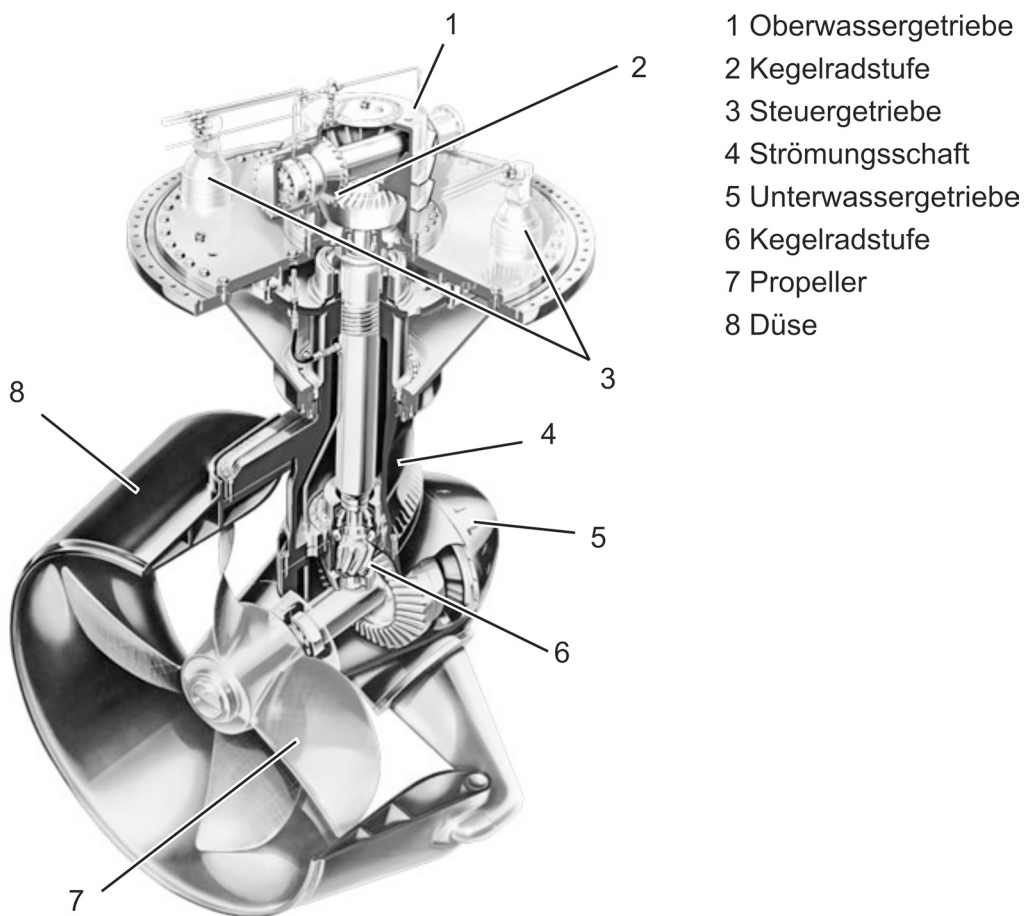


Abbildung 1.5: Ruderpropeller der SCHOTTEL GmbH



Die geometrische Gestaltung der Kegelradverzahnung und der Tragfähigkeitsnachweis werden im Rahmen einer Verzahnungsauslegung sowie -optimierung in zwei Schritten vorgenommen. In einem ersten Schritt wird die Makrogeometrie und in einem zweiten Schritt die Mikrogeometrie entwickelt.

Die Makrogeometrie wird durch die Größe, Profil- sowie Zahn längsform einer Verzahnung bestimmt und definiert maßgeblich deren physikalisches Potenzial. Unter "Profil" soll hier das gesamte Zahnprofil bestehend aus Zahnflanke und Zahnfußkurve verstanden werden. Der Entwicklung der Makrogeometrie sowie dem Tragfähigkeitsnachweis liegen in der Regel standardisierte Berechnungsverfahren zugrunde. Zu den wichtigsten Regelwerken gehören z.B. die [ISO10300], [DIN3991], [AGMA2003] oder auch Klassifikationsvorschriften sowie Werksnormen wie [CG0036] und [KN3030]. Diese Berechnungsverfahren führen schnell zu einer sinnvollen Makrogeometrie sowie einer Aussage über die Tragfähigkeit der Verzahnung. Allerdings wird bei der Tragfähigkeitsberechnung vereinfachend von einer symmetrischen, evolventischen Ersatzstirnradverzahnung mit bestimmter Tragbildcharakteristik sowie einer konstanten Geometrie über der Zahnbreite ausgegangen. Der mathematisch-physikalische Zusammenhang zwischen diesen stark vereinfachten Modellen und der Praxis wird empirisch auf Basis von Näherungsfaktoren hergestellt. Die Verlagerungsempfindlichkeit kann bei diesen Verfahren somit nicht direkt berücksichtigt werden. Dies erfolgt im zweiten Schritt der Verzahnungsauslegung, der Entwicklung der Mikrogeometrie.

Die Mikrogeometrie umfasst alle topografischen Modifikationen, die an der Nutzflankenfläche vorgenommen werden, um den Zahnkontakt gezielt lokal zu beeinflussen. Die Nutzflankenfläche ist der Teil der Zahnflanke, der direkt im Kontakt mit einem Gegenzahn stehen kann. Eine gezielte Entwicklung der Mikrogeometrie ist aufgrund der großen Verlagerungsempfindlichkeit immer erforderlich (siehe Abbildung 1.3). Sie muss so erfolgen, dass das makrogeometrisch vorgegebene physikalische Potenzial optimal genutzt werden kann. Dieser Auslegungsschritt soll im Weiteren als Tragbildentwicklung bezeichnet werden. Die Tragbildentwicklung erfolgt entweder auf Basis von Erfahrungswerten oder aber, was mittlerweile überwiegend der Fall ist, mithilfe einer Zahnkontaktsimulationssoftware und wird im Versuch überprüft. Im Gegensatz zu den standardisierten Verfahren kann man über eine Zahnkontaktsimulation die komplexen Zusammenhänge zwischen Belastung, Tragbildcharakteristik und Verlagerungsempfindlichkeit explizit in ihrem mathematisch-physikalischen Zusammenhang ohne empirische Näherungsfaktoren beschreiben.

Für die Zahnkontaktsimulation von Kegelrad- und Hypoidverzahnungen hat sich in Forschung und Industrie die Zahnkontaktsimulationssoftware BECAL<sup>2</sup> (**BE**vel Gear **CAL**culation) [SSH12] bewährt. Die Bedeutung wird unter anderem dadurch unterstrichen, dass BECAL Bestandteil großer Software-Pakete wie der FVA-Workbench® [SSH10] sowie KIMoS [KIMoS] ist und damit auch einen hohen Verbreitungsgrad hat. Im Vordergrund der

---

<sup>2</sup> Die Zahnkontaktsimulationssoftware BECAL ist ein Programm der Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) (<http://www.fva-net.de/>). Sie wurde vom Institut für Maschinenelemente und Maschinenkonstruktion in Zusammenarbeit mit dem Institut für Geometrie der TU Dresden im Auftrag der FVA entwickelt.

BECAL-Anwendung standen in der Vergangenheit vor allem qualitative Aussagen über die Verlagerungsempfindlichkeit und die Tragbildcharakteristik. So wird üblicherweise der zweite Auslegungsschritt, die Tragbildentwicklung, auf Basis einer relativen Bewertung der Spannungsverteilung durchgeführt. In erster Linie werden dabei die Kontakt- und Zahnfußspannungsverteilung ausgewertet. Um dies mit möglichst geringem Ressourcenaufwand, kurzen Rechenzeiten, stabil und reproduzierbar ausführen zu können, nutzt BECAL Modellvereinfachungen. Diese beschränken vor allem den Vertrauensbereich der Kontakt- und Zahnfußspannungsverteilungsberechnung auf Makro- und Mikrogeometrien, die dem Stand der Technik gemäß von praktischer Relevanz sind und ohne Einschränkungen mit Kegelradverzahnmaschinen hergestellt werden können. Im Wesentlichen deckt sich der Vertrauensbereich gut mit dem der standardisierten Berechnungsverfahren.

Nicht zuletzt die gesetzlichen Bestimmungen sowie die internationalen Bestrebungen zur Verringerung des ökologischen Fußabdrucks haben in der jüngsten Vergangenheit in allen Bereichen zu einer weiteren Intensivierung der Anstrengungen zur Nachhaltigkeitssteigerung des technischen Designs geführt. So auch bei Kegelrädern, bei denen ein wichtiger Fokus unter anderem auf der Steigerung der Leistungsdichte liegt, denn die Kegelradstufe gibt oft wichtige Hauptabmessungen des Getriebes vor. Damit wird eine Bauraumverkleinerung nicht nur an der Kegelradstufe selbst, sondern im Gesamtsystem wirksam. Die Nachhaltigkeitssteigerung kann sich so durch

- einen geringeren Materialeinsatz
- eine Verbesserung des Verhältnisses aus Nutzlast zu Eigenlast (Fahrzeugbau, Luftfahrt)
- die Einhaltung besonders vorteilhafter Getriebeproportionen z.B. hinsichtlich des hydrodynamischen Wirkungsgrades (Schifffahrt)

in vielerlei Hinsicht ökologisch und ökonomisch auszahlen. Allerdings besteht zwischen der Bauraumverkleinerung und den Tragfähigkeitsanforderungen ein Zielkonflikt. In erster Linie ist man bestrebt, diesen über eine bessere Ausnutzung des physikalischen Potenzials durch makro- und mikrogeometrische Maßnahmen zu begegnen. Wenn dies auf eine besonders wirksame Weise geschehen soll, muss der Geometriebereich verlassen werden, der üblicherweise von praktischer Relevanz ist bzw. barrierefrei mit Kegelradverzahnmaschinen hergestellt werden kann. Diese Verzahnungen sollen im Weiteren als Verzahnungen mit Sondermerkmalen bezeichnet werden. Es wird bewusst nicht von Sonderverzahnungen gesprochen, da diese Verzahnungen teilweise durchaus auf Kegelradverzahnmaschinen gefertigt werden können. Allerdings weisen sie bestimmte Tragbildcharakteristika auf, die aufgrund mangelnder Bewertungsmöglichkeiten in der guten Auslegungspraxis überwiegend vermieden werden. Oder es lassen sich bestimmte Makro- bzw. Mikrogeometrien nur mit erhöhtem Aufwand und modifizierten Werkzeugen herstellen.

Da Verzahnungen mit Sondermerkmalen aufgrund ihrer Neuartigkeit in der Regel noch nicht mit den standardisierten Berechnungsmethoden abgebildet werden können, müssen sowohl die Wahl der Makrogeometrie, die Entwicklung der Mikrogeometrie, als auch der Tragfähig-

keitsnachweis auf Basis einer Zahnkontaktsimulation durchgeführt werden. Dies bietet die Freiheit, die komplexen mathematisch-physikalischen Zusammenhänge den aktuellen Erkenntnissen und Anforderungen gemäß auszuwerten. Um dieser Anforderung auch mit BECAL gerecht werden zu können und Verzahnungen mit Sondermerkmalen einem breiten industriellen Anwenderkreis einfach zugänglich zu machen, muss der Vertrauensbereich der Zahnkontaktsimulationssoftware entsprechend erweitert werden.

Gegenstand dieser Arbeit ist es deshalb, die Berechnungsmethoden von BECAL zu analysieren und so zu erweitern, dass mit gewohnt geringem Ressourcenaufwand, insbesondere mit kurzen Rechenzeiten, stabile und reproduzierbare Zahnkontakt- und Zahnfußspannungsverteilungsberechnungen auch für Verzahnungen mit Sondermerkmalen durchgeführt werden können.



## 2 Stand der Technik

### 2.1 Zahnkontaktsimulation

Beliebig komplexe Zahnradgetriebe können im Allgemeinen immer in Subsysteme zerlegt werden, die aus einer einzelnen Zahnradstufe mit einem Zahneingriff bestehen. Die relevanten Wechselwirkungen zwischen dem Zahneingriff und den Wellen, Lagern, anderen Subsystemen sowie des Gesamtsystems mit der Umwelt (Verzahnungsumfeld) können über eine Relativlageänderung zwischen Ritzel und Rad abgebildet werden (Abbildung 2.1). Die zutreffende Ermittlung der Relativlage kann z.B. unter Verwendung der FVA-Workbench® [FVAWB], [SSH10], mittels der Finite-Element-Method (FEM) oder auf Basis der Multi-Body Simulation (MBS) [BG07], [SBR10] erfolgen und soll in dieser Arbeit nicht weiter thematisiert werden.

Die Relativlage wird bei Kegelradverzahnungen üblicherweise bezüglich der Relativlage der Teilkegelspitzen beschrieben. In der Ausgangslage beziehungsweise in der Solleinbaulage schneiden oder kreuzen sich die Radachsen von Ritzel  $z_1$  und Rad  $z_2$  unter einem Achswinkel  $\Sigma$  mit einem Hypoid-Achsversatz  $a_v$ . Die Teilkegelspitzen des Ritzels und des Tellerades besitzen gegenüber dem Achskreuzungspunkt die Abstände  $t_{z1}$  und  $t_{z2}$ . Die Relativlage von Ritzel und Rad ergibt sich aus der Superposition der systembedingten Relativlageänderungen ( $\Delta E$ ,  $\Delta P$ ,  $\Delta G$ ,  $\Delta \Sigma$ ) und der Solleinbaulage.

Durch das Abwälzen der im Eingriff befindlichen Zahnpaare wird das Drehmoment formschlüssig übertragen. Dieser Formschluss wird als Zahnkontakt bezeichnet. Die Anzahl der im Eingriff befindlichen Zahnpaare sowie die jeweilige Form, Lage und Größe der Kontaktflächen hängen vom wirkenden Drehmoment, dem Wälzwinkel, der Verzahnungsgeometrie und der Relativlage ab. Sie stellen sich unter elastischer Verformung der Verzahnung sowie des Verzahnungsumfelds derart ein, dass die Wirkung des Normaldrucks in den Kontaktflächen dem äußeren Drehmoment das Gleichgewicht hält.

Die Aufgabe der Zahnkontaktsimulation ist es, das Zahnkontaktproblem des Subsystems von Ritzel und Rad unter Berücksichtigung der Relativlage und der Verzahnungsgeometrie zu lösen. Dies geschieht quasistatisch für eine repräsentative Anzahl von Wälzwinkeln (Eingriffsstellungen). Unter Verwendung der zugrundeliegenden Zahnverformungen erhält man als Lösung des Zahnkontaktproblems die Lastaufteilung und -verteilung für alle betrachteten Eingriffsstellungen. Darauf aufbauend wird als ein wichtiges Primärziel der Zahnkontaktsimulation die Kontakt- und Zahnfußspannungsverteilung berechnet.

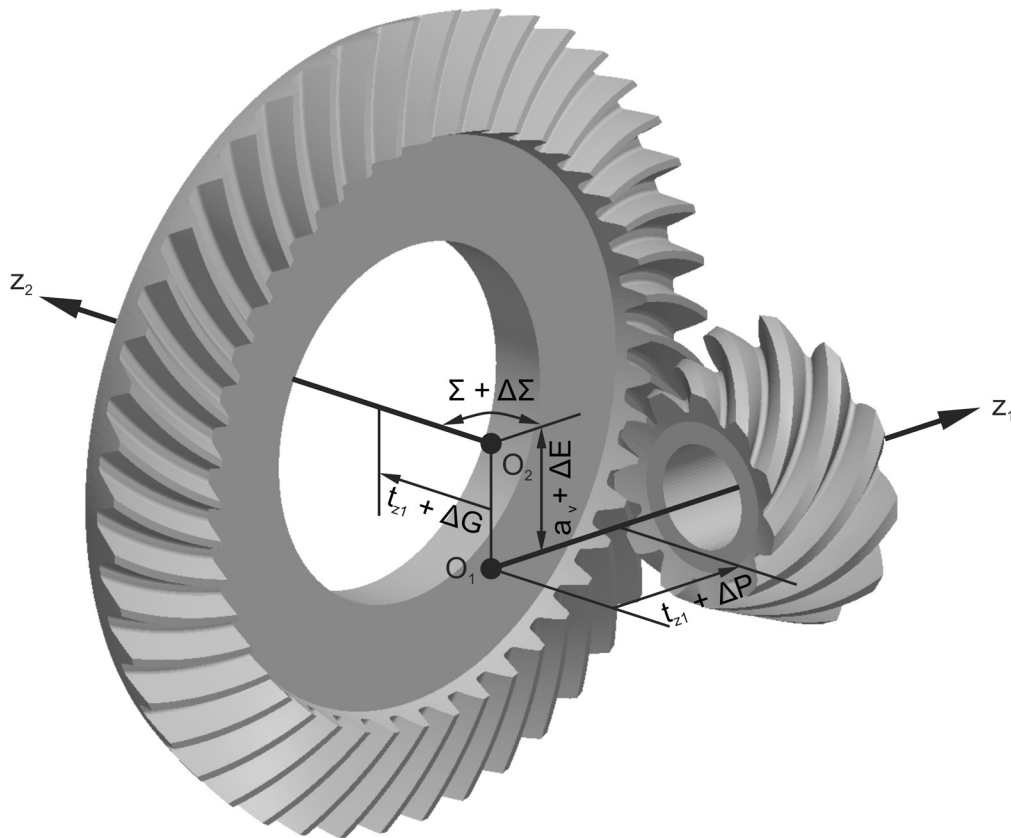


Abbildung 2.1: Relativlageänderung zwischen Ritzel und Rad

## 2.2 Die Verzahnungsgeometrie als Basis der Zahnkontakt-simulation

Eine grundlegende Voraussetzung für eine zutreffende Zahnverformungs-, Kontakt- und Zahnfußspannungsberechnung ist es, neben der Relativlage auch die dreidimensionale Verzahnungsgeometrie möglichst genau zu kennen. Hierzu werden Softwarepakete eingesetzt, die häufig als Flankengeneratoren bezeichnet werden. Mit deren Hilfe kann ein virtuelles Verzahnungsgeometriemodell erzeugt werden. Die geometrischen Möglichkeiten der virtuellen Verzahnungserzeugung sind theoretisch nur dadurch eingeschränkt, dass die generierte Zahnradpaarung das Verzahnungsgesetz erfüllen muss [SSZ12]. Dies ist erforderlich, damit bei der Erzeugung der dreidimensionalen Zahngeometrie kinematisch sinnvolle Zahnradpaarungen, die eine kontinuierliche gleichförmige Drehbewegungsübertragung ermöglichen, entstehen. Mit Hilfe eines Flankengenerators wird der Herstellungsprozess simuliert. Dies kann unter Beachtung aller für die Herstellung notwendigen Parameter für Werkzeug, Verzahnmaschine und Werkstück erfolgen. Für die Herstellungssimulation von Verzahnungen sind unterschiedliche Verfahrensweisen möglich. Es können iterative Lösungen z.B. auf Basis der Durchdringungstheorie [Be98], [WH00] oder explizite Lösungen der Hüllbedingungen [Du94], [Vo07] bzw. auch Bewegflächen (Formverfahren) herangezogen werden. Diese Lösungen sind für kommerzielles und wissenschaftliches Arbeiten in Form von verschiedenen

Softwarepaketen [KIMoS], [SSH12], [WH00], [SZ16] zugänglich. Als Schnittstelle zur Zahnkontaktsimulation können Punktwolken des dreidimensionalen Zahnes oder der dreidimensionalen Zahnücke bereitgestellt werden. Dies ermöglicht eine allgemeingültige Behandlung der dreidimensionalen Zahnückengeometrie unabhängig von der Quelle. Auf diese Weise kann zum Beispiel auch eine Verarbeitung von Ist-Messdaten unter Kombination mit simulierten Soll-Daten erfolgen [SSS11]. In der Regel werden diese Punktwolken anschließend mittels einer geeigneten Flächen- oder Volumenbeschreibung durch Teilflächen oder -volumen approximiert (z.B. Spline- oder Bezier-Flächen, Tetraeder- oder Hexaederelemente), um die weiterführende Verarbeitung der Geometrie und die Berechnung des Zahnkontaktes in der Zahnkontaktsimulation zu ermöglichen.

Die Generierung der dreidimensionalen Verzahnungsgeometrie, der Punktwolken sowie die Approximation dieser durch geeignete Beschreibungsformen wird in dieser Arbeit nicht weiter behandelt. Es wird hier davon ausgegangen, dass die Verzahnungsgeometrie in einer geeigneten Beschreibung vorliegt [Du94], [SSH12], [SHS14].

### 2.3 Methoden für die Zahnkontaktsimulation

Die Lösung des Zahnkontaktproblems sowie die Berechnung der Verformungen und Spannungen von Kegelradverzahnungen führen zu einem gemischten Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie. Bekannterweise können beliebig konfigurierte Körper sowie Randbedingungen nur mit numerischen Verfahren vollständig behandelt werden. Da das Kontaktgebiet zunächst unbekannt ist, muss die Lösung zusätzlich iterativ erfolgen.

Dem Stand der Technik gemäß können die numerische Lösung des Kontaktproblems sowie die Berechnung der Zahnverformungen und Spannungen unter Verwendung von Programmsystemen für den universellen Einsatz der FEM erfolgen. So berichten z.B. Handschuh, Litvin [HL91] und Bible [BH96] über die Bereitstellung der dreidimensionalen Verzahnungsgeometrie und die Anwendung einer universellen FEM-Software für die Zahnkontaktsimulation. In [HB99] wird das entwickelte Vorgehen anhand von Zahnfußspannungsmessungen verifiziert. Gosselin stellt in [GGB94] einen Vernetzungsalgorithmus vor, der auf Basis einer lastfreien Zahnkontaktsimulation und einer groben Ausgangs-FEM-Struktur eine automatische Netzverfeinerung für das potenzielle Kontaktgebiet einer Eingriffsstellung durchführt. Mit der so lokal hochaufgelösten FEM-Struktur erfolgt anschließend eine Zahnkontaktsimulation mit einer kommerziellen FEM-Software. Mittlerweile bieten nicht nur kommerzielle, sondern auch freie Programmsysteme wie z.B. Z88 [Nü15] leistungsfähige Kontaktalgorithmen für die Kontaktsimulation zwischen beliebig konfigurierten Gebieten an. Die zuverlässige Anwendung universell einsetzbarer FEM-Software erfordert allerdings einen hohen Aufwand in der Modellierung und bei der Auswertung. Aufgrund der hohen Anforderungen an die Geometrieaufbereitung, die Auflösung der FEM-Struktur, die Netzqualität, die Ergebnisauswertung sowie wegen der Notwendigkeit, mehrere Eingriffsstellungen zu betrachten, ist der Rechenzeit- und Ressourcenaufwand sehr hoch. Dies führt auch bei moderner Rechentechnik

und hochqualifizierten Anwendern zu unwirtschaftlichen Bearbeitungs- und Rechenzeiten, die allenfalls in begründeten Einzelfällen oder zu Vergleichszwecken vertretbar sind.

Motiviert durch die benannten Nachteile universell einsetzbarer FEM-Programmsysteme, bilden effektive sowie voll automatisierte Expertensysteme für die Zahnkontaktsimulation nach wie vor die Basis der Verzahnungsauslegung und -optimierung. Sowohl für die Lösung des Zahnkontaktproblems als auch für die Berechnung der Zahnverformungen und Spannungen werden dabei hoch spezialisierte Methoden eingesetzt.

Entsprechend der großen Bedeutung der Verzahnungen im Allgemeinen für den Maschinenbau war und ist die Zahnkontaktsimulation und die Berechnung der Zahnverformungen und -spannungen ein wichtiger Forschungsgegenstand. Die umfangreiche bibliographische Zusammenstellung, allein über die Anwendungen der FEM bei der Zahnkontaktsimulation für den Zeitraum zwischen 1997 bis 2006 von Prášil und Mackerle [PM08] mit ca. 340 aufgeführten Veröffentlichungen, lässt die Gesamtmenge der international veröffentlichten Forschungsergebnisse erahnen. Besonders im Bereich der Stirnradverzahnungen reichen die Bemühungen sehr weit zurück und führten zu einer großen Zahl von Arbeiten, die bedeutsam für die heute erzielten Fortschritte in der Zahnkontaktsimulation, der Zahnverformungs- sowie -spannungsberechnung sind. Exemplarisch, ohne weiter auf die speziellen Inhalte einzugehen, sollen hier die Veröffentlichungen [WBN55], [WS60], [Ha63], [Za69], [Zi71], [Um72b], [CS73], [Sc73], [Oe75], [WN76], [HS78], [KHY79], [Ve81] genannt werden. Unter anderem inspirierten oder führten diese Grundlagen direkt zu der Entwicklung der aktuell besonders relevanten Zahnkontaktsimulationssoftware-Pakete für Stirnradverzahnungen

- LVR (**L**ast**V**erteilungs**R**echnung) [BS95], [Ku99], [Ba13]
- RIKOR (**R**itzel**K**ORrektur) [PI88], [Ot09], [SS13]
- STIRAK (FE-**ST**irn**RA**d**K**ette) [Bo90], [Sc08], [BP16]
- LDP (**L**oad **D**istribution **P**rogram) [CS73], [Ho90]
- CALYX [Vi16]

Die Entwicklung der Zahnkontaktsimulation, Zahnverformungs-, Kontaktspannungs- sowie Zahnfußspannungsberechnung bei Kegelrädern baut auf den Forschungsergebnissen für Stirnradverzahnungen auf. Prinzipiell stellen Stirnradverzahnungen aufgrund ihrer kinematischen und geometrischen Randbedingungen einen Spezialfall der allgemeinen Kegelradverzahnung dar. Die aus diesen Randbedingungen resultierenden Einschränkungen wurden in der Regel gewinnbringend bei der Methodenentwicklung für Stirnradverzahnungen genutzt, welches allerdings eine allgemeingültige Anwendung verhindert. Eine zweckmäßige Adaptation für Kegelräder erfordert deshalb eine Verallgemeinerung und Erweiterung dieser Methoden. Der Schwerpunkt der folgenden Betrachtungen liegt deshalb auf der Darstellung der wichtigsten verallgemeinerten Methoden, die speziell für Kegelradverzahnungen adaptiert oder entwickelt wurden.

Für eine einfache, rechenzeit- sowie ressourcenschonende allgemeine Lösung von elastischen Kontaktproblemen schlagen Conry und Seireg [CS71] sowie Francavilla und



Zienkiewicz [FZ75] den Einsatz einflusszahlenbasierter Methoden vor. Mit diesen wird unter Verwendung von Verformungseinflusszahlen das Kontaktgebiet bestimmt und die Last- bzw. Pressungsverteilung über selbigen berechnet. Auch für die Lösung des Zahnkontaktproblems verwendete man schon früh einflusszahlenbasierte Methoden [Ha63], [CS73]. Dabei wird in der Regel, aufbauend auf der Lastverteilung, auch die Zahnfußspannungsverteilung unter Verwendung von Spannungseinflusszahlen berechnet. Aufgrund der hohen Effizienz und der Möglichkeit, alle relevanten elastischen Verformungen und Kontaktopographieeigenschaften in einer übersichtlichen Form einbeziehen zu können, sind Methoden auf Basis von Einflusszahlen nach wie vor die bevorzugte Lösungsvariante für Zahnkontaktprobleme [Li96], [Sc10], [KI08]. Die wichtigsten Unterschiede der Methoden liegen dabei hauptsächlich in den angewendeten Verfahren für die Zahnverformungs-, Kontakt- sowie Zahnfußspannungsberechnung und im jeweiligen Detaillierungsgrad dieser. Diese entsprechenden Unterschiede werden im Folgenden anhand einer kurzen Charakterisierung der wichtigsten Vertreter der verschiedenen Methoden veranschaulicht.

### 2.3.1 Komplexe Methoden für die Verformungs- und Spannungsberechnung

Wilcox stellt in [WA77] eine dreidimensionale FEM-basierte Methode zur Zahnkontaktsimulation, Zahnverformungs- und Spannungsberechnung für Kegelräder vor. Diese hat die Ermittlung der Lastverteilung für die Bestimmung der Zahnfußspannungen zum Ziel. Die Berechnung der Zahnverformung und Zahnfußspannung erfolgt auf Basis einer 3D-FEM-Struktur mit Volumenelementen, welche die dreidimensionale Verzahnungsgeometrie entsprechend der gewählten Auflösung approximieren. Der Zahnkontakt wird dabei als reibungsfreier Zahnkontakt behandelt, der durch einen stark vereinfachten, erzwungenen Knoten- zu Knotenkontakt entlang einer potenziellen Kontaktlinie der 3D-FEM-Struktur abgebildet wird. Die Lösung für die 3D-FEM-Struktur muss dabei für jede Eingriffsstellung vollständig neu berechnet werden. Eine zuverlässige Berechnung von Kontaktverformungen und -spannungen ist nicht möglich. In [Wi81] stellt Wilcox eine Erweiterung der Zahnverformungs- und Zahnfußspannungsberechnung auf eine Interpolations- und Einflusszahlenmatrixmethode vor. Alle 3D-FEM-Strukturknoten der Zahnflanke werden einzeln aufeinanderfolgend mit einer Einheitslast in Normalenrichtung beaufschlagt und jeweils die resultierenden Verformungen sowie Spannungen der 3D-FEM-Struktur berechnet (Lastfallberechnung). Auf Basis der so erhaltenen Lösungsmenge können, mittels Superposition und Interpolation unter Verwendung der Elementformfunktionen, die Zahnverformungen sowie -spannungen unter Wirkung beliebiger Einzellasten ortsunabhängig berechnet werden. Die Lastfallberechnung für die 3D-FEM-Struktur erfolgt einmalig unabhängig von der Zahnkontaktsimulation und der Anzahl der Eingriffsstellungen. Die Bewertung der Zahnflankentragfähigkeit wird nicht auf Basis der Kontaktspannung (Pressung), sondern unter Verwendung der Schubspannungen unterhalb der entlang einer Kontaktlinie angenommen diskreten Kontaktpunkte [Wi85] durchgeführt. In [WCN97] werden weitere umfangreiche Verbesserungen der Zahnkontaktsimulationsmethode vorgestellt. Unter anderem kann eine detailliertere Darstellung der Radkörpergeometrie vorgenommen werden, welche die Abbildung von drei Zähnen beinhaltet. Damit kann theore-

tisch auch die Wechselwirkung zwischen den Zähnen berücksichtigt werden. Da die simulierten Tragbilder generell zu klein waren, wurde das verwendete Linienkontaktmodell ebenfalls verbessert. Dies erreichte man durch die Trennung der Kontaktverformung von den restlichen Verformungsanteilen. Damit wurde es möglich, unabhängig von der 3D-FEM-Struktur die Kontaktverformung auf Basis des Hertzschen Linienkontaktmodells zweier achsparalleler Zylinder gemäß [WBN55] anzuwenden. Die veränderlichen Kontakteigenschaften entlang der angenommenen Kontaktlinie wurden unter Verwendung lokal entkoppelter Teilzylinder approximiert. So geht der Linienkontakt näherungsweise in ein Nicht-Hertzsches Kontaktgebiet mit lokal veränderlichen Krümmungseigenschaften über. Diese Art der Modellierung Nicht-Hertzscher Kontaktprobleme soll im Folgenden als Zylinder-Zylinder-Methode (ZYM) bezeichnet werden. Der Einfluss der Zahnberandung auf die Kontaktverformung wird mit dieser Methode nicht erfasst. Die von Wilcox vorgestellte Methode ist Teil von „Gleason CAGE™ for Windows“ [FW07].

Sehr übersichtlich sowie ausführlich entwickelt und beschreibt Neupert [Ne83] die Anwendung der dreidimensionalen FEM bei der allgemeinen Zahnkontaktsimulation, Zahnverformungs- und Spannungsberechnung. Bei der gewählten Modellierung wird der Einfluss der Reibung auf die Lastverteilung vernachlässigt. Die Berechnung der Zahnverformung und Zahnfußspannung erfolgt ebenfalls auf Basis einer 3D-FEM-Struktur mit Volumenelementen. Wie schon unter der Auswertung der Arbeiten von Wilcox beschrieben, berechnet auch Neupert die Zahnverformungen und Zahnfußspannungen im Vorfeld der Zahnkontaktsimulation auf Basis von Einheitslasten. Die Berechnung der eingriffsstellungsabhängigen Zahnverformungen sowie lastverteilungsabhängigen Zahnfußspannungen im Rahmen der Zahnkontaktsimulation erfolgt durch Interpolation und Superposition der bekannten Einheitslastlösungen. Die Kontaktverformung wird auf Basis der 3D-FEM-Struktur näherungsweise in Form eines Linienkontaktes berücksichtigt. Um dies umsetzen zu können, wählt Neupert eine grobe Flankenauflösung der 3D-FEM-Struktur, damit die Kontaktverformung nicht überbewertet wird. Die Zahnberandungseinflüsse auf die Kontaktverformung werden entsprechend der Auflösung der 3D-FEM-Struktur implizit berücksichtigt. Die Kontaktspannung wird auf Basis der ZYM berechnet. Der Einfluss der Zahnberandung auf die Kontaktspannung wird demnach nicht erfasst. Der Radkörpereinfluss auf die Zahnverformung und Zahnfußspannung kann über eine vereinfachte Beschreibung der realen Radkörpergeometrie durch die 3D-FEM-Struktur berücksichtigt werden. Auf eine Abbildung des Einflusses der Wechselwirkung zwischen den Zähnen wird verzichtet. Die von Neupert entwickelte Methode bildet die Basis für die „Programmreihe Kegelradberechnung“ wie sie in [WSW95] beschrieben wird.

Hemmelmann [He07] entwickelte ebenfalls eine allgemeingültige FEM-basierte Zahnkontaktsimulation. Hinsichtlich der Lösung des Kontaktproblems baut er dabei auf Neupert [Ne83] auf, allerdings liegt der Schwerpunkt seiner Arbeit auf der Berechnung der Wälzabweichung, des Tragbildes und der Kontaktspannung (Pressung). Dementsprechend behandelt er die Berechnung der Zahnfußspannung nicht. Hemmelmann geht bei der Berechnung der Kontaktverformung und -spannung statt von einem Linien- von einem Nicht-Hertzsches Kontaktgebiet aus, welches die lokal veränderlichen Krümmungseigenschaften in Abhängigkeit von der Flankenauflösung der 3D-FEM-Struktur erfasst. Die Kontaktspannung wird dabei als

Quotient der punktweise diskret abgebildeten Lasten über der Kontaktfläche und den jeweils wirksamen 3D-FEM-Struktur-Oberflächenanteilen gebildet. Damit werden über diesen Ansatz alle Einflüsse der Zahnberandung auf die Kontaktverschiebung und -spannung implizit berücksichtigt. Als eine zusätzliche Erweiterung gegenüber dem Berechnungsmodell nach Neupert berücksichtigt er die Wechselwirkung zwischen den Zähnen auf die Verformungs- und Lastverteilungsrechnung gemäß der Vorgehensweise von Bong [Bo90]. Die von Hemmelmann erarbeiteten Berechnungsmethoden stehen in Form des Programmsystems ZaKo3D [KB17] zur Verfügung.

Weitere FEM-basierte Methoden wurden in den Veröffentlichungen [Go95], [Si00a], [Si00b], [Si07] vorgestellt. Diese Aufzählung könnte noch durch andere Arbeiten z.B. aus der Bibliographie von Prášil und Mackerle [PM08] ergänzt werden. Darauf wird hier allerdings verzichtet, da alle wesentlichen Eigenschaften der FEM-basierten Methoden bereits aufgeführt wurden. Diese unterscheiden sich hauptsächlich in der Kontaktbehandlung (Punkt-, Linienkontakt oder Nicht-Hertzsche Kontaktflächen), dem Detaillierungsgrad der Abbildung des Radkörpers sowie der Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den Zähnen.

Vecchiato [Ve05] stellt eine Methode für die Lösung des Kontaktproblems auf Basis der Boundary-Element-Method (BEM) vor. Als Vorteil der BEM gegenüber der FEM sind vor allem der geringere Aufwand bei der Strukturerstellung und das bessere Konvergenzverhalten hinsichtlich Netzverfeinerung zu nennen. Die Lastverteilungsberechnung erfolgt unter Vernachlässigung der Reibung. Die Zahnverformungen inklusive der Kontaktverformungen sowie die Zahnfußspannungen werden unter Anwendung einer 3D-BEM-Struktur aus Flächenelementen berechnet. Die 3D-BEM-Struktur approximiert die dreidimensionale Verzahnungsgeometrie entsprechend der gewählten Netzauflösung. Die Kontakte werden als Nicht-Hertzsche Kontaktflächen behandelt. Die Kontaktspannung ergibt sich aus dem Verhältnis der jeweiligen Kontaktkraft zur elementwirksamen Fläche. Alle Einflüsse der Zahnberandung auf die Kontaktverschiebung und -spannung werden implizit berücksichtigt. Die Abbildung des Radkörpers erfolgt lediglich in einem Umfang, der es ermöglicht, näherungsweise die Einspannsteifigkeiten zu erfassen. Die Simulation erfolgt unter Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen den Zähnen.

### **2.3.2 Näherungsmethoden für die Verformungs- und Spannungsberechnung**

Vijayakar [Vi87] führt zunächst für Stirnradverzahnungen eine Methode ein, die er auf Basis der Finite-Prism-Method (FPM) entwickelte. Die FPM, über deren Anwendung bei Stirnrädern z.B. auch von [OP88] sowie [GVI04] berichtet wird, ist ein semianalytisches FEM-Verfahren zur Lösung dreidimensionaler Aufgaben. Sie kann bei prismatischen Körpern mit deutlich geringerem Rechenzeitaufwand und Speicherplatzbedarf als die dreidimensionale FEM eingesetzt werden. Voraussetzung dafür ist, dass die Geometrie und die Materialeigenschaften entlang einer Breitenachse konstant sind. Dies ist prinzipiell bei geradverzahnten Stirnrädern entlang der Zahnbreite der Fall. Bei schrägverzahnten Stirnrädern und bogenverzahnten Kegelrädern ist die Geometrie über der Zahnbreite nicht konstant. Die Zähne

weisen zusätzlich zu veränderlichen Höhen- und Dickenverläufen auch eine Flankenlinienkrümmung, eine Zahnwindung sowie eine stumpfe und spitze Zahnstirnseite auf (siehe Abbildung 1.2). Um auch diese allgemeineren geometrischen Fälle abbilden zu können, entwickelt Vijayakar [Vi87] die FPM zur Methode für quasiprismatische Geometrien der Finite-Quasi-Prism (FQP) weiter. Die Verallgemeinerung der FPM geht hauptsächlich zu Lasten des Rechenzeitaufwandes, aber die entwickelte Lösung weist immer noch einen erheblichen Rechenzeitvorteil gegenüber der FEM auf. Die auf Basis der FQP allgemein formulierte Zahnkontaktsimulationsmethode wird in Form des Programmes CAPP von Vijayakar [Vi91] und auch von Vaidyanathan [Va93] bei Kegelrädern angewendet. Der Einfluss der Reibung auf die Lastverteilung wird berücksichtigt. Die Zahnverformungen und Zahnfußspannungen werden unter Verwendung der FQP berechnet. Die Berechnung der Kontaktverformungen sowie -spannungen erfolgt unter der Annahme Nicht-Hertzscher Kontaktflächen auf Basis der elastischen Berührung zweier Halbräume [Vi91], [Vi96]. Die Einflüsse der Zahnberandung auf die Kontaktverschiebungen und -spannungen werden damit erfasst [Vi96]. Der Einfluss des Radkörpers auf die Zahnverformung und Zahnfußspannung kann berücksichtigt werden. Die Wechselwirkung zwischen den Zähnen wird ebenfalls berücksichtigt. Die vorgestellte Methode auf Basis der FQP steht in Form des Programmsystems CALYX [Vi16] zur Verfügung.

Gosselin [GGG00] berichtet über die Entwicklung und Anwendung eines weiteren semianalytischen FEM-Verfahrens für die Berechnung der Zahnverformungen und Zahnfußspannungen bei der Zahnkontaktsimulation. Das vorgestellte Verfahren baut auf der Finite-Strip-Method (FSM) auf. Diese ist das zweidimensionale Äquivalent zur dreidimensionalen FPM für die Berechnung der Verformungen und Spannungen von Platten. Auch bei der FSM wird vorausgesetzt, dass die Geometrie und die Materialeigenschaften entlang einer Breitenachse konstant sind. Da dies für bogenverzahnte Kegelräder nicht zutrifft, erweitert Gosselin die Methode derart, dass ein veränderlicher Zahndicken- und Zahnhöhenverlauf entlang der Zahnbreite abgebildet werden kann [GGC98], [GGG00]. Auch die Zahnwindung wird bei dieser Erweiterung näherungsweise berücksichtigt. Der Einfluss der Flankenlinienkrümmung findet allerdings keine weitere Beachtung. Der Einfluss der spitzen und stumpfen Zahnstirnseite kann naturgemäß von einer Plattenlösung nicht erfasst werden. Obwohl Gosselin einen großen Einfluss dieser auf die Zahnverformungen und Zahnfußspannungen angibt, verzichtete er zunächst auf eine entsprechende Erweiterung der Methode [GGC98]. Dies begründet er damit, dass die Tragbilder in der Regel einen ausreichenden Abstand zu den Stirnseiten besitzen. Die mit der FSM berechneten Nennspannungsverteilungen liegen einer Berechnung der örtlichen Zahnfußspannungsverteilung auf Basis von Spannungskorrekturfaktoren zugrunde. Gosselin gibt zum einen die Möglichkeit an, die Spannungskorrekturfaktoren näherungsweise analytisch [GGG00] oder mittels der zweidimensionalen Finite-Difference-Method (FDM) [GGC05] zu berechnen. Die Kontaktverformungen und -spannungen ermittelt er auf Basis der Nicht-Hertzschen elastischen Berührung zweier Halbräume, somit werden die Zahnberandungseinflüsse diesbezüglich berücksichtigt [GGC05]. Der Einfluss der Reibung auf die Lastverteilung wird vernachlässigt [GGC05]. Der Einfluss der Radkörperverformung wird in Form einer Einspannsteifigkeit berücksichtigt. Diese wird unter Verwendung

eines zweidimensionalen FDM Modelles näherungsweise bestimmt. Die Wechselwirkung zwischen den Zähnen wird vernachlässigt. Die vorgestellte Methode wurde im Programmsystem HyGEARS [HyGEARS] umgesetzt.

Vaidyanathan [Va93] entwickelt für die Berechnung der Zahnverformung und Zahnfußnennspannung unter Wirkung einer Einzellast eine Berechnungsmethode für bogenverzahnte Kegelräder auf Basis der Theorie für dicke Schalen. Unter Verwendung des Verfahrens von Ritz erarbeitet er für ein Zylinderschalensegment mit gleichschenkelig-trapezförmigem Profil sowie veränderlichem Höhen- und Dickenverlauf über der Breite eine Näherungslösung. Die Flankenlinienkrümmung wird damit berücksichtigt, die Zahnwindung allerdings nicht. Der Einfluss der spitzen und stumpfen Zahnstirnseite wird nicht erfasst. Die Radkörperverformung wird vollständig vernachlässigt und die Einspannung des Zahnes als ideal steif angenommen. Diese Berechnungsmethode setzt Kolvand [Ko09] für die Bestimmung der Last- und Kontaktspannungsverteilung im Rahmen einer Zahnkontaktsimulationssoftware für die Ermittlung des Wirkungsgrades von Kegelrädern ein. Der Einfluss der Reibung auf die Lastverteilung wird vernachlässigt. Die Kontaktverformungen und Spannungen werden auf Basis der ZKM berechnet, damit bleibt der Einfluss der Zahnberandung unberücksichtigt. Da der Radkörpereinfluss vernachlässigt wird, kann die Wechselwirkung zwischen den Zähnen ebenfalls nicht berücksichtigt werden. Zur Berechnung der Zahnfußspannung auf Basis des Zahnfußnennspannungsverlaufes werden keine Angaben gemacht, dies könnte allerdings unter Verwendung eines Spannungskorrekturfaktors erfolgen.

Kubo und Umezawa veröffentlichten eine Methode für die Zahnkontaktsimulation bei Stirnradverzahnungen [KU77] auf Basis von Einflussfunktionen. Die Auswirkung der Reibung auf die Lastverteilung wird dabei vernachlässigt [Ku81]. Die Zahnverformung sowie die Biegemomentenverteilung im Zahnfuß werden jeweils unter Verwendung analytisch beschriebener Einflussfunktionen berechnet. Diese bilden das Verhalten einer dicken Platte mit gleichschenkelig-trapezförmigen Profil und elastischer Einspannung unter Wirkung einer Einzellast ab. Umezawa entwickelte diese Einflussfunktionen auf Basis einer FDM-Lösung für dicke Platten und Messungen an solchen [UIH69], [Um72b], [Um72a], [Um74], [Um73]. Da die Methode auf einer Plattenlösung aufbaut, erfolgt die Berücksichtigung des Einflusses der stumpfen und der spitzen Zahnstirnseite auf die Zahnverformung und Biegemomentenverteilung nicht implizit. Über eine explizite Berücksichtigung wird allerdings nicht berichtet. Die Kontaktverformung wird ausgehend von einem Linienkontakt auf Basis der elastischen Verformung des Halbraums unter Wirkung diskreter Einzelkontakte mit kreisförmiger Druckfläche berechnet [UI73]. Die Einflüsse der Zahnberandung auf die Kontaktverformung werden dabei berücksichtigt. Die Kontaktspannung wird mittels ZKM berechnet, damit bleibt der Zahnberandungseinfluss unberücksichtigt [KHY79]. Die Berechnung der Zahnfußspannung erfolgt aufbauend auf dem Biegemomentenverlauf im Zahnfuß unter Berücksichtigung der Kerbwirkung [KHY79]. Der Radkörpereinfluss wird in Form einer Einspannsteifigkeit erfasst. Die Wechselwirkung zwischen den Zähnen wird vernachlässigt. In [KTG97] wird die Adaption dieser Methode auf Kegelradverzahnungen vorgestellt. Zu diesem Zweck wird die Zahnverformungseinflussfunktion so erweitert, dass der veränderliche Verlauf der Zahnhöhe und -dicke entlang der Zahnbreite sowie die Krümmung des Zahnes berücksichtigt wird. Eine

Erfassung asymmetrischer Zahnprofile, wie sie bei Hypoidverzahnungen auftreten können, wird nicht erwähnt. Die Adaption der Verformungseinflussfunktion wird mithilfe der FEM durchgeführt. Wie die notwendigen Anpassungen und Erweiterungen konkret formuliert wurden, wird völlig offen gelassen. Auch über eine gleichermaßen erforderliche Adaption der Zahnfußspannungsberechnung wird nicht berichtet.

Aufbauend auf den Arbeiten von Oehme [Oe75] sowie Hohrein/Senf [HS78] entwickelte Gajewski [Ga86] eine analytische Einflussfunktion für die Berechnung der Zahnverformung des unendlich langen Zahnes. Er baut dabei auf der analytischen Lösung für die Zahnverformung mit konstanter Streckenlast nach [WBN55] auf und kombiniert diese mit einer allgemeinen Abklingfunktion der Zahnverformung unter Einzellast. Dies ermöglicht die Berechnung der Zahnverformung unter Einzellast mit einem vollständigen Verzicht auf numerische Lösungen. Entwickelt wurde diese Abklingfunktion mittels Regression auf Basis von FEM-Berechnungen. Kunert [LHK95], [Ku99] entwickelte diese sehr zuverlässige und effektive Methode im Rahmen der Erarbeitung einer Zahnkontaktsimulationsmethode für Stirnradverzahnungen maßgeblich weiter. Der Einfluss der Reibung auf die Lastverteilung wird dabei vernachlässigt. Kunert stellte in [LHK95], [Ku99] ebenfalls eine der Zahnverformungsberechnung ähnliche Methode zur Berechnung der Zahnfußspannung auf Basis von Nennspannungsverläufen und Spannungskorrekturfaktoren vor. Die Kontaktverformung und -spannung wird unter Verwendung der ZZM berechnet, damit bleiben Zahnberandungseinflüsse unberücksichtigt. Der Radkörpereinfluss wird in Form einer Einspannsteifigkeit erfasst. Die Wechselwirkung zwischen den Zähnen wird vernachlässigt. Baumann [Ba91] adaptierte diese Näherungsmethoden für die Zahnkontaktsimulation von Kegelrädern. Er untersuchte die Einflüsse des Schrägungswinkels, des Kegelwinkels, veränderlicher Zahndickenverläufe, veränderlicher Zahnhöhenverläufe, der Flankenlinienkrümmung und der Zahnwindung um den Radkörper auf die Zahnverformungs- und Zahnfußspannungsberechnung [Ba91], [LHB95], [LB97]. Die beschriebene Methode steht in Form des Programmsystems BECAL [SSH12] zur Verfügung.

## 2.4 Verzahnungen mit Sondermerkmalen

Wie schon einführend unter Kapitel 1 erwähnt, ist man auch bei Kegelradverzahnungen bestrebt, die Ausnutzung des physikalischen Potenziales den technologischen Möglichkeiten gemäß kontinuierlich zu steigern. Dazu muss der Geometriebereich der Standardverzahnungen, der bisher üblicherweise von praktischer Relevanz war, erweitert werden. Die Verzahnungen aus diesem erweiterten Geometriebereich sollen als „Verzahnungen mit Sondermerkmalen“ bezeichnet werden.

Der BECAL-Entwicklung lag der Geometriebereich der Standardverzahnungen zugrunde, der den geometrischen Vertrauensbereich, in dem eine hohe Ergebnisgenauigkeit der BECAL-Zahnkontaktsimulation erwartet wird, definiert. Dieser geometrische Vertrauensbereich wird in dieser Arbeit auf Verzahnungen mit Sondermerkmalen erweitert. Deshalb soll im

Folgendes der geometrische Vertrauensbereich in der Ausgangssituation qualitativ dargestellt und der Erweiterungsbedarf ermittelt werden.

Der geometrische Vertrauensbereich für Standardverzahnungen in der Ausgangssituation wird maßgeblich durch die Verzahnungsvarianten definiert, die explizit bei der Entwicklung der BECAL-Näherungsmethoden berücksichtigt wurden [Ba91], [LHB95], [LB97]. Aber auch die Entwicklung lokaler Tragfähigkeitsnachweise unter Verwendung von BECAL und Versuchen durch Wirth [Wi08], Klein [KI12] und Hombauer [Ho13] können für die Abgrenzung des geometrischen Vertrauensbereichs herangezogen werden. Auf dieser Basis kann der geometrische Vertrauensbereich in der Ausgangssituation wie folgt qualitativ charakterisiert werden:

- Die Profilform wird durch das Bezugsprofil des Planrades nach [DIN867] bzw. allgemein für Kegelrad- und auch asymmetrische Hypoidverzahnungen gemäß [ISO23509] vorgegeben. Bei asymmetrischen Hypoidverzahnungen wird von kleinen Eingriffswinkeldifferenzen zwischen Zug- und Schubflanke ausgegangen.
- Die Zahnkrümmungen werden durch praxisübliche Schrägungswinkel und durch die Werkzeugradien der Messerköpfe bzw. topfförmigen Werkzeuge vorgegeben. Die Werkzeugradien hängen dabei vom Normalmodul ab und können nur in einem gestuften und stark eingeschränkten Bereich gewählt werden. (vgl. z.B. [KI08], [St13]).
- Die Lasttragbilder haben bei Nenndrehmoment einen ausreichenden Abstand zur Zahnberandung und entsprechen den üblichen Empfehlungen z.B. nach [DIN3991], [ISO10300], [AGMA2005]. Dies wird unter anderem durch die Anwendung näherungsweise parabolischer Breiten- und Höhenballigkeiten erreicht.

Damit können die bei der Entwicklung der BECAL-Näherungsmethoden explizit betrachteten Verzahnungsgeometrievarianten in den in Abbildung 2.2 markierten Profilformbereich eingeordnet werden, der damit auch den abgeschätzten geometrischen Vertrauensbereich für Standardverzahnungen verkörpert. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Genauigkeit der BECAL-Näherungsmethoden für diesen abgeschätzten geometrischen Vertrauensbereich besonders hoch ist.

Moderne Auslegungs- und Optimierungsstrategien, die nicht nur auf dem Einsatz konventioneller Kegelradverzahnmaschinen, sondern auch auf der Nutzung von 5-Achs-Freiformfräsmaschinen aufbauen, definieren den erforderlichen Umfang des geometrischen Vertrauensbereiches neu. Im Folgenden wird der erweiterte geometrische Vertrauensbereich der Verzahnungen mit Sondermerkmalen aufgespannt und mit ausgewählten Arbeiten exemplarisch die mögliche Praxisrelevanz belegt.

Die Arbeiten [SSH11], [Sc15], [Po16] befassen sich mit der Tragfähigkeitssteigerung von Kegelradverzahnungen. Diese Tragfähigkeitssteigerung wird hier über Profilformen mit großer Asymmetrie, vergrößerter Zahnhöhe sowie mit elliptischen Zahnfußkurven (siehe auch [Li10]) erreicht. Auch andere optimale Zahnfußkurven, die vom Bezugsprofil gemäß [ISO23509] abweichen, werden in diesen Arbeiten bewertet.

Zahnkontaktsimulationen für Beveloidverzahnungen (kegliche Stirnräder) werden, aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu Kegelrädern, auch mit BECAL durchgeführt [SHS14]. Dabei müssen große Profilverschiebungen und Unterschnitt im Zusammenhang mit kleinen Zähnezahlen abgebildet werden können.

Adaptiert man die bekannten Wirkungsgradoptimierungsstrategien von Stirnrädern, wie z.B. in [Li10], [Fr12] angegeben, auch für Kegelräder, dann führt dies zu verkleinerten Zahnhöhen und vergrößerten Eingriffswinkeln.

Wie schon von Hünecke [Hü01] untersucht, spielt die reale Zahnfußgeometrie unter Berücksichtigung von Zusatzkerben wie z.B. Schleifabsätzen auch bei der Kegelradauslegung und -optimierung eine wichtige Rolle.

Die Größe der konkaven bzw. konvexen Flankenkrümmung bei Kegelrädern kann so gewählt werden, dass die Verlagerungsempfindlichkeit deutlich verringert wird [KI08], [Sc10]. Kommen 5-Achs-Freiformfräsmaschinen für die Herstellung zum Einsatz, dann ist die Größe der Flankenkrümmung nicht mehr werkzeuggebunden [SSH11], [Po16] und kann damit deutlich kleiner als bisher möglich ausfallen.

Für die optimale und möglichst vollflächige Ausnutzung der Zahnflanke werden in [Po16] exponentielle, logarithmische sowie elliptische Flankenmodifikationen eingesetzt. Auch Schumann [Sc15] beschäftigte sich mit der optimalen Zahnflankenausnutzung und entwickelte zu diesem Zweck einen automatischen Flankenoptimierer.

Die aufgeführten Anforderungen aktueller Optimierungs- und Auslegungsstrategien beschreiben den erweiterten geometrischen Vertrauensbereich der Verzahnungen mit Sondermerkmalen. Dieser wird nicht nur von den in Abbildung 2.2 dargestellten Profilformen bestimmt, sondern auch durch

- freigestaltete Zahnfußkurven unter Berücksichtigung von Zusatzkerben
- Mikrogeometriegestaltungen, die zu zahnberandungsnahen Tragbildausdehnungen führen
- große konkave bzw. konvexe Flankenkrümmungen.

Dieser Geometriebereich der Verzahnungen mit Sondermerkmalen ist Gegenstand der Analyse und Erweiterung der BECAL-Berechnungsmethoden.



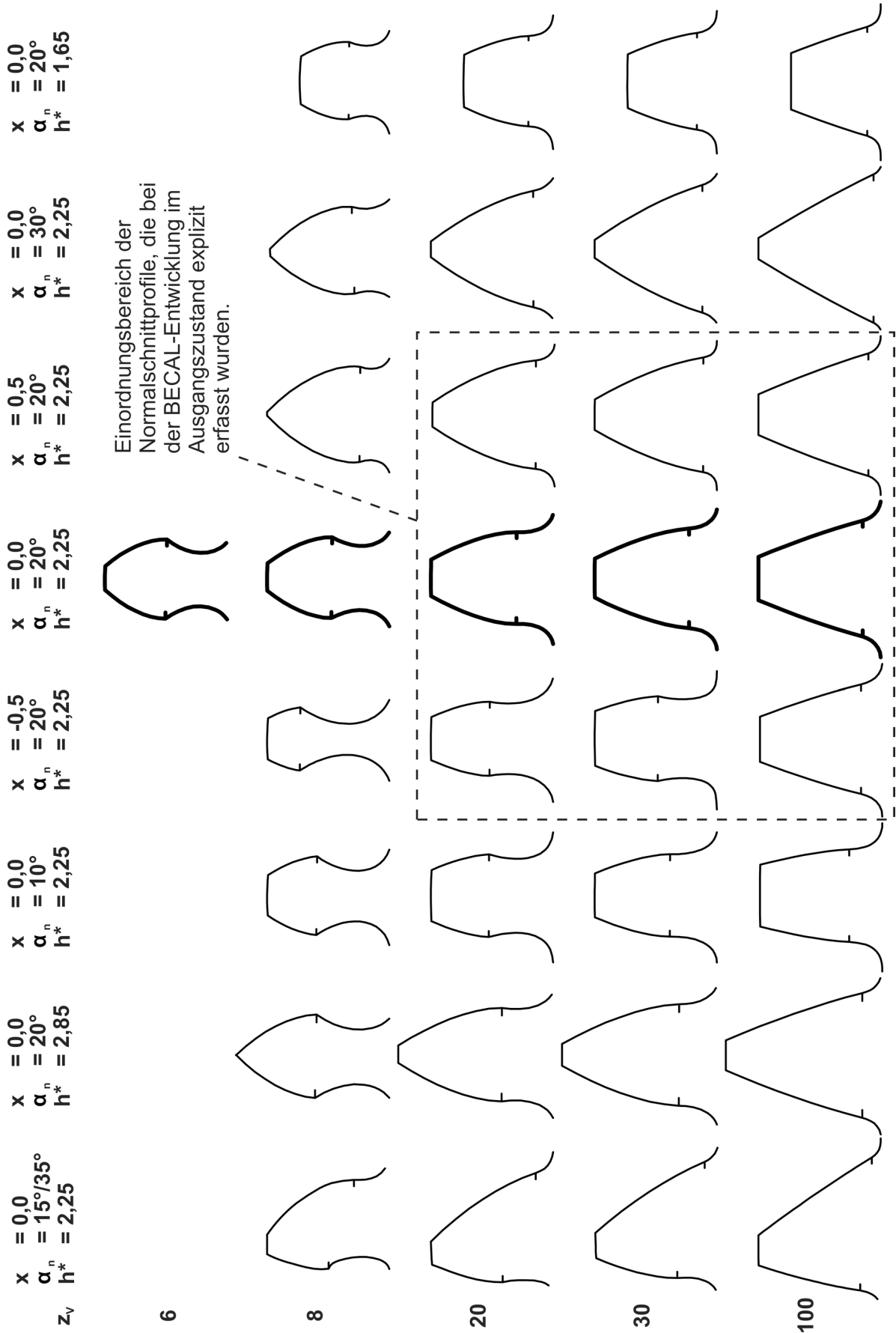


Abbildung 2.2: Im Rahmen aktueller Optimierungs- und Auslegungsstrategien relevanter Profilformbereich



## **3 Zahnkontaktsimulation auf Basis der Einflusszahlenmethode**

### **3.1 Herangehensweise bei der Betrachtung**

Die Berechnung der Lastverteilung als Lösung des Kontaktproblems und darauf aufbauend die Berechnung der Kontakt- sowie Zahnfußspannungen erfolgen gemäß dem Stand der Arbeiten [Ba91], [LHB95], [LB97] unter Einsatz einflusszahlenbasierter Methoden. Deshalb beginnen die Betrachtungen mit einer Einführung in die Zahnkontaktsimulation unter Verwendung von Einflusszahlen und einer Erklärung des prinzipiellen Vorgehens bei der Berechnung der Lastverteilung als Lösung des Kontaktproblems. Aufbauend auf diesen Grundlagen, wird eine anschauliche Ableitung des Erweiterungsbedarfs der Methoden zur näherungsweise Berechnung der Zahnverformung, Kontakt- sowie Zahnfußspannung möglich.

### **3.2 Zerlegung der Verformungen und Spannungen in lineare und nicht lineare Anteile**

Die Berechnung der Zahnverformungen und -spannungen im Rahmen einer Zahnkontaktsimulation kann prinzipiell in zwei Modellvorstellungen aufgeteilt formuliert werden. Die Trennung erfolgt dabei nach linearen und nicht linearen Verformungs- und Spannungskontaktreaktionen auf die Wirkung einer äußeren Belastung. Wobei immer vorausgesetzt wird, dass das Materialverhalten linearelastisch im Sinne des Hookeschen Gesetzes ist.

Wenn wir davon ausgehen, dass sich zwei Zähne lastfrei punkt- oder linienförmig berühren, dann zeigen die Zähne unter Wirkung einer äußeren Belastung eine globale und lokale Reaktion. Die globale Kontaktreaktion der Zähne erfolgt linear und die lokale Kontaktreaktion an der unmittelbaren Kontaktstelle erfolgt nicht linear. Die lokale Kontaktreaktion an der unmittelbaren Kontaktstelle äußert sich neben einer lokalen Annäherung (Einsenkung) der Kontaktkörper in einer Abplattung der Kontaktstelle. Damit geht der anfänglich lastfreie punkt- bzw. linienförmige Kontakt mit zunehmender Last kontinuierlich in einen flächenförmigen Kontakt über. Die lokale Verformung in Form der lokalen Annäherung und der Abplattung sollen im Weiteren allgemein als Kontaktverformung bezeichnet werden. Der Betrag der Kontaktverformung hängt von der Größe und der Lastverteilung über der Kontaktfläche ab. Aufgrund der gekrümmten Kontaktflächen verhält sich der Betrag der Kontaktverformungen nicht proportional zur resultierenden Kontaktkraft und damit nicht linear. Auch die Spann-

gen in der unmittelbaren Umgebung der Kontaktstelle verhalten sich dementsprechend nicht linear gegenüber der wirkenden Last.

Abbildung 3.1 erklärt den beschriebenen Sachverhalt am Beispiel des Linienkontaktes zweier Zähne im Ebenen Verzerrungszustand (EVZ). Lösen wir einen Zahn nach der Belastung aus dem beschriebenen Linienkontakt mit der resultierenden Pressungsverteilung  $\sigma_H$  über der Abplattungsbreite  $2a_H$  heraus, dann erhalten wir den Sachverhalt Abbildung 3.1 a). Die Streckenlast  $F/b$  in Abbildung 3.1 b) ist in ihrer globalen Wirkung der Pressungsverteilung  $\sigma_H$  äquivalent. Wird der Zahn zum einen gemäß Abbildung 3.1 a) und zum anderen gemäß Abbildung 3.1 b) belastet, dann erfolgt, wie schon beschrieben, jeweils eine globale und eine lokale Reaktion des Zahnes. Nach dem Prinzip von St. Venant stimmen die globalen Verformungs- sowie Spannungsreaktionen überein. Die lokalen Verformungs- sowie Spannungsreaktionen unterscheiden sich jedoch. Wird Zustand c) von Zustand b) subtrahiert, dann bleiben ausschließlich die hier als global bezeichneten Kontaktreaktionen übrig. Diese setzen sich aus der Biege-, Schub- sowie Druckreaktion des Zahnes und seiner Einspannung zusammen. Im Falle der Zahnverformung wird die Summe dieser linearen Anteile im Weiteren einfach als Biegeverformung des Zahnes bezeichnet. Die nicht linearen lokalen Verformungs- und Spannungsreaktionen können gesondert berechnet und gemäß Abbildung 3.1 d) mit den rein globalen Reaktionen zur Zahnverformung und -spannung gemäß Abbildung 3.1 a) superponiert werden.

Die Möglichkeit der Trennung der Berechnungsmodelle nach linearen und nicht linearen Anteilen hat sich nicht nur bei Stirn- [Zi71], [UI73], [Sc73], [HS78] [Ne83], sondern auch bei Kegelrädern [Ne83], [Vi91], [WCN97], [Ko09] bewährt, um besonders effektive Zahnkontaktsimulationsmethoden auf Basis eines Linienkontaktmodells entwickeln zu können. Auch Baumann [Ba91] nutzte diese Möglichkeit, um die Zahnkontaktsimulation für Kegelräder mit BECAL auf einem Linienkontaktmodell aufzubauen.

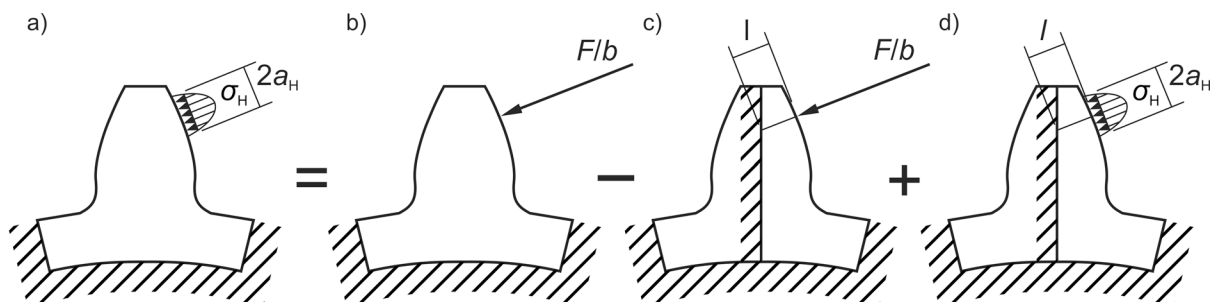


Abbildung 3.1: Aufteilung der Zahnverformungen und -spannungen in lineare und nicht lineare Anteile, Abbildung in Anlehnung an [Ve81]

### 3.3 Annahmen für die Formulierung des Zahnkontaktproblems

Um das Zahnkontaktproblem im Rahmen einer Zahnkontaktsimulation lösen zu können, muss eine entsprechende mathematische Formulierung entwickelt werden. Dabei wird eine möglichst effiziente Formulierung mit geringem Modellierungs-, Ressourcen- und Berech-

nungsaufwand angestrebt. Für einen guten Kompromiss aus Effizienz und Ergebnisgüte hat es sich bewährt, von den folgenden Annahmen bei der mathematischen Formulierung des Zahnkontaktproblems auszugehen:

1. Der Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung ist linear-elastisch im Sinne des Hookeschen Gesetzes.
2. Es werden kleine Verformungen gegenüber den Kontaktkörperabmessungen vorausgesetzt und die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System aufgestellt.

Abbildung 3.2 veranschaulicht die Bedeutung dieser Annahme für den Zahnkontakt am Beispiel des Punktkontaktes zweier Zähne. Die Normalenrichtung sowie die gemeinsame Tangentialebene der Kontaktpunktpaare bleiben während der Verformung unverändert. Die Verschiebung des Kontaktpunktpaares entlang der Tangentialebene vom unverformten Zustand  $P$  hin zum verformten Zustand  $P'$  wird vernachlässigt. Theoretische Untersuchungen von Ziegler [Zi71] zeigten, dass sich der Einfluss der Hebelarmveränderung auf die Zahnverformung mit weniger als 2 % auswirkt. Zusätzlich besitzen die Abweichungen für Zahn sowie Gegenzahn unterschiedliche Vorzeichen und heben sich daher teilweise gegenseitig auf. Folglich ist der gute Näherungscharakter dieser Annahme bestätigt.

3. Der Einfluss der Reibung auf die Lösung des Zahnkontaktproblems und somit auf die Lastverteilung wird vernachlässigt.

Die Gleitbewegungen im Zahnkontakt haben zur Folge, dass neben der Normalkraft auch eine Reibkraft wirkt. Vijayakar [Vi87] berücksichtigte den Einfluss der Reibung bei der Lösung des Zahnkontaktproblems und damit auf die Lastverteilung. Er stellte fest, dass die Auswirkungen sehr gering sind. Dies kann dadurch erklärt werden, dass sich die resultierende Kraft aus Normalkraft und Reibkraft nur geringfügig von der reibungsfreien Normalkraft unterscheidet [Li96]. Typischerweise beträgt der Unterschied weniger als 5 %. Schon dies alleine zeigt, dass eine Vernachlässigung möglich sein könnte. Im Einzeleingriffsgebiet von Geradverzahnungen wirkt sich dieser Unterschied nur auf die Zahnsteifigkeit und nicht auf die Lastverteilung aus. Abbildung 3.3 zeigt, dass die Reibungskräfte ( $F_{R1,2}$ ) am Eingriffsbeginn und -ende entgegengesetzt wirken und sich demzufolge im Mehrfacheingriffsgebiet und im Einzeleingriffsgebiet bei Schrägverzahnungen teilweise aufheben. Deshalb hat es sich auch bei Kegelradverzahnungen bewährt, tribologische Einflüsse auf die Flankentragfähigkeit [Wi08], [Ki12], [Ho13] oder für die Bestimmung des Wirkungsgrades [SLH03], [Ko09] aufbauend auf der reibungsfreien Lastverteilung zu berücksichtigen. Auch Vijayakar [Vi87] weist als Schlussfolgerung seiner theoretischen Untersuchungen auf diese mögliche Vorgehensweise hin.

Unter Voraussetzung dieser Annahmen können alle für die Zahnkontaktsimulation auf Basis der Einflusszahlenmethode notwendigen Informationen für den unverformten Zustand berechnet werden. Dies erfolgt einmalig im Vorfeld der Zahnkontaktsimulation unter Last, auf-

bauend auf einer lastfreien Abwälzsimulation, für die sogenannten potenziellen Zahnkontakte.

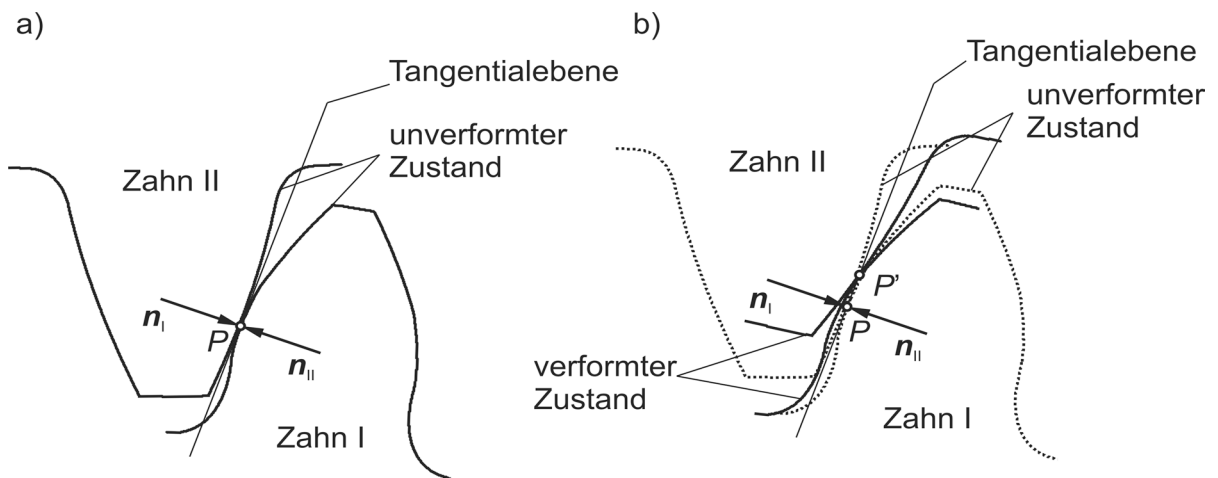


Abbildung 3.2: Veränderung der Lage eines Kontaktpunktpaares durch Verformung a) Lage im unverformten Zustand b) Lage im verformten Zustand

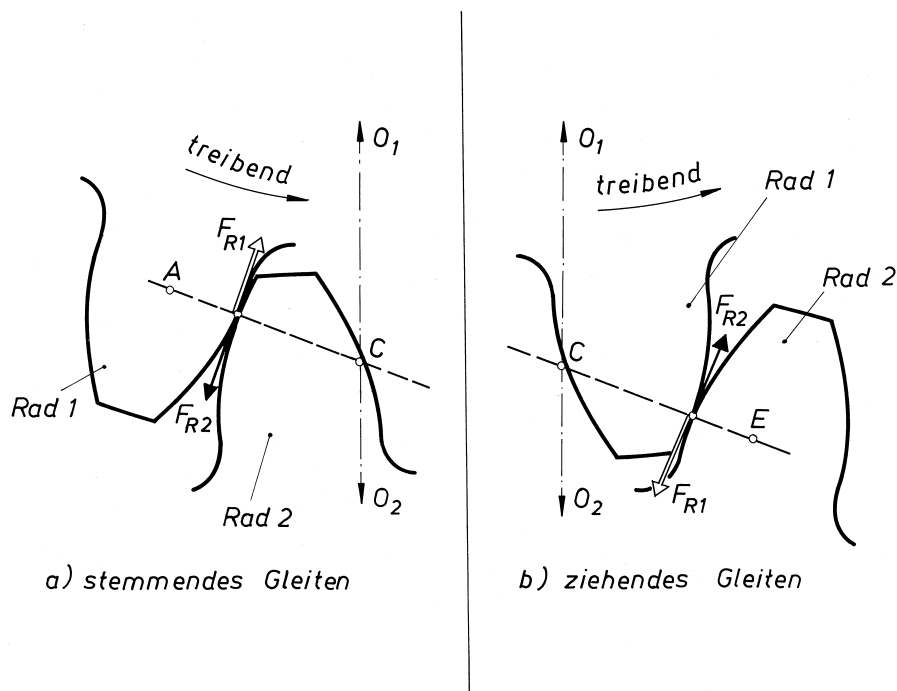


Abbildung 3.3: Orientierung der Reibungskräfte am Eingriffsbeginn und -ende, Abbildung entnommen aus [Li96]

### 3.4 Bestimmung der potenziellen Zahnkontakte

Den Ausgangspunkt der Zahnkontaktsimulation unter Last bildet die lastfreie Abwälzsimulation auf Basis der dreidimensionalen Zahngeometrie. Die Aufgabe besteht in der Berechnung des potentiellen Eingriffsfeldes einer Zahnradpaarung. Dieses enthält alle potentiellen Zahnkontakte, die unter Last ausgebildet werden können.

Um die dreidimensionale Zahngeometrie einer mathematischen Weiterverarbeitung in der Zahnkontaktsimulation zugänglich zu machen, werden die z.B. durch einen Flankengenerator bereitgestellten Punktwolken der Zahngeometrie (siehe Abschnitt 2.2) als Stützstellen für die Entwicklung einer Flächenbeschreibung verwendet. In BECAL geschieht dies über die Approximation mittels Ausgleichsflächen. Bei der Ausgleichsflächenbeschreibung [Du94] werden Zahnflanke und Zahnfuß getrennt betrachtet und Tensorprodukt-Bezier-Flächen auf Basis von Bernsteinpolynomen mindestens 5. Grades gebildet. Die Höhe des Grades der Bernsteinpolynome kann für spezielle Fälle, wie z. B. eine starke Verwindung des Ritzelzahns, angepasst werden. Notwendig kann eine Erhöhung des Polynomgrades bis zum Grad 10 sein, wenn durch die Ausgleichsflächen reale, ggf. geschädigte Zahnflanken, von denen 3-D-Messergebnisse vorliegen, beschrieben werden sollen [Ho13]. Eine Vielzahl von vergleichenden Untersuchungen [LBB02] hat gezeigt, dass Tensorprodukt-Bezier-Flächen auf Basis von Bernsteinpolynomen eine sehr gute Näherung der tatsächlichen Flächen innerhalb des Gitternetzes der exakt berechneten oder vorgegebenen Stützpunkte darstellen.

Die lastfreie Abwälzsimulation wird unter Verwendung der durch die Ausgleichsflächen beschriebenen Zahnflanken im Ritzelsystem ausgeführt. Dabei wird für die Berechnung des Eingriffsfeldes, welches alle potenziellen Zahnkontakte enthält, der kontinuierliche Abwälzprozess durch diskrete Eingriffsstellungen angenähert. Für jede Eingriffsstellung wird der Ritzeldrehwinkel so berechnet, dass sich die Flanken der im Eingriff befindlichen Zahnpaare mindestens in einem Punkt berühren und keine Flankendurchdringung stattfindet. Um einen besonders effizienten Berechnungsablauf zu ermöglichen, wird von einem Linienkontaktmodell ausgegangen. Damit setzt sich das Eingriffsfeld aus den potenziellen Traglinien der jeweils im Eingriff befindlichen Zahnpaare aller Eingriffsstellungen zusammen. Um die potenziellen Traglinien berechnen zu können, erfolgt eine Unterteilung des Tellerrades in Zahnabschnitte (Berücksichtigung des Längsgleitens bei Hypoidverzahnungen erfolgt über das Ritzel). Für jede Profillinie einer Zahnabschnittsmitte wird der Zahnhöhenpunkt mit dem minimalen Klaffmaß im Stirnschnitt berechnet (im Weiteren als potenzieller Kontaktpunkt bezeichnet). Die potenzielle Traglinie für jeden im Eingriff befindlichen Zahn wird aus diesen potenziellen Kontaktpunkten gebildet (siehe Abbildung 3.4). Bei der Berechnung der potenziellen Traglinien des Eingriffsfeldes werden auch die Traglinienanteile einbezogen, welche durch die Verformung der Zähne zusätzlich zu den Teilstücken in Eingriff kommen können (Voreingriff), die das Verzahnungsgesetz rein kinematisch erfüllen. Neben dem Voreingriff wird auch die Begrenzung des Eingriffsfeldes durch die tatsächliche Zahnberandung berücksichtigt (siehe Abbildung 3.4). Die Beschreibung des Eingriffsfeldes auf Basis dieser Methode erfolgt also hinsichtlich der Eingriffsstellungen und der Zahnbreitenrichtung diskret und in

Zahnhöhenrichtung exakt. Dies bewirkt einen erheblichen Vorteil in der Genauigkeit der Zahnkontaktfindung.

Als wichtige Ausgangsgrößen für die Zahnkontaktsimulation auf Basis der Einflusszahlenmethode werden für die potenziellen Kontaktpunkte alle geometrischen Informationen berechnet. Dazu gehören die

- Flankennormalenvektoren
- wirkenden Radien
- Klaffmaße
- Flankenkrümmungen
- Positionen der potenziellen Kontaktpunkte auf den Zahnflanken von Ritzel und Tellerad.

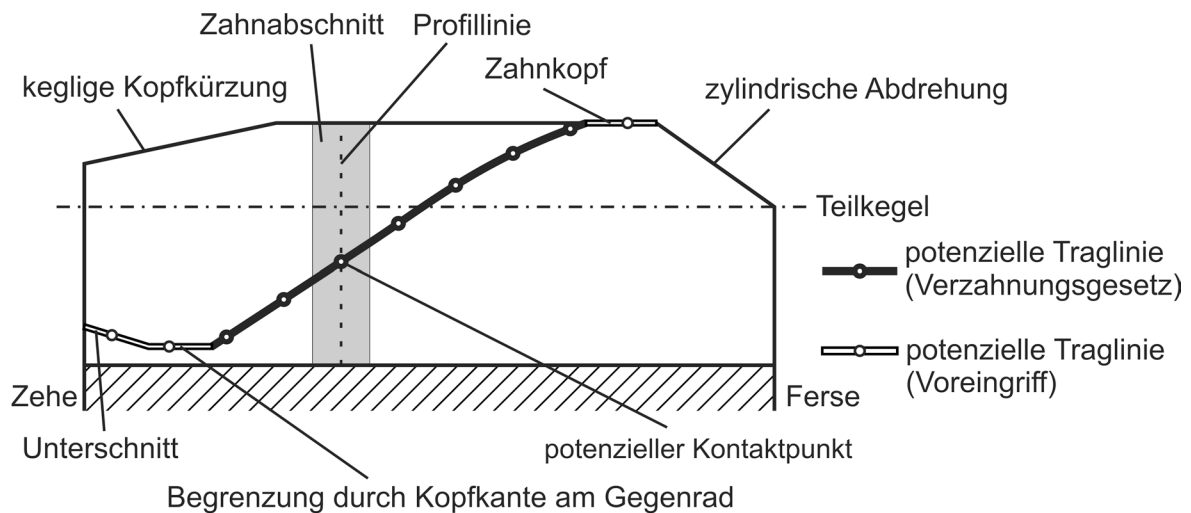


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der potenziellen Traglinie und Zahnbreitendiskretisierung in Zahnabschnitte mit Profillinien, Abbildung in Anlehnung an [LB97]

### 3.5 Einflusszahlenmethode

Für die Lösung des Zahnkontaktproblems wird die verallgemeinerte Zahnverformung an den Positionen der potenziellen Kontaktpunkte und deren Verformungswechselwirkung benötigt. Liegen lineare Beziehungen im Sinne des Hookeschen Gesetzes vor, kann der Zusammenhang zwischen einer Bauteilbelastung und den resultierenden Verformungen bzw. Beanspruchungen an beliebigen Bauteilpositionen in Form von Einflusszahlen formuliert werden [GH89]. Da zunächst die Verformungseinflusszahl (Kraft-Verformungseinflusszahl) von Interesse ist, soll die Einflusszahlenmethode anhand dieser beschrieben werden, sie gilt aber sinngemäß für alle Belastungs- und Beanspruchungsarten. Auch bei der Zahnfußspannungsberechnung, die auf die Lösung des Zahnkontaktproblems folgt, wird die Einflusszahlenmethode in Form von Zahnfußspannungseinflusszahlen eingesetzt.



Der Einfluss einer wirkenden Kraft  $F_j$  an der Stelle  $j$  eines Bauteils auf die Verformung  $f_i$  an der Stelle  $i$  eines Bauteils soll durch einen Faktor  $a_{ij}$  ausgedrückt werden. Der Faktor  $a_{ij}$  ergibt sich gemäß Gleichung (3.1) als Quotient der Verformung  $f_i$  an der Stelle  $i$  und der wirkenden Kraft  $F_j$  an der Stelle  $j$ .

$$a_{ij} = \frac{f_i}{F_j} \quad (3.1)$$

Soll der Einfluss von  $n$  Kräften auf die Verformung an der Stelle  $i$  ausgedrückt werden, ergibt sich die Summe nach Gleichung (3.2).

$$f_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \cdot F_j) \quad (3.2)$$

Sollen die Einflüsse von  $n$  Kräften auf  $n$  Verformungen abgebildet werden, dann ergeben sich diese aus dem Produkt einer  $n \times n$  Matrix von Einflusszahlen mit einem Kraft-Vektor der Größe  $n$  nach Gleichung (3.3).

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Besteht nun die Aufgabe, für ein komplexes Bauteil unter der Wirkung von  $n$  Kräften an jeweils denselben Stellen  $j$ ,  $n$  Verformungen an jeweils denselben Stellen  $i$  wiederholt für verschiedene Kraftkombinationen zu berechnen, dann ist die Einflusszahlenmethode ein vergleichsweise schnelles Verfahren, da die  $n^2$  Einflusszahlen nur einmal berechnet werden müssen. Aufgrund der Symmetrie der Einflusszahlen  $a_{ij} = a_{ji}$  wird der Berechnungsaufwand auf  $0,5 \cdot n \cdot (n+1)$  reduziert.

### 3.6 Lösung des reibungsfreien Zahnkontaktproblems

Die geschlossene analytische Lösung des allgemeinen reibungsfreien Zahnkontaktproblems ist, wie schon beschrieben, nicht möglich. Deshalb wird eine numerische Lösung auf Basis der Einflusszahlenmethode eingesetzt. Um die entsprechenden Algorithmen formulieren zu können, müssen zunächst die physikalischen Randbedingungen des Zahnkontaktes mathematisch beschrieben werden. Die Beschreibung baut auf dem gemeinsamen Kontaktgebiet auf, in dem sich die Zahnflanken der Zahnräder potenziell berühren. Dieses ist bereits aus der lastfreien Abwälzsimulation bekannt und wird durch die potenziellen Traglinien und ihre potenziellen Kontaktpunkte gebildet. Abbildung 3.5 zeigt einen voll ausgebildeten Linienkontakt über der Traglinie eines Zahnes sowie die im Folgenden erläuterte Diskretisierung des potenziellen Kontaktgebietes. Dieses wird so in diskrete Einzelkontakte unterteilt (Kontaktelemente), dass die potenziellen Kontaktpunkte jeweils deren geometrische Schwerpunkte bilden. Ein Kontaktelement besitzt aufgrund des verwendeten Linienkontaktmodells eine

Ausdehnung in Form einer Linie, bei einer allgemeineren Formulierung kann dies auch eine Fläche sein. Für ein Kontaktelement müssen die folgenden Größen für Schwerpunkt bzw. Kontaktpunkt bekannt sein:

- lastloser Abstand der Kontaktflächen in Kontaktnormalenrichtung  $f_{AKi}$  (Anfangsklaffmaß)
- Gesamtverformungseinflusszahl  $e_{ij}$

Die Kontaktkräfte wirken über den Kontaktelementen als konstante Linien- oder Flächenlast. Der Zahnkontakt wird als Summe der potenziellen Einzelkontakte dargestellt, die durch die Kontaktelemente abgebildet werden. Dabei ist es zweckmäßig, die geometrischen Abmessungen des Kontaktelements aus der Formulierung zu kürzen. Damit wirkt im Schwerpunkt des Kontaktelements eine resultierende Punktlast. Die zu einer Punktlast gehörende Einflusszahl analog Gleichung (3.1) ermöglicht eine uneingeschränkte, einfache Superposition von Teilverformungen, die auf unterschiedlicher Berechnungsbasis ermittelt wurden. Da hier von einem Linienkontaktmodell ausgegangen wird, müssen die linearen Biegeverformungen des Zahnes und die nicht linearen Kontaktverformungen getrennt behandelt werden. Die jeweiligen Biegeverformungseinflusszahlen  $a_{B1ij}$  und  $a_{B2ij}$  verkörpern die Summe aller linearen Biegeteilverformungen von Rad I und Rad II, die bei der Berechnung berücksichtigt werden sollen. Die nicht linearen Kontaktverformungseinflusszahlen  $e_{Hi}$  werden für die Kontaktpunkte ohne Wechselwirkung erfasst. Sie werden für eine fiktive Anfangsbelastung berechnet und linearisiert [Ba91]. Die Gesamtverformungseinflusszahl  $e_{ij}$  ist die Summe aller Einflusszahlen für einen potenziellen Kontaktpunkt gemäß Gleichung (3.4).

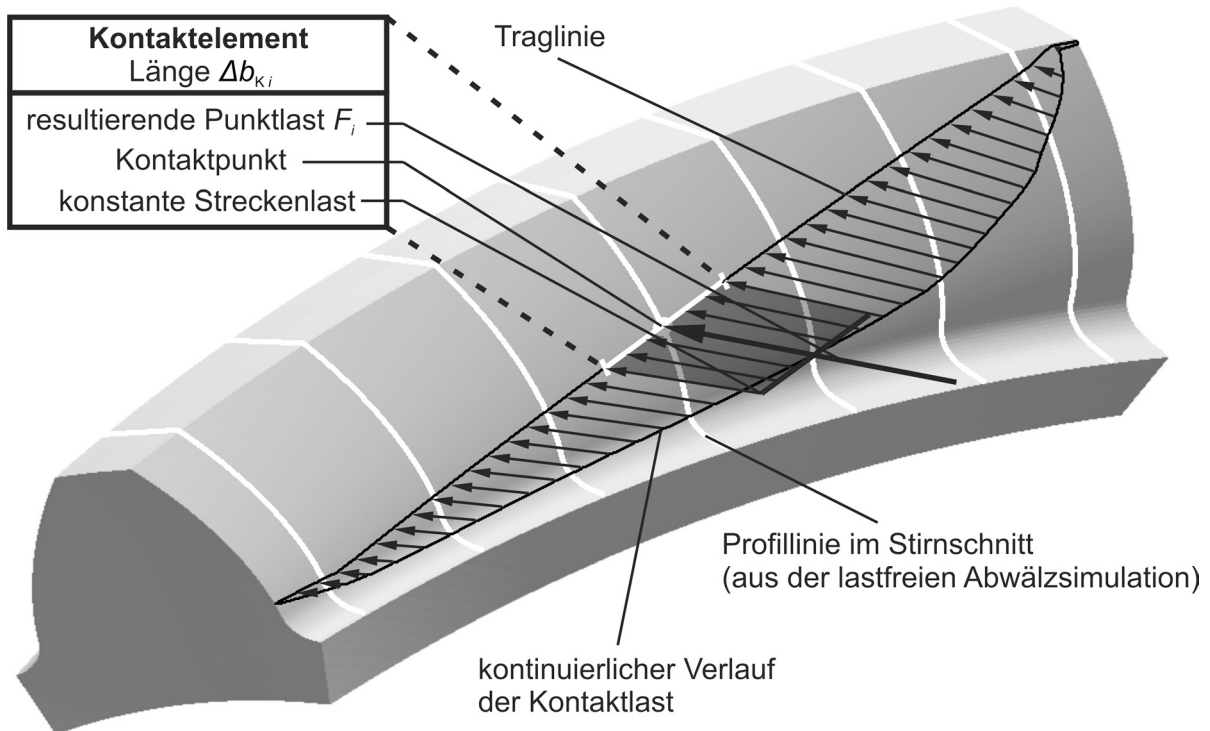


Abbildung 3.5: Darstellung eines Kontaktelementes für Linienkontakt

$$e_{ij} = \begin{cases} a_{B I ij} + a_{B II ij}, & i \neq j \\ a_{B I ij} + a_{B II ij} + e_{H ij}, & i = j \end{cases} \quad (3.4)$$

Auf Basis des so formulierten Kontaktelements können die folgenden physikalischen Randbedingungen definiert werden:

1. Gemäß dem Prinzip von St. Venant wird davon ausgegangen, dass in ausreichender Entfernung vom Kontaktgebiet immer ein unbeeinflusstes bzw. als starr angenommenes Gebiet existiert.
2. Die im Kontaktbereich wirkende Kraftverteilung muss der äußeren Belastung das Gleichgewicht halten.
3. Die Kontaktkörper müssen sich im Kontakt berühren und dürfen sich nicht durchdringen.
4. In Kontaktnormalenrichtung können keine Zugkräfte wirken, sondern nur Druckkräfte.

Mit den Kontaktelementen und aufgestellten Kontaktbedingungen lässt sich das Zahnkontaktproblem mathematisch beschreiben. Diese Beschreibung wird aus Gründen der Übersichtlichkeit am einfachen Beispiel des ebenen Punktkontaktes in Abbildung 3.6 hergeleitet. In diesem Fall ist Rad I das treibende Zahnrad und Rad II das getriebene Zahnrad. Betrachtet wird eine Eingriffsstellung mit zwei potenziellen Kontaktpunktpaaren  $P_1$  und  $P_2$ . In der lastlosen Ausgangsposition Abbildung 3.6 a) weisen die potenziellen Kontaktpunktpaare ein Anfangsklaffmaß  $f_{AKi}$  auf, wobei sich die Räder im potenziellen Kontaktpunktpaar  $P_1$  berühren und  $f_{AK1}$  damit Null ist. In Abbildung 3.6 b) wird angenommen, dass Rad II eine feste Einspannung besitzt, die gemäß Kontaktbedingung 1 in ausreichender Entfernung wirkt und den Zahnkontakt nicht beeinflusst. Als äußere Belastung soll das Drehmoment  $T_1$  von Rad I wirken. Gemäß Kontaktbedingung 2 steht die Summe aus dem Produkt der Kontaktkräfte  $F_i$  in den Kontaktpunkten  $P_i$  und den jeweils wirkenden Radien  $r_{WR1i}$  von Rad I mit dem Drehmoment  $T_1$  im Gleichgewicht (Gleichung (3.5)). Der wirkende Radius ist der Faktor, dessen Produkt mit der Normalkraft das Drehmoment ergibt. Bei Stirnradverzahnungen und im hier betrachteten Beispiel entspricht der wirkende Radius  $r_{WR}$  dem Grundkreisradius  $r_b$ , das heißt, alle wirkenden Radien sind gleich. Im geometrisch allgemeinen Fall der Kegelrad- und Hypoidverzahnungen kann für jeden Kontaktpunkt ein anderer wirkender Radius vorliegen. Die Anzahl der kontaktierenden Kontaktpunktpaare wird mit  $n$  bezeichnet.

$$T_1 = \sum_{i=1}^n (r_{WR1i} \cdot F_i) \quad (3.5)$$

Auf Basis der Kontaktbedingung 1 kann eine Gesamtverschiebung für das belastete Rad I definiert werden, die sich aus der Summe der Zahnverformung und dem Anfangsklaffmaß ergibt und für alle Kontaktpunkte konstant ist. Da es sich im Falle des Zahnkontaktes um ein rotatorisches Kontaktproblem handelt, wird die Gesamtverschiebung in Form einer Starrkör-

perrotation um den Winkel  $\varphi_{z1}$  ausgedrückt. Die Gesamtverformung für ein Kontaktpunkt paar  $f_{P_i}$  wird gemäß Gleichung (3.2) mit Gleichung (3.6) ausgedrückt.

$$f_{P_i} = \sum_{j=1}^n (e_{ij} \cdot F_j) \quad (3.6)$$

Das Restklaffen zwischen den potenziellen Kontaktpunktpaaren nach der Belastung und vollständigen Ausbildung des Kontaktes soll hier mit  $f_{RK_i}$  bezeichnet werden. Für ein potenzielles Kontaktpunkt paar ergibt es sich gemäß Gleichung (3.7).

$$f_{RK_i} = f_{P_i} + f_{AK_i} - (\varphi_{z1} \cdot r_{WR1i}) \quad (3.7)$$

Wenn Rad I um die Starrkörperrotation  $\varphi_{z1}$ , mit eingefrorenen Verformungen zurückgedreht wird (siehe Abbildung 3.6 c)), dann wird der zuvor beschriebene und in Gleichung (3.7) ausgedrückte Sachverhalt sichtbar. Gemäß Kontaktbedingung 3 wird vorausgesetzt, dass das Restklaffen  $f_{RK_i}$  für kontaktierende Kontaktpunktpaare Null beträgt. Unter dieser Voraussetzung und mit den Gleichungen (3.4) bis (3.7) lässt sich das Zahnkontaktproblem in Form des linearen Gleichungssystems (3.8) mathematisch beschreiben. Ergibt die Lösung des Gleichungssystems negative Kräfte, dann bedeutet dies, dass an dieser Stelle eine Zugkraft wirken müsste, um die 3. Kontaktbedingung zu erfüllen. Da dies gemäß der 4. Kontaktbedingung nicht zulässig ist, kann an dieser Stelle kein Kontakt stattfinden und diese Zeilen und Spalten werden aus dem Gleichungssystem gestrichen. Das so entstandene Gleichungssystem wird erneut gelöst. Diese Iteration wird solange wiederholt, wie es negative Kräfte  $F_i$  im Kraftvektor gibt. Mit jedem Iterationsschritt werden die Kontaktverformungseinflusszahlen  $e_{H_i}$  wegen ihrer Nichtlinearität und die zugeordneten Verformungseinflusszahlen  $e_{ij}$  (für  $i = j$ ) entsprechend der aktuellen Kontaktkräfte in einem separaten Iterationsschritt neu berechnet. Das Anfangsklaffmaß  $f_{AK_i}$  jedes Abschnitts sowie das zu übertragende Ritzeldrehmoment  $T_i$  werden als inhomogene Glieder berücksichtigt. Die Zahnflanken nähern sich in den potenziellen Kontaktpunkten um  $\varphi_{z1} \cdot r_{WR1i}$  an.

$$\begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} & -r_{WR11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} & -r_{WR1n} \\ r_{WR11} & \dots & r_{WR1n} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \\ \varphi_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{AK1} \\ \vdots \\ -f_{AKn} \\ T_1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Auf Basis der mit diesem numerischen Verfahren erhaltenen Lastverteilung können im Anschluss die Kontakt- und Zahnfußspannungsverteilungen berechnet werden.

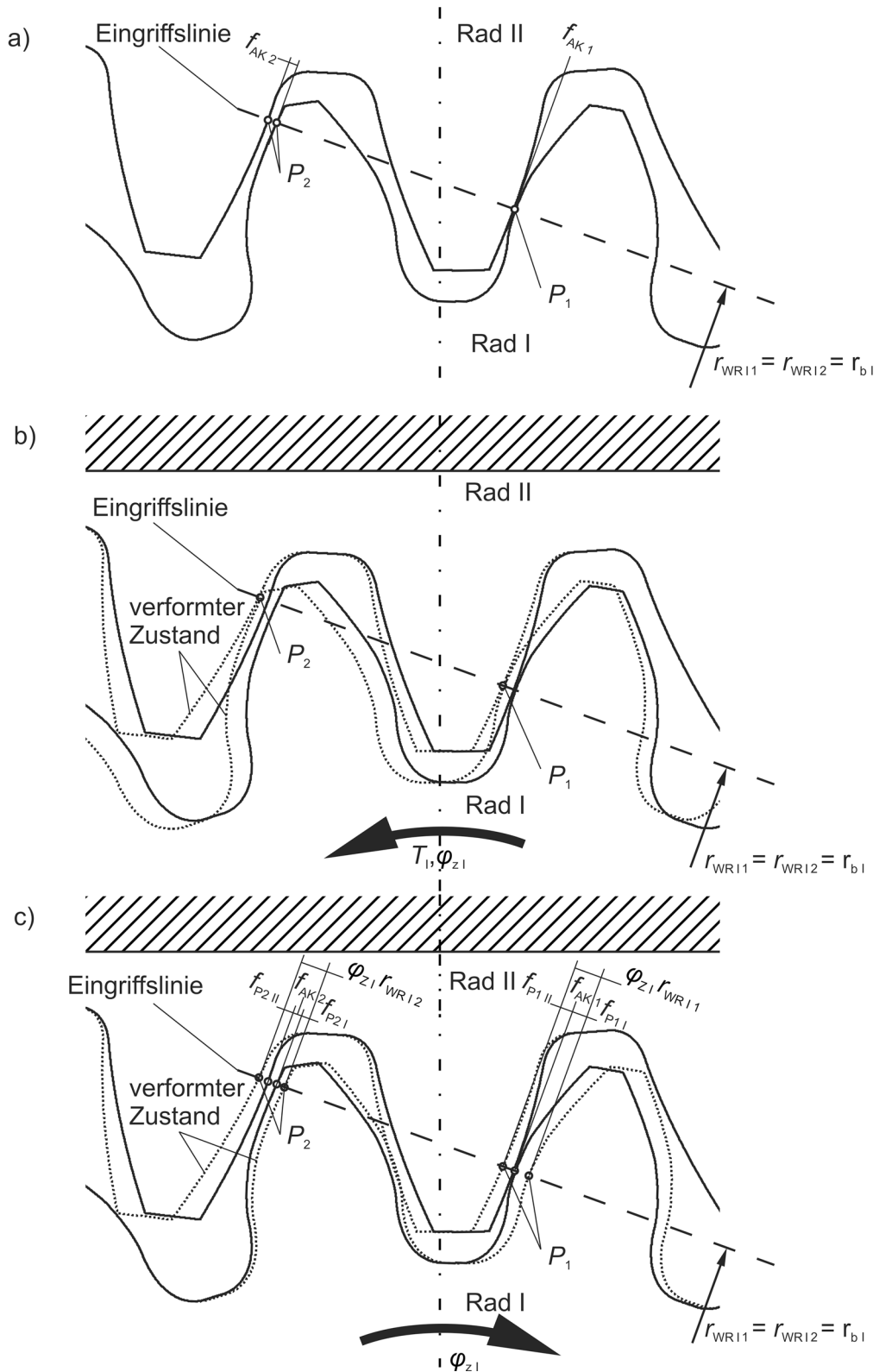


Abbildung 3.6: Verformung und Starrkörperrotation unter Wirkung eines Drehmoments am Rad I; a) Ausgangszustand; b) Drehmomentenwirkung und resultierende Starrkörperrotation; c) Rückdrehung der eingefrorenen Verformung um die resultierende Starrkörperrotation

### 3.7 Radkörpererfluss

Bekanntlich hat die Steifigkeit des an den Zahn anschließenden Teiles des Radkörpers einen großen Einfluss auf das Zahnkontaktverhalten sowie die Tragfähigkeit und muss deshalb berücksichtigt werden [Li96], [Ku99], [Sc10].

Bei Kegelrädern in Leistungsgetrieben werden die Ritzel und bei kleinen Übersetzungsverhältnissen auch die Tellerräder typischerweise als Vollräder ausgeführt. Mit größer werdendem Übersetzungsverhältnis nähert sich die Tellerradgeometrie zunehmend einem Teller an. In diesem Fall sorgen z.B. Randbedingungen aus Welle-Nabe-Verbindungen, der Wärmebehandlung und auch Überlegungen zur Tragfähigkeit dafür, dass der Zahnkranz ausreichend gestützt und damit relativ steif ausgeführt wird. Die bei Tellerrädern relevanten Biegeverformungen, besonders im Schubbetrieb, müssen nicht über die Verformungseinflusszahlen Berücksichtigung finden, sondern können gemäß Abschnitt 2.1 als Relativlageänderung erfasst werden. In dieser Arbeit wird deshalb vorausgesetzt, dass die Radkörpergeometrie in ihrer Wirkung auf den Zahneingriff der einer Vollradausführung vergleichbar ist. Eine Erweiterung auf andere Radkörperformen ist aber bei Bedarf im Rahmen der Einflusszahlenmethode separat möglich (siehe z.B. [Ku99]).

### 3.8 Wechselwirkung zwischen den Zähnen

Über das Gleichungssystem (3.8) können alle Verformungseinflüsse berücksichtigt werden, auch die Wechselwirkung zwischen den Zähnen (im Weiteren als Zahnwechselwirkung bezeichnet). Die Verformung der Nachbarzähne gegenüber der des belasteten Zahnes wurde bereits durch Ziegler [Zi71] experimentell untersucht. Über Messungen konnte er eine nennenswerte Größenordnung der Verformung der Nachbarzähne feststellen. Bong [Bo90] gibt an, dass der Zahnwechselwirkungseinfluss bis zu 30 % der Verformung am Kraftangriffsort betragen kann.

Bei einer Berücksichtigung der Zahnwechselwirkung steigt allerdings die Anzahl der zu berechnenden Einflusszahlen gegenüber einer wechselwirkungsfreien Betrachtung signifikant. Zusätzlich erhöht die dichtere Belegung des Gleichungssystems die Lösungszeit und die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte bis zur Konvergenz. Im Sinne einer effizienten Lösung des Kontaktproblems ist deshalb eine Vereinfachung durch Vernachlässigung der Zahnwechselwirkung erstrebenswert und soll auf Basis einer Fehlerabschätzung ermöglicht werden. Von Interesse ist die Größenordnung des Vereinfachungsfehlers, der bei der Berechnung der maximalen Kontakt- sowie Zahnfußspannung zu erwarten ist.

Wie schon unter Abschnitt 2.3 aufgeführt, ist es durchaus eine übliche Vorgehensweise bei der Lösung des Kontaktproblems, die Zahnwechselwirkung zu vernachlässigen. Die zuverlässige Anwendung dieser Lösungen ist in der Regel durch experimentelle Untersuchungen oder einen Abgleich mit der Praxis belegt. Deshalb scheint es plausibel, davon auszugehen, dass eine Vernachlässigung der Zahnwechselwirkung zu Unterschieden führt, die kleiner

sind als experimentell z.B. in einem Getriebevolllasttest bzw. Tragfähigkeitsversuch nachweisbar. Damit wäre es vertretbar, im Rahmen der Lösung des Kontaktproblems unter Verwendung näherungsweise berechneter Verformungseinflusszahlen die Zahnwechselwirkung zu vernachlässigen. Anhand einer theoretischen Betrachtung einer geradverzahnten Stirnradpaarung ohne Breitenmodifikation, aber höhenballig ausgeführt, wird diese Annahme überprüft. Wie bereits für Kegelradverzahnungen festgelegt (vgl. Abschnitt 3.7), wird auch hier von Vollrädern ausgegangen.

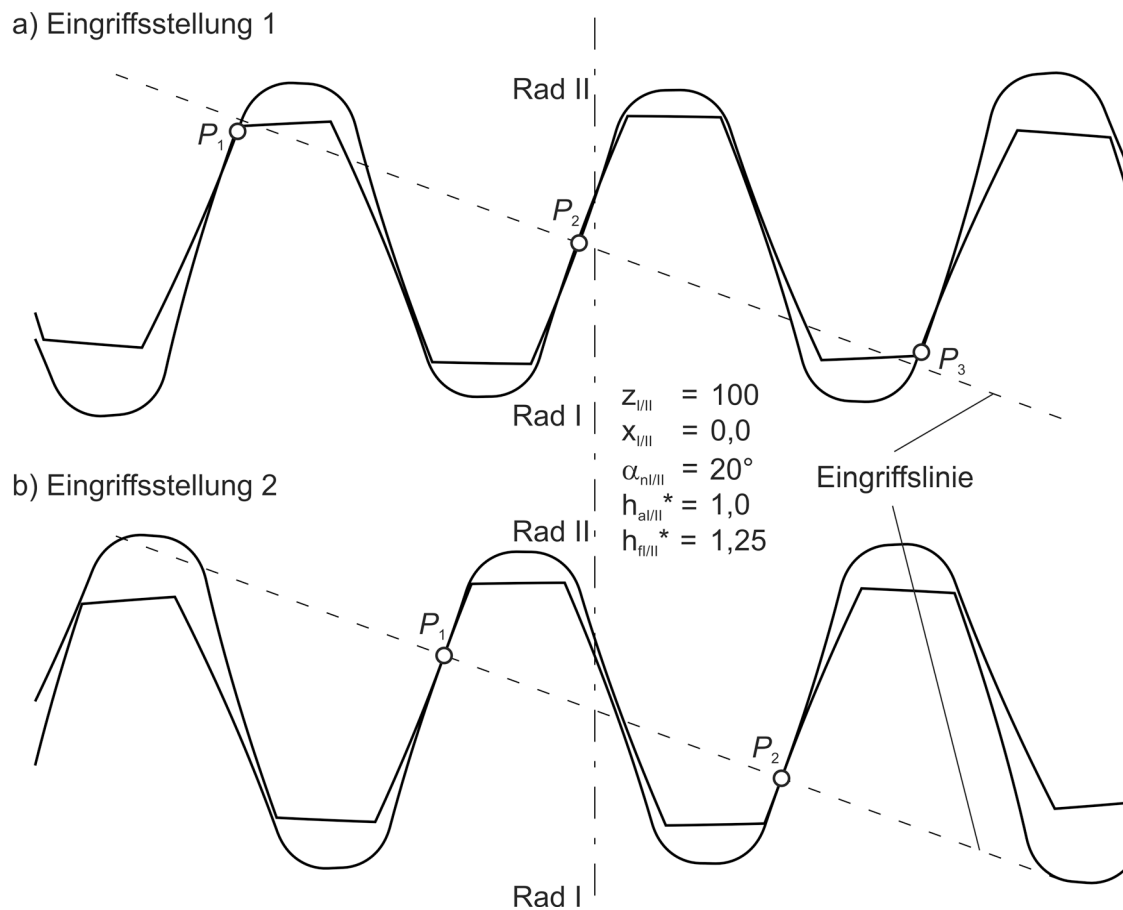


Abbildung 3.7: Zahnkontakt einer Radpaarung mit Übersetzung 1:1; a) Eingriffsstellung mit maximaler Kontaktspannung im Kontaktpunktpaar  $P_2$ ; b) Eingriffsstellung mit maximaler Fußspannung am Rad II für den Zahn mit dem Kontaktpunktpaar  $P_2$

Der Einfluss der Zahnwechselwirkung ist umso größer, je mehr Zähne sich gleichzeitig im Eingriff befinden, deshalb liegt der folgenden Untersuchung eine Radpaarung mit jeweils  $z = 100$  Zähnen an Rad I und Rad II zugrunde (siehe Abbildung 3.7). Die Bewertung soll auf Basis der Lösung des Kontaktproblems unter Anwendung des Gleichungssystems (3.8) und der ausschließlichen Nutzung von Biegeverformungseinflusszahlen für den EVZ erfolgen. Die Biegeverformungseinflusszahlen mit Berücksichtigung der Zahnwechselwirkung wurden für die Eingriffsstellung 1 und 2 aus Abbildung 3.7 unter Nutzung der FEM berechnet. Für Eingriffsstellung 1 wird das Kontaktproblem im EVZ damit unter Verwendung des übersichtlichen Gleichungssystems (3.9) gelöst. Für Eingriffsstellung 2 ergibt sich entsprechend ein um eine Zeile sowie Spalte kleineres Gleichungssystem. Abbildung 3.8 veranschaulicht exemp-

larisch mit einer skalierten Darstellung der FEM-Verformungsergebnisse die Zahnwechselwirkung bei einem Kraftangriff an der Stelle  $P_2$  in Eingriffsstellung 1.

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & -r_{WR11} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & -r_{WR12} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & -r_{WR13} \\ r_{WR11} & r_{WR12} & r_{WR13} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \varphi_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{AK1} \\ -f_{AK2} \\ -f_{AK3} \\ T_1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

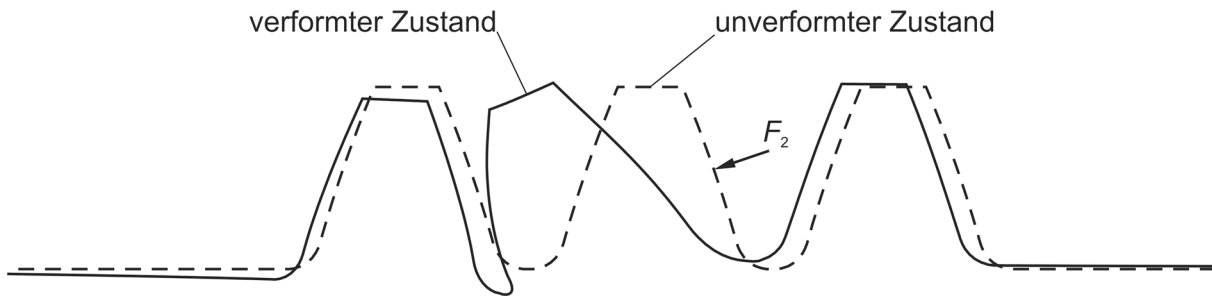


Abbildung 3.8: Skalierte Darstellung der Zahnwechselwirkung auf Basis einer FEM-Verformungsberechnung für einen Kraftangriff am Kontaktpunkt  $P_2$  in Eingriffsstellung 1

In Eingriffsstellung 1, mit drei Zähnen im Eingriff, tritt typischerweise die größte Kontaktspannung und in der Eingriffsstellung 2, mit zwei Zähnen im Eingriff, die größte Zahnfußspannung auf. Die Kontaktpunktpaare  $P_1$  und  $P_3$  in Eingriffsstellung 1 liegen außerhalb der Eingriffslinie und kommen durch die Verformung der Zähne zusätzlich in Eingriff (Voreingriff). Eine Betrachtung der Wechselwirkung von vier Zähnen ist nicht sinnvoll, da zum einen der Zahnwechselwirkungseinfluss gegenüber einem vierten Zahnpaar im Kontakt vernachlässigbar klein ist und zum andern die Überdeckung bei Außenverzahnungen in der Regel nicht so groß werden kann.

Die relative Abweichung zwischen der maximalen Kontaktkraft mit und ohne Berücksichtigung der Zahnwechselwirkung wird der Abschätzung der Größenordnung des Vereinfachungsfehlers zugrunde gelegt. Der Vereinfachungsfehler bezüglich der maximalen Fußspannung kann direkt durch diese relative Abweichung ausgedrückt werden, hinsichtlich der maximalen Kontaktspannung wird er über die relative Abweichung der Wurzel der Kontaktkräfte ausgedrückt. Diese Abweichungen werden im Weiteren als Zahnwechselwirkungsfehler bezeichnet. Die maximale Kontakt- und Zahnfußspannung der zahnwechselwirkungsfreien Lösung sind um den Zahnwechselwirkungsfehler kleiner, als die der Lösung mit Zahnwechselwirkungsberücksichtigung.

Bei einer abweichungsfreien Verzahnung ohne Relativlageabweichungen (konjugierter Zahnkontakt) ergibt sich ein maximaler Zahnwechselwirkungsfehler für beide Eingriffsstellungen und damit für die maximale Kontakt- sowie Zahnfußspannung von ca. -5 %.

Durch die geringere Steifigkeit in den Kontaktpunktpaaren unter Berücksichtigung der Zahnwechselwirkung tragen die Kontaktpunktpaare  $P_1$  und  $P_3$  weniger Last als unter Vernachläss-



sigung der Zahnwechselwirkung. Werden durch Flankenmodifikationen und Relativlageabweichungen die Anfangsklaffmaße so groß, dass die Kontaktpunktpaare  $P_1$  und  $P_3$  unter Berücksichtigung der Zahnwechselwirkung keinen Kontakt mehr besitzen, aber unter Vernachlässigung der Zahnwechselwirkung immer noch in Kontakt stehen, dann wird der Zahnwechselwirkungsfehler maximal. Dieser maximale Zahnwechselwirkungsfehler wird im Diagramm der Abbildung 3.9 über der Anzahl der im Eingriff stehenden wechselwirkungsfreien Zahnpaare aufgetragen. Da die maximale Zahnfußspannung in der Regel nicht in Eingriffsstellungen auftritt, in denen mehr als zwei Zähne im Eingriff sind, kann der maximale Zahnwechselwirkungsfehler für die Zahnfußspannung auf diesen Wert begrenzt werden. Damit kann der maximale Zahnwechselwirkungsfehler für Kontakt- und Zahnfußspannung jeweils mit ca. -10 % angenommen werden. Dieser Wert gilt für Vollräder, bei Radkörpergeometrieformen mit elastischen Radkränzen kann der maximale Zahnwechselwirkungsfehler von der hier geschätzten Größe abweichen.

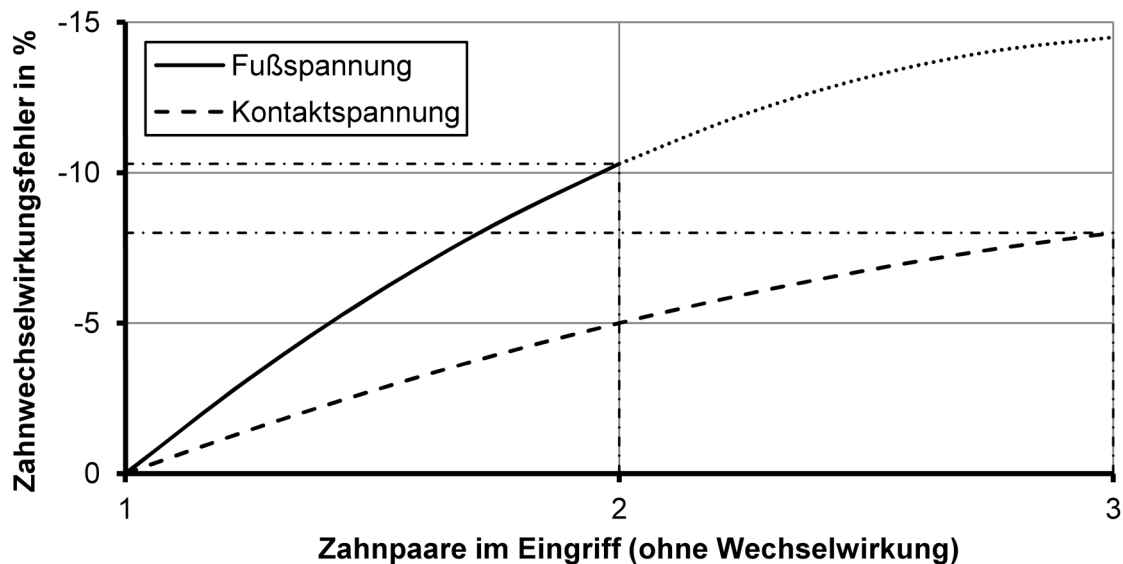


Abbildung 3.9: Maximaler Korrekturfaktor für die Umwertung der maximalen Kontakt- und Zahnfußspannung von einem wechselwirkungsfreiem Ansatz auf eine Lösung des Kontaktproblems unter Berücksichtigung der Zahnwechselwirkung

Unter Zugrundelegung dieser Bewertung wird im Sinne einer effizienten Lösung des Kontaktproblems auf eine Berücksichtigung der Zahnwechselwirkung bei der Betrachtung von Vollrädern verzichtet.



## 4 Näherungsweise Biegeverformungsberechnung

### 4.1 Vereinfachung der Verzahnungsgeometrie

Um eine möglichst übersichtliche und effiziente Berechnung der Zahnverformungen entwickeln zu können, werden die geometrische Komplexität der Verzahnung sowie des Einzelzahnes vereinfacht. Es gelten folgende Prämissen:

- Es wird nur ein einzelner Zahn betrachtet und dessen Nachbarzähne vernachlässigt.
- Der Radkörper geht in einen Halbraum über, in den der Zahn eingespannt wird.
- Die Zahnflankenlinienkrümmung wird vernachlässigt.
- Die Zahnverwindung um den Radkörper wird vernachlässigt.
- Unabhängig vom Schrägungswinkel werden die Zahnstirflächen senkrecht zu einer gedachten Ersatzzahnmittellinie angeordnet.

Diese Vereinfachung der geometrischen Komplexität wird durch eine Normalschnitttransformation eines Zahnes mit beliebiger Zahn längsgeometrie in einen geraden Ersatzzahn mit veränderlicher Zahnbreitengeometrie erreicht. Dabei werden entlang einer Referenzflankenlinie Normalschnitte berechnet und entlang einer Abwicklung selbiger angeordnet. Abbildung 4.1 zeigt diesen Vorgang grafisch. Die Referenzflankenlinie wird als Schnittkurve eines Referenzkegels mit der aktiven Zahnflanke definiert. Für die Stellen, an denen die im Stirnschnitt vorgegebenen Profillinien die Referenzflankenlinie schneiden, werden Normalschnitte berechnet. Die Position der Profillinien kann idealerweise jener entsprechen, die auch der Abwälzsimulation zugrunde liegt bzw. aus dieser resultiert. Es werden immer vollständige Normalschnitte erzeugt. Wenn bedingt durch den Schrägungswinkel das rückseitige Zahnprofil fehlen sollte, wird dieses durch Extrapolation bestimmt. Die so berechneten Normalschnitte werden entsprechend ihrer Abstände auf der Referenzflankenlinie entlang einer Geraden (Ersatzzahnmittellinie im Zahnfußbereich) angeordnet. Die geometrische Beschreibung erfolgt im  $\eta$ - $\chi_{sz}$ - $\psi$ -Ersatzzahn-Bezugssystem wie folgt:

- Der Ursprung liegt in der Zehe auf dem Zahnfußgrunddurchmesser.
- Die Abszissenachse  $\eta$  gibt die Zahnhöhenposition vom Fußgrund Richtung Zahnkopf an.
- Die Ordinatenachse  $\chi_{sz}$  gibt den Abstand von der Zehe entlang der abgewickelten Zahnbreite  $b_A$  in Richtung Ferse an.
- Die Applikatenachse  $\psi$  zeigt entsprechend der Rechten-Hand-Regel in Zahndickenrichtung.

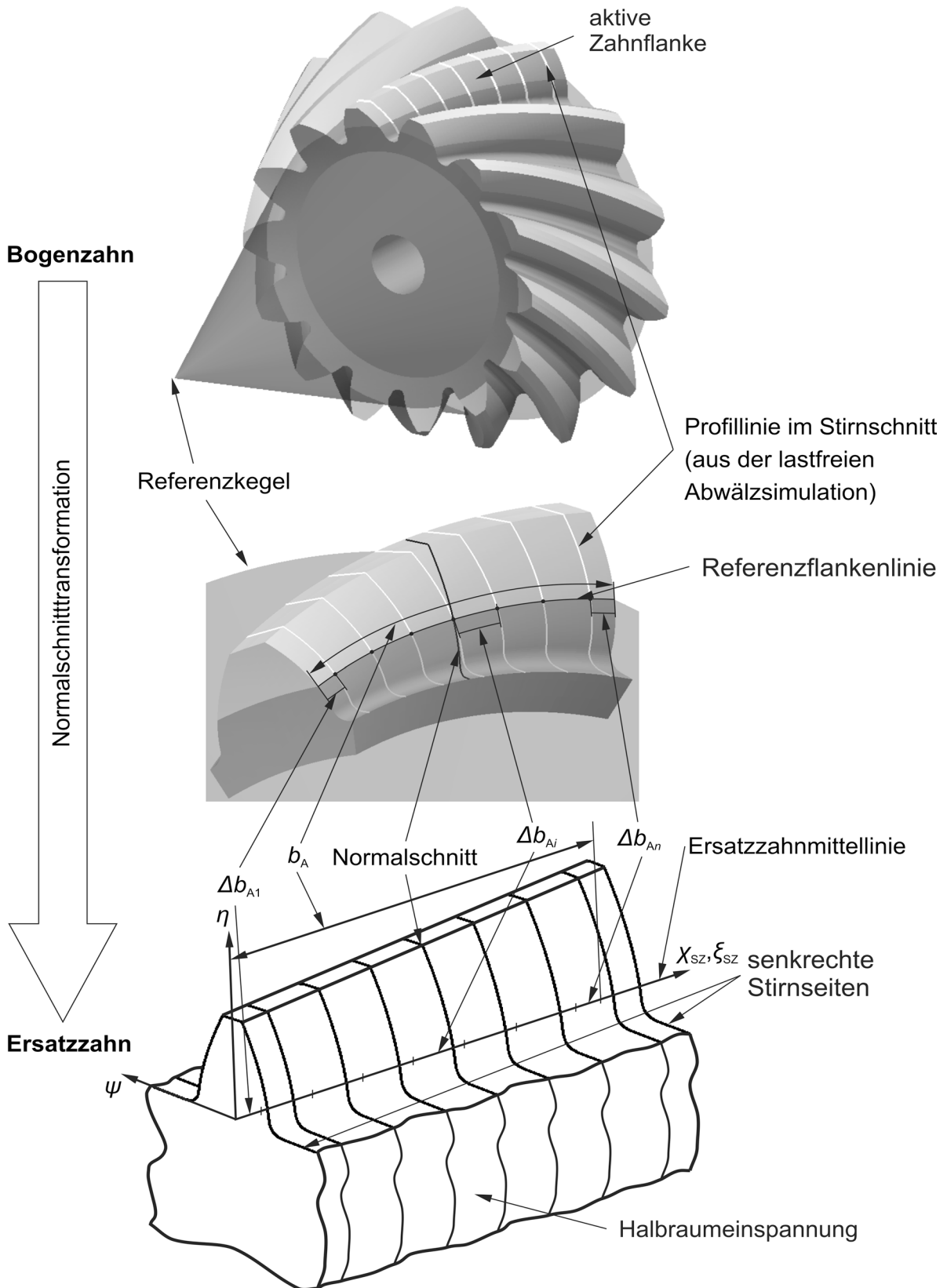


Abbildung 4.1: Normalschnitttransformation eines beliebigen Bogenzahnes in einen Ersatzgeradzahn

## 4.2 Berechnungsmethode

Gesucht wird die Biegeverformung in Kontaktnormalenrichtung eines endlich langen Zahnes unter Wirkung einer punktförmigen Einzelkraft. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass hier entsprechend Abschnitt 3.2 mit Biegeverformung die Gesamtheit der linearen Verformungsanteile aus Biegung, Schub und Druck verstanden wird. Um vollständig auf aufwendige dreidimensionale FEM-Berechnungen verzichten zu können, stellte Gajewski in [Ga86] eine Methode für die näherungsweise Berechnung der Biegeverformung des Zahnes auf Basis des Produktes eines Bezugswertes und einer allgemeinen Abklingfunktion vor. Als Bezugswert dient die Biegeverformung  $f_{N2D}$  eines Zahnabschnittes mit der Breite des Normalmoduls  $m_n$  unter Wirkung einer konstanten Streckenlast als analytische Lösung des EVZ gemäß [WBN55]. Die allgemeine Verformungsabklingfunktion  $E$  wurde mittels Regression auf Basis von dreidimensionalen FEM-Berechnungen entwickelt und beschreibt das normalmodulbezogene Abklingverhalten der Biegeverformung eines Zahnes unter Wirkung einer Punktlast. Die Kombination des Bezugswertes mit der Abklingfunktion ermöglicht es, die Biegeverformung sowie die Biegeverformungseinflusszahl eines endlich langen Zahnes unter Wirkung einer Einzelkraft vollständig analytisch zu berechnen. Diese Methode wurde von Baumann für Kegelräder [Ba91] und durch Kunert sowie Trempler [LHK95], [Ku99] für Stirnräder weiterentwickelt.

## 4.3 Allgemeine Verformungsabklingfunktion

### 4.3.1 Allgemeine Verformungsabklingfunktion für den unendlich langen Zahn

Ausgangspunkt der Bestimmung der allgemeinen Verformungsabklingfunktion sind Betrachtungen am unendlich lang gedachten Zahn gemäß Abbildung 4.2. In Abbildung 4.2 a) sowie b) wird die Biegeverformung im relativen Verformungssystem  $\eta$ - $\chi^*$ - $f_{N3D}$  bzw.  $\eta$ - $\chi^*$ - $f_{N2D}$  mit den folgenden Prämissen dargestellt:

- Der Ursprung des Verformungssystems liegt immer im Normalschnitt der Einzelkräfteinleitung.
- Wie im Ersatzzahn-Bezugssystem gibt die Abszissenachse  $\eta$  die Zahnhöhenposition an.
- Die Ordinatenachse  $\chi^*$  gibt den auf den Normalmodul  $m_n$  bezogenen Abstand von der Kräfteinleitungsstelle an.
- Die Applikatenachse  $f_{N3D}$  bzw.  $f_{N2D}$  gibt die Verformung in Kontaktnormalenrichtung an. Diese wird unabhängig vom lokalen Normalenvektor orthogonal zur  $\eta$ - $\chi^*$ -Ebene in Richtung  $f_{N3D}$  bzw.  $f_{N2D}$  abgetragen.

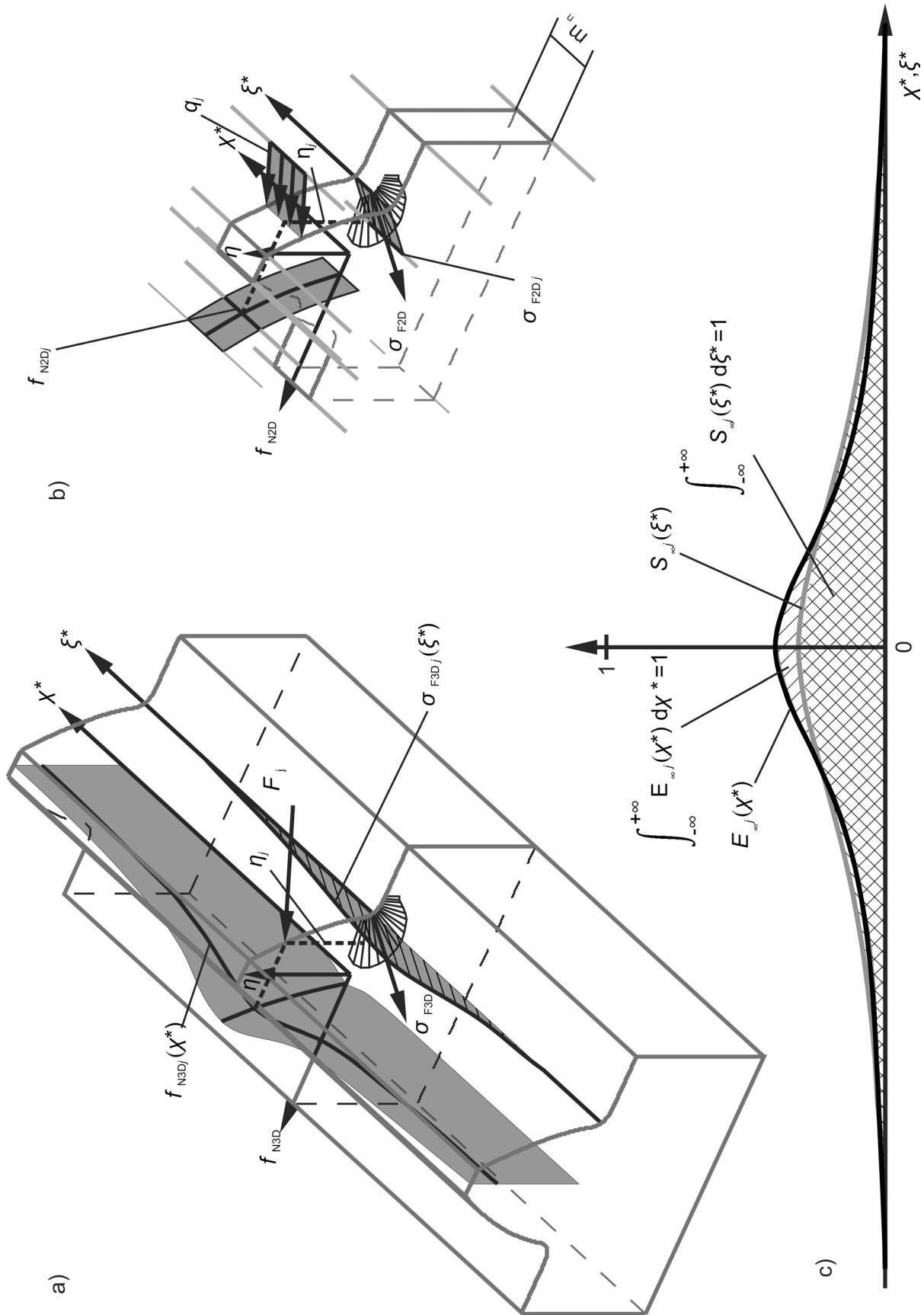


Abbildung 4.2: Abklingfunktion des unendlich langen Zahnes

Wird nun ein unendlich lang gedachter Zahn gemäß Abbildung 4.2. mit einer punktförmigen Einzelkraft  $F_j$  belastet, dann klingen die Verformungen nach einer endlichen Breitenentfernung von der Kraftereinleitungsstelle vollständig ab. Ein Zahn kann dann als unendlich lang gelten, wenn er so breit ist, dass die Verformung ungestört abklingen kann und sich die Änderung beim Übergang vom dreiachsigen zum zweiachsigen Spannungszustand im Randbereich nicht auf das Abklingverhalten auswirkt. Wird dieser Zahn auf der Flankenlinie der Einzelkraft statt mit  $F_j$  mit einer konstanten Streckenlast  $q_j$  gemäß Abbildung 4.2 b) und Gleichung (4.1) beaufschlagt, dann stellt sich in Zahnbreitenmitte das Ergebnis der äquivalenten EVZ-Aufgabe  $f_{N2D}$  ein.

$$q_j = \frac{F_j}{m_n} \quad (4.1)$$

Dieses Ergebnis entspricht dem Bezugswert. Setzt man die Zahnverformungsverläufe für die punktförmige Einzelkraft und die konstante Streckenlast ins Verhältnis, dann erhält man das Abklingverhalten. Dieses hängt nur noch von der Profilform, der Kraftangriffshöhe sowie von der Relativposition gegenüber der Kraftereinleitungsstelle und nicht mehr von der Belastungsgröße oder der Verformung ab. Betrachtet man das Abklingverhalten entlang einer Flankenlinie z.B. der Kraftereinleitung gemäß Gleichung (4.2), erhält man eine Verformungsabklingfunktion gemäß Abbildung 4.2.

$$E_{\infty j}(X^*) = \frac{f_{N3Dj}(X^*)}{f_{N2Dj}} \quad (4.2)$$

Diese hat die besondere Eigenschaft, dass sie symmetrisch hinsichtlich der Kraftereinleitungsstelle ist und ihr Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\infty} = 1$  beträgt. Diese Eigenschaften der Abklingfunktion entlang einer Flankenlinie liegen der Entwicklung der allgemeinen Verformungsabklingfunktion zugrunde. Die allgemeine Verformungsabklingfunktion mittelt den Einfluss der Profilform und Kraftangriffshöhe sowie Auswertungshöhe und verallgemeinert so das Verformungsabklingverhalten. Baumann verwendete für Kegelhäder zunächst die allgemeine Verformungsabklingfunktion nach Gajewski [Ga86] und untersuchte ihre Anwendbarkeit auf Kegelhäder mittels FEM. Die dabei explizit betrachteten Profilformen können in den in Abbildung 2.2 markierten Bereich eingeordnet werden. Nach der Entwicklung einer allgemeinen Verformungsabklingfunktion auf Basis umfangreicher experimenteller Untersuchungen sowie FEM-Berechnungen für Stirnräder durch Kunert [LHK95], [Ku99], wurden diese auch auf Kegelhäder übertragen [SSH12]. Die dabei explizit betrachteten Profilformen können ebenfalls in den in Abbildung 2.2 markierten Bereich eingeordnet werden.

Die von Baumann für Kegelhäder verwendete allgemeine Verformungsabklingfunktion nach Kunert für den unendlich langen Zahn wird durch Gleichung (4.3) angegeben und in Abbildung 4.3 dargestellt.

$$E_{\infty}(\chi^*) = 0,146 \cdot \left[ \cos(0,027 \cdot |\chi^*|^3 - 0,333 \cdot \chi^{*2} + 1,545 \cdot |\chi^*|) + 1 \right] \quad (4.3)$$

mit

$$E_{\infty}(\chi^*) = 0 \text{ für } |\chi^*| \geq 6, \quad \chi^* = \frac{X}{m_n}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\infty}(\chi^*) d\chi^* = 1, \quad \text{Maximalwert: } \dot{E}_{\infty}(\chi^* = 0) = 0,292$$

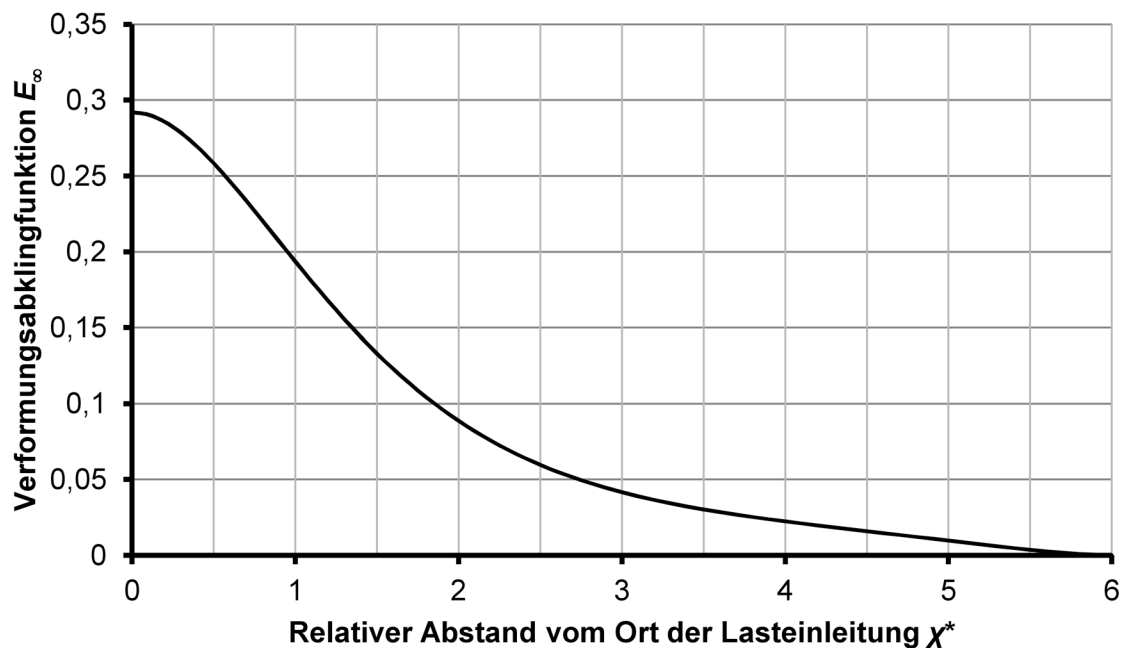


Abbildung 4.3: Allgemeine Verformungsabklingfunktion nach Kunert [Ku99]

Um im Rahmen einer modernen Verzahnungsoptimierung die erforderliche Genauigkeit der Biegeverformungsberechnung gewährleisten zu können, muss der durch die Untersuchungen von Baumann und Kunert aufgespannte Profilformbereich um den in Abbildung 2.2 zuzusatzlich dargestellten Profilformbereich erweitert werden. So wird der gesamte technisch relevante Profilformbereich, der bei einer modernen Verzahnungsoptimierung eine Rolle spielen kann, ausreichend erfasst.

Im Folgenden soll mittels FEM untersucht werden, wie die allgemeine Verformungsabklingfunktion gemäß Gleichung (4.3) erweitert werden muss, um eine Abbildung des erweiterten Profilformbereichs im ausreichenden Maße sicherzustellen.



### 4.3.2 Allgemeine Abklingfunktion für den endlich langen Zahn

Bevor die Untersuchungen zum allgemeinen Verformungsabklingverhalten von Zähnen mit den Profilformen aus Abbildung 2.2 durchgeführt werden können, muss zunächst geklärt werden, wie auf Basis des Abklingverhaltens des unendlich langen Zahnes, das Abklingverhalten des endlich langen Zahnes berechnet werden kann.

Wird aus dem unendlich langen Zahn ein endlich langes Zahnsegment freigeschnitten, dann sind die resultierenden Stirnseiten schub- sowie normalspannungsfrei und verformen sich unter Belastung entsprechend (siehe Abbildung 4.4 b)). Um diesen Verformungszustand auf Basis der Verformung des unendlich langen Zahnes abbilden zu können, hat sich die Spiegelungsmethode bewährt [WS60], [Um73], [HS78], [Ba91], [Ku99]. Dazu wird der Verformungsverlauf respektive der allgemeine Verformungsabklingverlauf des unendlich langen Zahnes an den Stirnseiten des endlich langen Zahnes gespiegelt und mit dem gespiegelten Anteil addiert. Abbildung 4.4 a) zeigt dies für den Verformungsverlauf entlang der Flankenlinie der Kraftereinleitung.

Anhand Abbildung 4.5 soll dieses Vorgehen für einen Flankenlinienschnitt gemäß Abbildung 4.4 b) entlang der Flankenlinie der Kraftereinleitung für die allgemeine Verformungsabklingfunktion näher erklärt werden. Abbildung 4.5 a) bis c) zeigt jeweils den Flankenlinienschnitt auf Höhe der Kraftereinleitung in der Draufsicht vom Zahnkopf in Richtung Zahnfuß. Die Breitenkoordinate, die Höhenkoordinate und die allgemeine Verformungsabklingfunktion in Zahnflankennormalenrichtung werden im  $\eta$ - $\chi_{sz}$ - $E$ -Verformungsabkling-Bezugssystem dargestellt. Die Definition der Abszissenachse  $\eta$  sowie der Ordinatenachse  $\chi_{sz}$  entsprechen der Festlegung des Ersatzzahn-Bezugssystems, die Applikatenachse  $E$  gibt das Verformungsabklingverhalten in Kontaktnormalenrichtung an. Dieses wird unabhängig vom lokalen Normalenvektor orthogonal zur  $\eta$ - $\chi_{sz}$ -Ebene in Richtung  $E$  abgetragen.

Bei der Spiegelungsmethode gemäß Abbildung 4.5 werden an den gedachten Positionen der Stirnseiten die Spiegelungsebenen  $Z$  (Zehe) und  $F$  (Ferse) eingeführt. Diese werden im Abstand der Länge des Ersatzzahnes  $b_A$  angeordnet. Die Kraft wird an der Stelle  $j$  im Abstand  $b_{Aj}$  von der Spiegelungsebene  $Z$  eingeleitet. Die Auswertung der vollständig gespiegelten Abklingfunktion erfolgt an der Stelle  $i$  im Abstand  $b_{Ai}$  von der Spiegelungsebene  $Z$ . Der relative Abstand der Auswertungsstelle  $i$  von der Kraftereinleitungsstelle  $j$  wird mit  $\chi_i^*$  bezeichnet und gemäß Gleichung (4.4) berechnet.

$$\chi_i^* = \frac{|b_{Aj} - b_{Ai}|}{m_n} \quad (4.4)$$

Über eine Spiegelung der Belastung an den Spiegelungsebenen wird eine Symmetrie hergestellt, welche die Schubspannungen in diesen aufhebt. Diese Spiegelung verursacht eine Vergrößerung der Verformung des Zahnsegmentes um den Betrag der allgemeinen Verformungsabklingfunktion mit den relativen Kraftereinleitungsabständen  $\chi_{Zi}^*$  und  $\chi_{Fi}^*$ . Diese lassen sich gemäß Gleichung (4.5) und Gleichung (4.6) berechnen. Die Abstände der Kraft  $F_j$  bzw.

der gespiegelten Kräfte  $F_{Zj}$  sowie  $F_{Fj}$  von den Spiegelungsebenen werden jeweils mit  $\Delta Z$  und  $\Delta F$  bezeichnet.

$$X_{Zi}^* = \frac{|b_{Aj} - b_{Ai} - 2 \cdot \Delta Z|}{m_n} \quad (4.5)$$

$$X_{Fi}^* = \frac{|b_{Aj} - b_{Ai} + 2 \cdot \Delta F|}{m_n} \quad (4.6)$$

Klingt die Verformung bzw. Verformungsabklingfunktion beim einmaligen Spiegeln an den Spiegelungsebenen nicht vollständig über der Länge  $b_A$  innerhalb der Zahnsegmentbreite ab, dann muss sie erneut gespiegelt werden. Die entsprechenden Spiegelungslangen lassen sich gemäß Gleichung (4.7) und Gleichung (4.8) berechnen. Der Index  $k$  ist dabei Element einer Indexmenge  $Z$  bzw.  $F$  die von 1 bis zu dem Index läuft, bei dem der Wert der allgemeinen Verformungsabklingfunktion des unendlich langen Zahnes für  $X_{Zik}^*$  respektive  $X_{Fik}^*$  0 wird.

$$X_{Zik}^* = X_{Zi}^* + \frac{b_A \cdot (k - 1)}{m_n} \quad \text{mit } k \in Z \quad Z = \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 1 \wedge E_\infty(X_{Zik}^*) > 0\} \quad (4.7)$$

$$X_{Fik}^* = X_{Fi}^* + \frac{b_A \cdot (k - 1)}{m_n} \quad \text{mit } k \in F \quad F = \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 1 \wedge E_\infty(X_{Fik}^*) > 0\} \quad (4.8)$$

Unter Berücksichtigung dieser Spiegelungsanteile ergibt sich die Abklingfunktion für den endlich langen Zahn bzw. für das Zahnsegment gemäß Gleichung (4.9). Dabei bleibt das Integral der resultierenden Abklingfunktion mit 1 erhalten.

$$E = E_\infty(X_i^*) + \sum_{k \in Z} E_\infty(X_{Zik}^*) + \sum_{k \in F} E_\infty(X_{Fik}^*) \quad (4.9)$$

mit

$$Z = \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 1 \wedge E_\infty(X_{Zik}^*) > 0\}, \quad F = \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 1 \wedge E_\infty(X_{Fik}^*) > 0\}$$

Aufgrund der durch die Spiegelung erzeugten Symmetrie hinsichtlich der Spiegelungsebenen, stellt sich an den durch diese beschriebenen Stirnseiten ein schubspannungsfreier Zustand ein. Die Spiegelung bewirkt somit kein vollständiges Freischneiden des Zahnsegmentes, sondern bildlich gesprochen, erfolgt nur eine Trennung des Materials entlang der Spiegelungsebenen und das Zahnsegment kann sich an den Schnittflächen in Normalenrichtung abstützen. In Abbildung 4.5 a) wird dies grafisch angedeutet. Daraus resultiert eine Normalspannung an den eigentlich vollständig freien Stirnseiten. Kunert untersuchte diesen Sachverhalt auf experimenteller Grundlage und auf Basis von FEM-Berechnungen [Ku99] anhand einer Kragplatte aus Kunststoff. Aus seinen Betrachtungen schlussfolgerte er, dass das Verhältnis aus Kraglange zu Plattendicke sehr groß sein muss, um einen relevanten Einfluss auf die Randverformung zu haben. Für reale Verzahnungen vernachlässigt Kunert diesen Einfluss.

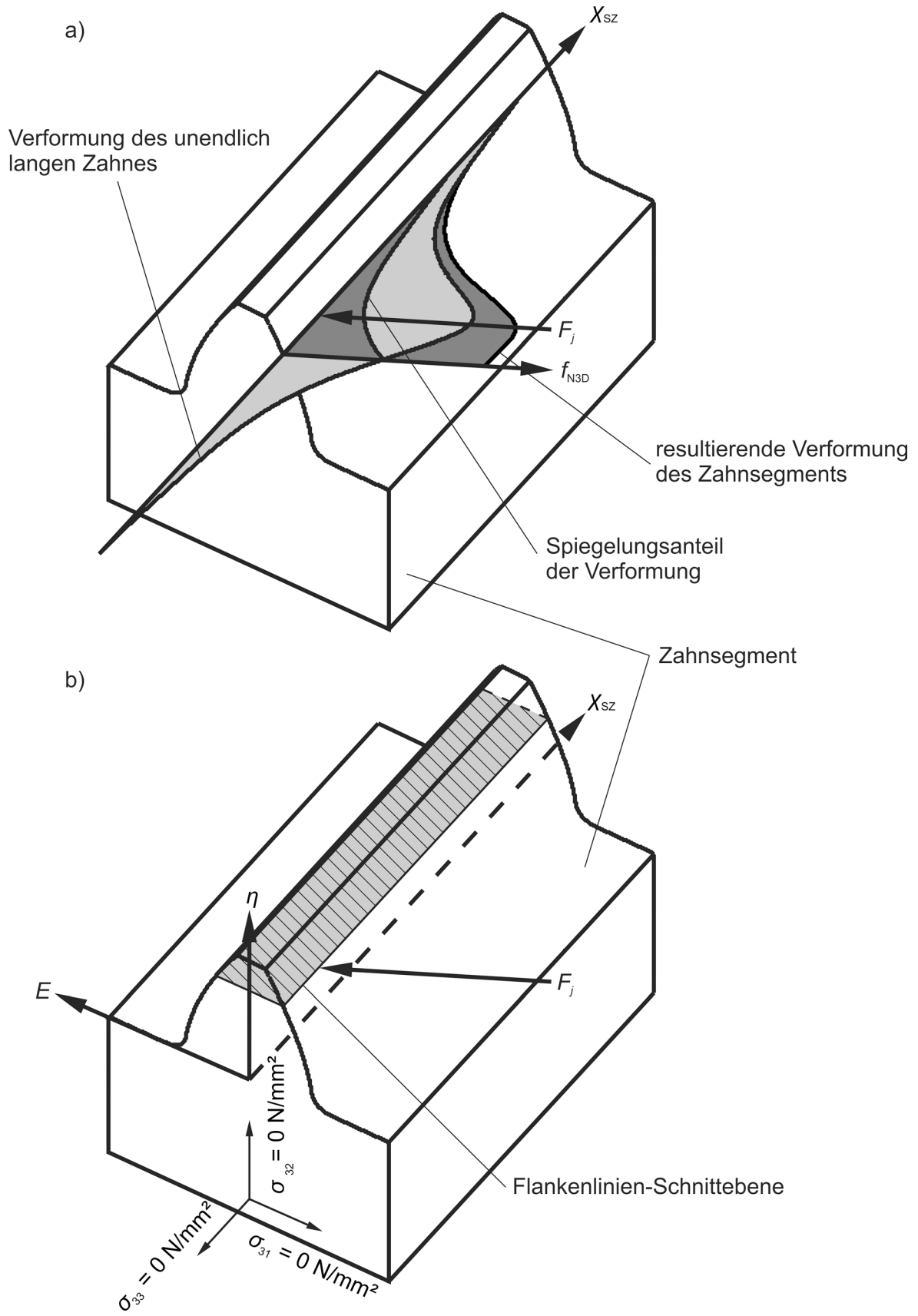


Abbildung 4.4: 3D-Darstellung Spiegelungsmethode

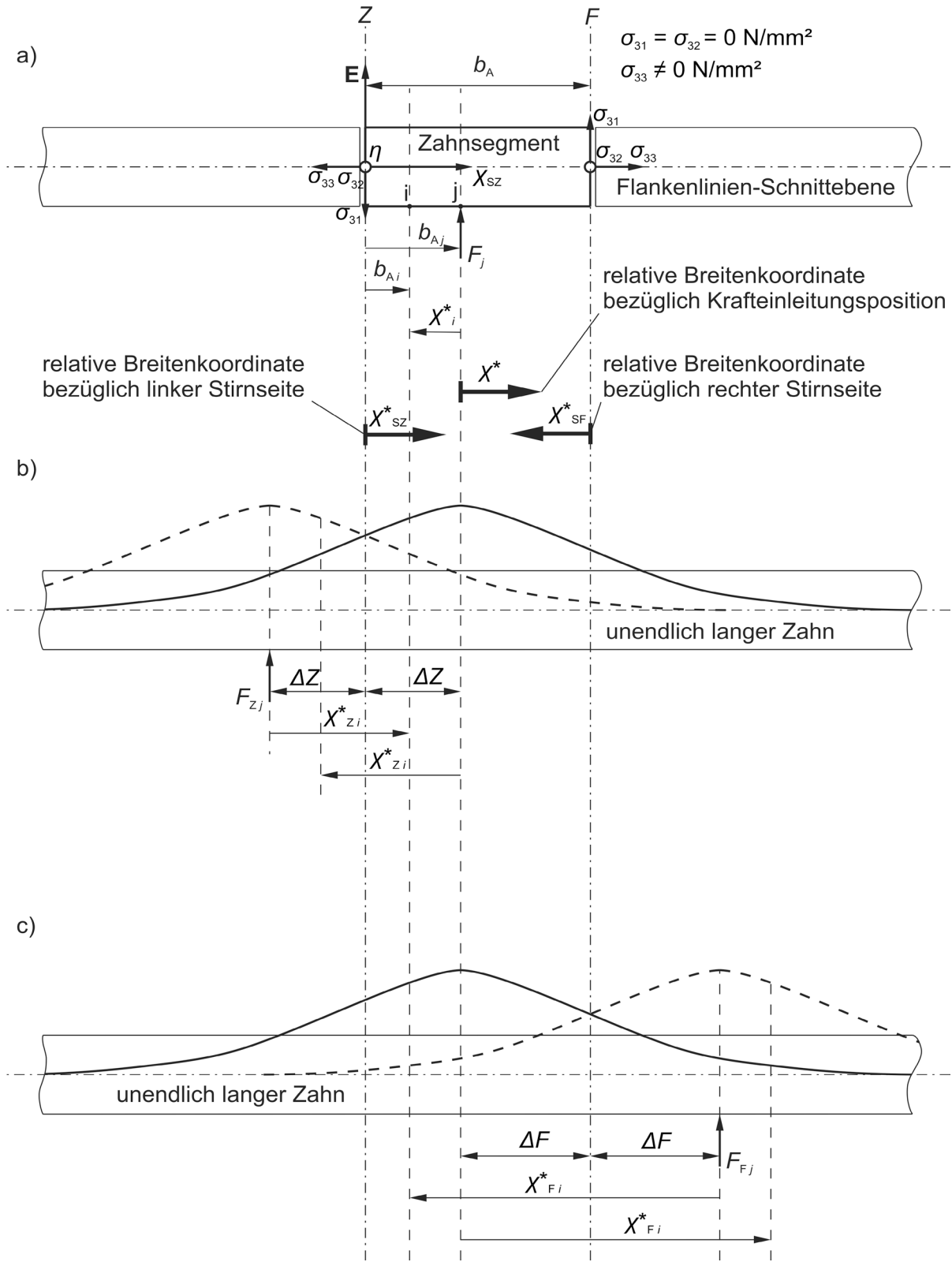


Abbildung 4.5: 2D-Darstellung Spiegelungsmethode, Abbildung in Anlehnung an [Re77]

Abbildung 4.6 zeigt eine vergleichende FEM-Berechnung an einem Zahn mit zahnstangenähnlichem Profil unter Wirkung einer konstanten Streckenlast entlang einer Flankenlinie mit unterschiedlichen Spannungszuständen an den freien Stirnseiten. Der relative Stirnseitenabstand  $\chi_s^*$  steht dabei wahlweise für den modulbezogenen Abstand von der Zehe  $\chi_{sz}^*$  oder der Ferse  $\chi_{sf}^*$ . Der maximale Unterschied beträgt ca. 5 % und die Schlussfolgerung von Kunert kann damit bestätigt werden.

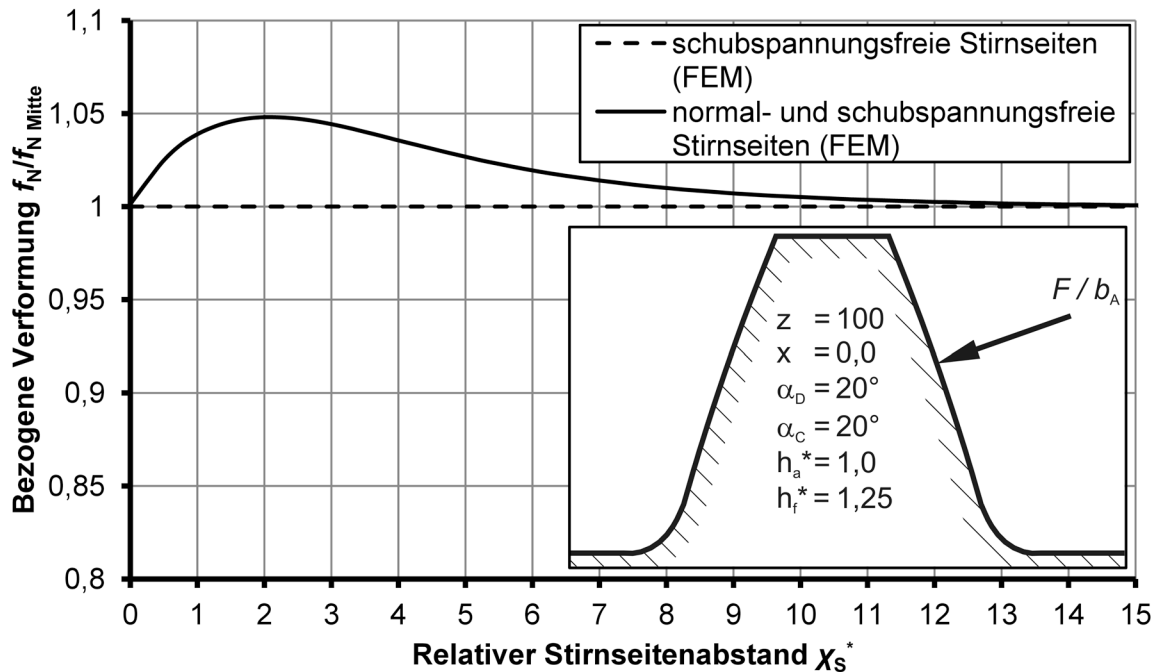


Abbildung 4.6: Gegenüberstellung von FEM-Verformungen an den freien Stirnseiten mit unterschiedlichen Spannungszuständen

#### 4.3.3 Berechnung der Zahnverformung unter Einzelast mittels FEM

Um bei den folgenden FEM-Untersuchungen die Verformungen direkt an der Krafteinleitungsstelle auswerten zu können, wurde das Vorgehen von Vedmar [Ve81] gemäß Abbildung 3.1 adaptiert. Danach kann die unter Wirkung einer Einzellast entstehende Singularität an der Krafteinleitungsstelle (Kontaktverformung bei punktförmiger Einzelkraft wird theoretisch unendlich groß) isoliert berechnet und anschließend von der Gesamtverformung subtrahiert werden. Dazu wird das FEM-Modell entlang der Zahnmittelfläche eingespannt, sodass unter Last ausschließlich die singulären Verformungen im Lasteinleitungsbereich berechnet werden. Diese werden von dem FEM-Modell subtrahiert, welches nicht in der Zahnmittelebene fest eingespannt ist und somit alle Verformungsanteile enthält. Das Diagramm in Abb. 16 zeigt die Gegenüberstellung der so ermittelten Verformung mit der unkorrigierten Gesamtverformung sowie der berechneten ungestörten Gesamtverformung in der Zahnmittelebene. Die Gegenüberstellung zeigt, dass diese Methode für die Untersuchung der Zahnverformung eingesetzt werden kann. Dies ermöglicht eine sehr gute Vergleichbarkeit der Verformungen

bei unterschiedlichen Profilformen und Kraftangriffshöhen durch die direkte Auswertung auch am Lasteinleitungsort.

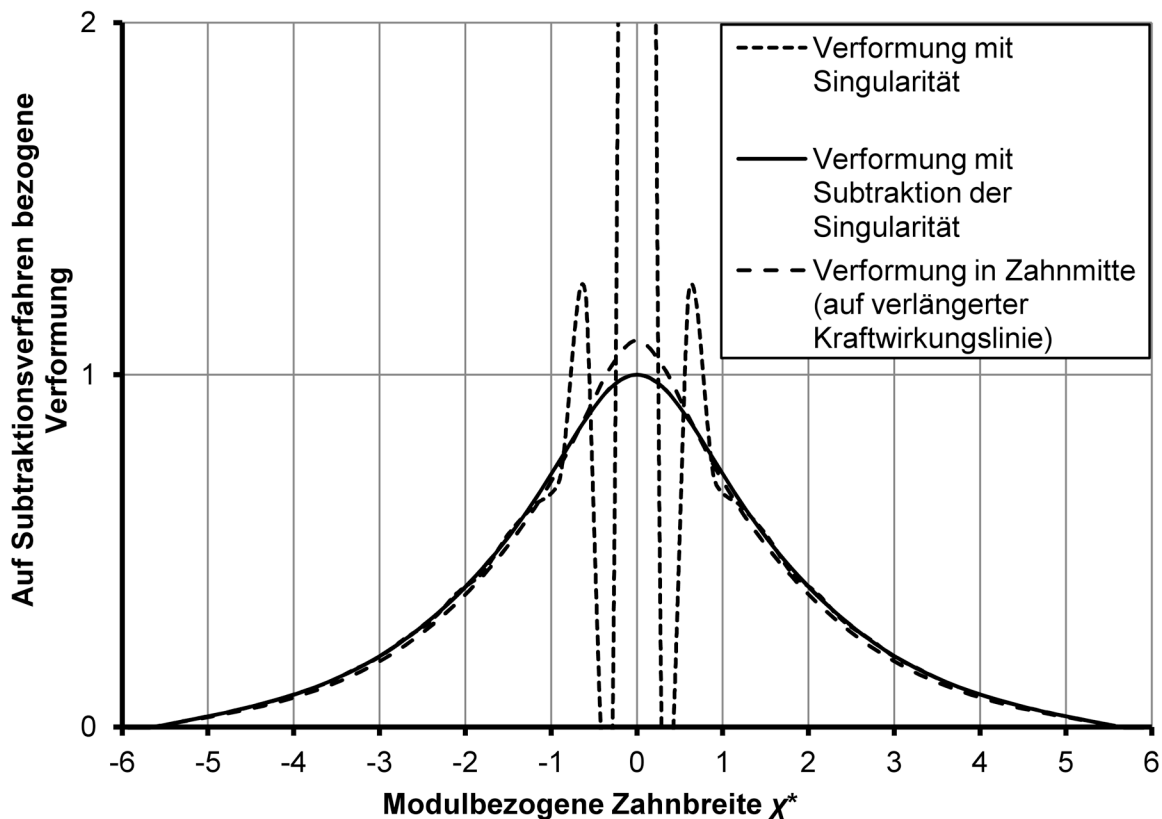


Abbildung 4.7: Vergleich von berechneten FEM-Verformungen mit und ohne Singularität für den unendlich lang gedachten Zahn unter Wirkung einer Einzellast an der Stelle  $\chi^* = 0$

#### 4.3.4 Einfluss der Kraftangriffshöhe und der Profilform

Das Maximum  $\hat{E}_\infty$  der allgemeinen Verformungsabklingfunktion gemäß Gleichung (4.3) stellt einen gewichteten Mittelwert dar, welcher die besten Übereinstimmungen mit Messungen und FEM-Ergebnissen liefert [Ba91], [Ku99]. Die allgemeine Verformungsabklingfunktion soll dementsprechend unabhängig von der Profilform, Kraftangriffs- und Auswertungshöhe gültig sein. Abbildung 4.8 und Abbildung 4.9 zeigen allerdings exemplarisch, dass die Quantität sowie Qualität der Verformungsabklingfunktion von der Profilform und der Kraftangriffshöhe abhängen. Damit wird die bereits in Abschnitt 4.3.1 getroffene Festlegung unterstrichen, dass es erforderlich ist, diese Einflüsse für den in Abbildung 2.2 definierten Profilformbereich zu untersuchen. Da das Integral des Abklingverlaufs  $\int_{-\infty}^{+\infty} E_\infty = 1$  ist, liefert der Maximalwert einer Abklingfunktion auch eine Aussage über den qualitativen Verlauf. Deshalb können bei allen weiteren Betrachtungen die Abklingfunktionen auch ausschließlich anhand ihrer jeweiligen Maximalwerte  $\hat{E}_\infty$  vollständig charakterisiert werden.

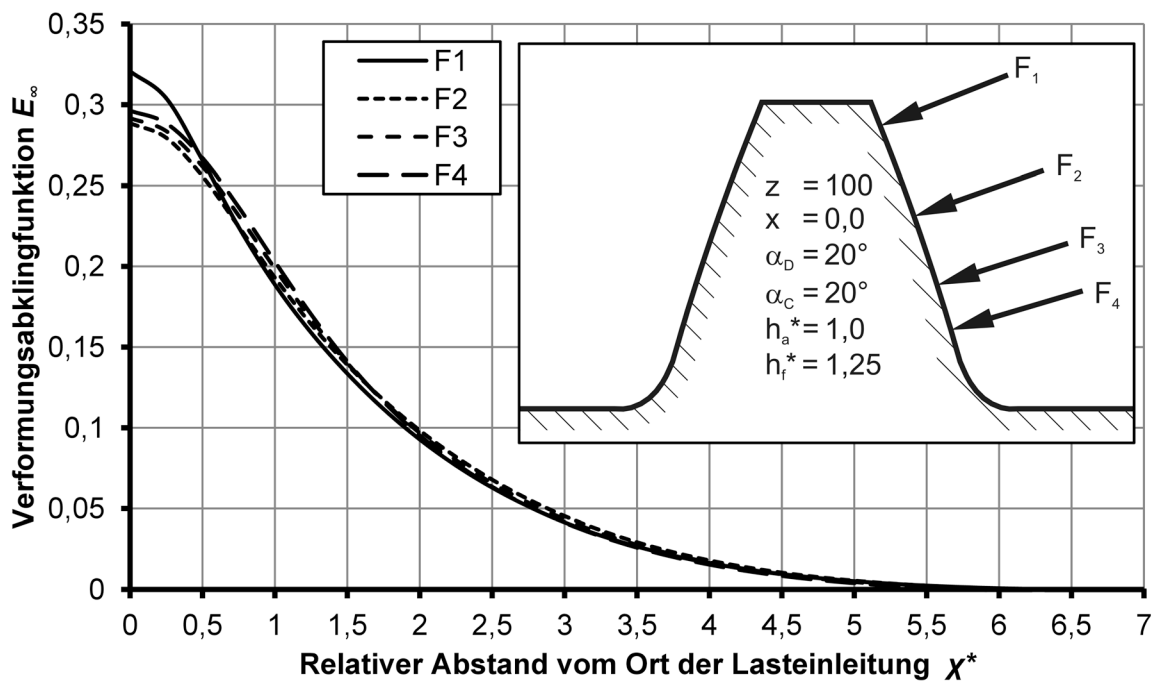


Abbildung 4.8: Vergleich der FEM-Verformungsabklingfunktion für verschiedene Kraftangriffshöhen an einem zahnstangenähnlichen Profil

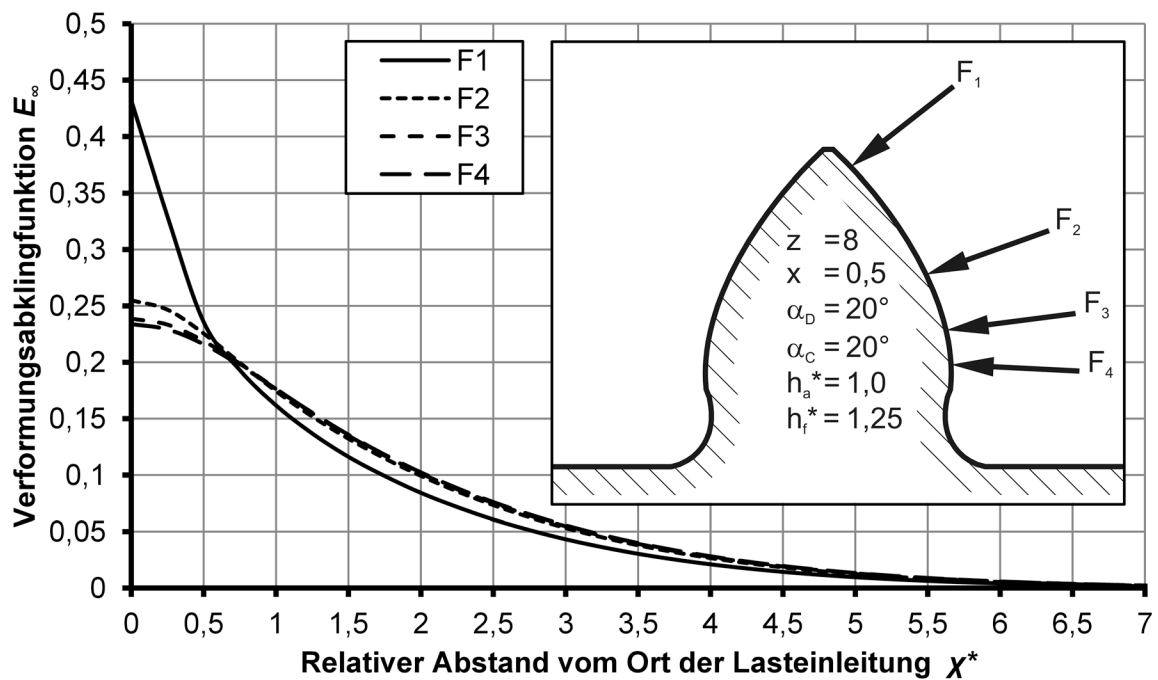


Abbildung 4.9: Vergleich der FEM-Verformungsabklingfunktion für verschiedene Kraftangriffshöhen an einem Profil mit Unterschnitt und spitzem Zahnkopf

Bei der Bewertung der Unterschiede in den Verformungsabklingfunktionen hinsichtlich ihrer Auswirkung muss immer berücksichtigt werden, dass eine Überlagerung der Einflüsse in der Kontaktpaarung von Rad und Gegenrad stattfindet. Durch die entgegengesetzte Zahn-

höhenbewegung des Kontaktes von Zahnfuß, in Richtung Zahnkopf beim treibenden Rad und umgekehrt beim getriebenen Rad, werden Kraftangriffshöhen sowie Profilformeinflüsse immer in Abhängigkeit von der Lastverteilung in einer gewichteten Form gemittelt. Vor allem bei Schrägverzahnungen mit ihren diagonal über den Zahn verlaufenden Traglinien ist diese ausgleichende Mittelung besonders wirksam. Daraus kann geschlussfolgert werden, dass individuelle Unterschiede durch die Kontaktpaarung nie voll wirksam werden.

In einem ersten Schritt wurde für alle definierten Profilformen der Einfluss der Kraftangriffshöhe separat untersucht. Der unmittelbare Kopfeingriff (Kraftangriffe oberhalb von  $F_1$  in Abbildung 4.8 und Abbildung 4.9) wird bei der Bewertung des Verformungsabklingverhaltens nicht berücksichtigt, da durch Fasen und Kopfrücknahmen dieser Bereich in der Regel entlastet ist. Anhand von Abbildung 4.8 und Abbildung 4.9 lässt sich gut erkennen, dass sich das Verformungsabklingverhalten zwischen den Kraftangriffspunkten  $F_2$  und  $F_4$  jeweils nur marginal unterscheidet. Dieses Verhalten lässt sich für alle hier definierten Profilformen allgemein feststellen. In Richtung des Zahnkopfes, das heißt zwischen  $F_1$  und  $F_2$ , steigt der Maximalwert der Verformungsabklingfunktion bei Profilformen mit großem Eingriffswinkel oder großer Profilverschiebung, also mit relativ spitzem Zahnkopf im Verhältnis zum Zahnfuß, allerdings kontinuierlich an. Abbildung 4.10 illustriert diesen Sachverhalt exemplarisch für ein Zahnprofil mit einer Ersatzzähnezahl von  $z_v = 100$  und einem Eingriffswinkel von  $\alpha = 10^\circ$  sowie  $30^\circ$ . Es kann festgestellt werden, dass der Unterschied zwischen fußnahem und kopfnahem Kraftangriff umso größer ist, je höher der Gradient des Nutzflankenverlaufes ausfällt. Der Zahnkopfbereich ist allerdings nur im Mehrfacheingriffsgebiet bzw. bei schrägverlaufender Traglinie im Eingriff und trägt weniger Last als der mittlere Zahnhöhenbereich. Aus diesem Grund und aufgrund der generell in der Kontaktpaarung wirksamen ausgleichenden Mittelung kann für jede Profilform ein charakteristischer Maximalwert  $\hat{E}_{\infty P}$  für die Verformungsabklingfunktion gefunden werden, der das Kontaktverhalten repräsentativ widerspiegelt. Der profilformabhängige charakteristische, repräsentative Maximalwert der Verformungsabklingfunktion  $\hat{E}_{\infty P}$  wird als Mittelwert  $\bar{E}_{\infty \max}$  des Integrals der kraftangriffshöhenabhängigen Verläufe  $\hat{E}_{\infty}(\eta^*)$ , wie sie in Abbildung 4.10 dargestellt sind, definiert (siehe Gleichung (4.10)). Die untere Integrationsgrenze  $a$  wird dabei durch den Übergang vom Zahnfuß zur Nutzflanke und die obere Integrationsgrenze durch den Zahnkopf vorgegeben. Exemplarisch werden die profilformabhängigen Maximalwerte  $\hat{E}_{\infty P}$  der Verformungsabklingfunktion in Abbildung 4.10 den kraftangriffshöhenabhängigen Maximalwerten  $\hat{E}_{\infty}(\eta^*)$  gegenübergestellt. Die profilformabhängigen Maximalwerte  $\hat{E}_{\infty P}$  der Verformungsabklingfunktion wurden für alle hier definierten und in Abbildung 2.2 aufgeführten Profilformen berechnet.

$$\hat{E}_{\infty P} = \bar{E}_{\infty \max} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \hat{E}_{\infty}(\eta^*) d\eta \quad (4.10)$$

Die nun nur noch von der Profilform und nicht mehr von der Kraftangriffshöhe abhängigen Maximalwerte der Verformungsabklingfunktion werden in Abbildung 4.11 über der Ersatzzähnezahl dargestellt. Wird jeweils über einer Ersatzzähnezahl der Eingriffswinkel variiert, dann bewirkt eine Verkleinerung des Eingriffswinkels ebenfalls eine Verkleinerung von  $\hat{E}_{\infty P}$  und eine Vergrößerung des Eingriffswinkels eine Vergrößerung von  $\hat{E}_{\infty P}$ . Gleiches gilt für



eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Profilverschiebung. Wobei die Auswirkung der Profilverschiebung mit zunehmender Ersatzzähnezahl abnimmt. Auch die Vergrößerung der Ersatzzähnezahl bewirkt eine Vergrößerung von  $\hat{E}_{\infty P}$ . Allerdings ist dieser Effekt nur bei Ersatzzähnezahl kleiner als 30 deutlich zu beobachten, bei Ersatzzähnezahl über 30 gibt es keinen nennenswerten Einfluss der Ersatzzähnezahl auf den Wert von  $\hat{E}_{\infty P}$  mehr. Sinkt die Zähnezahl unter 30, dann wird der Fehler zwischen dem bisher gültigen Maximalwert  $\hat{E}_{\infty}$  gemäß Gleichung (4.3) und den profilformabhängigen Maximalwerten  $\hat{E}_{\infty P}$  zunehmend größer. Des Weiteren ist die Fehlerlage hinsichtlich des maximalen und minimalen Fehlers unsymmetrisch. Um eine möglichst gute relative und absolute Vergleichbarkeit zwischen Berechnungen mit unterschiedlichen Profilformen besonders hinsichtlich des großen Einflusses der Ersatzzähnezahl zu gewährleisten, liegt es nahe eine allgemeine Verformungsabklingfunktion, deren Maximalwert von der Ersatzzähnezahl abhängt, zu entwickeln.

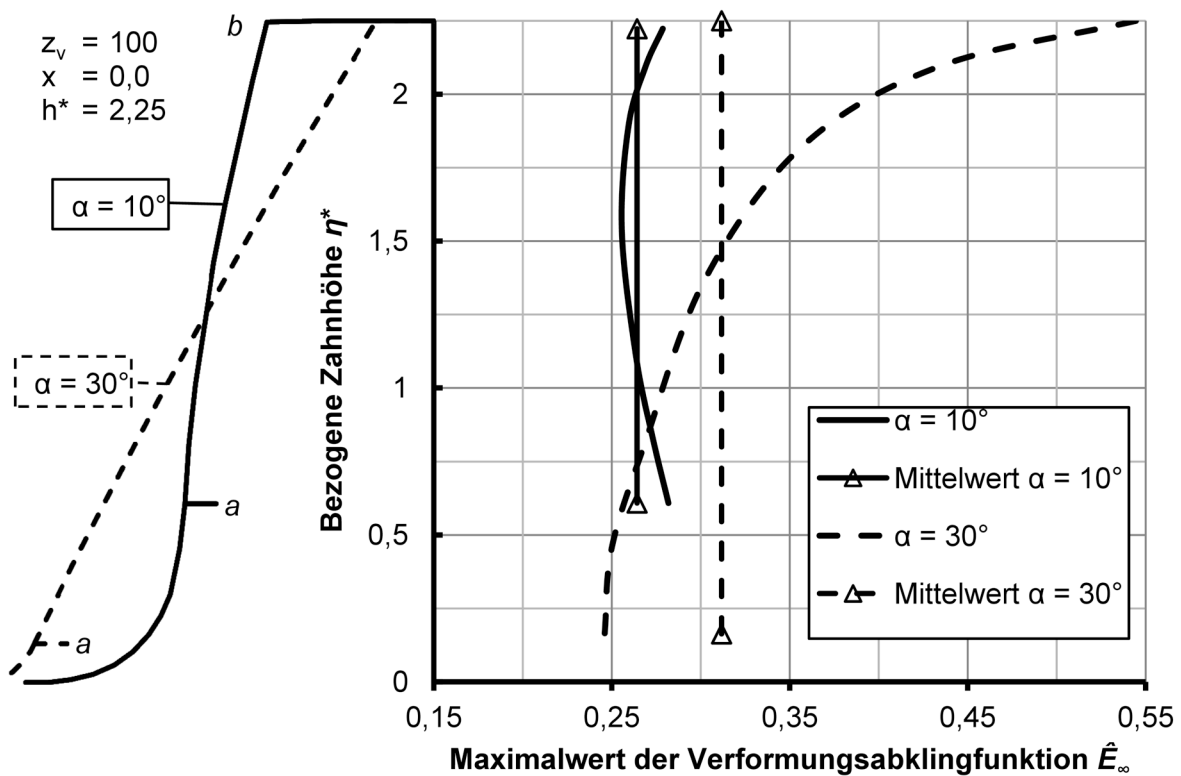


Abbildung 4.10: Kraftangriffshöhenabhängigkeit des Maximalwertes der Verformungsabklingfunktion für zwei verschiedene Profilformen im Vergleich

Für die Entwicklung einer Verformungsabklingfunktion, deren Maximalwert von der Ersatzzähnezahl abhängt, wird zunächst eine geschlossene Beschreibung des Abklingverhaltens in Form einer allgemeinen Abklingfunktion benötigt. Gesucht ist eine Beschreibung des Abklingverhaltens für Maximalwerte von 0,2 bis 0,29. Zunächst muss eine Funktion gefunden werden, die den Charakter einer Abklingfunktion für den gesuchten Maximalwertbereich darstellen kann. Eine solche Funktion lässt sich auf Basis der Lösungsfunktionen für die Berechnung der Verformung des elastisch gebetteten Balkens [Ka61], [YBR07] finden. Diese sind prinzipiell dafür geeignet, die vorliegende Abklingcharakteristik korrekt zu beschreiben. Mittels FEM berechnete Verformungsabklingverläufe mit verschiedenen Maximalwerten die-

nen als Stützstellenfunktionen für die Entwicklung der allgemeinen Abklingfunktion auf Basis von Regressionsrechnungen und Parametervariationen. Das Ergebnis dieser Entwicklung ist die allgemeine Abklingfunktion  $f_{A\infty k}$  gemäß Gleichung (4.11) sowie Abbildung 4.12 mit den vom Maximalwert  $\hat{f}_{A\infty k}$  abhängigen Funktionsparametern aus Tabelle 4.1. Der Funktionswert der Abklingfunktion  $f_{A\infty k}$  wird weiterhin durch den relativen Zahnbreitenabstand bezüglich der Krafteinleitungsstelle  $\chi^*$  bestimmt.

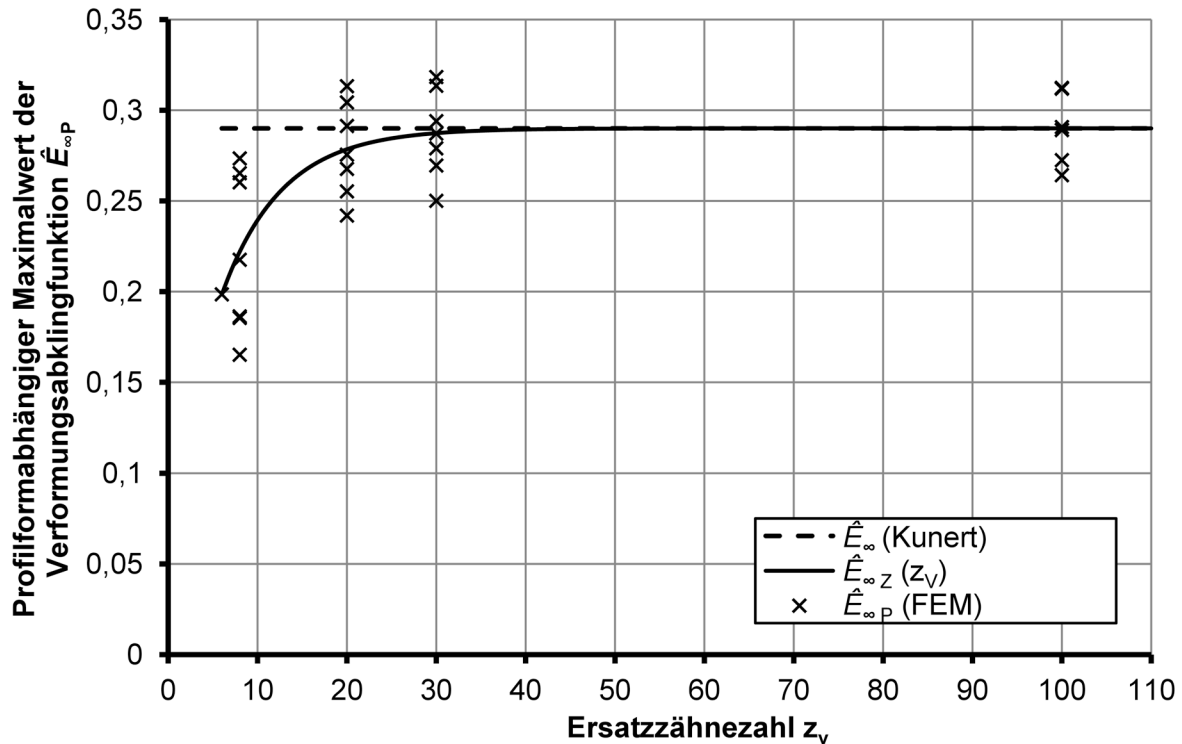


Abbildung 4.11: Profilformabhangige FEM-Maximalwerte  $\hat{E}_{\infty P}$  der Verformungsabklingfunktion für die Zahnprofile aus Abbildung 2.2 und Gegenüberstellung mit dem Maximalwert nach Kunert  $\hat{E}_{\infty}$  sowie mit der Maximalwertfunktion  $\hat{E}_{\infty z}(z_v)$

$$f_{A\infty k}(\chi^*) = e^{(\rho_k \cdot |\chi^*|)} \cdot (A_k \cdot \cos(q_k \cdot |\chi^*|) + B_k \cdot \sin(q_k \cdot |\chi^*|)) + e^{(-\rho_k \cdot |\chi^*|)} \cdot (C_k \cdot \cos(q_k \cdot |\chi^*|) + D_k \cdot \sin(q_k \cdot |\chi^*|)) \cdot e^{(r_k \cdot |\chi^*|)} \quad (4.11)$$

mit

$$f_{A\infty k}(\chi^*) = 0 \text{ für } |\chi^*| \geq 11, \quad \chi^* = \frac{\chi}{m_n}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{A\infty k}(\chi^*) d\chi^* = 1$$

Tabelle 4.1: Funktionsparameter der allgemeinen Abklingfunktion  $f_{A^\infty k}$

$k$	$\hat{f}_{A^\infty k}$	$A_k$	$B_k$	$C_k$	$D_k$	$p_k$	$q_k$	$r_k$
1	<b>0,165</b>	-2,694	-1,832	2,858	2,109	-0,400	0,357	-0,809
2	<b>0,180</b>	-0,098	0,910	0,279	22,077	-0,288	0,007	-0,947
3	<b>0,230</b>	-6,698	-2,384	6,927	3,084	-0,734	0,476	-1,489
4	<b>0,305</b>	0,271	0,475	0,033	0,851	-0,831	0,282	-3,981

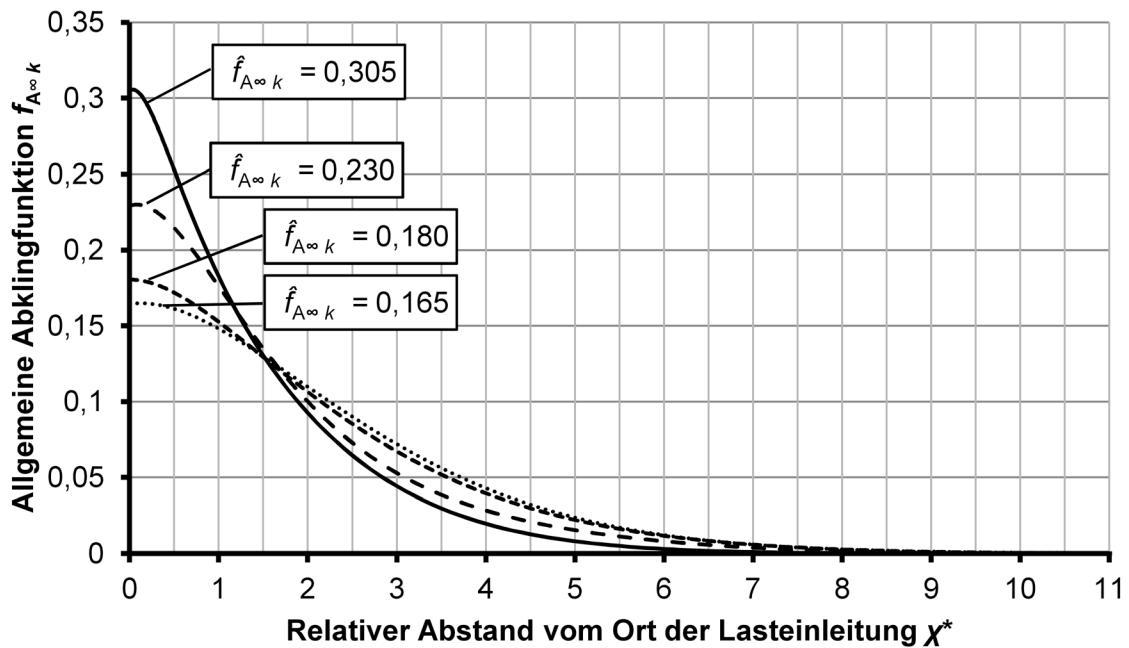


Abbildung 4.12: Stützstellenfunktionen der allgemeine Abklingfunktion  $f_{A^\infty k}$

Werden die Stützstellenfunktionen aus Tabelle 4.1 mit Hilfe einer geeigneten Interpolationsmethode miteinander verknüpft, erhält man die gesuchte geschlossene Beschreibung der Abklingfunktion. Hier erfolgt dies mittels linearer Spline-Interpolation (siehe Gleichung (4.12)). Unter der Vorgabe des Maximalwertes der gesuchten Abklingfunktion erhält man das dazugehörige Abklingverhalten in Abhängigkeit vom relativen Abstand von der Krafteinleitungsstelle. Die Funktion besitzt einen Gültigkeitsbereich für Abklingfunktionsmaximalwerte von 0,165 bis 0,305 und kann durch Hinzufügen weiterer Stützstellen nahezu beliebig erweitert werden.

$$f_{A^\infty}(X^*, \hat{f}_{A^\infty}) = f_{A^\infty k}(X^*) + \frac{(\hat{f}_{A^\infty} - \hat{f}_{A^\infty k})}{(\hat{f}_{A^\infty k+1} - \hat{f}_{A^\infty k})} \cdot (f_{A^\infty k+1}(X^*) - f_{A^\infty k}(X^*)) \quad (4.12)$$

mit

$$\hat{f}_{A^\infty} \in [\hat{f}_{A^\infty k}, \hat{f}_{A^\infty k+1}] \text{ für } k = 1, \dots, n-1$$

Auf Basis der profilformabhängigen Maximalwerte  $\hat{E}_{\infty P}$  der Verformungsabklingfunktionen für den unendlich langen Zahn aus Abbildung 4.11 wurde eine Funktion für eine zähnezahlabhängige Berechnung des Maximalwertes  $\hat{E}_{\infty Z}(z_v)$  der Verformungsabklingfunktion entwickelt. Der so erhaltene Verlauf des Maximalwertes  $\hat{E}_{\infty Z}$  kann durch Gleichung (4.13) ausgedrückt werden und ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

$$\hat{E}_{\infty Z}(z_v) = 0,29 - 3,093 \cdot e^{\left(\frac{-z_v}{0,114}\right)} - 3,093 \cdot e^{\left(\frac{-z_v}{0,118}\right)} - 0,222 \cdot e^{\left(\frac{-z_v}{6,757}\right)} \quad (4.13)$$

Damit kann die allgemeine Verformungsabklingfunktion nach Gleichung (4.14) in Abhängigkeit von der Zähnezahl beschrieben werden.

$$E_{\infty Z}(\chi^*, z_v) = f_{A\infty}(\chi^*, \hat{E}_{\infty Z}(z_v)) \quad (4.14)$$

#### 4.3.5 Fehlerverhalten der allgemeinen Verformungsabklingfunktion

Wie schon im vorangegangenen Abschnitt erläutert, findet über den Zahnkontakt eine ausgleichende Mittelung hinsichtlich der Abklingcharakteristik statt, sodass individuelle Unterschiede in den Verformungsabklingfunktionen durch die Kontaktpaarung nie voll wirksam werden. Wenn allerdings eine Radpaarung mit einer Übersetzung nahe  $i = 1$  betrachtet wird, dann findet dieser Ausgleich nur im begrenzten Maße statt. Der Fehleranteil, der dabei an der Gesamtverformung entsteht, wird aber nur unter Applikation einer Einzellast voll wirksam. Aufgrund der Eigenschaft der Abklingfunktion, dass das Integral immer  $\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\infty} = 1$  ergibt, wird der Fehler mit zunehmender Traglinienlänge gegenüber der Zahnbreite schnell kleiner und geht bei 100 % Traglinienlänge sowie konstanter Lastverteilung gegen Null. Der aus diesem Verhalten resultierende maximal mögliche Fehleranteil an der Gesamtverformung soll für eine Zähnezahl von  $z_v = 20$  abgeschätzt und bewertet werden. Diese Zähnezahl entspricht aus Sicht der Tragfähigkeit einer praxisüblichen Empfehlung für 1:1 Übersetzungen, wie sie auch in der Literatur z.B. in [Sc10] gefunden werden kann.

Zunächst erfolgt die Fehlerbewertung für eine Geradverzahnung. Die Untersuchungen werden an einem Zahn mit einer Breite von  $b_A = 10 m_n$  und einer Variation der relativen Traglinienlänge  $b_{TL\text{eff}}$  zwischen 0 % (Einzellast) und 100 % der Zahnbreite durchgeführt. Auf Basis einer elliptischen Lastverteilung werden die resultierenden Gesamtverformungen in Abhängigkeit von der Traglinienlänge berechnet. Verglichen wird der Unterschied der maximalen Verformung aus der Berechnung mit zwei Verformungsabklingfunktionen, die unterschiedliche Maximalwerte besitzen. Der eine Maximalwert entspricht  $\hat{E}_{\infty Z}$  gemäß Gleichung (4.13) und der andere Maximalwert entspricht dem größten Maximalwert  $\hat{E}_{\infty P\text{max}}$ , der bei einer Ersatzzähnezahl von  $z_v = 20$  erreicht wird. Abbildung 4.13 zeigt das Ergebnis dieses Vergleiches als Fehlerkurve über der relativen Traglinienlänge. Wenn man bei einer Geradverzahnung davon ausgeht, dass die verformungs- und beanspruchungsrelevanten Traglinien unter Vollast länger als 60 % der Zahnbreite sind, dann ist der maximale Verformungsfehler bei

der Anwendung der allgemeinen Verformungsabklingfunktion gemäß Gleichung (4.14) kleiner als  $\pm 5\%$ .

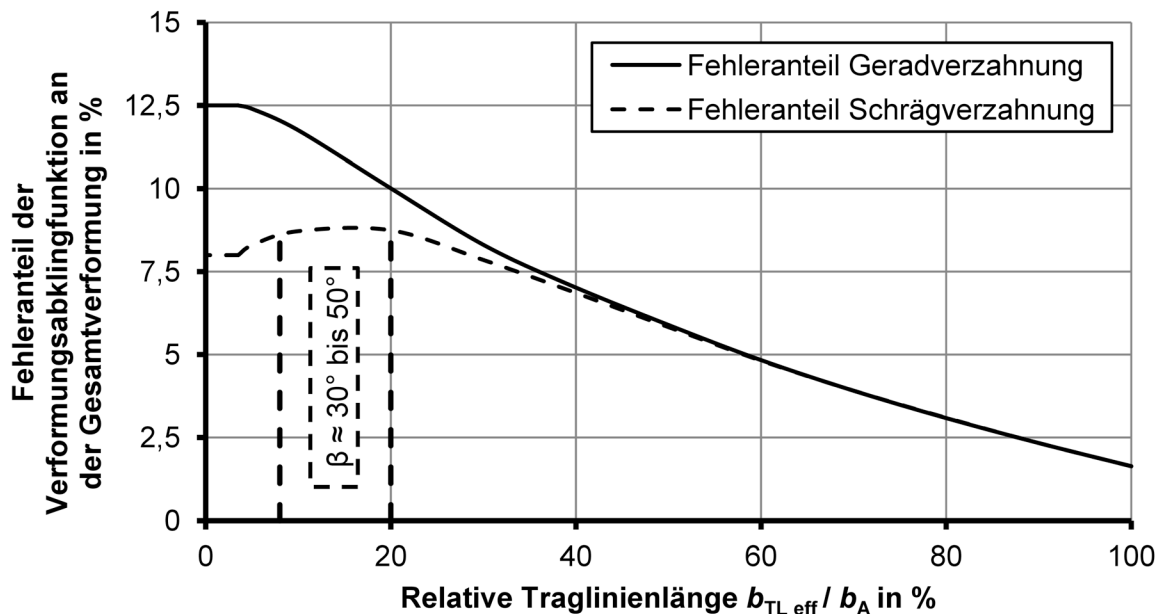


Abbildung 4.13: Fehleranteil der Verformungsabklingfunktion an der Gesamtverformung in Abhängigkeit der relativen Traglinienlänge und vom Schrägungswinkel

Die Maximalfehlerbetrachtung soll nun auch für Schrägungswinkel bis  $\beta = 50^\circ$  durchgeführt werden. Die effektive Traglinienlänge  $b_{TL\,eff}$  wird dabei als Projektion der schräg verlaufenden Traglinie auf  $b_A$  berechnet. Mit größer werdendem Schrägungswinkel nimmt damit die Traglinienlänge ab und der Fehler wird dementsprechend größer. Allerdings steigt auch die Ersatzzähnezahl und damit wird der Fehler wie in Abbildung 4.11 erkennbar wieder kleiner. Dies wurde bei der Berechnung der Fehlerkurve für Schrägverzahnungen in Abbildung 4.13 berücksichtigt. Der maximale Fehler für Schrägverzahnungen ergibt sich demnach mit ca.  $\pm 10\%$ .

Es wird hier davon ausgegangen, dass aufgrund des mittelnden Ausgleichs der Kontaktpaarung die hier gefundenen maximal zu erwartenden Fehleranteile an der Gesamtverformung generell  $\pm 10\%$  nicht überschreiten. Diese Fehlerbetrachtungen zeigen, dass die gefundene ersatzzähnezahlabhängige allgemeine Verformungsabklingfunktion, auch im ungünstigsten Fall einer Radpaarung mit 1:1 Übersetzung, das reale profilform- und kraftangriffshöhenabhängige Verformungsabklingverhalten gut annähert.

#### 4.3.6 Einfluss der veränderlichen Normalschnittgeometrie

Die Änderung der Normalschnittgeometrie bzw. der Profilform längs des Zahnes besitzt hinsichtlich der allgemeinen Verformungsabklingfunktion einen relativ geringen Einfluss. Dies kann aus Abbildung 4.11 und Abbildung 4.13 geschlussfolgert werden. Denn die geometri-

schen Änderungen über der Zahnbreite fallen geringer aus als die, die jeweils über der Ersatzzähnezahl in Abbildung 4.11 aufgetragen wurden. Gepaart mit der großen Fehlertoleranz, die durch Abbildung 4.13 veranschaulicht wird, kann in guter Näherung auf eine Berücksichtigung bei der Berechnung der allgemeinen Verformungsabklingfunktion verzichtet werden. Allerdings können die Auswirkungen auf den Bezugswert besonders in den stirnseitennahen Zahnbereichen relativ groß ausfallen. Deshalb wird die Änderung der Normalschnittgeometrie über eine breitenpositionsabhängige Bezugswertberechnung berücksichtigt.

## 4.4 Bezugswert der Biegeverformung

### 4.4.1 Näherungslösung

Für die Berechnung der Zahnverformung unter konstanter Streckenlast für den EVZ (Bezugswert) setzte Baumann [Ba91] die analytische Lösung für symmetrische Zahnprofile nach Weber/Banaschek [WBN55] ein (siehe Abbildung 4.14). Bei dieser wird die Formänderungsarbeit der Spannungsenergie gleichgesetzt. Die Spannungsenergie ist nach Gleichung (4.15) die Summe aus den Teilenergien des Biegemomentes, der Quer- und der Druckkraft. Der Zahndickenwert  $x$  wird als Funktion von  $y$  verstanden. Um die Verformungen nicht im ESZ sondern im EVZ zu erhalten, wird statt des Elastizitätsmoduls  $E$  der Ausdruck  $E'$  verwendet.

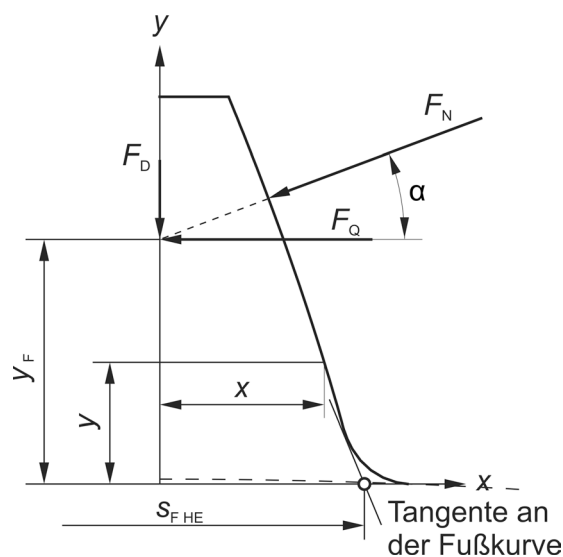


Abbildung 4.14: Symmetrisches Zahnprofil mit wirkender Normalkraft  $F_N$  und Einspannungszahnfußdicke  $s_{FHE}$

Das erste Integral in Gleichung (4.15) repräsentiert die Spannungsenergie der Biegung unter der Annahme, dass die verformten Querschnitte eben und senkrecht zur neutralen Faser bzw. Balkenachse bleiben (Bernoulli-Theorie). Die damit berechnete Biegeverformung wird im Weiteren mit  $f_{2Db}$  bezeichnet.

Das zweite Integral verkörpert die Schubverformung nach Timoshenko mit einem Schubkorrekturfaktor für Rechteckquerschnitte von  $\kappa = 1,2$ . Durch diese Erweiterung bleiben die Querschnitte zwar weiterhin eben, aber nicht mehr senkrecht zur Balkenachse. Der daraus resultierende Schubverformungsanteil wird mit  $f_{2D_s}$  bezeichnet.

Das dritte Integral beschreibt die Druckverformung  $f_{2D_d}$ . Bei der Formulierung dieses Anteiles wird vorausgesetzt, dass der Balkenquerschnitt sich nur wenig verändert und dass die Kraft über der Querschnittfläche gleichmäßig verteilt ist.

Die Gesamtverformung  $f_{2D}$  wird aus der Summe der aufgezählten Teilverformungen gebildet.

$$\frac{1}{2} \cdot F_N \cdot f_{2D} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \int_0^{y_F} \frac{M_b(y)^2}{E' \cdot \frac{1}{12} \cdot \Delta b_{A_i} \cdot (2 \cdot x)^3} dy + \int_0^{y_F} \frac{\kappa \cdot F_Q^2}{G \cdot \Delta b_{A_i} \cdot 2 \cdot x} dy + \int_0^{y_F} \frac{F_D^2}{E' \cdot \Delta b_{A_i} \cdot 2 \cdot x} dy \right] \quad (4.15)$$

mit

$$F_D = F_N \cdot \sin \alpha, \quad F_Q = F_N \cdot \cos \alpha, \quad M_b(y) = (F_Q + F_D \cdot \tan \alpha_{ng}) \cdot (y_F - y)$$

$$\text{und } E' = \frac{E}{(1 - \nu^2)}, \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}, \quad \Delta b_{A_i} = m_n$$

Um eine einfache Lösung der Integrale zu ermöglichen, näherte Baumann [Ba91] wie von Ziegler [Zi71] vorgeschlagen die Zahnkontur mit Hilfe eines quadratischen Polynoms an. Dieses Konturpolynom wird mit Hilfe von Gleichung (4.16) formuliert. Die Stützstellen für die Berechnung der Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  werden aus den Konturpunkten der jeweiligen Zahnabschnittsgeometrie ermittelt. Dafür wird ein Stützpunkt in Zahnkopfnähe, einer in Nutzflankenhöhenmitte sowie einer in der Nähe des Übergangs zwischen Nutzflanke und Zahnfuß ausgewählt. Für die jeweiligen Zahnhöhen werden die Zahndicken berechnet. Das so erhaltene individuelle Konturpolynom beschreibt den Zahndickenverlauf eines symmetrischen Zahnprofils in Abhängigkeit von  $x$ , wie er für Gleichung (4.15) benötigt wird. Durch die Beschreibung des Zahnes mit Konturpolynom kann der Zahnfuß nicht explizit erfasst werden. Dies führt besonders bei großem Unterschnitt zu einer starken Näherung bezüglich der Beschreibung der Zahndickenverläufe. Asymmetrische Zahnprofile werden durch ein symmetrisches Ersatzprofil so angenähert, dass die Zahndicke unverändert bleibt, aber symmetrisch zu einer senkrechten Ersatzsymmetrieachse ausgerichtet ist. Die Symmetrieachse des asymmetrischen Zahnes ist gegenüber der Ersatzsymmetrieachse um den Grenzeingriffswinkel  $\alpha_{ng}$  geneigt. Dies erzeugt aufgrund der nichtmittigen Druckkräfteinleitung ein zusätzliches vorzeichenbehaftetes Biegemoment, das in die Biegemomentenbilanz mit einbezogen werden muss.

$$x(y) = a \cdot y^2 + b \cdot y + c \quad (4.16)$$

Die Einspannelastizitt zwischen Zahn und Radkörper wird bei der Lösung nach Weber/Banaschek [WBN55] auf Basis der Verformung einer Halbebene berechnet. Auf diese wirken das Biegemoment, die Quer- und die Druckkraft. Dabei wird angenommen, dass der Zahn ein symmetrisches Profil besitzt und ideal steif ist. Daraus resultiert, dass die Quer- sowie die Druckkraft konstant über die Einleitungsflche verteilt sind und das Biegemoment symmetrisch bezüglich des Schwerpunktes wirkt. Ziegler [Zi71] trennt die von Weber/Banaschek beschriebenen Verformungsanteile in eine Parallelverschiebung  $f_{N2Dp}$  gemäß Gleichung (4.17) und eine Neigung des Zahnes  $f_{N2Dn}$  gemäß Gleichung (4.18). Diese getrennte Formulierung wird auch durch Baumann übernommen. Als Anbindungsdicke des Zahnes an die Halbebene schlagen Weber/Banaschek die Zahnfudicke  $s_{FHE}$  vor, die durch den Schnittpunkt der 20-Tangente an der Zahnfußkurve mit der  $x$ -Achse gemäß Abbildung 4.14 entsteht. Entgegen dieser Empfehlung nutzt Baumann die Zahnfudicke, die durch den Schnittpunkt mit der 30-Tangente definiert wird. Prinzipiell verhält es sich so, dass die Halbebenenanbindung umso weicher wird, je kleiner  $s_{FHE}$  ausfllt. Allerdings ist der Unterschied zwischen der Verformungsreaktion auf Basis der 20- und 30-Tangente nur marginal und kann vernachlässigt werden. Dennoch ist eine allgemein zutreffende, eindeutige Festlegung von  $s_{FHE}$  insbesondere bei asymmetrischen Verzahnungen nicht möglich. Da die Einspannungsverformung des Radkörpers einen sehr großen Anteil an der Gesamtverformung hat, ist dies aber entscheidend für die Qualität des Gesamtergebnisses.

$$f_{N2Dp} = f_{2Db} \cdot \cos \alpha + f_{2Ds} \cdot \sin \alpha \cdot c_{33} \quad (4.17)$$

mit

$$c_{22} \approx 2,4 \cdot \frac{1 - \nu^2}{\pi \cdot E} \quad \text{und} \quad c_{33} \approx c_{22} \cdot \frac{1 - \nu}{2 \cdot K}$$

$$f_{N2Dn} = \frac{2 \cdot (F_Q + F_D \cdot \tan \alpha_{ng})}{s_{FHE}} \cdot \left( c_{11} \cdot \frac{y_F^2}{s_{FHE}} + 2 \cdot c_{12} \cdot y_F \right) \cdot \frac{y}{y_F} \cdot \cos \alpha \quad (4.18)$$

mit

$$c_{11} = \frac{9 \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E} \quad \text{und} \quad c_{12} = \frac{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}{2 \cdot E}$$

Die Zahngesamtverformung in Kontaktnormalenrichtung ergibt sich aus der Summe der behandelten Einzelverformungsanteile gemäß Gleichung (4.19).

$$f_{N2D} = (f_{2Db} + f_{2Ds}) \cdot \cos \alpha + f_{2Dd} \cdot \sin \alpha + f_{N2Dp} + f_{N2Dn} \quad (4.19)$$



Damit gelten folgende vereinfachende Annahmen für die Berechnung des Bezugswertes der Zahnverformung:

- die Zahnfußgeometrie wird nicht explizit erfasst
- die Querschnitte bleiben während der Verformung eben
- der Querschnitt ist nur wenig veränderlich (keine große Änderung in der Zahndicke)
- es werden ausschließlich symmetrische Zahnprofile erfasst
- die richtige Wahl der Zahnfußdicke  $s_{FHE}$  am Übergang zur Halbebene ist nicht immer zuverlässig möglich
- die Einleitung der Belastungen in die Halbebene erfolgt symmetrisch bezüglich einer Ersatzsymmetrieachse des Zahnes

Diese vereinfachenden Annahmen führen dazu, dass die Genauigkeit der analytischen Lösung stark von der betrachteten Profilform abhängt. Die Genauigkeit des Bezugswertes verhält sich, im Gegensatz zur allgemeinen Verformungsabklingfunktion, direkt proportional zur Biegeverformung des Zahnes. Deshalb ist es erforderlich, dass eine größtmögliche Genauigkeit erreicht wird. Aus diesem Grund wird anhand eines Vergleiches zwischen der beschriebenen analytischen Näherungslösung und FEM-Berechnungen der Einfluss der aufgezählten vereinfachenden Annahmen bewertet. Neben der absoluten ist die relative Aussagekraft von besonderer Bedeutung. Das heißt, die Genauigkeit darf nicht maßgeblich von der Profilform sowie der Kraftangriffshöhe abhängen.

Abbildung 4.15 bis Abbildung 4.18 zeigen die Ergebnisse des FEM-Vergleichs exemplarisch für die drei besonders relevanten Fälle

- zahnstangenähnliches Profil
- Profil mit großem Unterschnitt
- asymmetrisches Zahnprofil.

Die Vernetzung und die Größe des rechteckigen Radkörpersegmentes der elastischen Einspannung des FEM-Modells wurden im Abgleich mit der analytischen Lösung für das zahnstangenähnliche Profil in Abbildung 4.15 entwickelt. Die vereinfachenden Annahmen der analytischen Näherungslösung bilden für diesen Fall sehr gut die realen Bedingungen ab und deshalb kann daran die FEM-Berechnung zuverlässig kalibriert werden. Ist die prozentuale Abweichung negativ, dann sind die analytisch berechneten Verformungen kleiner als die mittels FEM bestimmten und umgekehrt. Für das zahnstangenähnliche Profil in Abbildung 4.15 stimmen die Ergebnisse sehr gut überein, nur im unmittelbaren Fußbereich gibt es größere Abweichungen, die allerdings von geringer Bedeutung sind, da die Verformungen an dieser Stelle sehr klein ausfallen. Das Zahnprofil mit großem Unterschnitt zeigt im FEM-Vergleich bis auf den unmittelbaren Kopfeingriff allerdings sehr große Abweichungen. Diese sind bis hin zum fußnahen Eingriff relevant, denn die Verformung an der Stelle  $F_7$  beträgt ca. noch 50 % von der Verformung an Stelle  $F_1$ . Das asymmetrische Zahnprofil mit den Kraftangriffen an der Zahnflanke mit großem Eingriffswinkel zeigt (siehe Abbildung 4.17) eine ähnlich gute Übereinstimmung mit der FEM-Lösung, wie die Berechnungen in Abbildung 4.15.

Wechselt der Kraftangriff auf die Zahnflanke mit dem kleinen Eingriffswinkel, dann fällt der Unterschied zwischen der FEM-Lösung und der analytischen Näherungslösung groß aus.

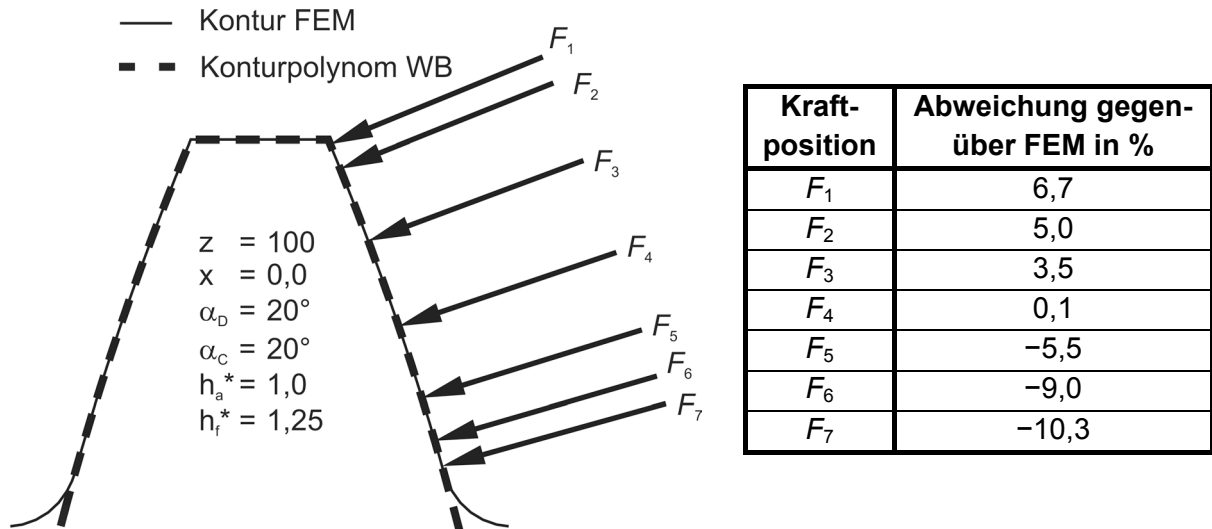


Abbildung 4.15: Vergleich der analytischen Verformungsberechnungen mit FEM-Verformungsberechnungen am zahnstangenähnlichen Profil

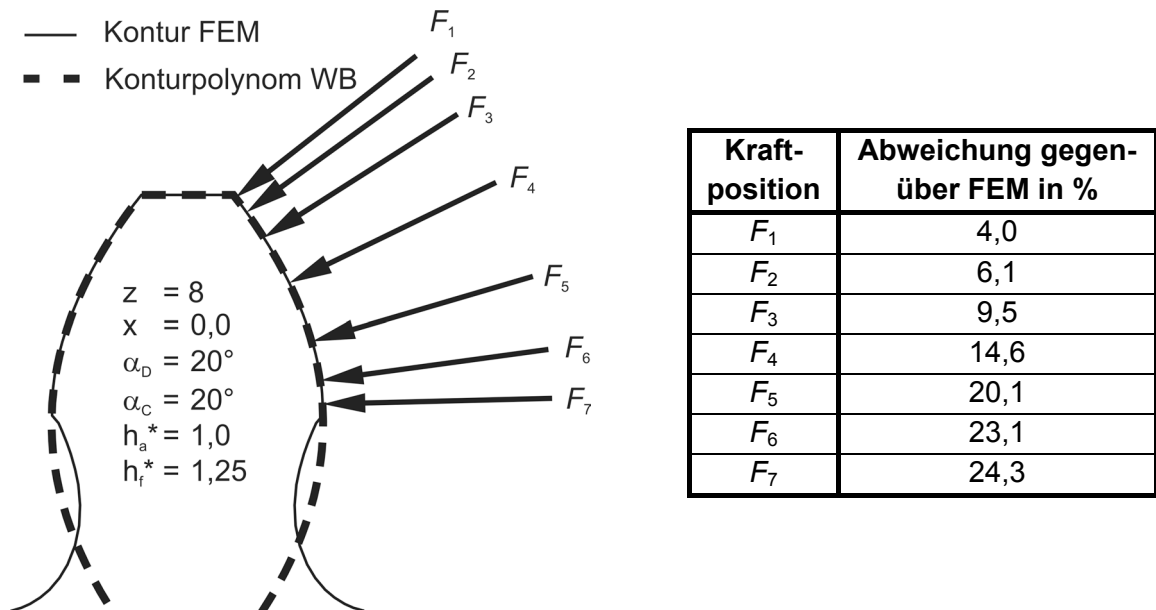


Abbildung 4.16: Vergleich der analytischen Verformungsberechnungen mit FEM-Verformungsberechnungen an einem Profil mit großem Unterschnitt

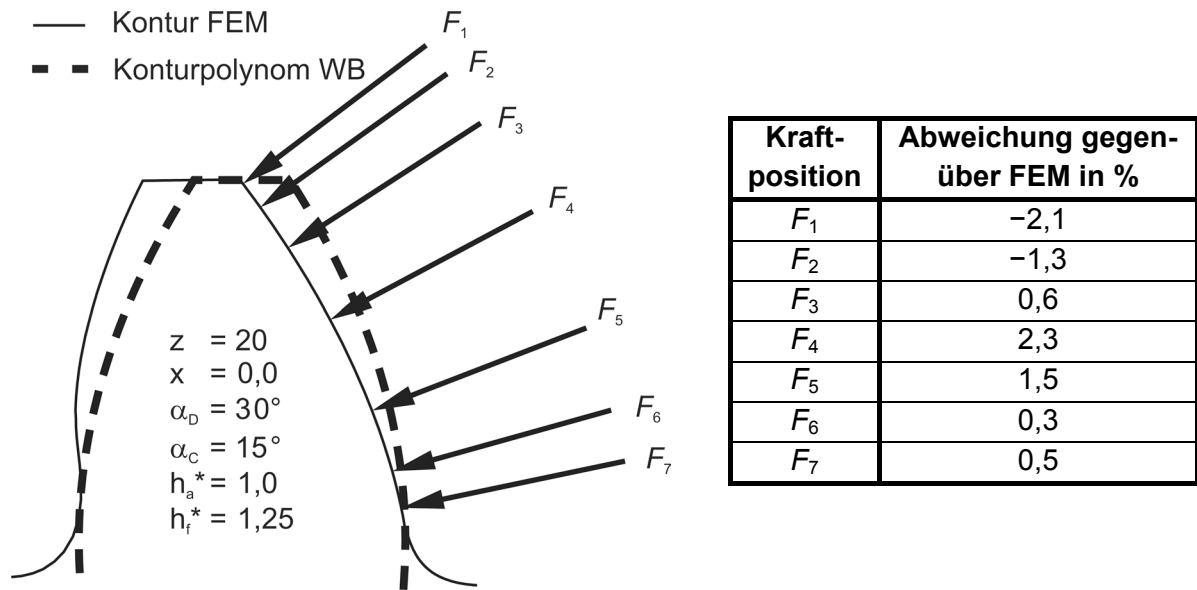


Abbildung 4.17: Vergleich der analytischen Verformungsberechnungen mit FEM-Verformungsberechnungen an einem asymmetrischen Profil mit Kraftangriff auf der Flanke mit großem Eingriffswinkel

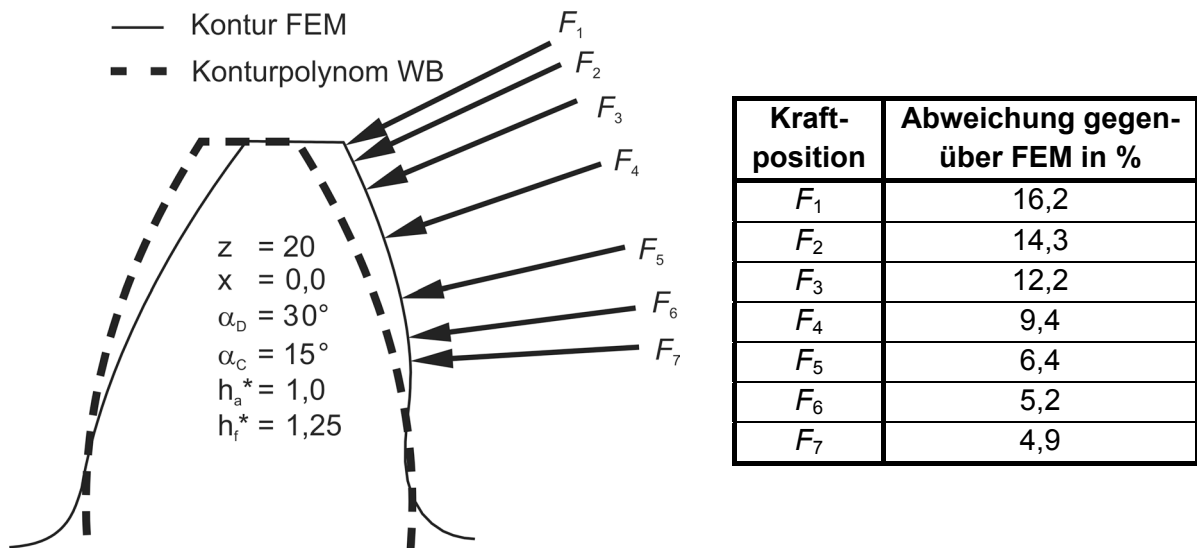


Abbildung 4.18: Vergleich der analytischen Verformungsberechnungen mit FEM-Verformungsberechnungen an einem asymmetrischen Profil mit Kraftangriff auf der Flanke mit kleinem Eingriffswinkel

Ziel dieser Arbeit ist es, eine freie Gestaltung der Zahnprofile im Rahmen der Verzahnungsauslegung und -optimierung zu ermöglichen. Unter diesem Gesichtspunkt werden die Anforderungen an den Bezugswert durch eine Berechnung auf Basis der analytischen Näherungslösung hinsichtlich der absoluten Genauigkeit lediglich bedingt und hinsichtlich der relativen Genauigkeit nur unzureichend erfüllt.

Auf Basis der durchgeführten FEM-Vergleichsberechnungen wird festgestellt, dass eine Verbesserung der Bezugswertberechnung die Aussagekraft und Zuverlässigkeit der Berechnung der Zahnbiegeverformung signifikant steigern kann.

#### **4.4.2 Wahl einer Methode zur Verbesserung der Bezugswertberechnung**

Um die Berechnung der Zahnverformung für beliebige Zahnprofilformen mit vergleichbarer absoluter und relativer Aussagekraft zu ermöglichen, muss eine numerische Berechnung der Bezugswerte angewendet werden. Für die Umsetzung kommen ebene FEM- oder BEM-Verfahren infrage. Die wesentlichen Entscheidungskriterien für die Wahl der Methode sind Stabilität, gutes Konvergenzverhalten und kurze Rechenzeiten. Unter Stabilität wird hier prinzipiell die Möglichkeit verstanden, einen Vernetzungsalgorithmus für beliebige Zahnprofile zu entwickeln der es garantiert, auch für ungünstige geometrische Profilformen ein fehlerfreies Netz zu generieren. Ein Vernetzungsfehler, der z.B. aus geometrischen Unstetigkeiten der Profilform resultiert, wie sie bei sehr großem Unterschnitt oder Schleifabsätzen entstehen können, bewirkt unbemerkt fehlerhafte Verformungsberechnungen oder gar einen Berechnungsabbruch.

Vor allem bei der Berechnung von Spannungskonzentrationsfaktoren kamen in der Vergangenheit numerische Verfahren zum Einsatz. Aufgrund des hohen Verbreitungsgrades und der guten Verfügbarkeit wird dabei häufig die FEM eingesetzt. Auch die BEM wird bei der Bestimmung von Spannungskonzentrationsfaktoren angewendet. Allerdings geschieht dies im deutlich geringeren Umfang als bei der FEM, da aufgrund der vergleichsweise geringen Verbreitung professioneller und vollständig einsetzbarer Programmsysteme praktisch immer individuelle Lösungen entwickelt werden müssen [Li78], [VH88], [CH94]. Allerdings besitzt die BEM genau die beschriebenen Eigenschaften hinsichtlich der Stabilität und des Konvergenzverhaltens, die hier gefordert werden. Dies resultiert aus dem großen Vorteil der BEM gegenüber der FEM, nur den Rand und nicht das gesamte Bauteil vernetzen zu müssen. Damit ist die Problembeschreibung immer um eine Dimension kleiner als bei einer vergleichbaren FEM-Lösung. Die Gegenüberstellung eines FEM- und BEM-Modells eines Zahnes mit elastischer Einspannung in Abbildung 4.19 verdeutlicht dies. Die Notwendigkeit, nur den Rand des zu betrachtenden Gebietes vernetzen zu müssen, ermöglicht es, sehr kompakte, allgemeingültige und stabile Vernetzungsalgorithmen zu formulieren. Dadurch, dass keine Vernetzung des Gebietes oder aus der Sicht auf den Zahn formuliert, nicht in die Tiefe vernetzt werden muss, sorgt dafür, dass profilformunabhängig immer die gleiche Ergebnisqualität erreicht werden kann. Besonders im Falle der Behandlung der schon erwähnten geometrischen Unstetigkeiten, wie sie z.B. bei

- sehr großem Unterschnitt
- Schleifabsätzen
- Graten im Zahnfußgrund
- Optimierung des Zahnfußes als Freiformfläche

auftreten, bedarf es zunächst in der Regel keiner besonderen Behandlung oder Fallunterscheidung. Um die geometrischen Unstetigkeiten richtig abbilden zu können, müssen diese zwar zwischen zwei Randelementen liegen, wenn dem nicht so ist, wird allerdings nur die Spannung in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeit fehlerhaft berechnet. Die globale Genauigkeit oder Stabilität wird davon nicht beeinflusst. Aus diesem Grund wird ein BEM-Programm-Modul entwickelt, mit welchem dieser Bezugswert ohne geometrische Einschränkungen zuverlässig berechnet werden kann.

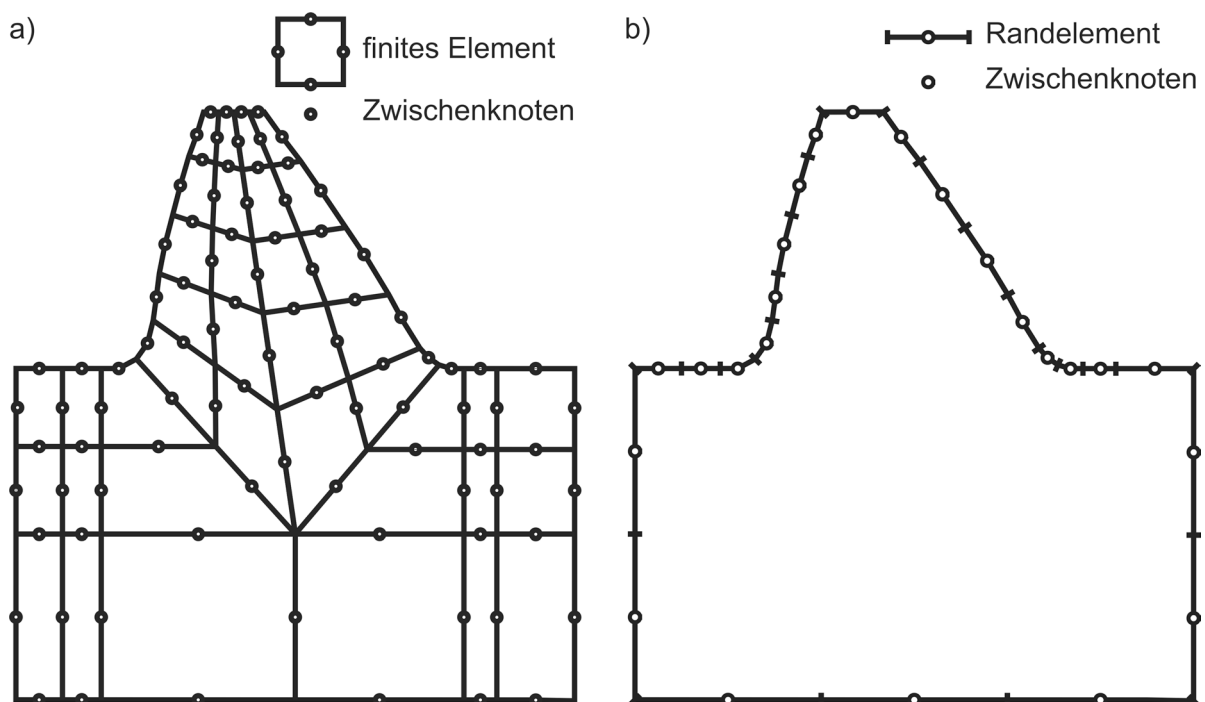


Abbildung 4.19: Gegenüberstellung eines FEM- und BEM-Modells eines asymmetrischen Zahnes mit elastischer Einspannung; a) FEM-Modell basierend auf einem Elementnetz mit quadratischen Formfunktionen; b) BEM-Modell basierend auf Randelementen mit quadratischer Formfunktion

#### 4.4.3 Auswahl des BEM-Verfahrens

In der Vergangenheit hat sich im Zusammenhang mit der Berechnung von Spannungskonzentrationsfaktoren eine von Brechling entwickelte Lösung auf Basis des Singularitätenverfahrens [Br69], einer speziellen Variante der indirekten Randintegralmethode, bewährt [Li78], [LB94], [LB96], [LB97], [Hü01], [KLB13]. Dieses baut auf der Lösung der biharmonischen Airyschen Gleichung auf, mit der der zweiachsige Spannungszustand beschrieben wird. Brechling nutzte dafür das aus der Strömungsmechanik für die Lösung der

harmonischen Potentialgleichung bekannte Singularitätenverfahren. Dabei wird der Rand mit sogenannten Aufpunkten belegt. Die Lösung wird durch die Superposition der normal zum Rand in den Aufpunkten stehenden Singularitäten bzw. durch die in deren Umgebung entstehenden Singularitätenfelder erzeugt. Die durch die Singularitätenfelder erzeugten Funktionen verkörpern dabei Spannungen und Verformungen. Dieses Verfahren hat einerseits den großen Vorteil von extrem kurzen Lösungs-/Berechnungszeiten im Vergleich zu anderen numerischen Verfahren wie der FEM oder FDM, andererseits sind die Anforderung an die Modellierung des konkreten technischen Problems sehr hoch.

Brechling gibt in [Br69] an, dass spezielle Ansätze verwendet werden müssen, um die Fehlerfortpflanzung zu kontrollieren. Die Verteilung der Aufpunkte und die Abstände untereinander [Li78] sowie die Abstände zwischen Singularitäten und Rand [Br69] müssen bestimmten Anforderungen genügen. Das Verfahren lässt prinzipiell keine Unstetigkeiten (Ecken) im zu beschreibenden Rand zu. Dies bedeutet, dass alle Ecken speziell behandelt werden müssen, z.B. kann eine Annäherung durch Kreisbögen erfolgen, die tangential in den Rand übergehen. Sowohl Brechling [Br69] als auch Linke [Li78] empfehlen zur Genauigkeitsverbesserung die Kombination der numerischen Berechnung des speziellen Falls mit einer analytischen Berechnung, die den speziellen Fall näherungsweise beschreibt. Linke [Li78] bezieht z.B. bei der Zahnfußspannungsberechnung die numerisch ermittelte örtliche Fußspannung auf die Nennspannung des Querschnitts mit der höchsten Spannungskonzentration. Die aufgeführten Sachverhalte berechtigen zu der Annahme, dass andere numerische Berechnungsmethoden hier einfacher zugänglich sind.

Aufgrund der einfacheren Handhabbarkeit und der nachweislich hohen Genauigkeit wurde ein direktes 2D-BEM-Verfahren nach der Kollokationsmethode, wie in [Gr91], [BD92] beschrieben, für die Entwicklung des BEM-Programmmoduls ausgewählt. Zwar besteht ein deutlicher Rechenzeitnachteil gegenüber dem beschriebenen Singularitätenverfahren, aber aufgrund der heutzutage verfügbaren allgemein hohen Rechnerleistung und der Anwendung auf den zweiachsigen Spannungszustand spielt dies nur eine untergeordnete Rolle. Eine höhere Priorität hat in diesem Zusammenhang, dass eine Diskretisierung des Randes des zu berechnenden Gebietes deutlich einfacher und zuverlässiger möglich scheint, als beim Singularitätenverfahren. Eine Abbildung von Kanten ist prinzipiell gegeben und die sehr hohen Anforderungen an die Stetigkeit der Geometrie, wie sie beim Singularitätenverfahren vorliegen, entfallen.

#### **4.4.4 Verfahrensbeschreibung für das BEM-Programm-Modul**

Die Herleitung der BEM ist mathematisch sehr aufwendig und wie bei der FEM in einer Vielzahl von Lehrbüchern und anderen Veröffentlichungen ausführlich beschrieben [Gr91], [BD92]. Deshalb wird hier auf eine umfangreiche Darstellung und formelmäßige Beschreibung verzichtet und das angewendete Verfahren lediglich durch seine wichtigsten Grundzüge charakterisiert.

Das gekoppelte, lineare, partielle Differentialgleichungssystem der linearen Elastizitätstheorie, die so genannten Lamé-Navier-Gleichungen zur Beschreibung des Verschiebungsfeldes fester Körper, gilt es für den allgemeinen Fall gemischter Randbedingungen zu lösen. Zunächst wird diese differentielle Gebietsbeschreibung in eine entsprechende Randintegralgleichung umgewandelt und die Dimension des Problems damit um Eins verringert. Die Umwandlung erfolgt unter Verwendung der Methode der gewichteten Residuen und einer Fundamentallösung als Wichtungsfunktion. Diese entspricht physikalisch der symmetrischen Verschiebungsfunktion eines unendlich ausgedehnten Gebietes unter Wirkung einer einzelnen Punktlast, der sogenannten Kelvin-Lösung und einer dazu korrespondierenden Beschreibung der Randspannungen. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen erhält man so eine Randintegralgleichung, deren Lösung die nicht durch die Randbedingungen festgelegten Randverschiebungen und -spannungen liefert.

Mit der BEM wird die Randintegralgleichung numerisch gelöst. Zu diesem Zweck wird der Rand durch eine endliche Anzahl finiter Elemente, den sogenannten Randelementen oder auch Boundary Elements, approximiert (siehe Abbildung 4.19). Ziel ist es, die Randintegralgleichung in ein System linearer Gleichungen zu überführen, welches einfach gelöst werden kann.

Bei der hier umgesetzten Variante kommen für die Approximation der Geometrie und der Randfunktion Randelemente mit quadratischer Serendipity-Formfunktion zum Einsatz. Unter der Randfunktion werden hier die Randverschiebungs- und Randspannungsvektoren verstanden. Innerhalb eines Elements wird die Geometrie sowie die Randfunktion über die Extremknoten sowie den Mittelknoten diskret erfasst. Der kontinuierliche Verlauf über dem Element wird mittels der interpolierenden Formfunktion dargestellt. Werden, wie hier, Geometrie und Randfunktion mit demselben Grad der Formfunktion interpoliert, bezeichnet man den verwendeten Elementtyp als isoparametrisch.

Durch die Diskretisierung mit Randelementen lässt sich das Randintegral als Summe der Teilintegrale über den Randelementen abbilden. Zu diesem Zweck werden sogenannte Quell- oder Ladepunkte auf dem Rand verteilt und gefordert, dass die Randintegralgleichung in diesen Punkten erfüllt wird. Diese Ladepunkte werden auf die Elementknoten gelegt und heißen im Kontext der numerischen Lösung des Randintegrals auf Basis der Elementteilintegrale Kollokationspunkte. Für jeden Kollokationspunkt werden die Elementteilintegrale der Elemente berechnet, die zu den jeweils anderen Kollokationspunkten gehören (Kollokationsmethode). So entstehen jeweils eine Randverschiebungseinflusszahlenmatrix sowie eine Randspannungseinflusszahlenmatrix, die die Wechselwirkungen zwischen allen Kollokationspunkten bzw. Elementknoten beschreiben. Zusammen mit dem Randverschiebungsvektor sowie dem Randspannungsvektor und den Randbedingungen kann ein Gleichungssystem aufgestellt werden, dessen Lösung die gesuchten Randverschiebungs- und Randspannungsvektoren liefert. Dieses Gleichungssystem ist voll besetzt, nicht symmetrisch und nicht positiv definit. Darin liegt auch der Nachteil gegenüber anderen numerischen Methoden, da spezielle Gleichungslöser, die über die Ausnutzung besonderer Eigenschaften des Systems Rechenzeit sparen, nicht zum Einsatz kommen können. Aufgrund der Entwicklung der

Rechnergeschwindigkeiten und -kapazitäten wird diesem Thema aber bei der Behandlung zweidimensionaler Probleme mit wenig Freiheitsgraden kein großer Stellenwert eingeräumt. Dies wird durch Untersuchungen von Liu unterstrichen. In [Li14] stellt er die sogenannte Fast Multipole BEM (FMBEM) vor, die den Geschwindigkeitsnachteil der BEM gegenüber anderer Methoden unter Verwendung der Fast Multipole Methode (FMM) behebt. In diesem Rahmen hat er auch die notwendigen Central Processing Unit Zeiten (CPU-Zeiten) der BEM und der FMBEM in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden verglichen. Diese Vergleiche zeigen, dass bei Modellen mit bis zu ca. 1000 Freiheitsgraden die BEM sogar schneller als die FMBEM ist und erst ab ca. 2000 Freiheitsgraden der signifikante Geschwindigkeitsvorteil der FMBEM wirksam wird.

Der Integrand der Elementteilintegrale besteht aus der Fundamentallösung als Kernfunktion sowie der Formfunktion. Die Elementteilintegrale werden unter Verwendung der Gauß-Legendre-Quadraturformel numerisch gelöst. Dabei besteht die Herausforderung in der Festlegung der Integrationsordnung, das heißt in der Festlegung der Anzahl der Stützstellen [Gr91]. Diese Festlegung entscheidet maßgeblich über die Unabhängigkeit der Ergebnisgenauigkeit von der Geometrie des Berechnungsgebietes. Die Genauigkeit hängt im 2D-Fall vom Verhältnis der Elementlänge  $L$  zum minimalen Abstand zwischen Element und Kollokationspunkt  $r$  ab. Berechnet man die Elementteilintegrale mit konstanter Integrationsordnung, dann sinkt die Genauigkeit mit kleiner werdendem Verhältnis  $r/L$ . Ziel ist es aber, die Integrationsordnung so zu wählen, dass die Genauigkeit der Quadratur unabhängig vom Verhältnis  $r/L$  und immer gleich ist. Um eine gleichmäßige Integration zu gewährleisten, wurde ein adaptiver Integrationsalgorithmus integriert, der die Abhängigkeit der Integrationsordnung vom Verhältnis  $r/L$  gemäß [EDM05] berücksichtigt. Der entwickelte Algorithmus ermöglicht wie in [EDM05] eine Gauß-Legendre-Quadratur bis zur 16ten Ordnung. Da diese endliche Anzahl unter Umständen noch nicht ausreichend ist, besonders bei der späteren Berechnung gebietsinterner Verschiebungen und Spannungen, wurde der Algorithmus um eine Unterteilung der Elementteilintegrale in beliebig viele Subintegrale erweitert [BSD08]. Dies ermöglicht immer eine numerische Integration mit gleichbleibend hoher Genauigkeit.

Ist der Randspannungsvektor unstetig, wie dies z.B. bei Einspannungen oder Ecken der Fall ist, dann gibt es an den korrespondierenden Knoten mehr Unbekannte als Gleichungen. Um dieses Problem zu lösen, werden die geometrischen Extremknoten mehrfach als Kollokationspunkte verwendet. Die Extremknoten eines Elements sind die geometrischen Knoten, die sich ein Element mit seinen benachbarten Elementen teilt. Die Kollokationspunkte werden nun elementweise vergeben, das heißt im 2D-Fall liegen auf einem geometrischen Knoten, der gleichzeitig der Extremknoten zweier benachbarter Elemente ist, auch zwei Kollokationspunkte. Durch die Erhöhung der Anzahl der Kollokationspunkte wächst auch die Größe des Gleichungssystems und verlängert damit die Rechenzeit. Wenn bei der Aufstellung des Gleichungssystems und der Einarbeitung der Randbedingungen davon ausgegangen wird, dass an einem Mehrfachknoten nur die Spannungsrandbedingungen elementabhängig verschieden vorgegeben werden können, aber der Mehrfachknoten nur einen Verschiebungsvektor besitzt, können die Elemente ohne Unstetigkeit in der Randspannung zusammengehängt werden. Damit wird das Gleichungssystem nur genauso groß wie benötigt. Wegen dieser



randbedingungsabhängigen Unterscheidung, spricht man auch von einer Diskretisierung durch Elemente mit partiellen Mehrfachknoten [GF97].

Wie schon erwähnt, erhält man als direktes Ergebnis der BEM die unbekanntes Randverschiebungs- und Randspannungsvektoren. Gemäß dem in Gleichung (4.20) zum EVZ gehörenden reduzierten räumlichen Spannungszustand entspricht dies  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ . Die Werte  $\sigma_{11}$  sowie  $\sigma_{33}$  müssen im Rahmen eines Postprozessings berechnet werden, wobei sich  $\sigma_{33}$  aus  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$  berechnen lässt. Die Berechnung von  $\sigma_{11}$  erfolgt elementweise und wie auch bei der FEM auf Basis der Dehnung als Ableitung der Verschiebung und dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz [KB02]. Durch die elementweise Berechnung unter Nutzung der Verschiebungsableitung sind die Spannungen an den Extremknoten für jedes Element trotz des geometrisch gleichen Ortes verschieden groß. Bei der FEM begegnet man diesem Phänomen, indem man die Spannungen an den Stützstellen der Gaußintegration, den sogenannten Gaußpunkten, berechnet. Die Spannungen in den Knotenpunkten werden anschließend durch eine geeignete Methode auf diese extrapoliert und elementübergreifend geglättet. Eine solche Methode ist z.B. die Superconvergent Patch Recovery Methode [ZZ92]. Bei den hier verwendeten kontinuierlichen Randelementen mit partiellen Mehrfachknoten sind die Unterschiede in den Randspannungstensoren der Extremknoten zwischen den Elementen sehr gering und können durch eine Mittelwertbildung einfach geglättet werden.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Auch die gebietsinternen Verschiebungen und Spannungen können im Rahmen eines Postprozessings auf Basis der Randlösung für jeden beliebigen inneren Punkt berechnet werden. Die Lösung ergibt sich aus einer Formulierung auf Basis der Summe aller Elementteilintegrale unter Berücksichtigung der speziellen Randlösung. Die numerische Integration der Elementteilintegrale erfolgt wiederum unter Nutzung des adaptiven Gauß-Legendre-Quadratur-Algorithmus. Dies ermöglicht trotz der Randsingularität der Integrale einen kleinen Randabstand für die fehlerfreie Innenpunktauswertung [EDM05].

#### 4.4.5 Auswertung der BEM-Verformungen an der Stelle einer Streckenlast

Für die Bezugswertberechnung wird auch die Biegeverformung des Zahnes an der unmittelbaren Kräfteinleitungsstelle benötigt. Wirkt wie hier erforderlich eine Streckenlast, dann ist die Verformung wie auch schon unter Abschnitt 4.3.3 für die FEM beschrieben an der unmittelbaren Kräfteinleitungsstelle nicht auswertbar (siehe Abbildung 4.20 a)). Um die Verformung dennoch zuverlässig auswerten zu können, wird hier ebenfalls in zwei Berechnungsschritten vorgegangen. Zunächst wird eine Berechnung unter Wirkung einer Einzellast durchgeführt (siehe Abbildung 4.20 a)). Die Randverschiebungen des gesamten Rückflankenbereichs zwischen den Punkten *A* und *B* werden dann in einer zweiten Berechnung an-

statt der Einzellast aufgegeben (siehe Abbildung 4.20 b)). Als Ergebnis erhält man die stetigen und glatten Randverschiebungen sowie Spannungen auf der betrachteten Zahnflanke und kann diese direkt und uneingeschränkt auswerten.

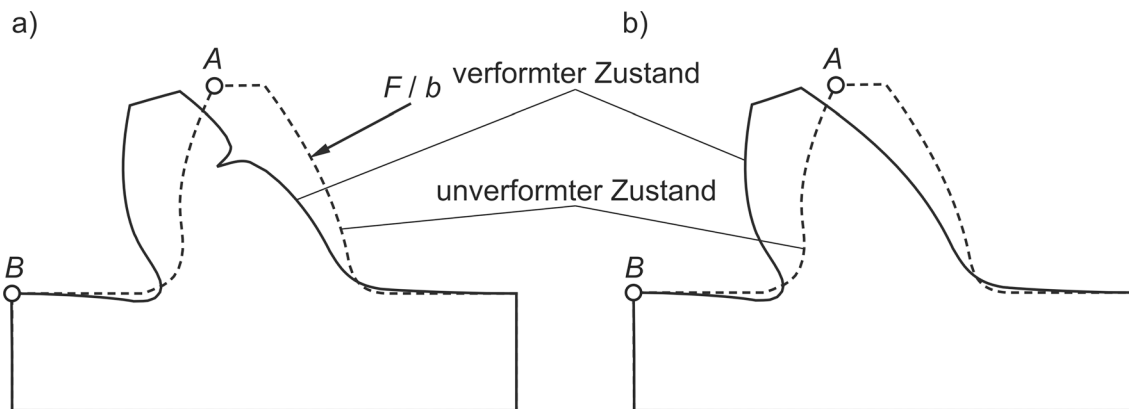


Abbildung 4.20: Glättung der Verschiebungs- und Spannungsunstetigkeiten an der Krafteinleitungsstelle

#### 4.4.6 Überprüfung des BEM-Programm-Moduls und Genauigkeitsbewertung

Um die Genauigkeit des BEM-Programm-Modules hinsichtlich der Berechnung des Bezugswertes zu überprüfen, wurden Vergleiche mit Zahnfußdehnungsmessungen, analytischen Lösungen an zahnähnlichen Geometrien und mit FEM-Verzahnungsberechnungen durchgeführt.

Hirt [Hi76] führte Zahnfußdehnungsmessungen an geradverzahnten Stirnrädern mit Dehnmessketten auf der Zug- sowie Druckseite durch und konnte so den Verlauf der Zahnfußdehnung über dem gesamten Zahnfuß erfassen. Diese rechnete er in die tangentialen Zug- und Druckspannungen um. Exemplarisch für die gute Übereinstimmung steht der Vergleich für die Verzahnung in Abbildung 4.21. Die Abweichungen zwischen Messung und den Berechnungen mit dem BEM-Programm-Modul liegen in der Größenordnung der Messfehler.

Beispielhaft für den Vergleich mit analytischen Lösungen sind in Abbildung 4.22 und Abbildung 4.23 Vergleiche zwischen dem BEM-Programm-Modul und dem zahnähnlichen Vorsprung nach Neuber [Ne01] dargestellt. Aus den Abbildungen kann eine sehr gute Übereinstimmung der Lösungen abgelesen werden. Der Fehler im Maximum ist kleiner als 1 %.

Abbildung 4.24 und Abbildung 4.25 zeigen die prozentualen Abweichungen zwischen Berechnungen mit FEM und dem BEM-Programm-Modul für verschiedene Kraftangriffshöhen. Für jede Kraftangriffshöhe wurde die Verformung an der Krafteinleitungsstelle in Kraftnormalenrichtung und die maximale Tangentialspannung im Zahnfuß verglichen. Ist die Abweichung kleiner Null, dann fällt das Ergebnis der Berechnung mit dem BEM-Programm-Modul kleiner aus, als die mit FEM durchgeführte. Auch dieser Vergleich zeigt eine gute Übereinstimmung.

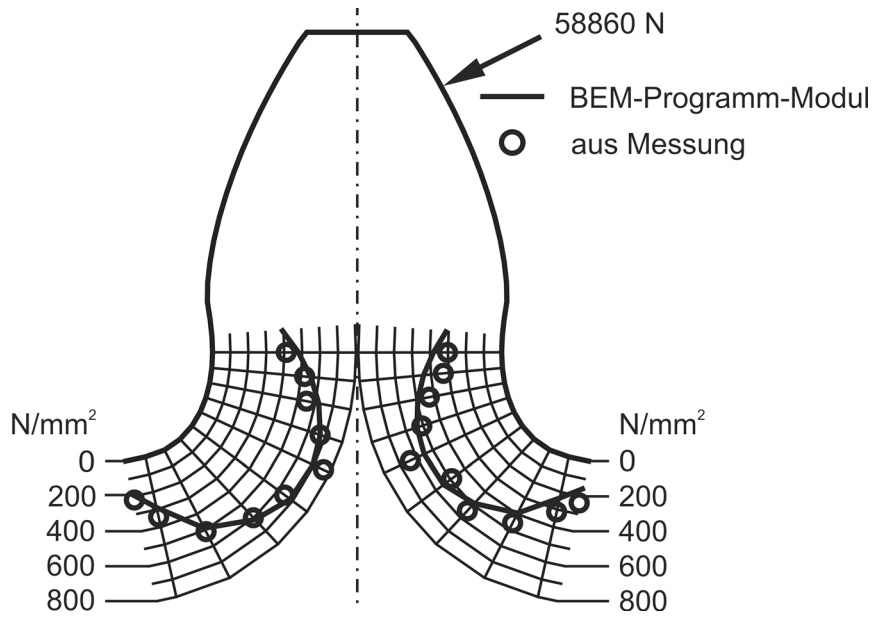


Abbildung 4.21: Aus Dehnungsmessungen ermittelte und mit dem BEM-Programm-Modul berechnete Tangentialspannungen (rechts Zug-, links Druckspannung), für Prüfrad  $z = 14$  und  $r_{KW} = 0,304m_n$  (Zahnform c [Hi76])

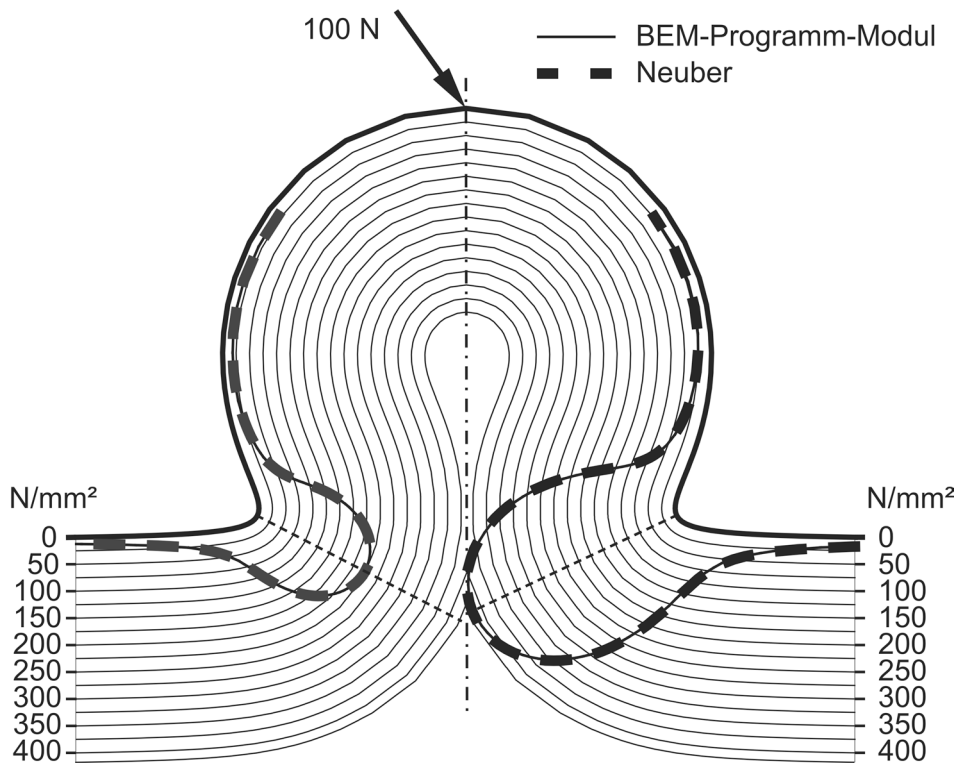


Abbildung 4.22: Vergleich der Berechnung für einen Neuber-Zahn (mit scharfer Kerbe) mit der des BEM-Programm-Moduls (links Zug-, rechts Druckspannung)

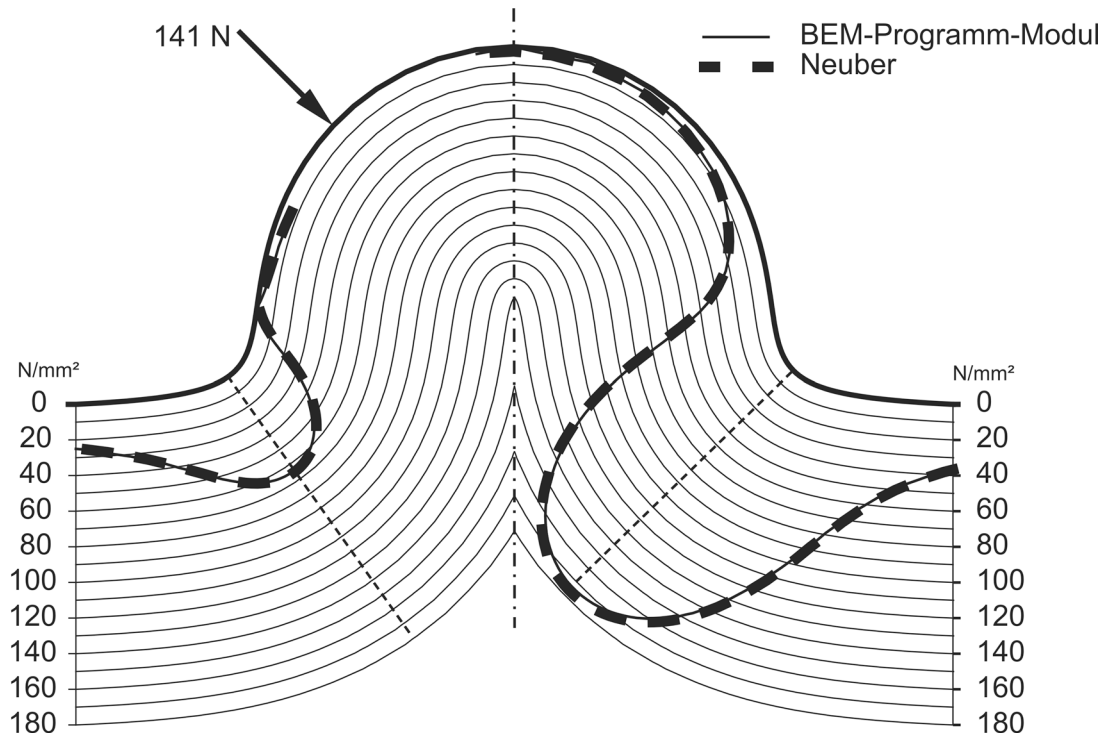
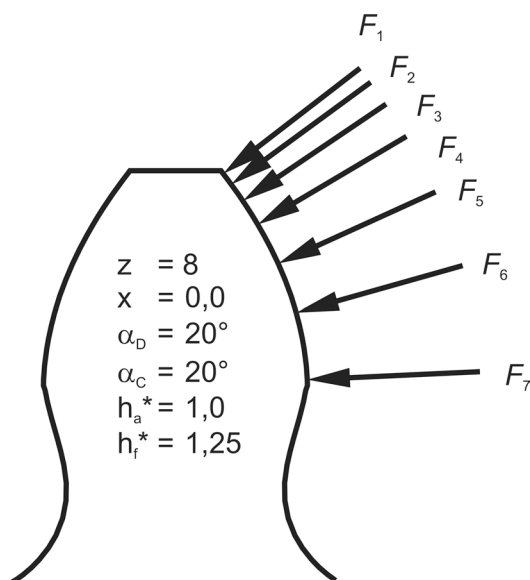


Abbildung 4.23: Vergleich der Berechnung für einen Neuber-Zahn (mit moderater Kerbe) mit der des BEM-Programm-Moduls (links Zug-, rechts Druckspannung)



Abweichung zwischen FEM und BEM-Programm-Modul in %		
Kraftposition	Verformung (Krafteinleitungsstelle)	max. Zahnfußspannung
$F_1$	3,2	1,6
$F_2$	3,3	1,4
$F_3$	3,3	1,7
$F_4$	3,1	1,3
$F_5$	3,4	1,7
$F_6$	3,5	1,0
$F_7$	3,8	-1,6

Abbildung 4.24: Vergleich der BEM-Programm-Modul-Verformungsberechnungen mit FEM-Verformungsberechnungen an einem Profil mit großem Unterschnitt

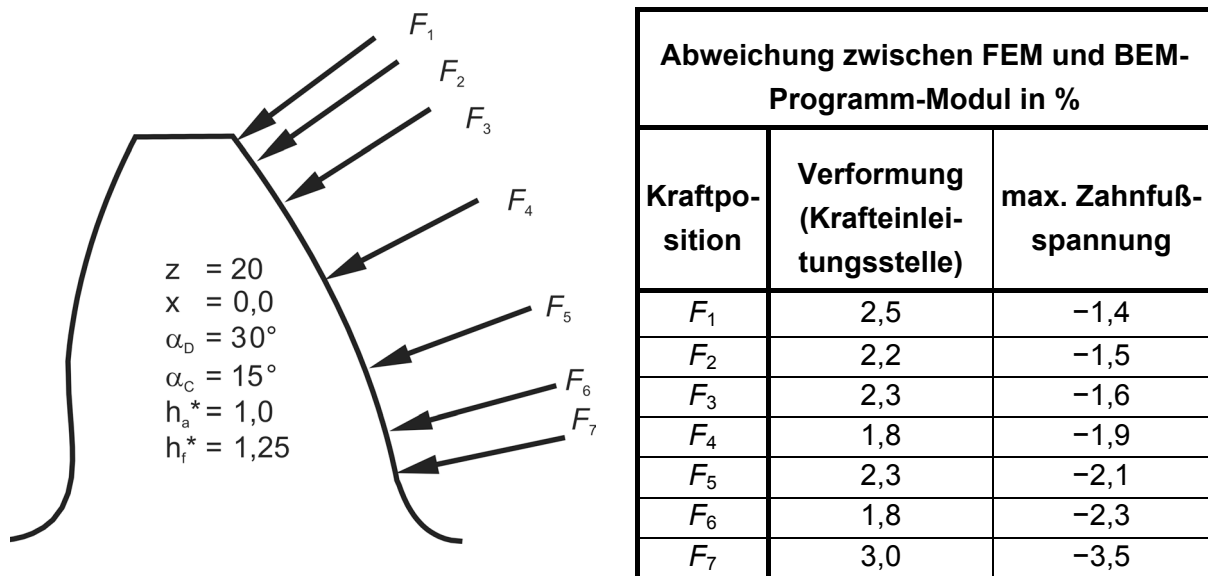


Abbildung 4.25: Vergleich der BEM-Programm-Modul-Verformungsberechnungen mit FEM-Verformungsberechnungen an einem asymmetrischen Profil mit Kraftangriff auf der Flanke mit großem Eingriffswinkel

Über die Vergleichsrechnungen konnte gezeigt werden, dass das entwickelte BEM-Programm-Modul sehr genaue Ergebnisse liefert und für die zuverlässige Berechnung der Bezugswerte bei beliebigen Zahnprofilformen geeignet ist. Die auf Basis des BEM-Programm-Moduls berechneten Bezugswerte werden im Weiteren als BEM-Bezugswert bezeichnet.

#### 4.4.7 Effiziente Berechnung des BEM-Bezugswerts

Im allgemeinen Fall der in Abbildung 4.1 dargestellten veränderlichen Zahnbreitengeometrie muss jeweils für Ritzel und Rad der BEM-Bezugswert für jeden potenziellen Kontaktpunkt berechnet werden. Dabei muss auch die Wechselwirkung auf dem jeweils betrachteten Normalschnitt zwischen dem potenziellen Kontaktpunkt, der auf diesem liegt, und jedem beliebigen anderen Höhenpunkt des Normalschnittes berechenbar sein. Dies gilt es effizient zu gestalten, um möglichst kurze Rechenzeiten erzielen zu können.

Die Rechengeschwindigkeit des BEM-Programm-Moduls wird zum einen durch die Anzahl der Elementknoten bestimmt, zum anderen durch die Anzahl der zu berechnenden Lastfälle. Den mit Abstand größten Einfluss auf die Rechenzeit hat allerdings die Anzahl Lastfälle, die betrachtet werden. Um eine effiziente Implementierung der Bezugswertberechnung zu ermöglichen, ist es deshalb erforderlich, die Anzahl der Lastfälle möglichst gering zu halten. Dies erreicht man am einfachsten, wenn man nur für eine begrenzte Anzahl von Stützstellen

die Berechnung der BEM-Bezugswerte durchführt und alle weiteren BEM-Bezugswerte über Interpolation bzw. Extrapolation bestimmt.

Als günstige Möglichkeit, über einer geordneten Menge von Stützstellen zu interpolieren, bietet sich der Einsatz finiter Elemente an. Ihre interpolierenden Formfunktionen ermöglichen es, auf Basis weniger Stützstellen allgemeine Funktionsverläufe sehr gut abbilden zu können. Hierfür wird das Betrachtungsgebiet in finite Elemente unterteilt und die Änderung von Funktionswerten durch die Inter- oder Extrapolation der vorgegebenen Knotenwerte (Stützstellen) beschrieben [ZT05]. Die BEM-Bezugswerte müssen im Sinne der Allgemeingültigkeit der Interpolationsmethode unabhängig von der wirkenden Kraft sein. Deshalb werden die BEM-Bezugswerte  $f_{\text{N2D BEM } ij k}$  in Form von Bezugswert-Stützstellen-Einflusszahlen  $a_{\text{BBS } ij k}$  gemäß Gleichung (4.21) verallgemeinert. Der Index  $k$  steht dabei für den betrachteten Normalschnitt der Stützstellenberechnung. Der Index  $j$  gibt die Kraftangriffshöhenposition und der Index  $i$  die Höhenposition des Auswertungspunktes auf dem Normalschnitt an.

$$a_{\text{BBS } ij k} = \frac{f_{\text{N2D BEM } ij k}}{F_j \cdot m_{n k}} \quad (4.21)$$

Zum Aufbau eines entsprechenden Interpolationsschemas wird auf Basis des  $\eta\text{-}\chi_{\text{SZ}}\text{-}\psi$ -Ersatzzahn-Bezugssystem ein  $\eta\text{-}\chi_{\text{SZ}}\text{-}a_{\text{BB}}$ -Bezugswert-Bezugssystem definiert. Auf der Applikatenachse  $a_{\text{BB}}$  werden die Bezugswert-Einflusszahlen angegeben. Dies geschieht unabhängig vom lokalen Normalenvektor orthogonal zur  $\eta\text{-}\chi_{\text{SZ}}$ -Ebene in Richtung  $a_{\text{BB}}$ . Die Stützstellen werden in einem Rechteckgitter angeordnet. Untersuchungen haben gezeigt, dass es vollkommen ausreichend ist, der Interpolation ein Gitter von 7 mal 7 Stützstellen zugrunde zu legen und zwischen diesen bilinear zu interpolieren. Wie in Abbildung 4.27 a) gezeigt, wird das Stützstellengitter aus sieben gleichmäßig über der Ersatzzahnbreite  $b_{\text{A}}$  verteilten Normalschnitten aufgebaut und auf diesen werden jeweils sieben gleichmäßig über der Nutzfankenhöhe verteilte Kraftangriffspunkte vorgegeben. Die Berechnung der Bezugswert-Stützstellen-Einflusszahlen erfolgt nun normalschnittweise für die sieben Lastfälle, die über die Kraftangriffspunkte, unter Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen diesen, beschrieben werden.

Für die Interpolation zwischen den Stützstellen werden bilineare 4-Knoten-Rechteckelemente gemäß Abbildung 4.26 eingesetzt [ZT05]. Die interpolierenden Formfunktionen in Gleichung (4.22) sind für die sogenannten natürlichen Elementkoordinaten definiert. Im natürlichen Koordinatensystem werden alle Rechteckelemente in jedem Fall als Quadrat mit der Kantenlänge 2 dargestellt. Die Formfunktion hat die Eigenschaft, dass sie im Knoten  $i$  zu  $N_i = 1$  wird und an allen anderen Knoten zu 0. Die Summe der Formfunktionen aller Knoten an einer beliebigen Stelle innerhalb oder außerhalb des finiten Elementes ist immer 1. Ein beliebiger Funktionswert  $q_i$  an einer Stelle  $X_i$  kann auf Basis der Funktionswerte  $q_{E n}$  in den Knotenpunkten des 4-Knoten-Rechteckelementes durch Inter- oder Extrapolation gemäß Gleichung (4.23) berechnet werden. Um diese Inter- oder Extrapolation ausführen zu können, müssen zum einen die natürlichen Koordinaten des Punktes  $X_i$  hinsichtlich des Elementes, auf dessen Basis interpoliert werden soll, berechnet werden und zum anderen muss

festgelegt werden, welches Element zur Interpolation verwendet werden soll. Die natürlichen Koordinaten  $\xi_{Ei}$  und  $\eta_{Ei}$  des Interpolationspunkts hinsichtlich des Interpolationselements lassen sich über die bekannten Punkte  $X_i$  sowie  $X_{E,n}$  mit Gleichung (4.24) berechnen. Das Gleichungssystem, das sich nach Einsetzen der bekannten Größen in Gleichung (4.24) ergibt, lässt sich nach den gesuchten natürlichen Koordinaten auflösen. Der Betrag des Vektors der natürlichen Koordinaten gibt auch gleichzeitig Auskunft über die richtige Wahl des Interpolationsbasiselements. Denn es wird zweckmäßigerweise das Element gewählt, welches den kürzesten Abstand  $r_{Ei}$  gemäß Gleichung (4.25) hinsichtlich des Ursprungs der Elementbeschreibung in natürlichen Koordinaten besitzt.

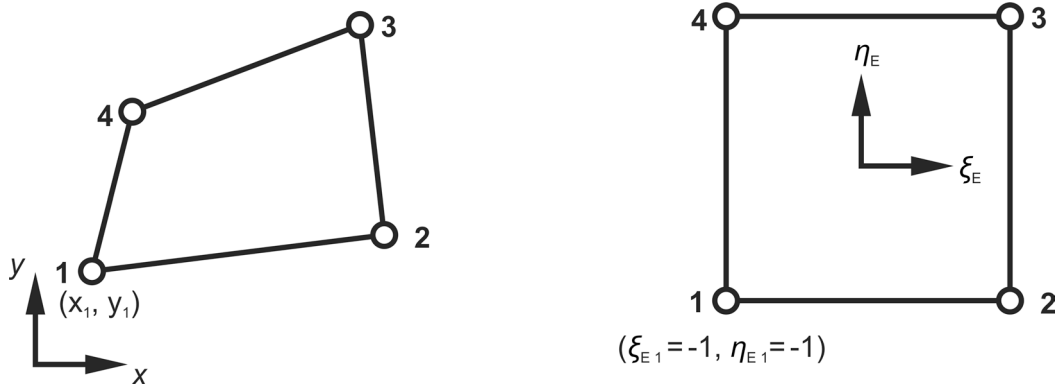


Abbildung 4.26: 4-Knoten-Rechteckelement

$$N_n(\xi_E, \eta_E) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi_{E,n} \cdot \xi_E) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta_{E,n} \cdot \eta_E) \tag{4.22}$$

$$q_i = \sum_{n=1}^4 q_{E,n} \cdot N_n(\xi_{E,i}, \eta_{E,i}) \tag{4.23}$$

$$X_i = \sum_{n=1}^4 X_{E,n} \cdot N_n(\xi_{E,i}, \eta_{E,i}) \tag{4.24}$$

mit

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \text{ und } X_{E,n} = \begin{pmatrix} x_{E,n} \\ y_{E,n} \end{pmatrix}$$

$$r_{E,i} = \sqrt{\xi_{E,i}^2 + \eta_{E,i}^2} \tag{4.25}$$

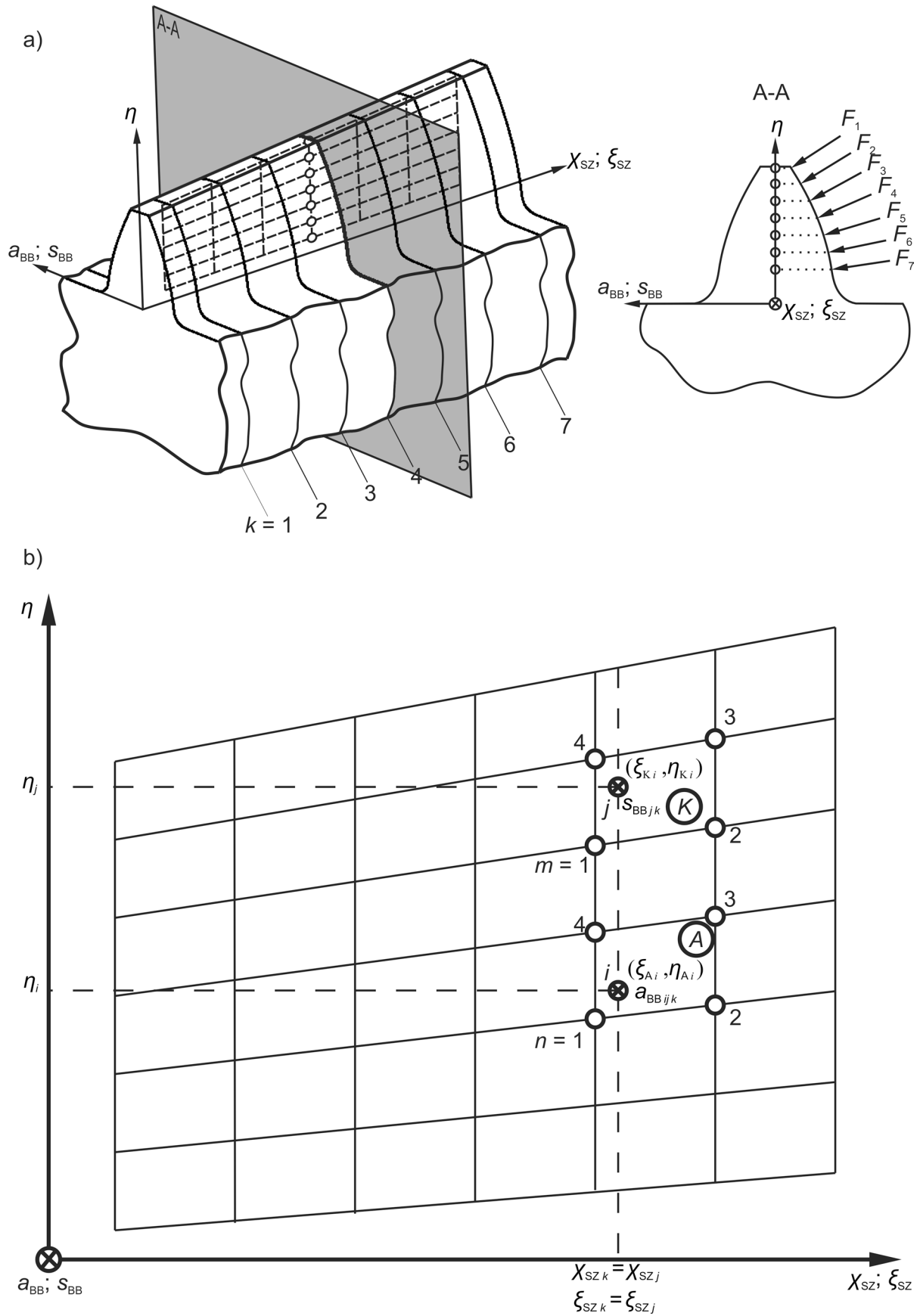


Abbildung 4.27: Interpolationsgitter für die Interpolation der Bezugswert-Einflusszahlen



Unter Nutzung der beschriebenen Methode kann die BEM-Bezugswerteinflusszahl für jeden beliebigen Normalschnitt des Ersatzzahnes und für jeden beliebigen Kraftangriffspunkt sowie Auswertungspunkt durch die stützstellenbasierte Interpolation mit den Gleichungen (4.22), (4.24), (4.25) und (4.26) gemäß Abbildung 4.27 b) berechnet werden. Gesucht wird die Bezugswert-Einflusszahl  $a_{BB\ ij\ k}$  am Normalschnitt  $k$ , unter Kraftwirkung in Höhe  $\eta_j$  für die Auswertungshöhe  $\eta_i$ . Der Normalschnitt  $k$  ist immer der Normalschnitt mit der Breitenkoordinate des Kraftwirkungspunktes. Damit gilt  $\chi_{SZ\ k} = \chi_{SZ\ j}$ . Das Gitterelement  $K$  ist das Element, welches den Ort der Kraftereinleitung einschließt. Das Gitterelement  $A$  schließt den Auswertungsort ein. Die Bezugswert-Stützstellen-Einflusszahl  $a_{BBS\ A\ nm}$  ist der Knotenwerte  $a_{BBS\ ij\ k}$  des Elements  $A$  am  $n$ -ten Knoten des  $m$ -ten Lastfalles am Knoten  $m$  des Elements  $K$ . Die natürlichen Koordinaten des Kraftwirkungsorts im Element  $K$  sind durch  $\xi_{Kj}$  und  $\eta_{Kj}$  gegeben. Die natürlichen Koordinaten des Auswertungsorts im Element  $A$  sind durch  $\xi_{Ai}$  und  $\eta_{Ai}$  gegeben.

$$a_{BB\ ij\ k} = \sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 N_m(\xi_{Kj}, \eta_{Kj}) \cdot N_n(\xi_{Ai}, \eta_{Ai}) \cdot a_{BBS\ A\ nm} \quad (4.26)$$

## 4.5 Korrekturen für den Ersatzzahn

Aufgrund dessen, dass der geometrisch vereinfachte Ersatzzahn (siehe Abbildung 4.1) immer ein Geradzahn mit optional veränderlicher Zahnbreitengeometrie ist, treten Abweichungen in der Zahnverformungsberechnung auf, wenn die Geometrie des betrachteten Zahnes von der des vereinfachten Ersatzzahnes abweicht. Dies ist z.B. der Fall, wenn es sich um eine Schrägverzahnung, eine Bogenverzahnung oder eine Verzahnung mit modifizierter Zahnberandung handelt. In Abbildung 4.28 sind die spezifischen geometrischen Eigenschaften dargestellt die bei schräg- und bogenverzahnten Kegelrädern nicht mehr explizit durch den Ersatzzahn erfasst werden. Insofern relevante Auswirkungen zu erwarten sind, muss deshalb eine Berücksichtigung über entsprechende Korrekturen erfolgen.

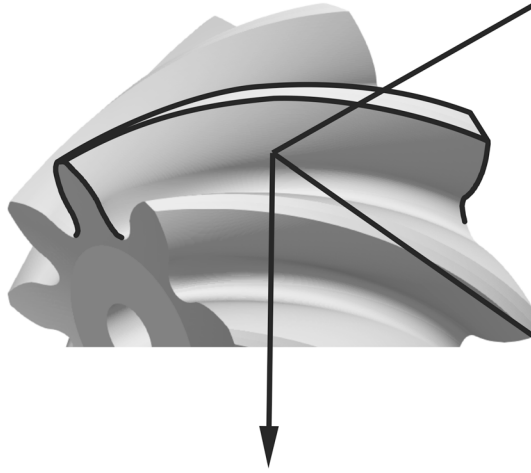
### 4.5.1 Stirnseitenunstetigkeit

Der Schrägungswinkel bewirkt neben der Krümmung des Zahnes auch eine geometrische Unstetigkeit in Form einer stumpfen und spitzen Zahnstirnseite, wie sie in Abbildung 4.28 dargestellt und markiert ist. Die daraus resultierende Veränderung der Stützwirkung wird mit zunehmendem Betrag des Schrägungswinkels größer und verursacht eine deutliche Änderung der Verformung gegenüber einem Zahn mit geraden Stirnseiten. Deshalb ist eine Berücksichtigung des Einflusses der Stirnseitenunstetigkeit unbedingt erforderlich.

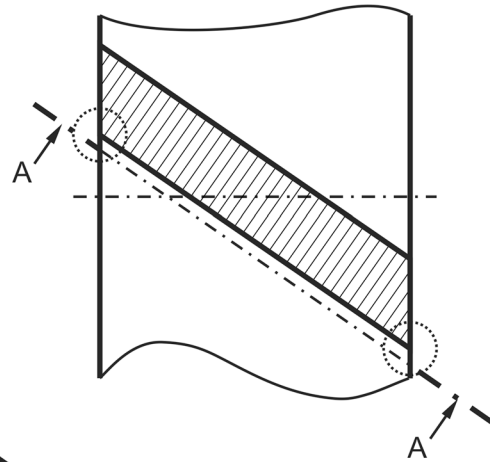
Baumann [Ba91] schlägt eine Berücksichtigung über eine Korrektur des Spiegelungsanteils gemäß Abschnitt 4.3.2 auf Basis eines schrägungswinkelabhängigen Faktors vor. Bei diesem Vorgehen wird allerdings der ebenfalls schrägungswinkelabhängige Einfluss des Stirn-

seitenabstandes der Kraftereinleitung, wie er durch Kunert beschrieben wird [Ku99], nicht ausreichend berücksichtigt.

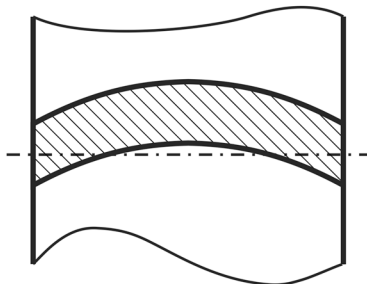
### bogenverzahntes Kegelrad



### Stirseitenunstetigkeit (stumpfe/spitze Stirseite)



### Flankenlinienkrümmung (konkave/konvexe Flanke)



### Zahnwindung (schraubenförmige Windung des Zahnes um den Radkörper) A - A

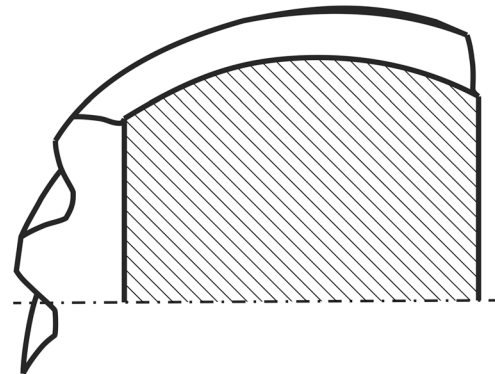


Abbildung 4.28: Schrägungswinkel- und messerkopfabhängige geometrische Eigenschaften

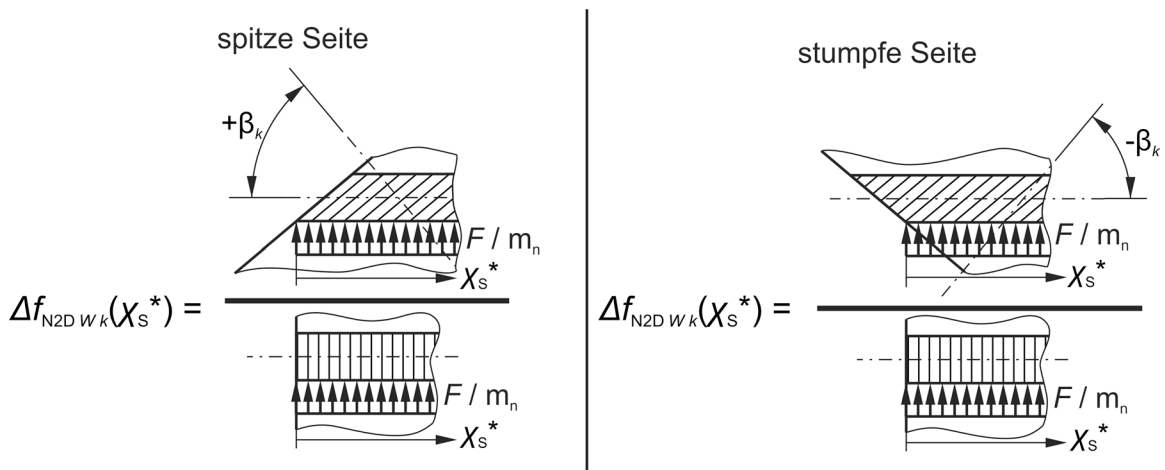


Abbildung 4.29: Berechnung der Stirseitenunstetigkeits-Korrekturfaktoren

Kunert [Ku99] schlägt eine schrägungswinkelabhängige Korrekturfunktion vor, die mit der Einflussfunktion des endlich langen Zahnes und nicht nur mit dem Spiegelungsanteil multipliziert werden muss. Die Korrekturfunktion hängt dabei nicht nur vom Schrägungswinkel ab, sondern auch von der Abklinglänge, d. h. dem Krafterleitungs- sowie Verformungsauswertungsabstand hinsichtlich der Stirnseite. Allerdings wurde die Korrekturfunktion für einen stirnradüblichen Schrägungswinkelbereich bis zu einem Betrag von  $\beta = 40^\circ$  entwickelt. Da bei Kegeln an der Ferse Schrägungswinkel auftreten können, die deutlich größer als  $\beta = 40^\circ$  sind, kann diese Korrekturfunktion hier nicht ausreichend sicher angewendet werden. Deshalb wird im Folgenden ein Vorgehen entwickelt, welches einen Schrägungswinkelbetrag bis  $\beta = 60^\circ$  erfasst, um die bei Kegeln möglichen maximalen Schrägungswinkel ausreichend zuverlässig abbilden zu können.

Kunert [Ku99] zeigte, dass der Kraftangriffshöheneinfluss auf das Abklingverhalten mit Stirnseitenunstetigkeitseinfluss gut durch eine gemittelte Funktion erfasst werden kann. Diese entwickelte er auf Basis von FEM-Berechnungen an Zahnstangenprofilen und variierte die Stirnseitengeometrie entsprechend der betrachteten Schrägungswinkel. Dieses zweckmäßige Vorgehen wird auch hier angewendet.

Wie schon bei der Berücksichtigung der veränderlichen Normalschnittgeometrie wird hier der Einfluss der Stirnseitenunstetigkeiten ebenfalls über den Bezugswert erfasst. Dies ermöglicht eine übersichtliche und einfache Implementierung in Form einer schrägungswinkel- sowie stirnseitenabstandsabhängigen Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion  $\Delta f_{N2D W k}(X_S^*)$ . Die Korrekturfunktion wird aus dem Quotienten der stirnseitenabstandsabhängigen Verformung einer FEM-Berechnung mit schräger Stirnseitenfläche (stumpf oder spitz) und einer FEM-Berechnung mit gerader Stirnseitenfläche gemäß Gleichung (4.27) sowie Abbildung 4.29 gebildet. Die Verformungen werden auf Basis einer konstanten Streckenlast bestimmt. Diese Streckenlast wirkt entlang der gesamten Zahnbreite auf der Höhe der Nutzflankenmitte. Der Einfluss der Normalspannungsfreiheit der Stirnseite, wie er in Abbildung 4.6 untersucht wurde, wird bei der Berechnung der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion ebenfalls vernachlässigt und muss deshalb bei der Berechnung aus dem Quotienten gekürzt werden. Die so mittels FEM berechneten Stirnseitenunstetigkeits-Faktoren für die Verformung sind in Abbildung 4.30 für die spitze und in Abbildung 4.31 für die stumpfe Zahnstirnseite dargestellt.

$$\Delta f_{N2D W k}(X_S^*) = \frac{f_{N3D k}(X_S^*)}{f_{N2D}} \quad (4.27)$$

Der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfaktor für die spitze Stirnseite wird mit zunehmendem Schrägungswinkelbetrag größer. Auch die Abklinglänge wächst mit zunehmendem Schrägungswinkelbetrag an. Dies kann erwartungsgemäß auf die Verkleinerung der Stützwirkung zurückgeführt werden. Bei der Entwicklung einer Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion muss allerdings berücksichtigt werden, dass unter Wirkung einer Streckenlast die Abklinglänge des Einflusses der spitzen Zahnstirnseite ab einem Schrägungswinkelbetrag von  $\beta = 20^\circ$  zunehmend überbewertet wird. Betrachtet man das Verformungsverhalten an der spitzen Stirnseite unter der Wirkung einer Einzellast, kann man feststellen, dass der Einfluss

der spitzen Stirnseite bei einem Schrägungswinkelbetrag von  $\beta = 30^\circ$  in einem Abstand von ca.  $6 \cdot m_n$  und bei  $\beta = 60^\circ$  von ca.  $10 \cdot m_n$  vollständig abgeklungen ist.

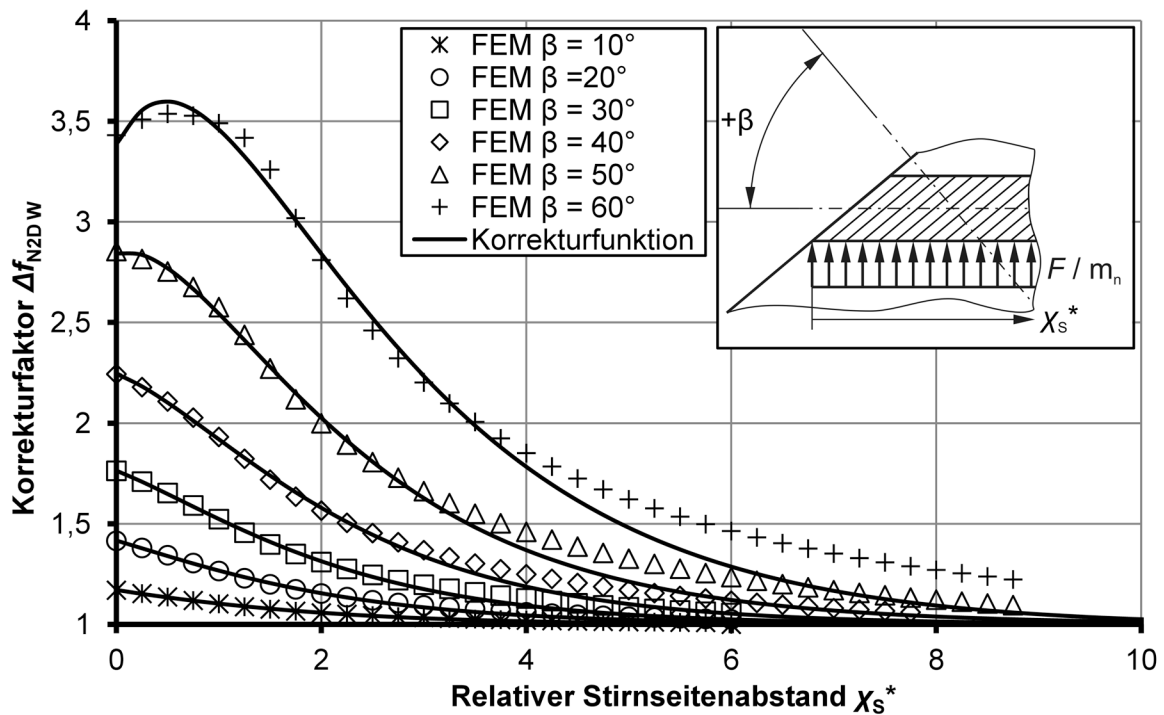


Abbildung 4.30: Mittels FEM berechnete Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfaktoren für die spitze Stirnseite und Vergleich mit der entwickelten Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion

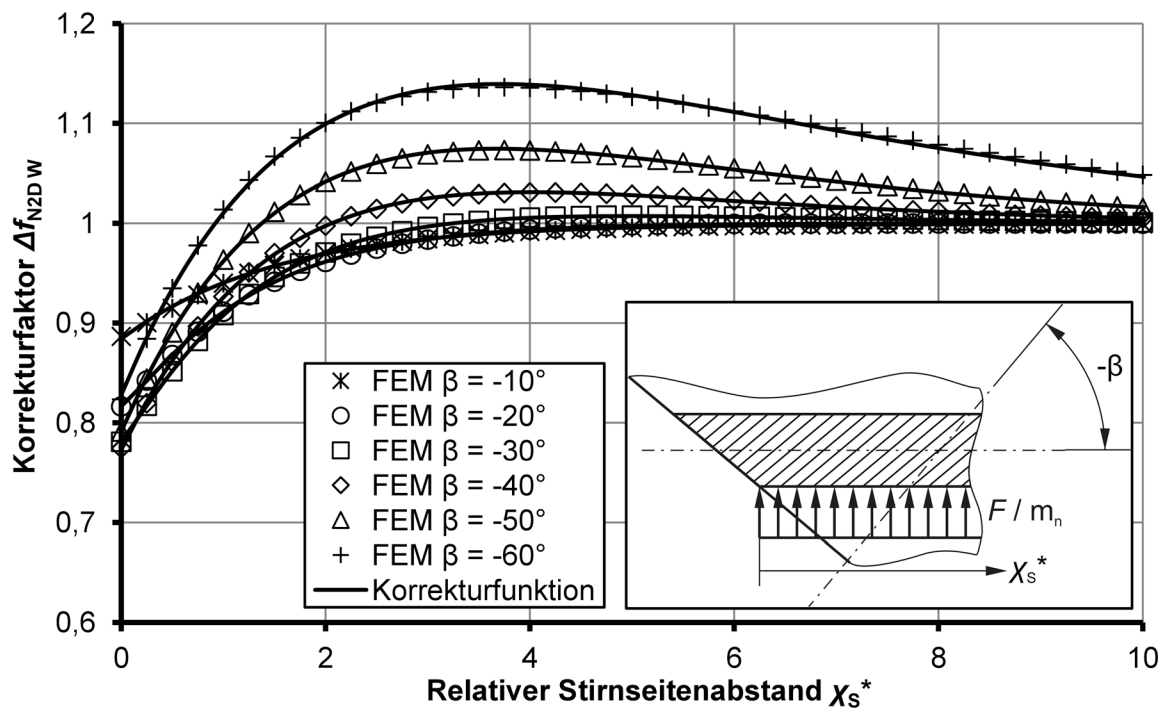


Abbildung 4.31: Mittels FEM berechnete Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfaktoren für die stumpfe Stirnseite und Vergleich mit der entwickelten Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion

Der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfaktor für die stumpfe Stirnseite wird bis zu einem Schrägungswinkelbetrag von  $\beta = 30^\circ$  erwartungsgemäß  $< 1$ . Allerdings ändert sich dieses Verhalten ab einem Schrägungswinkelbetrag von  $\beta = 40^\circ$  deutlich. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass zwar die Stützwirkung am Zahn selber steigt, aber die Radkörperstützwirkung und damit die Einspannungssteifigkeit sinkt. Diese Kombination bewirkt bei großen Schrägungswinkelbeträgen, dass zwar die unmittelbare Stirnseitenverformung abnimmt, aber mit größer werdendem Abstand der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfaktor auch auf Werte  $>1$  steigt.

Um eine geschlossene Beschreibung des Steinseitenunstetigkeits-Einflusses zu ermöglichen, sollen auch hier Stützstellenfunktionen über eine lineare Interpolation verbunden werden (siehe Gleichung (4.29)). Der Schrägungswinkel wird in Bogenmaß vorgegeben, wobei die spitze Zahnstirnseite einen positiven und die stumpfe Zahnstirnseite einen negativen Schrägungswinkel besitzen. Als eine geeignete Ansatzfunktion wurde Gleichung (4.28) gefunden.

Über Regressionsrechnungen auf Basis der FEM-Untersuchungen wurden für Schrägungswinkel zwischen  $0^\circ$  und  $60^\circ$  die Funktionsparameter bestimmt, die in Tabelle 4.2 angegeben werden. Die Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion  $\Delta f_{N2D W k}(\chi_{S^*}, \beta)$  Gleichung (4.29) hat einen Gültigkeitsbereich von  $-60^\circ$  bis  $60^\circ$  und berücksichtigt den Abstand der Auswertungsstelle von der jeweils betrachteten Stirnseite. Bei einem Schrägungswinkel von  $\beta = 0^\circ$  nimmt die Funktion einen Wert von 1 an.

$$f_{W k}(x) = 1,0 + A_k \cdot e^{\left(\frac{-x}{p_k}\right)} + B_k \cdot e^{\left(\frac{-x}{q_k}\right)} + C_k \cdot e^{\left(\frac{-x}{r_k}\right)} \quad (4.28)$$

Tabelle 4.2: Funktionsparameter der allgemeinen Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion der Zahnverformung  $\Delta f_{N2D W k}(\chi_{S^*}) = f_{W k}(\chi_{S^*})$

<b>k</b>	<b><math>\beta_k</math> in °</b>	<b><math>\beta_k</math> in rad</b>	<b><math>A_k</math></b>	<b><math>B_k</math></b>	<b><math>C_k</math></b>	<b><math>p_k</math></b>	<b><math>q_k</math></b>	<b><math>r_k</math></b>
<b>1</b>	<b>-60</b>	<b>-1,047</b>	36,929	27,038	-64,139	2,624	2,417	2,514
<b>2</b>	<b>-40</b>	<b>-0,698</b>	21,227	16,132	-37,586	1,713	1,542	1,630
<b>3</b>	<b>-20</b>	<b>-0,349</b>	6,637	0,009	-6,830	0,943	0,179	0,951
<b>4</b>	<b>0</b>	<b>0,0</b>	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000	1,000
<b>5</b>	<b>20</b>	<b>0,349</b>	2,469	1,582	-3,634	1,260	1,260	1,186
<b>6</b>	<b>40</b>	<b>0,698</b>	3,618	2,754	-5,125	1,381	1,380	1,163
<b>7</b>	<b>60</b>	<b>1,047</b>	-83,536	89,298	-3,376	2,565	2,531	0,914

$$\Delta f_{N2D W}(\chi_S^*, \beta) = \Delta f_{N2D W k}(\chi_S^*) + \frac{(\beta - \beta_k)}{(\beta_{k+1} - \beta_k)} \cdot (\Delta f_{N2D W k+1}(\chi_S^*) - \Delta f_{N2D W k}(\chi_S^*)) \quad (4.29)$$

mit

$$\beta \in [\beta_k, \beta_{k+1}] \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1$$

und

$$\Delta f_{N2D W k}(\chi_S^*) = f_{W k}(\chi_S^*)$$

#### 4.5.2 Krümmungseigenschaften des Zahnes

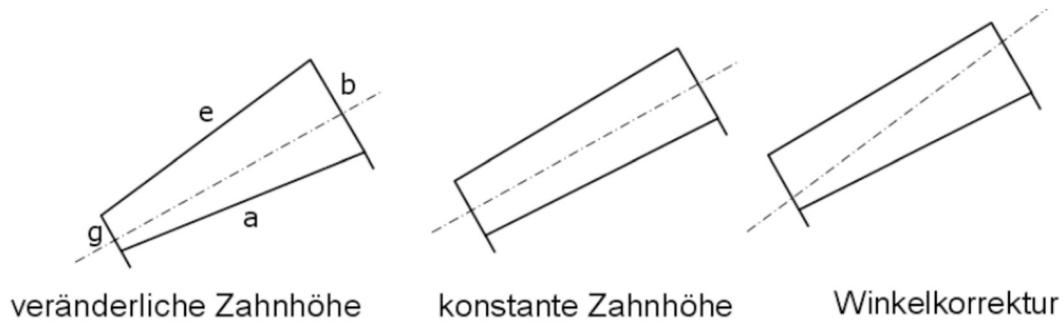
Besitzt eine Verzahnung einen von Null verschiedenen Schrägungswinkel, dann entsteht eine Schraubenwindung des Zahnes um die Radachse. Diese äußert sich in einer unbedeutenden Verdrehung der Profile [Ku99], die nicht weiter betrachtet wird sowie in einer Krümmung. Die Größe dieser gemäß Abbildung 4.28 elliptischen Krümmung (Zahnwindung) wird maßgeblich vom Betrag des Schrägungswinkels und der Zähnezahl bestimmt. Sie ist umso größer, je größer der Betrag des Schrägungswinkels und desto kleiner die Zähnezahl sind. Baumann [Ba91] untersuchte den Einfluss der Zahnwindung auf die Zahnverformung mittels FEM. Aus diesen Untersuchungen kann geschlossen werden, dass die qualitativen und quantitativen Auswirkungen auf die Zahnverformung in guter Näherung vernachlässigbar sind. Damit kann auf eine Berücksichtigung der Zahnwindung bei der Berechnung der Biegeverformung des Zahnes verzichtet werden.

Bogenverzahnte Kegelräder weisen neben der Zahnwindung zusätzlich eine Flankenlinienkrümmung auf, deren Charakteristik maßgeblich vom Radius des verwendeten Messerkopfes bei der Herstellung abhängt. Der Einfluss dieser Flankenlinienkrümmung auf die Zahnverformung wurde ebenfalls von Baumann [Ba91] experimentell und auf Basis von FEM-Berechnungen untersucht. Auch aus diesen kann geschlossen werden, dass die qualitativen und quantitativen Auswirkungen auf die Zahnverformung vernachlässigt werden können.

#### 4.6 Zahnberandungseinfluss

Nimmt man ausgehend von der theoretischen Zahnberandung in Abbildung 4.32, die durch den Fußkegel, den Kopfkegel und die Ergänzungskegel beschrieben wird, Modifikationen der Zahnberandung vor, ändert sich auch die Berandung des Eingriffsfeldes und damit auch die Zahnsteifigkeit. Solche Modifikationen stellen z. B. zylindrische Abdrehungen an der Ferse und plane Abdrehungen an der Zehe dar, wie sie in Abbildung 4.33 aufgeführt werden. Die komplexen Belastungs-Verformungs-Verhältnisse im Zahneingriff werden wie in Kapitel 3 beschrieben auf der Grundlage der Kombination von Abwälzsimulation und Einflusszahlen-

methode modelliert. Die Abwälzsimulation erfolgt dabei auf Basis der durch die Ausgleichsflächen beschriebenen Zahnflanken unter Berücksichtigung der realen Zahnberandung. Die Auswirkungen der Zahnberandungsmodifikationen auf die Form des Eingriffsfeldes sind somit enthalten. Die näherungsweise Berechnung der Biegeverformung bezieht allerdings die Auswirkungen der veränderten Zahnsteifigkeit bei einer Abweichung der realen von der theoretischen Zahnberandung nicht explizit mit ein [Ba91], [LB97]. Deshalb muss die Auswirkung einer modifizierten Zahnberandung auf die Biegeverformung bewertet und gegebenenfalls gesondert erfasst werden.



- Fußkegel (a)
- Äußerer Ergänzungskegel (b)
- Kopfkegel (e)
- Innerer Ergänzungskegel (g)

Abbildung 4.32: Theoretische Zahnberandung, Abbildung entnommen aus [SHS06]



- Fußkegel (a)
- Planfläche außen (b)
- [zylindrische Abdrehung (c)]
- [Kopfkürzung außen (d)]
- Kopfkegel (e)
- [Kopfkürzung innen (f)]
- Planfläche (g)

Abbildung 4.33: Beispiele für mögliche Berandungsmodifikationen, Abbildung entnommen aus [SHS06]

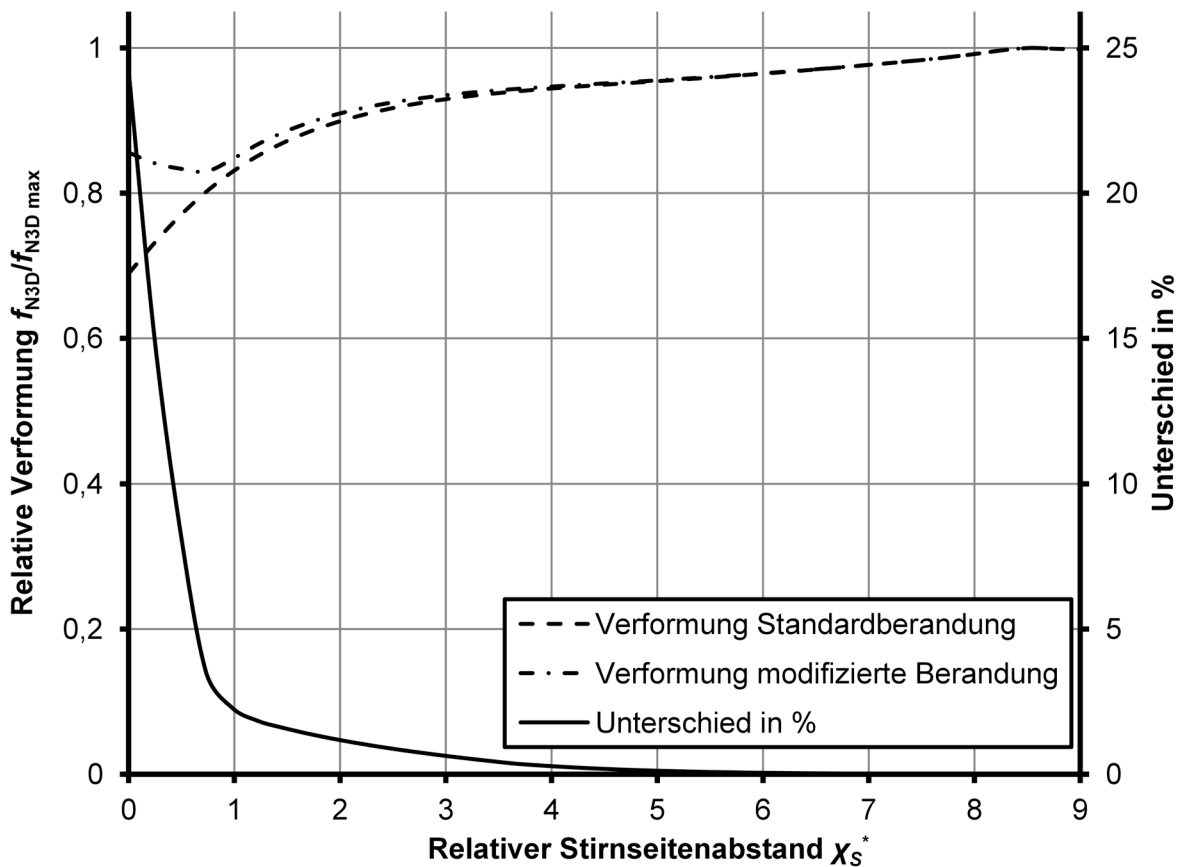
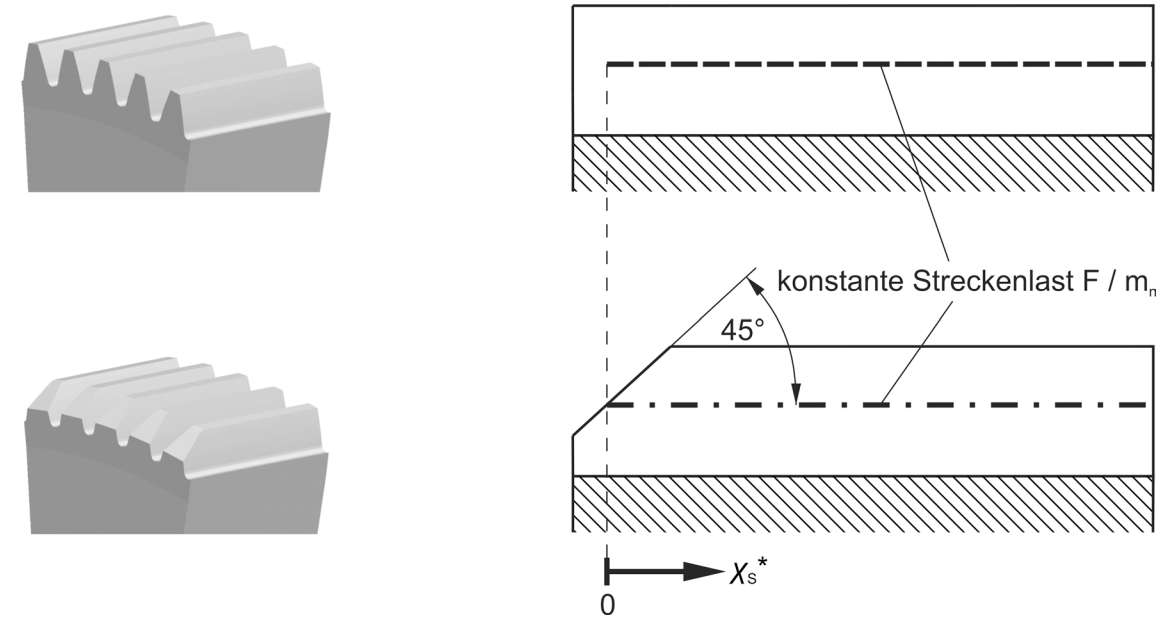


Abbildung 4.34: Einfluss einer Zahnberandungsmodifikation auf das Verformungsverhalten

Der Einfluss der Zahnberandung auf die Biegeverformung wurde an einem zahnstangenähnlichen Zahnprofil untersucht. Betrachtet wurden exemplarisch die praktisch besonders bedeutsame Plandrehung an der Zehe und die zylindrische Abdrehung an der Ferse. Dabei wurden maximale Berandungsanderungen zugrunde gelegt, welche bei Teilkegelwinkeln bis zu  $\delta = 45^\circ$  auftreten können. Unter diesen Annahmen entstehen Stirnseiten, die in Teilen



ihrer Höhe gegenüber dem Teilkegel um  $\delta = 45^\circ$  geneigt sind. Für eine Variante mit Standardberandung sowie mit einer derart modifizierten Zahnberandung wurden die Zahnverformungen mittels FEM berechnet. Die Zahnverformungen wurden unter der Wirkung einer konstanten Streckenlast ermittelt. Der Betrag der Streckenlast sowie die Länge und die Zahnbreitenposition bezüglich der Zahnfußbreite waren jeweils gleich. Die Krafterleitung wie auch die Auswertung der Zahnverformung erfolgten entlang der Nutzflankenhöhenmitte. Anhand des Beispiels in Abbildung 4.34 wird der Einfluss einer Stirnseitenabdringung von  $45^\circ$  diskutiert.

Im Diagramm in Abbildung 4.34 sind die Zahnverformungen mit Standardberandung und modifizierter Berandung sowie der Unterschied zwischen diesen dargestellt. Der relative Stirnseitenabstand wird bezüglich des Schnittpunktes der Streckenlast mit der abgedrehten Stirnseite angegeben. Die Gegenüberstellung zeigt, dass der Einfluss unmittelbar an der Abdringung mit 24 % sehr groß ist. Allerdings fällt der Unterschied sehr schnell ab. In einem relativen Stirnseitenabstand von  $0,5 \cdot m_n$  beträgt der Unterschied nur noch 8 %. In einem relativen Stirnseitenabstand von  $1 \cdot m_n$  gibt es schon keinen nennenswerten Unterschied mehr. Aufgrund der modifikationsbedingt geringeren Lasten und der Fasen im Berandungsbereich sowie der verhältnismäßig geringen Wirklänge der modifizierten Zahnberandung gegenüber der gesamten Traglinienlänge kann der Einfluss der Zahnberandungsmodifikationen auf die Biegeverformung vernachlässigt werden.

## 4.7 Berechnung der verbesserten Biegeverformungseinflusszahlen

Im Folgenden wird beschrieben, wie die Biegeverformungseinflusszahlen  $a_{B,j}$  für die Verwendung in Gleichung (3.4) und Gleichungssystem (3.8) unter Nutzung der vorgestellten verbesserten allgemeinen Verformungsabklingfunktion, der BEM-Bezugswertberechnung und der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion ermittelt werden.

Wird ein Zahnabschnitt  $j$  (Normalschnitt) mit einer Normalkraft  $F_j$  belastet, verteilt sich die Zahnverformung auf mehrere Abschnitte  $i$  (Wechselwirkung). Dies kann nun auf Basis der BEM-Bezugswerte und der allgemeinen Verformungsabklingfunktionen mit Stirnseiteneinfluss berechnet werden. Für die Berechnung der Biegeverformungseinflusszahlen eines Zahnes ergibt sich folgendes Vorgehen, wobei der Abschnitt  $i$  für die Wechselwirkung mit dem entsprechenden potenziellen Kontaktpunkt steht:

1. Berechnung der BEM-Bezugswerteinflusszahl  $a_{BB,jk}$  mittels Interpolation gemäß Abschnitt 4.4.7 am Abschnitt  $k = j$  unter Wirkung der Kraft  $F_j$  in der Höhe  $\eta_j$  und für die Höhe des potenziellen Kontaktpunktes  $\eta_i$  des Abschnittes  $i$ .
2. Berechnung der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion gemäß Abschnitt 4.5.1 in Abhängigkeit vom Schrägungswinkel unter Berücksichtigung des relativen Stirnseitenabstandes. Die Berechnung erfolgt für den relativen Stirnseitenabstand des po-

tenziellen Kontaktpunktes  $i$  jeweils hinsichtlich der Zehe und der Ferse. Dabei wird für die Berechnung der Schrägungswinkel an der Stelle  $i$   $\beta_i$  verwendet. Die so gewonnenen Korrekturfaktoren werden mit der BEM-Bezugswerteinflusszahl  $a_{BB\ ij\ k}$  multipliziert. Das Ergebnis ist eine um den Stirnseiteneinfluss korrigierte BEM-Bezugswerteinflusszahl.

$$a_{BB\ ij\ k} = a_{BB\ ij\ k} \cdot \Delta f_{N2D\ W}(X_{SZ\ i}^*, \beta_i) \cdot \Delta f_{N2D\ W}(X_{SF\ i}^*, \beta_i) \quad (4.30)$$

3. Berechnung der allgemeinen Verformungsabklingfunktion gemäß Abschnitt 4.3.4 in Abhängigkeit von der Ersatzzähnezahl und dem relativen Abstand  $\chi_i^*$  des Punktes  $i$  vom Punkt  $j$ . Dann Ausführung der stirnseitenabstandsabhängigen Spiegelung der allgemeinen Verformungsabklingfunktion entsprechend Abschnitt 4.3.2. Durch die Multiplikation der so erhaltenen allgemeinen Verformungsabklingfunktion für den endlich langen Zahn mit der korrigierten BEM-Bezugswerteinflusszahl erhält man die gesuchte Biegeverformungseinflusszahlen  $a_{B\ ij}$ .

$$a_{B\ ij} = \left( E_\infty(\chi_i^*) + \sum_{k \in Z} E_\infty(\chi_{Z\ ik}^*) + \sum_{k \in F} E_\infty(\chi_{F\ ik}^*) \right) \cdot a_{BB\ ij\ k} \quad (4.31)$$

mit

$$Z = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 1 \wedge E_\infty(\chi_{Z\ ik}^*) > 0\} \quad \text{und} \quad F = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 1 \wedge E_\infty(\chi_{F\ ik}^*) > 0\}$$

## 5 Näherungsweise Berechnung der Kontaktverformung und -spannung

### 5.1 Vereinfachung der Kontaktgeometrie

Ein wesentlicher Bestandteil des Zahnkontaktproblems sind die Verformungen und Spannungen in den Kontaktzonen zwischen den Rädern der Kontaktpaarung. Diese Kontaktzonen sind im Sinne der Kontaktmechanik Nicht-Hertzsche 3D-Kontakte, die unter Beachtung der bereits in Abschnitt 3.3 getroffenen Festlegungen für den reibungsfreien Kontakt wie folgt näher charakterisiert werden können:

- die Hauptkrümmungen der Kontaktflächen können jeweils von Null verschieden sein
- die Hauptkrümmungen der Kontaktflächen können veränderlich sein
- zwischen den Hauptkrümmungsachsen der Kontaktflächen können beliebige Winkel auftreten
- die Kontaktkörper können endliche Abmessungen haben
- die Kontaktfläche kann gegenüber den Abmessungen der Kontaktkörper groß sein

Das so charakterisierte Nicht-Hertzsche Kontaktproblem wird bei der näherungsweisen Berechnung der Kontaktverformungen und -spannungen bei Kegelrädern von Baumann [Ba91] mit dem z.B. schon von Schmidt [Sc73] oder auch Hohrein/Senf [HS78] bei Stirnrädern eingesetzte Modell zweier achsparalleler Zylinder gelöst. In Abschnitt 2.3.1 wurde diese Methode bereits kurz beschrieben und die Methodenbezeichnung Zylinder-Zylinder-Methode (ZZM) eingeführt.

Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, werden bei der ZZM die unterschiedlichen Kontaktbedingungen in den potenziellen Kontaktpunkten jeweils durch Zylinder angenähert. Die Mantellinien der Zylinder sind mit der Traglinie des jeweiligen Zahnabschnittes im potenziellen Kontaktpunkt kongruent. Das heißt, dass die Neigung der Zylinder der Neigung der Traglinie entspricht. Die Zylinderradien ergeben sich dabei aus der lokalen Krümmung am potenziellen Kontaktpunkt in Richtung des Normalschnitts. Diese wird direkt aus den Hauptkrümmungen der Flankenausgleichsfläche berechnet. Abbildung 5.2 veranschaulicht die Approximation der lokalen Flankenkrümmungen im potenziellen Kontaktpunkt durch achsparallele Zylinder für einen Normalschnitt. Die Zylinderbreite bzw. Zylinderlänge entspricht der Abwicklung des Traglinienabschnittes über dem betrachteten Kontaktelement, also der Kontaktelementlänge  $\Delta b_{K_i}$  gemäß Abbildung 3.5. Entsprechend sind die Krümmungen sowie die Lasten über der Zylinderlänge konstant. Die traglinienabschnittsweise bzw. kontaktelementweise Paa-

Die Annäherung der Zylinder von Rad und Gegenrad führt somit jeweils auf ein Hertz'sches Kontaktproblem. Damit wird der Nicht-Hertz'sche 3D-Kontakt durch einen Hertz'schen Linienkontakt mit lokal veränderlichen Krümmungseigenschaften angenähert.

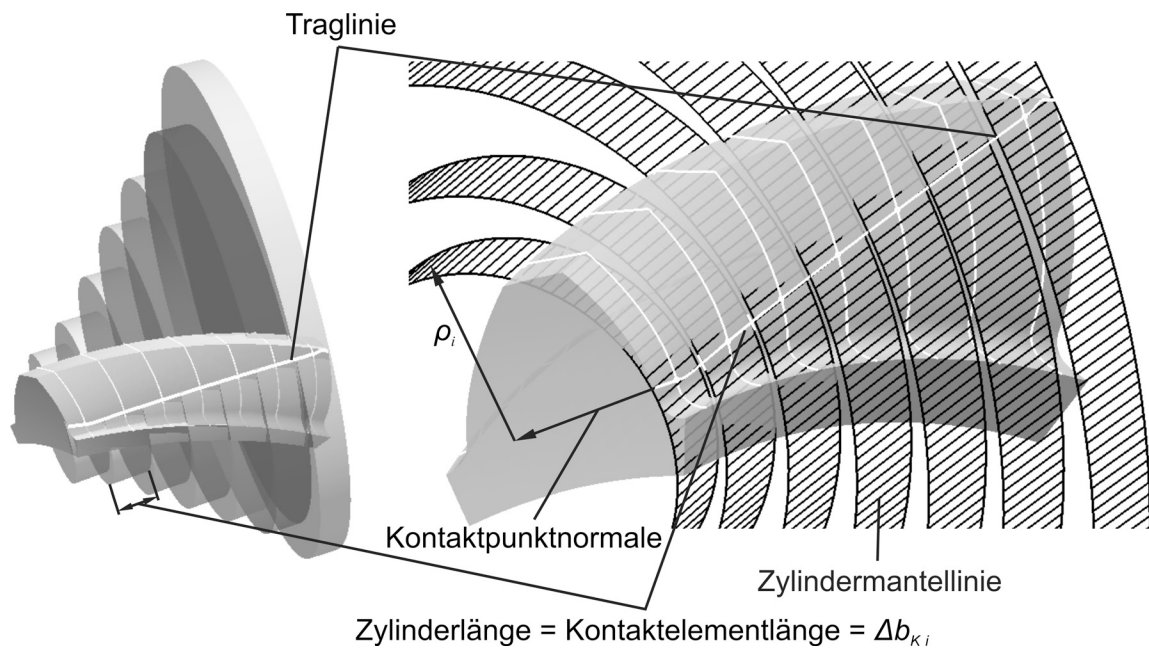


Abbildung 5.1: Abschnittsweise Annäherung der lokalen Krümmungsverhältnisse entlang einer Traglinie durch Zylinder

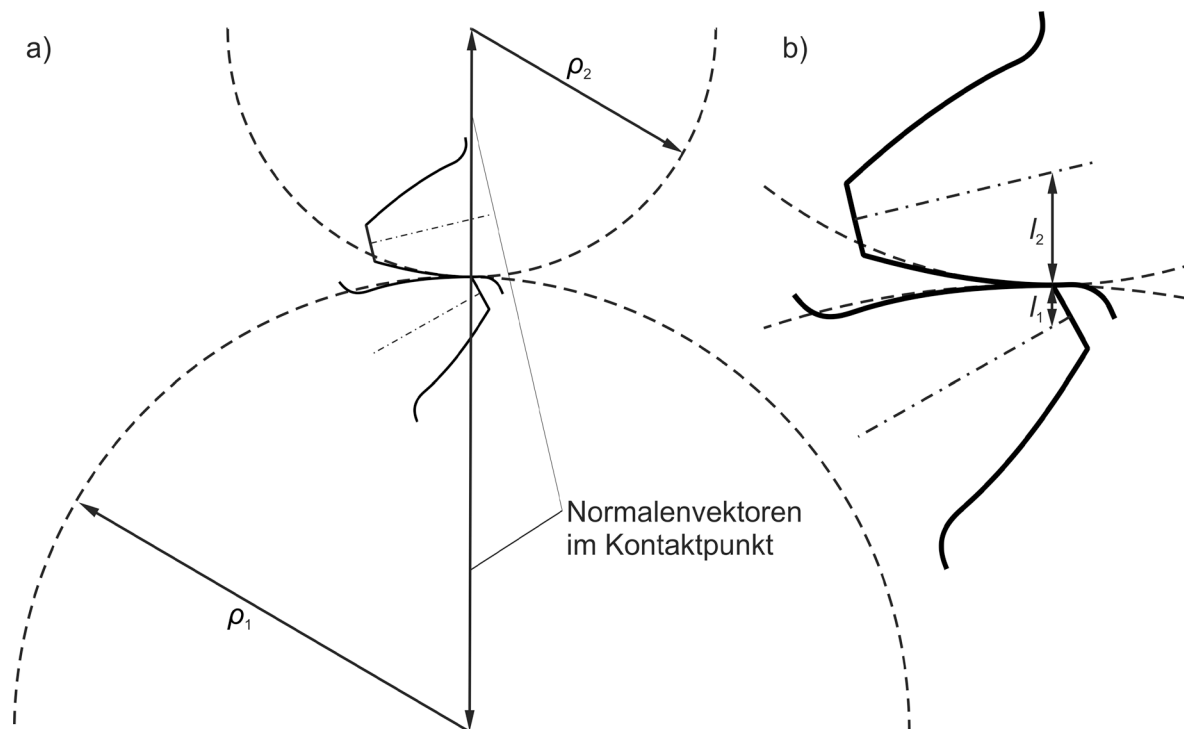


Abbildung 5.2: Approximation des lokalen Zahnkontaktes durch achsparallele Zylinder

## 5.2 Berechnung der Kontaktverformungseinflusszahl und der Kontaktspannung mit der ZKM

Für die Ermittlung der Kontaktverformungseinflusszahl  $e_{Hj}$ , wie sie in Gleichung (3.4) benötigt wird, muss die Annäherung  $f_{Hj}$  der im Kontakt stehenden achsparallelen Zylinder berechnet werden. Da die Anwendung der Hertzischen Gleichungen für Linienkontakte nur die Berechnung der Kontaktspannungen und der Abplattungsbreite zulässt, entwickelten Weber/Banaschek [WBN55] eine Lösung für die Annäherungsberechnung, die auch von Baumann [Ba91] angewendet wird. Gleichung (5.1) gibt diese Lösung für den Fall wieder, dass der Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$  für beide Kontaktpartner gleich sind.

$$f_{Hj} = f_{H \text{ Hertz } j} = \frac{q_j}{E} \cdot \frac{4 \cdot (1 - \nu^2)}{\pi} \cdot \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{l_{1j} \cdot l_{2j}}}{2 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{E \cdot \rho_{gesj}}{\sigma_{H \text{ Hertz } j}} \right) - \frac{\nu}{2 \cdot (1 - \nu)} \right] \quad (5.1)$$

mit

$$q_j = \frac{F_j}{\Delta b_{Kj}}$$

und

$$\rho_{gesj} = \frac{\rho_{1j} \cdot \rho_{2j}}{\rho_{1j} + \rho_{2j}}$$

Gleichung (5.1) erfordert es, dass für die Berechnung der Kontaktverformung festgelegt wird, wie weit in die Kontaktkörpertiefe ( $l_{1j}$  und  $l_{2j}$  siehe Abbildung 5.2) sich das Gebiet erstreckt, welches bei der Annäherungsberechnung berücksichtigt werden soll. Für die umgesetzte Lösung wird der Vorschlag von Weber/Banaschek [WBN55] angewendet. Dieser sieht die Berücksichtigung einer Tiefe bis zur Zahnmitte entlang der Kraftwirkungslinie vor.

Mit der bekannten Annäherung  $f_{Hj}$  wird die Kontaktverformungseinflusszahl gemäß Gleichung (5.2) berechnet. Die Annäherung der Kontaktkörper verhält sich gegenüber der Kontaktkraft  $F_j$  nicht linear. Das gilt somit auch für die darüber berechneten Verformungseinflusszahlen. Wie schon unter Abschnitt 3.6 beschrieben, muss die Kontaktverformungseinflusszahl deshalb iterativ bei der Lösung des Einflusszahlengleichungssystems (3.8) berücksichtigt werden. Der Startwert für die Annäherung wird für eine der Hertzischen Pressung von  $\sigma_{H \text{ Hertz } j} = 800 \text{ MPa}$  äquivalenten Streckenlast  $q_j$  gemäß Gleichung (5.3) berechnet. Hohen/Senf [HS78] schlagen darüber hinaus eine Linearisierung der Kontaktverformungsfunktion vor, die von Baumann [Ba91] in Form einer Tangentenlinearisierung umgesetzt wurde.

$$e_{Hj} = \frac{f_{Hj}}{F_j} \quad (5.2)$$

$$q_j = \frac{2 \cdot \pi \cdot (1 - \nu^2) \cdot \sigma_{Hj}^2}{\rho_{gesj} \cdot E} \quad (5.3)$$

Wurde die Lastverteilung als Lösung des Kontaktproblems bzw. des Gleichungssystems (3.8) ermittelt, können die Kontaktspannungen berechnet werden. Als wichtigste Kenngröße der Kontaktbeanspruchung gilt bei der Verzahnungsauslegung im Allgemeinen die Kontaktnormalspannung. Da für die folgenden Betrachtungen ausschließlich diese relevant ist, werden weder die anderen Komponenten des Kontaktspannungstensors noch deren Tiefenverläufe oder Vergleichsspannungen behandelt. Allerdings lassen sich diese bei Bedarf unter Verwendung der Kontaktnormalspannung einfach bestimmen. Die Kontaktnormalspannung bzw. die sogenannte Pressung oder auch Flankenpressung  $\sigma_{Hj}$ , kann für den Linienkontakt zweier achsparalleler Zylinder gemäß Gleichung (5.4) berechnet werden. Die dazugehörige halbe Abplattungsbreite ergibt sich gemäß Gleichung (5.5). Die Pressungsverteilung und Abplattungsbreite nach den Hertzschen Gleichungen für den Linienkontakt werden in Abbildung 5.3 dargestellt.

$$\sigma_{Hj} = \sigma_{H \text{ Hertz}j} = \sqrt{\frac{E \cdot F_j}{2 \cdot \pi \cdot \Delta b_{Kj} \cdot \rho_{gesj} \cdot (1 - \nu^2)}} \quad (5.4)$$

$$a_{Hj} = a_{H \text{ Hertz}j} = \sqrt{\frac{8 \cdot (1 - \nu^2) \cdot F_j}{\pi \cdot E \cdot \Delta b_{Kj}}} \quad (5.5)$$

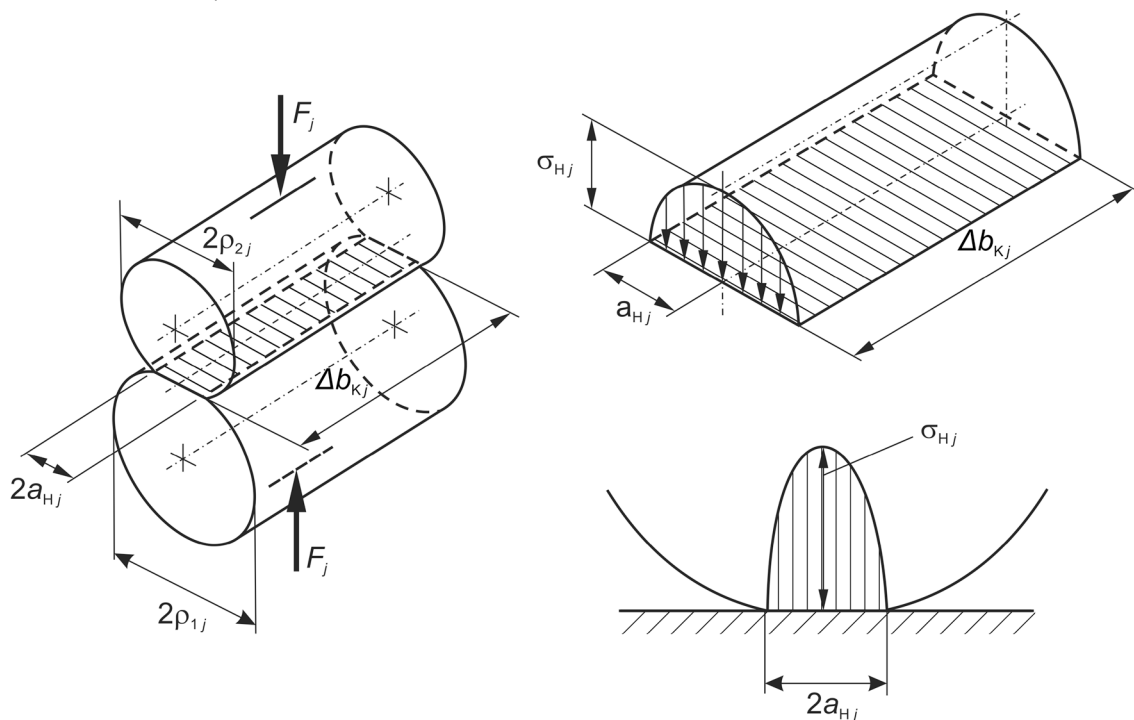


Abbildung 5.3: Pressungsverteilung und Abplattungsbreite beim Linienkontakt nach Hertz, Abbildung in Anlehnung an [NHW05]

Die näherungsweise Abbildung des Nicht-Hertzischen 3D-Kontaktes mittels der ZZM hat zur Folge, dass die Wechselwirkungen zwischen den Kontaktelementen sowie Zahnberandungseinflüsse hinsichtlich der Kontaktverformungen und -spannungen vernachlässigt werden. Die Auswertung zu den Methoden der Zahnkontaktsimulation (vgl. hierzu Abschnitt 2.3) hat allerdings gezeigt, dass es auch unter den Näherungsmethoden Verfahren gibt, bei denen die Wechselwirkung und Zahnberandungseinflüsse vollständig oder partiell mit teils beträchtlichem Aufwand erfasst wurden [UI73], [Vi96], [GGC05]. Deshalb kann nicht selbstverständlich davon ausgegangen werden, dass diese Einflüsse vernachlässigbar sind. Eine pauschale Berücksichtigung macht allerdings besonders für Näherungsverfahren nur dann Sinn, wenn signifikante Auswirkungen zu erwarten sind, da eine Berücksichtigung die Simulationszeit um ein Vielfaches verlängern würde. Im Folgenden sollen diese Einflüsse deshalb analysiert, bewertet und gegebenenfalls erweiterte Berechnungsmethoden entwickelt werden.

## 5.3 Komplexe Einflüsse auf die Kontaktverformung und -spannung

### 5.3.1 Wechselwirkungseinfluss

Eine Wechselwirkung zwischen den Kontaktelementen hinsichtlich der Kontaktverformungen sowie -spannungen hat einen entscheidenden Einfluss auf deren Gradienten und damit auf den Betrag der maximalen Pressung. Wie groß dieser Einfluss tatsächlich ist, hängt davon ab, mit welcher Länge die Verformung des Einzelkontakts entlang einer Traglinie abklingt. Dies muss in einer Parameterstudie für ein relevantes Zahnradpaarungsspektrum auf Basis der Zahnprofile aus Abbildung 2.2 untersucht werden.

Das Abklingverhalten wird zweckmäßigerweise am unendlich ausgedehnten Gebiet betrachtet und es liegt deshalb nahe, auf der Theorie des elastischen Halbraums [Ka90], [Jo04] aufzubauen. Ahmadi et al. [AKM83] sowie Keer et al. [KLM84] geben die Verformungseinflussfunktion für den elastischen Halbraum unter der Wirkung einer konstanten Flächenlast (Pressung) über einem Rechteckelement in übersichtlicher Form an. Diese wird für die folgenden Untersuchungen so formuliert, dass sie sich nicht auf die Pressung, sondern auf die im Schwerpunkt der Rechteckelemente wirkende resultierende Punktlast bezieht (siehe Gleichung (5.6)).

Schon in [Mv88] wurde von den Autoren durch experimentellen Vergleich festgestellt, dass für die Abklinglänge und damit für die Wechselwirkung die Dicke des betrachteten Halbraums in Richtung der Kontaktnormalen entsprechend  $l_1$  und  $l_2$  (vgl. Abbildung 5.2) entscheidend ist. Deshalb wird hier eine Dickenkorrektur für die Verformungseinflussfunktion gemäß [MKF86], [Mv88] eingeführt. Damit kann die Verformungseinflusszahl eines Halbraumstreifens mit einer beliebigen Dicke  $d_{HR}$  unter Verwendung von Gleichung (5.7) berechnet werden. Die Gleichung zeigt, dass das Abklingverhalten maßgeblich von der Dicke  $d_{HR}$  beeinflusst wird. Diese ist bei Verzahnungen gegenüber dem Krümmungsradius sehr klein. Deshalb kann bereits hier festgestellt werden, dass die Abklinglänge verhältnismäßig kurz aus-

fallen wird. Betrachtet man z.B. den Walzkorperkontakt bei Walzlageren, dann entspricht die Dicke  $d_{HR}$  dem gesamten Walzkorperdurchmesser und die Abklinglänge sowie die Wechselwirkung sind damit um ein Vielfaches größer.

$$a_{HR\,ij} = \frac{1 - \nu^2}{\pi \cdot E \cdot A_{HR}} \cdot [d(\bar{x} + a_{HR}, \bar{y} + b_{HR}) + d(\bar{x} - a_{HR}, \bar{y} - b_{HR}) - d(\bar{x} - a_{HR}, \bar{y} + b_{HR}) - d(\bar{x} + a_{HR}, \bar{y} - b_{HR})] \quad (5.6)$$

mit

$$A_{HR} = 2 \cdot a_{HR} \cdot 2 \cdot b_{HR} \quad , \quad \bar{x} = x_i - x_j \quad , \quad \bar{y} = y_i - y_j$$

und

$$d(r,s) = r \cdot \log\left(s + \sqrt{r^2 + s^2}\right) + s \cdot \log\left(r + \sqrt{r^2 + s^2}\right)$$

$$a_{HR\,ij} = a_{HR\,ij} - \frac{1 + \nu}{2 \cdot \pi \cdot E \cdot A_{HR}} \cdot [d(\bar{x} + a_{HR}) + d(\bar{x} - a_{HR})] \cdot 2 \cdot b_{HR} \quad (5.7)$$

mit

$$d(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + d_{HR}^2}} + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \sinh^{-1} \frac{r}{d_{HR}}$$

$$e_{HR\,ij} = a_{HR\,I\,ij} + a_{HR\,II\,ij} \quad (5.8)$$

Die Wechselwirkung soll nun durch eine einfache Annäherung des Linienkontaktmodells der ZZM unter Verwendung der Verformungseinflussfunktion  $e_{HR\,ij}$  für die Kontaktpaarung erfolgen. Abbildung 5.4 zeigt das dafür verwendete Modell eines Halbraumstreifens mit einer potenziellen Traglinie entlang der  $x$ -Achse. Betrachtet wurde das Verformungsabklingverhalten entlang dieser potenziellen Traglinie unter Wirkung einer konstanten Streckenlast über einer typischen Kontaktelementbreite  $\Delta b_{Kj} = 0,25 \cdot m_n$ . Da auch relativ kurze Abklinglängen zu erwarten sind, wird die Kontaktelementbreite und damit die Lasteinleitung mit  $n = 9$  Rechteckelementen diskretisiert, um auch eine Auswertung über der Kontaktelementbreite  $\Delta b_{Kj}$  selbst zu ermöglichen. Die Gesamtverformung bzw. Gesamtverformungseinflusszahl aller  $n$  Einzellasten kann gemäß Gleichung (3.3) berechnet werden. Die Auswertung erfolgt entlang der potenziellen Traglinie. Die Abklinglänge einer relevanten Auswahl von Paarungsvarianten aus Abbildung 2.2 wird im Walzeingriffspunkt  $C$  und den Doppeleingriffspunkten  $A$  sowie  $E$  betrachtet. Die halbe Breite der Rechteckelemente  $b_{HR}$  entspricht der halben Hertzschen Abplattungsbreite bei einer Pressung von 1300 MPa und wird über die Gleichung (5.3) sowie (5.5) berechnet. Sowohl der zugrundeliegende resultierende Krümmungsradius  $\rho_{ges}$  als auch die Dicke der Halbraumstreifen  $d_{HR\,I} = l_1$  bzw.  $d_{HR\,II} = l_2$  entsprechen jeweils dem betrachteten Eingriffspunkt der Paarungsvariante.



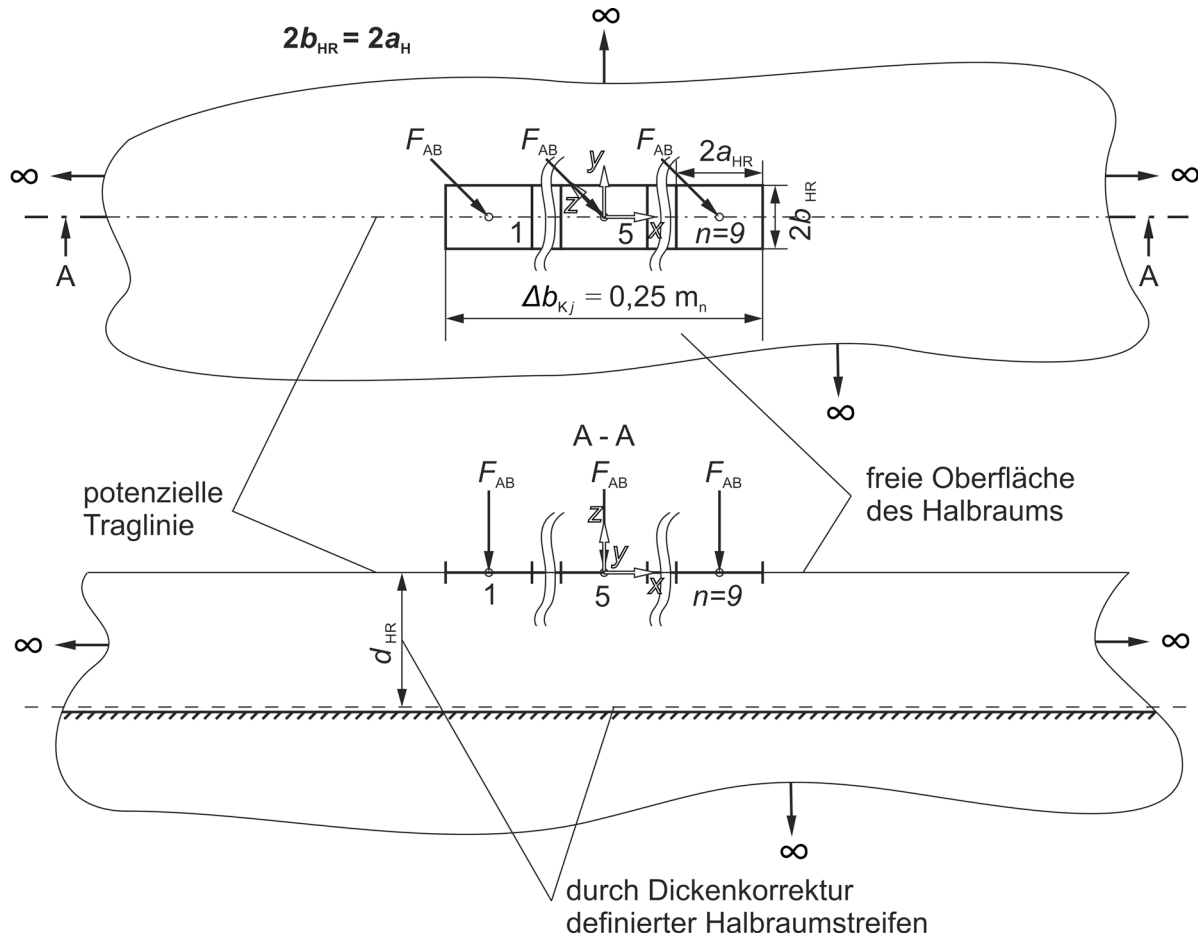


Abbildung 5.4: Annäherung des Linienkontaktes entlang einer potenziellen Traglinie durch eine Halbraumbeschreibung auf Basis von rechteckigen Krafteinleitungselementen.

Die Ergebnisse der Parameterstudie, auf Basis der beschriebenen Halbraumlösung, können dem Diagramm in Abbildung 5.5 entnommen werden. Auf der Abszissenachse ist der modulbezogene Abstand von der Krafteinleitungsstelle und auf der Ordinatenachse die bezogene Verformungseinflusszahl aufgetragen. Der Abklingbereich der Parameterstudie steht repräsentativ für das Kontaktverformungsabklingverhalten im Zahnkontakt allgemein. Sind  $l_1$ ,  $l_2$  sowie  $\rho_{ges}$  groß, dann ist auch die Abklinglänge groß. Sind  $l_1$ ,  $l_2$  sowie  $\rho_{ges}$  hingegen klein, dann ist auch die Abklinglänge klein. Stark vereinfacht kann festgestellt werden, dass die Abklinglänge umso kleiner ausfällt, desto kleiner die Ersatzzähnezahl  $z_v$  wird und sie wird nie deutlich größer als  $1,4 \cdot m_n$  sein. Die Verformungseinflusszahl klingt zusätzlich mit einem großen Gradienten ab und schon in einem zur Lasteinleitung benachbarten Kontaktelement  $\Delta b_{Kj+2}$  treten nur noch ca. 15 % der maximalen Kontaktverformung auf. Damit kann ein nennenswerter Wechselwirkungseinfluss bei der Berechnung der Kontaktverformungen und -spannungen ausgeschlossen werden. Bestätigt wird dies durch eine Gegenüberstellung von FEM-Kontaktsimulation und ZZM Berechnungen für die zahnkontaktäquivalente Paarung von Zylinderschalensegmenten. Die Einspannung der Zylinderschalensegmente erfolgt entsprechend Abbildung 5.4 an der gesamten Innenfläche bei einer Tiefe der Dicke  $d_{HR I} = l_1$  bzw.  $d_{HR II} = l_2$ . Exemplarisch zeigen Abbildung 5.6 sowie Abbildung 5.7, den Vergleich eines balli-

gen Kontaktes und eines Kontaktes mit Winkelfehler. In beiden Fällen, sind die Unterschiede in der maximalen Pressung und der resultierenden Kontaktlänge sehr klein.

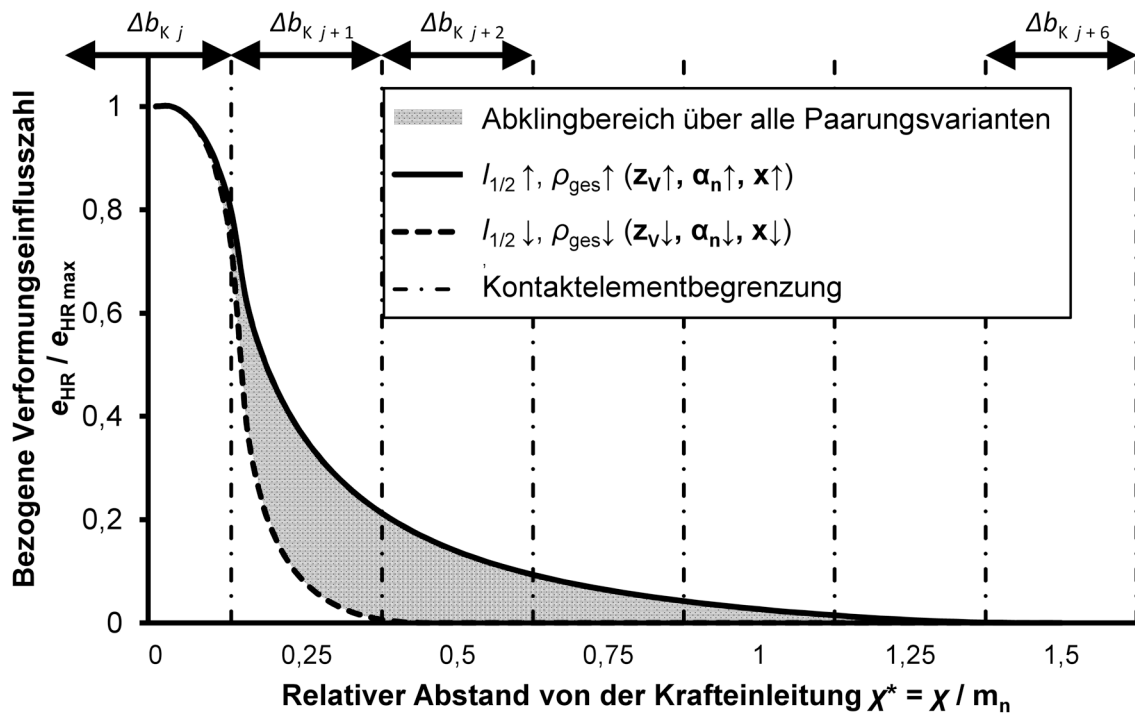


Abbildung 5.5: Verformungseinflusszahl und Abklingverhalten der Kontaktverformung aller relevanten Paarungsmöglichkeiten der Profilmengen aus Abbildung 2.2 für die Eingriffspunkte A, C und E

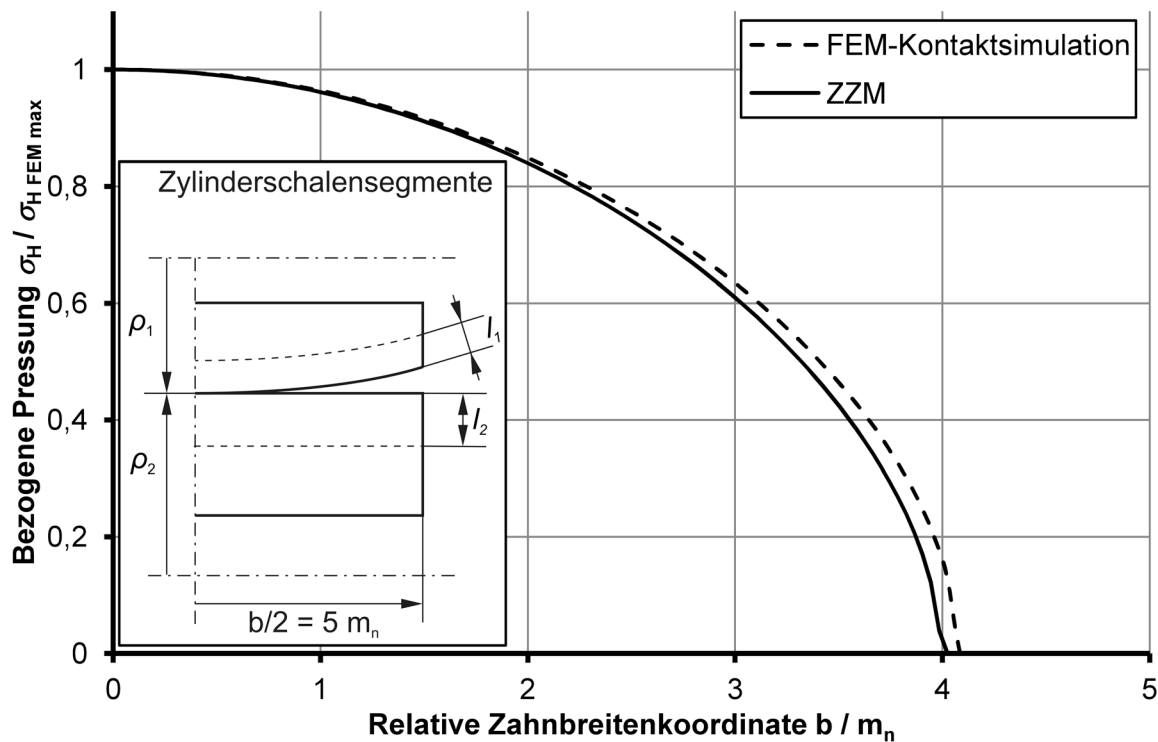


Abbildung 5.6: Vergleich der Pressung zwischen FEM-Kontaktsimulation und ZKM für eine zahnkontaktäquivalente Paarung von Zylinderschalensegmenten mit Balligkeit

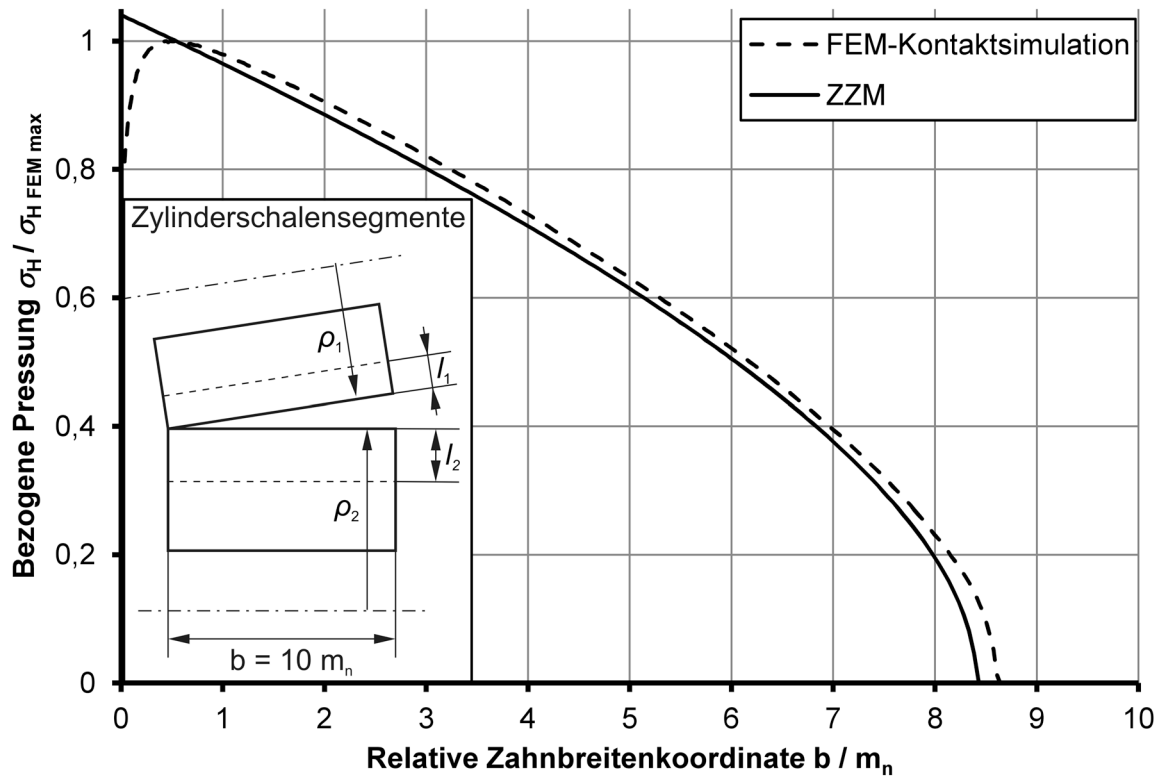


Abbildung 5.7: Vergleich der Pressung zwischen FEM-Kontaktsimulation und ZMZ für eine zahnkontaktäquivalente Paarung von Zylinderschalensegmenten mit Winkelfehler

Die durchgeführten Untersuchungen auf Basis der Halbraumtheorie und FEM-Kontaktsimulationen zeigen deutlich, dass die Wechselwirkung zwischen den Kontaktelementen im Zahnkontakt hinsichtlich der Kontaktverformungen sowie -spannungen ohne nennenswerte Auswirkungen vernachlässigt werden kann.

### 5.3.2 Zahnberandungseinflüsse

Unter einem Zahnberandungseinfluss bezüglich der Kontaktverformungen und -spannungen werden hier die folgenden Einflüsse verstanden:

- Änderung des Spannungszustandes von der Zahnmitte in Richtung der Stirnseiten und des Zahnkopfes
- veränderte Stützwirkung bei unterschiedlich breiten Zähnen
- Behinderung der Ausbildung des Kontaktes im Bereich der Zahnkopfkante

Wie stark sich die Änderung des Spannungszustandes sowie der Kontakt unterschiedlich breiter Zähne auf die Kontaktverformungen und -spannungen auswirken, hängt maßgeblich von der Wechselwirkung ab. Aus Abbildung 5.5 kann deshalb geschlossen werden, dass die Wirkung dieser Einflüsse weitestgehend nach einem Randabstand von  $1 \cdot m_n$  abgeklungen sind. Stirn- und Kopfkanten werden allerdings immer mit einer Fase ausgeführt, deshalb ist

zu klären, in welcher Größenordnung diese auftreten, um dies bei der Bewertung mit einfließen lassen zu können.

Aus den folgenden Gründen sind Fasen an den Stirnseiten und Zahnköpfen immer erforderlich:

- Es soll dem Brechen der durchgehärteten Kanten beim Kantenkontakt mit schweren Folgeschäden vorgebeugt werden.
- Es soll dem Brechen von Graten, die in Form von Spänen durch den Zahneingriff laufen und Abdrücke auf den Nutflanken hinterlassen können, vorgebeugt werden.
- Es soll Kratz- und Stoßschäden auf der Nutflanke beim Handling der Radsätze vorgebeugt werden.
- Es sollen Grate und scharfe Kanten vermieden werden, denn diese können einen negativen Einfluss auf die Geräuschemission haben.

Da das Entgraten und Anfasen bei Kegelrädern anders als bei Stirnrädern oft manuell geschieht, gibt es derzeit keine allgemeine Industrieempfehlung bzw. umfangreichen Untersuchungen, wie sie für Stirnräder existieren (vgl. [Ho95], [Ny96], [HN115206], [HM12]). Deshalb werden hier im Folgenden aus der Praxis gesammelte Erfahrungen für die Mindestgrößen der Stirn- und Kopfkantenfasen zusammengestellt.

$$cd_A \geq 0,03 \cdot m_{mn} \quad (5.9)$$

$$cd_B \geq 0,2 \cdot m_{mn} \quad (5.10)$$

$$cd_C \geq 0,5 \cdot (cd_A + cd_B) \quad (5.11)$$

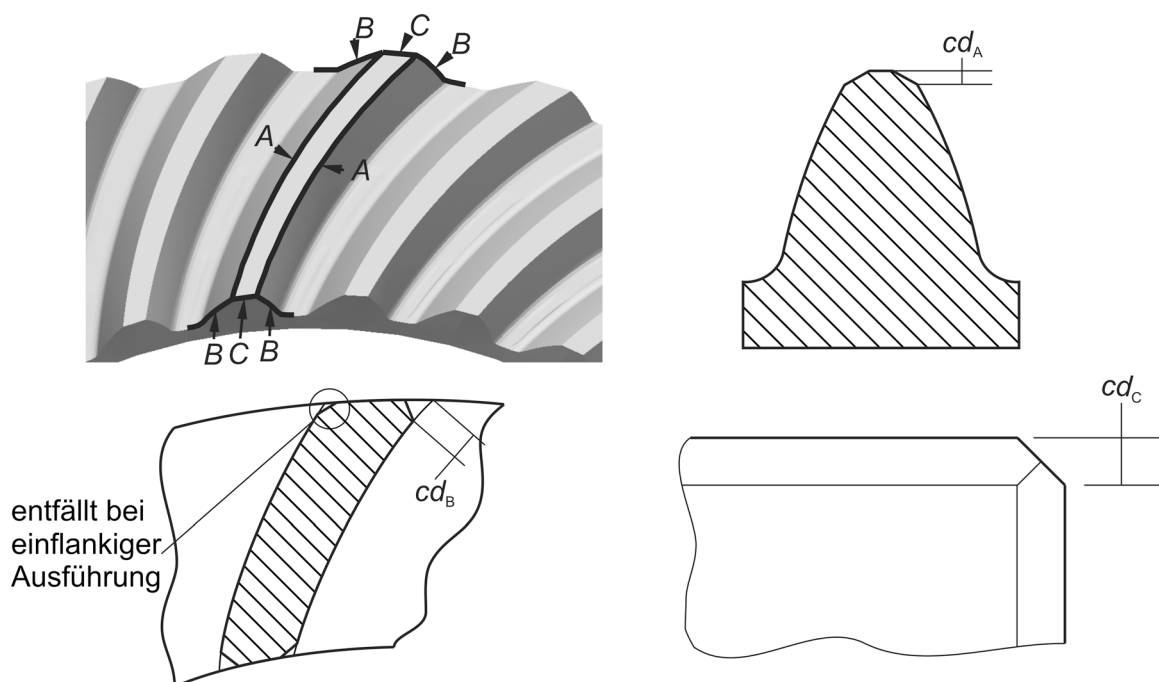


Abbildung 5.8: Bezeichnung der Position der Fasen und der Fassenmaßangaben

Für die Anfasung und Entgratung der Zähne werden die praxisüblichen Mindestforderungen nach Abbildung 5.8 und gemäß Gleichung (5.9) bis (5.11) angenommen. Die Bezeichnung  $cd$  steht dabei für „chamfering and deburring“. Die Indizes A bis C stehen für die betrachtete Kante. Es wird näherungsweise davon ausgegangen, dass die Fasen als gleichschenklige Dreiecke ausgeführt werden. Die Ausführung an der Zehe erfolgt in der Regel zweiflankig. An der Ferse können die Fasen ein- oder zweiflankig ausgeführt werden (vgl. Abbildung 5.8). Gemäß der Markierung in Abbildung 5.8, wird bei einer einflankigen Ausführung nur an der konvexen Flanke auf die Fase an der Ferse verzichtet.

Die Auswirkungen der Änderung des Spannungszustandes im stirnseitennahen Bereich wurden auf Basis von FEM-Kontaktsimulationen mit zahnkontaktäquivalenten Paarungen von Zylinderschalensegmenten für den konjugierten Kontakt untersucht. Abbildung 5.9 zeigt die repräsentative Auswertung einer solchen FEM-Kontaktsimulation im Vergleich zu der Lösung nach Hertz bzw. der ZKM. Unmittelbar an der Stirnseite ist der Einfluss sehr groß, die Pressungen sind dort gegenüber denen im EVZ um ca. 30 % kleiner. Allerdings klingt dieser Einfluss, wie schon auf Basis der geringen Wechselwirkung abgeschätzt wurde, sehr schnell ab. An der Stelle des Randabstandes des Fasenendes bei  $cd_B = 0,2 m_n$  ist die Pressung nur noch ca. 5 % kleiner als beim EVZ.

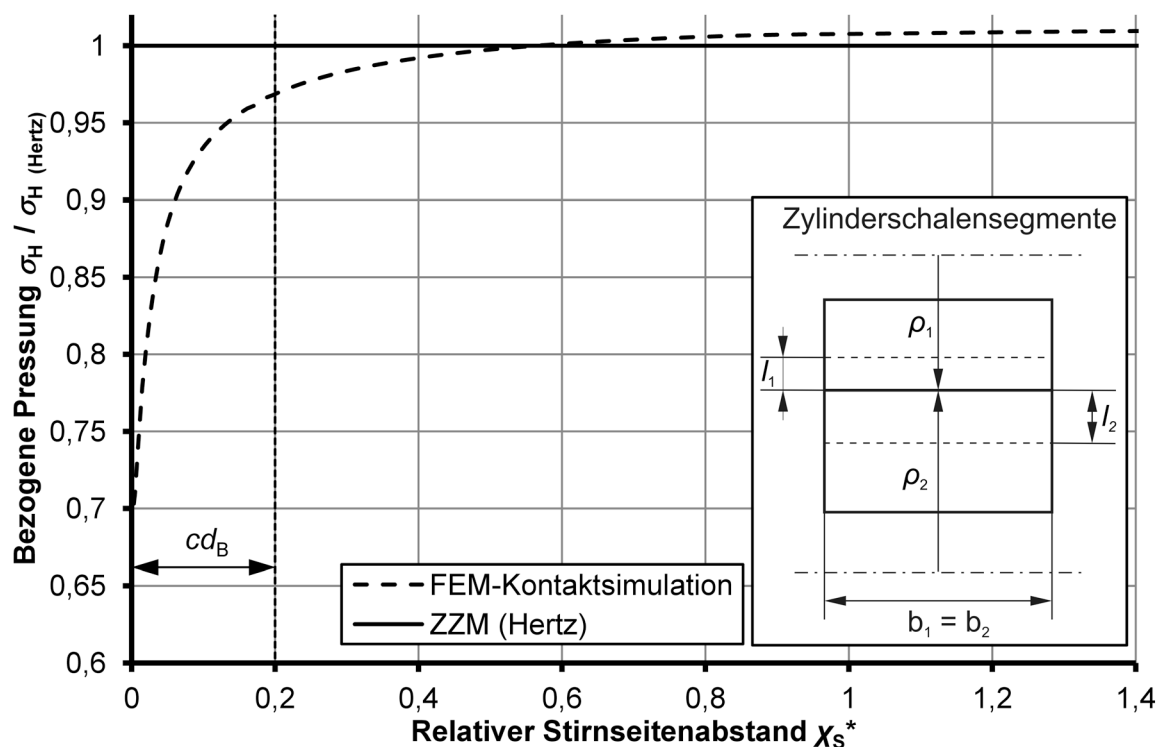


Abbildung 5.9: Pressungsverteilung bei konjugierten Kontaktpartnern mit gleicher Breite (nur Kontaktverformung)

Auch die Auswirkungen unterschiedlich breiter Zähne auf die Kontaktverformungen und -spannungen wurden auf Basis von FEM-Kontaktsimulationen mit zahnkontaktäquivalenten Paarungen von Zylinderschalensegmenten für den konjugierten Kontakt untersucht. Abbildung 5.10 zeigt die repräsentative Auswertung einer solchen FEM-Kontaktsimulation, wieder

im Vergleich zu der Lösung nach Hertz bzw. der ZZM. Unmittelbar an der Stirnseite des kürzeren Kontaktpartners wird die Spannung singulär. Die spannungserhöhende Wirkung klingt aber, wie aufgrund der geringen Wechselwirkung zu erwarten war, sehr schnell ab. Bei einem Randabstand von  $0,06 \cdot m_n$  beträgt die Pressung nur noch das 1,05fache der Hertzschen Pressung und bei einem Randabstand von  $0,2 \cdot m_n$  (= Fasenbreite  $cd_B$ ) kann der Einfluss als vollständig abgeklungen bewertet werden. Eine Verlängerung des breiteren Kontaktpartners über einen Betrag von  $0,6 \cdot m_n$  hinaus hat keine weitere Veränderung der Pressung zur Folge.

Im Bereich des Kopfeingriffs bzw. im Bereich des Voreingriffs, wie er in Abbildung 3.4 dargestellt wird, kann sich das Kontaktgebiet aufgrund der Kopfkante nicht ungestört ausbilden. Des Weiteren ist der Zylinder, der die Krümmung des Zahnkopfs approximiert, nur ein Teilzylinder (siehe Abbildung 5.11), wird aber bei der ZZM als Vollzylinder gerechnet. Aus diesen Gründen ist der Zahnkontakt mit Zahnkopfkantenbeteiligung weicher, als er mit dem ungestörten Vollzylinderkontakt bei der ZZM abgebildet wird. Linke [Li69] untersuchte den Unterschied zwischen Voll- und Teilzylinderkontakt, wie er in Abbildung 5.11 dargestellt wird, experimentell. Seine Messungen zeigen, dass die Einsenkung um bis zu 20 % größer ist wenn ein Kontaktpartner statt eines Vollzylinders ein Teilzylinder ist. Da weiterhin die Ausbildung des Kontaktgebietes durch die Kopfkante behindert wird, steigt ebenfalls die Pressung an und die Abplattungsbreite sinkt.

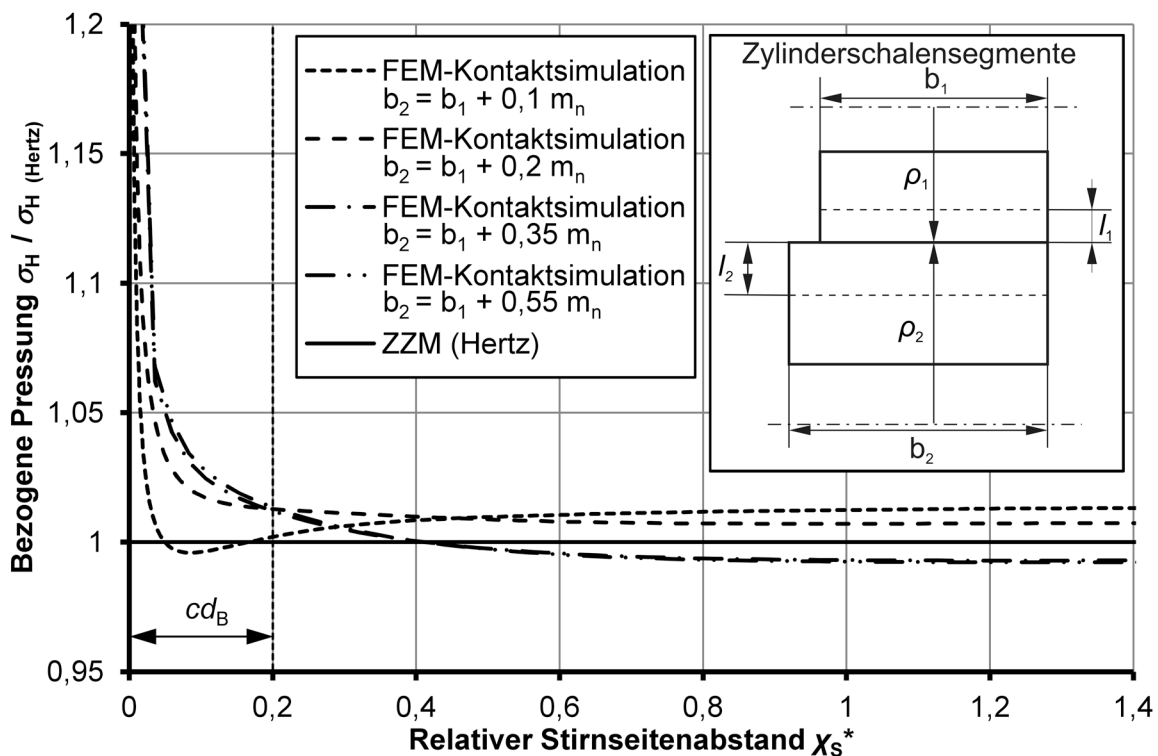


Abbildung 5.10: Pressungsverteilung bei konjugierten Kontaktpartnern mit unterschiedlicher Breite (nur Kontaktverformung)

Auf Basis der FEM-Untersuchungen und der Erkenntnisse zur Wechselwirkung kann festgestellt werden, dass der Einfluss der Spannungsänderung im Stirnseitenbereich und die Aus-

wirkung unterschiedlich breiter Kontaktpartner ohne wesentliche Genauigkeitseinschränkungen vernachlässigt werden kann. Dies gilt umso mehr, da die Wirklängen gegenüber einer praxisüblichen Tragbildbreite sowie Fasenbreite  $cd_B$  sehr klein ist. Des Weiteren wurden die Untersuchungen für einen abweichungsfreien konjugierten Kontakt ausgeführt. Da die Verzahnungsauslegung aufgrund der Verlagerungsempfindlichkeit (vgl. Abbildung 1.3) immer das Applizieren von Breitenmodifikationen erfordert, verschwinden diese Effekte entsprechend ihrer geringen Wirklänge schnell. Damit kann der Nicht-Hertzsche 3D-Kontakt bei der Zahnkontaktanalyse weiter auf Basis der ZZM betrachtet werden. Dies liefert sogar erhebliche Genauigkeitsvorteile, da das Kontaktproblem nur entlang der Traglinie numerisch gelöst werden muss. Senkrecht zur Traglinie in die Richtung der Abplattungsbreite  $a_H$  erfolgt die Lösung geschlossen analytisch.

Der bei der ZZM vernachlässigte Einfluss des Teilzylinders im unmittelbaren Kopfkantenkontakt ist allerdings vergleichsweise groß. Dies ist besonders dann relevant, wenn der Voreingriffsanteil der Traglinie groß ist oder wenn es sich um eine Geradverzahnung handelt. Ist man zusätzlich bestrebt, die Zahnhöhe möglichst vollständig zu nutzen, sollte für eine zuverlässige Wahl der Höhenmodifikationen der Kopfkanteneffekt berücksichtigt werden. Deshalb wird die ZZM im Folgenden so erweitert, dass eine Berücksichtigung der Teilzylinder im Kopfkantenkontakt erfolgen kann.

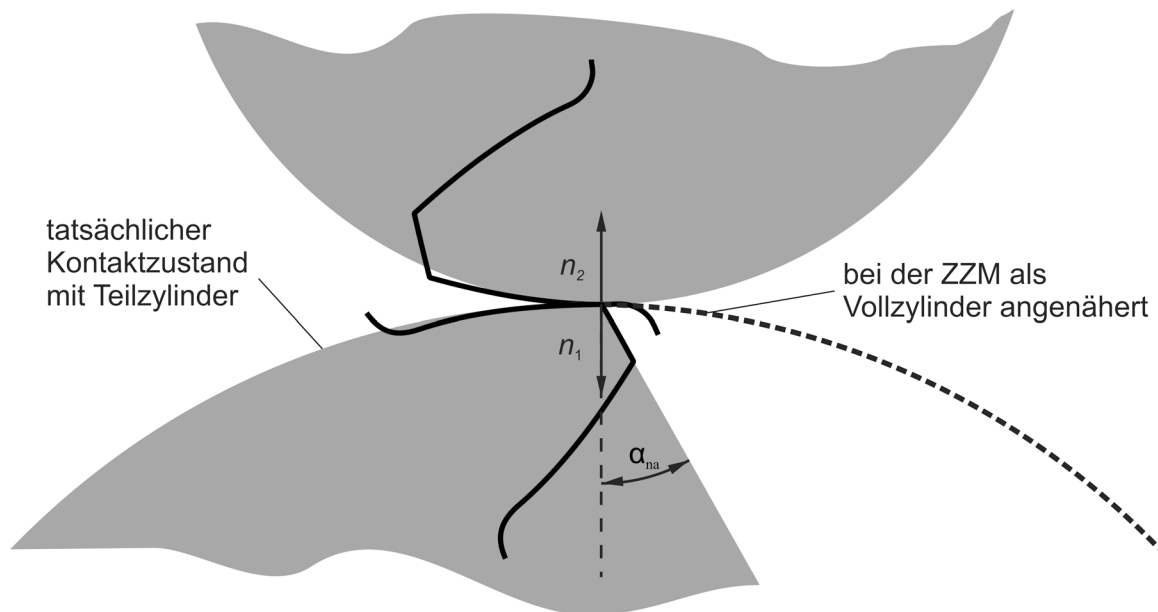


Abbildung 5.11: Eingriffspunkt mit Kopfteilbeteiligung

## 5.4 Erweiterung der ZKM zur Berücksichtigung von Kopfkanten

Die ZKM soll so erweitert werden, dass sie im Bereich des Kopfeingriffes den Kopfkantenkontakt als Paarung eines Vollzylinders mit einem Teilzylinder gemäß Abbildung 5.11 beschreiben kann. Zu diesem Zweck wurde ein Vollzylinder-Vollzylinder- bzw. Vollzylinder-Teilzylinder-Kontaktmodell auf Basis der bereits eingeführten Verformungseinflussfunktion für die Berührung zweier elastischer Halbräume gemäß Gleichung (5.8) sowie der Einflusszahlenmethode entwickelt. Diese Methode hat sich generell als schnelle Alternative zur FEM für das Nicht-Hertzsche 3D-Kontaktproblem z.B. im Rad-Schiene-Kontakt [Be90], im Wälz-korperkontakt [MKF86] oder bei Verzahnungen [GGC05], bewährt.

Die Lösung des Kontaktproblems erfolgt, wie schon erwähnt, auf Basis der Einflusszahlenmethode analog Abschnitt 3.6. Der einzige Unterschied besteht darin, dass beim Kontakt zweier Zylinder wie er in Abbildung 5.12 c) dargestellt wird, keine rotatorische, sondern eine translatorische Annaherungsbewegung ausführt wird. Damit wird aus dem Gleichungssystem (3.8) für rotatorischen Kontakt das Gleichungssystem (5.12) für translatorischen Kontakt.

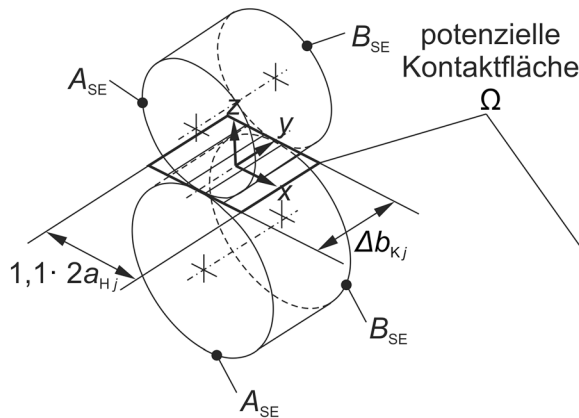
$$\begin{pmatrix} e_{HR\ 11} & \dots & e_{HR\ 1n} & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} & -1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{HR\ 1} \\ \vdots \\ F_{HR\ n} \\ f_{HR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{AK\ HR\ 1} \\ \vdots \\ -f_{AK\ HR\ n} \\ F_j \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Wie in Abbildung 5.12 a) gezeigt, kann das potenzielle Kontaktgebiet  $\Omega$  in der gemeinsamen Tangentialebene der sich lastfrei berührenden Zylinder definiert werden. Die Länge des potenziellen Kontaktgebietes entspricht dabei der Zylinderlänge  $\Delta b_{Kj}$ . Die Breite des potenziellen Kontaktgebietes wird mit dem 1,1fachen der analytisch berechneten Hertzschen Abplattungsbreite  $2a_{Hj}$  gemäß Gleichung (5.5) vorgegeben. Wenn einer der Kontaktpartner ein Teilzylinder ist, dann wird die Breite des potenziellen Kontaktgebietes durch die Position der Kopfkante begrenzt (siehe Abbildung 5.12 b)). Da der Zylinderkontakt im EVZ berechnet werden soll, ist damit die Last- bzw. Pressungsverteilung über der Zylinderlänge  $\Delta b_{Kj}$  konstant. Auf eine Einteilung in Einzelkontakte entlang der  $y$ -Achse kann deshalb verzichtet werden und es muss nur eine diskrete Auflösung des Kontaktgebietes in Einzelkontakte entlang der  $x$ -Achse vorgenommen werden. Die Darstellungen in Abbildung 5.12 b) sowie c) veranschaulichen dies. Die Anfangsklaffmae  $f_{AK\ HR\ i}$  werden gemäß Abbildung 5.12 a) senkrecht zur potenziellen Kontaktfläche berechnet.

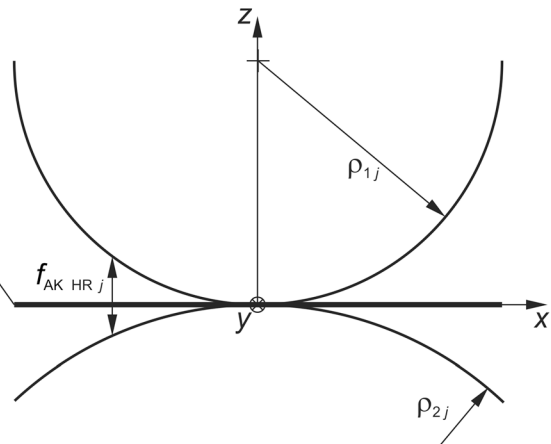
Für die Berechnung der Verformungseinflusszahlen gemäß Gleichung (5.8) werden die Vollzylinder bzw. Teilzylinder als Halbraumstreifen gemäß Abbildung 5.12 b) modelliert. Um die endliche Zylinderlänge zu erfassen, werden die Spiegelungsebenen  $A_{SE}$  sowie  $B_{SE}$  eingeführt und die Verformungseinflussfunktion an diesen analog der Methode aus Abschnitt 4.3.2 gespiegelt. Handelt es sich um einen Teilzylinder, wird zusätzlich die Spiegelungsebene  $C_{SE}$  eingeführt. An dieser soll allerdings nicht der EVZ, sondern der räumliche Spannungszustand gelten.



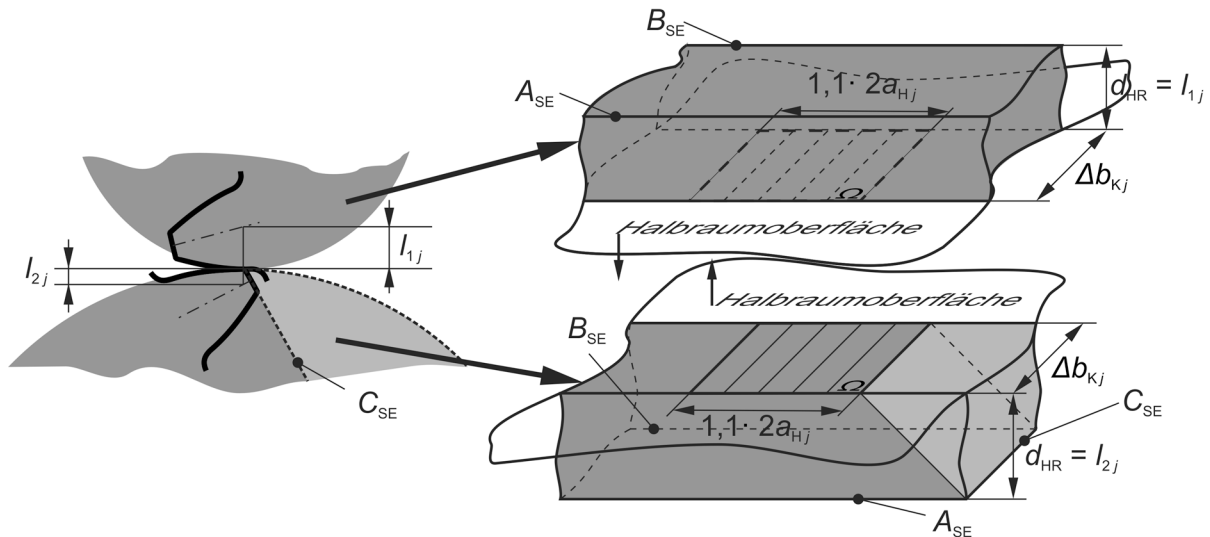
a) Definition der potenziellen ebenen Kontaktfläche und Einteilung in Kontaktelemente



Berechnung der Anfangsklaffmaße



b) Abbildung der Zylinder sowie der potenziellen Kontaktfläche auf den Halbraum und Berechnung der Einflusszahlen



c) Lösung des Kontaktproblems auf Basis der Einflusszahlenmethode

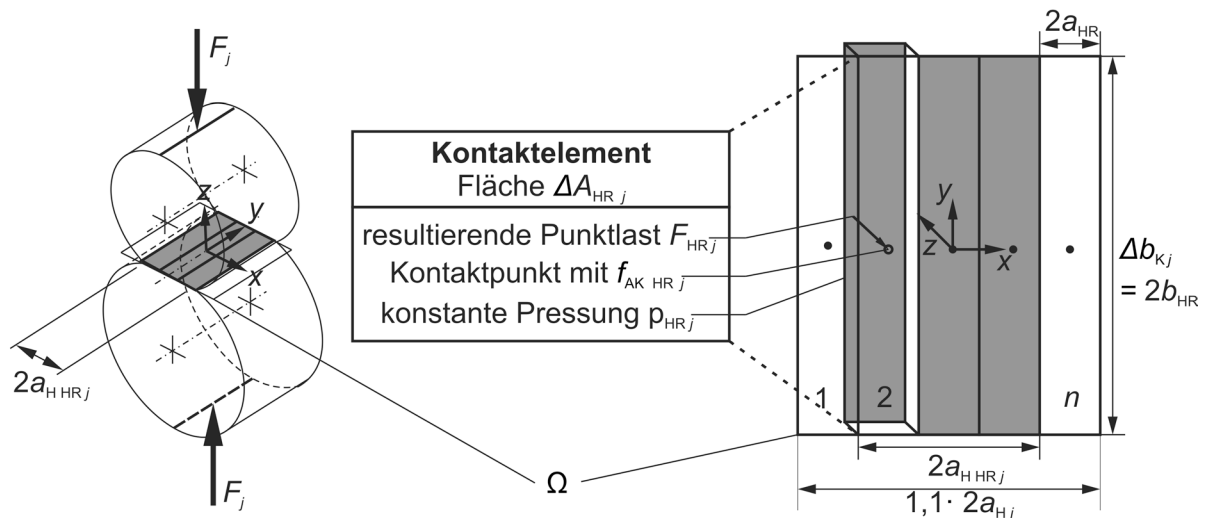


Abbildung 5.12: Modell für die Berechnung des Kontaktes zweier Zylinder auf Basis der HRM

Um die Wirkung des räumlichen Spannungszustandes effektiv für den Halbraum berücksichtigen zu können, entwickelte Guilbault [Gu11] einen von der Querkontraktionszahl abhängigen Korrekturfaktor, der mit Gleichung (5.13) berechnet werden kann. Dieser Korrekturfaktor wird mit dem Teil der Einflussfunktion multipliziert, der durch die Spiegelung an der Ebene  $C_{SE}$  erzeugt wird.

$$\psi = 1,29 - \frac{1}{(1 - \nu)} \cdot [0,08 - 0,5 \cdot \nu] \quad (5.13)$$

Vergleiche mit FEM-Kontaktsimulationen haben gezeigt, dass der Kopfkantenwinkel bzw. Kopfkanteneingriffswinkel (siehe  $\alpha_{na}$  in Abbildung 5.13) einen großen Einfluss auf die Kontaktverschiebung hat. Die Kontaktsteifigkeit nimmt mit steigendem Kopfeingriffswinkel zu. Besonders deutlich geschieht dies in einem Kopfeingriffswinkelbereich zwischen  $\alpha_{na} = 0^\circ$  (theoretischer Wert) bis  $40^\circ$ . Systematische Untersuchungen zur Abbildung dieses Verhaltens zeigten, dass sich dieses ebenfalls am besten durch einen Faktor zur Korrektur des Spiegelungsanteils abbilden lässt. Als Referenzlösung dienten mittels FEM-Kontaktsimulation berechnete Annäherungen  $f_H$  für Kopfkantenwinkel mit den Werten zwischen  $\alpha_{na} = 0^\circ$  und  $90^\circ$ , wobei die Kontaktbedingungen so definiert wurden, dass das Kontaktgebiet auch bei einem Winkel von  $90^\circ$  durch die gedachte Kopfkante begrenzt wird (siehe Abbildung 5.13). Der große Winkelbereich von  $0^\circ$  bis  $90^\circ$ , der für die Untersuchungen gewählt wurde, hat zwar keine praktische Bedeutung, ermöglicht es aber, die Zusammenhänge besser zu beschreiben. Auf Basis dieser FEM-Referenzlösungen wurde der winkelabhängige Spiegelungsfaktor Gleichung (5.14) entwickelt, der den Einfluss des Kopfkantenwinkels auf die Kontaktverformung erfasst. Damit ergibt sich die Einflusszahl  $a_{HRij}$  eines Halbraumstreifens mit allen Spiegelungsanteilen gemäß Gleichung (5.15). Die Spiegelungsanteile können dabei analog dem Vorgehen in Abschnitt 4.3.2 berechnet werden.

$$k_\alpha = e^{\left(\frac{\alpha_{na}}{-0,4}\right)} \quad (5.14)$$

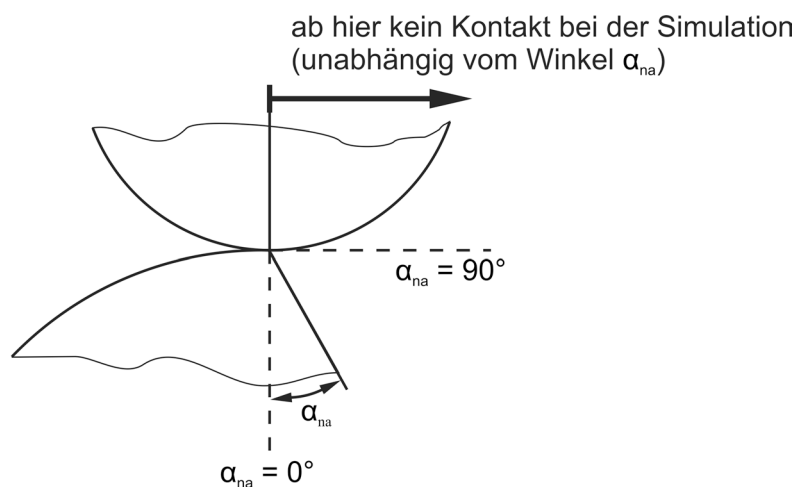


Abbildung 5.13: Definition des Kopfkantenwinkelbereichs für die theoretische Ermittlung des winkelabhängigen Spiegelungsfaktors  $k_\alpha$

$$a_{HR\ ij} = a_{HR\ ij} + a_{HR\ gespiegelt\ A_{SE}} + a_{HR\ gespiegelt\ B_{SE}} + a_{HR\ gespiegelt\ C_{SE}} \cdot \psi \cdot k_{\alpha} \quad (5.15)$$

Die in Abbildung 5.12 dargestellte entwickelte Lösung für den Kontakt zweier Vollzylinder oder eines Vollzylinders mit einem Teilzylinder auf Basis der Verformungseinflusszahlen des Halbraums gemäß Gleichungssystem (5.12) und Gleichung (5.15) wird im Folgenden als Halbraum-Methode (HRM) bezeichnet.

Die von Linke [Li69] experimentell ermittelten Annäherungen  $f_H$  einer Vollzylinderpaarung und einer Paarung aus Voll- sowie Teilzylinder wurden zur Verifikation der HRM herangezogen. Die von Linke gewählten Zylinderkonfigurationen stehen exemplarisch für eine typische Kopfeingriffssituation. In Abbildung 5.14 wurden die mit der HRM berechneten Annäherungen der Zylinder den experimentell ermittelten gegenübergestellt. Diese Gegenüberstellung zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Damit wurde gezeigt, dass die umgesetzte Berechnungsmethode das reale Verhalten sehr gut abbildet.

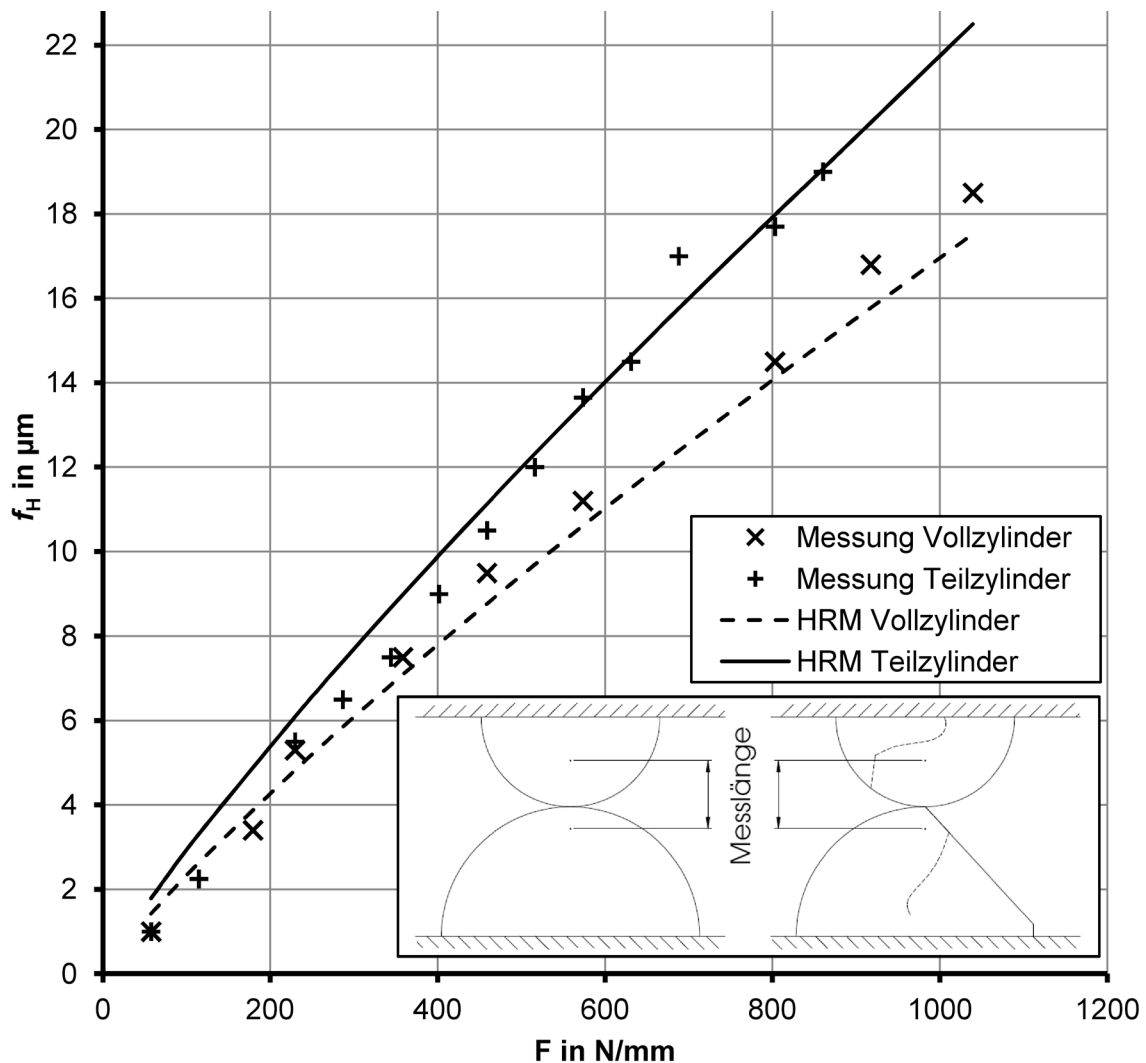


Abbildung 5.14: Von Linke [Li69] experimentell ermittelte Annäherungen  $f_H$  einer Vollzylinderpaarung und einer Paarung aus Voll- sowie Teilzylinder

Im Zusammenhang mit der Betrachtung der Kontaktverhältnisse an der Zahnkopfkante ist, neben der Beanspruchung, der Abplattungsbreite und der Annäherung bei unmittelbarem Kopfkantenkontakt, das Verhalten des Kontaktes unterhalb der Kopfkante von besonderem Interesse. Zunächst soll deshalb über einen Vergleich der Pressungsverteilung zwischen der HRM und FEM-Kontaktsimulationen geklärt werden, ob die HRM auch den Kopfkantenabstand im ausreichenden Maße erfassen kann. Dies geschieht am Beispiel des Vollzylinder- / Teilzylinder-Kontaktes aus den Versuchen von Linke [Li69]. Abbildung 5.16 zeigt den Vergleich der HRM- und der FEM-Pressungsverteilung, bezogen auf die Hertzsche Pressung für Vollzylinder. Die Ergebnisse der HRM- und der FEM-Berechnungen zeigen für alle Kopfkantenabstände eine sehr gute Übereinstimmung. Deshalb erfolgt die Bewertung des Einflusses des Kopfkantenabstandes auf die Kontaktverschiebung und Abplattungsbreite ausschließlich unter Verwendung der HRM. Das Diagramm in Abbildung 5.15 zeigt die entsprechenden Ergebnisse dieser Untersuchung. Der Kopfkantenabstand ist auf der Abszisse, bezogen auf die halbe Hertzsche Abplattungsbreite zweier Vollzylinder, aufgetragen. Auf den Ordinatenachsen sind ebenfalls die auf die jeweiligen Hertzschen Ergebnisse zweier Vollzylinder bezogenen Werte aufgetragen. Dem Diagramm kann entnommen werden, dass in einem Abstand des zweifachen der halben Hertzschen Abplattungsbreite der Einfluss der Kopfkante fast vollständig abgeklungen ist.

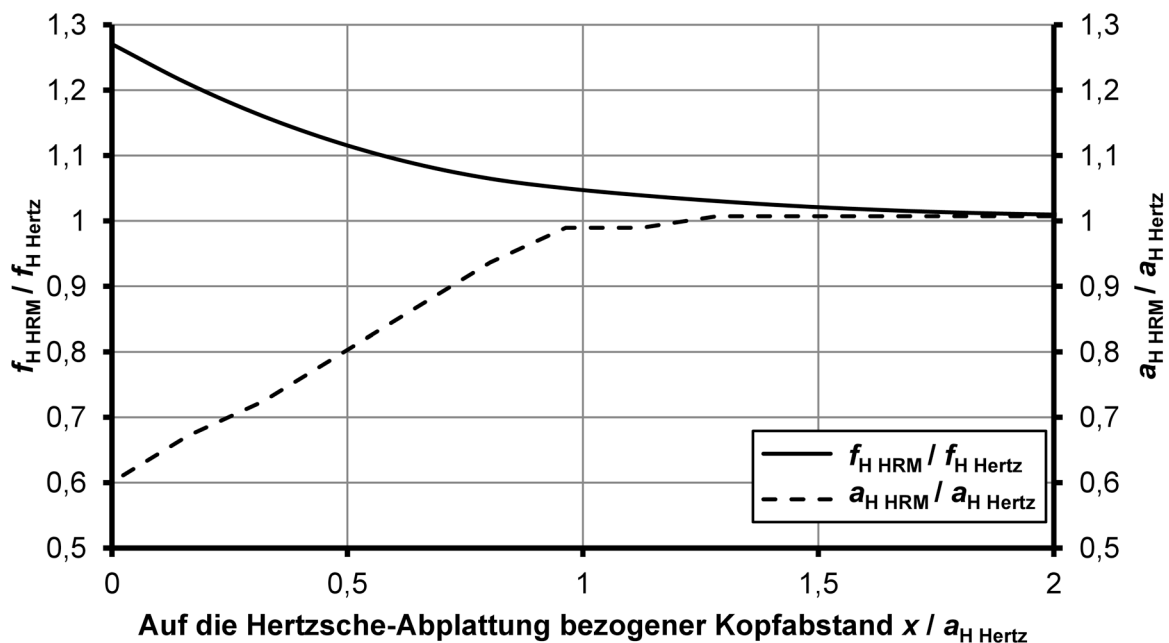


Abbildung 5.15: Abplattungsbreite und Annäherung mit der HRM in Abhängigkeit vom Kopfkantenabstand berechnet

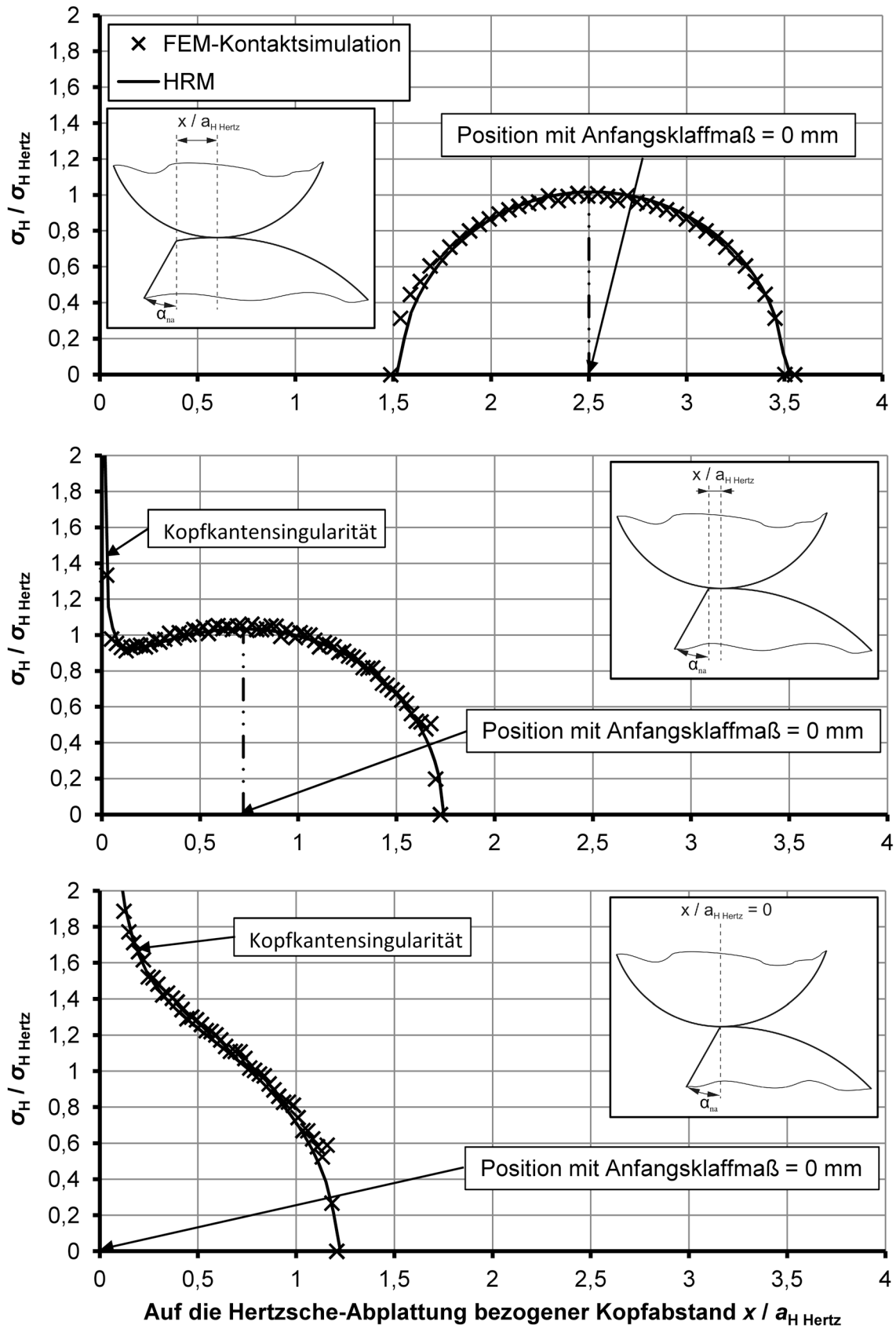


Abbildung 5.16: Pressungsverteilung im Kontakt von Voll- und Teilzylinder für verschiedene Kopfkantenabstände, berechnet mittels HRM und FEM-Kontaktsimulation

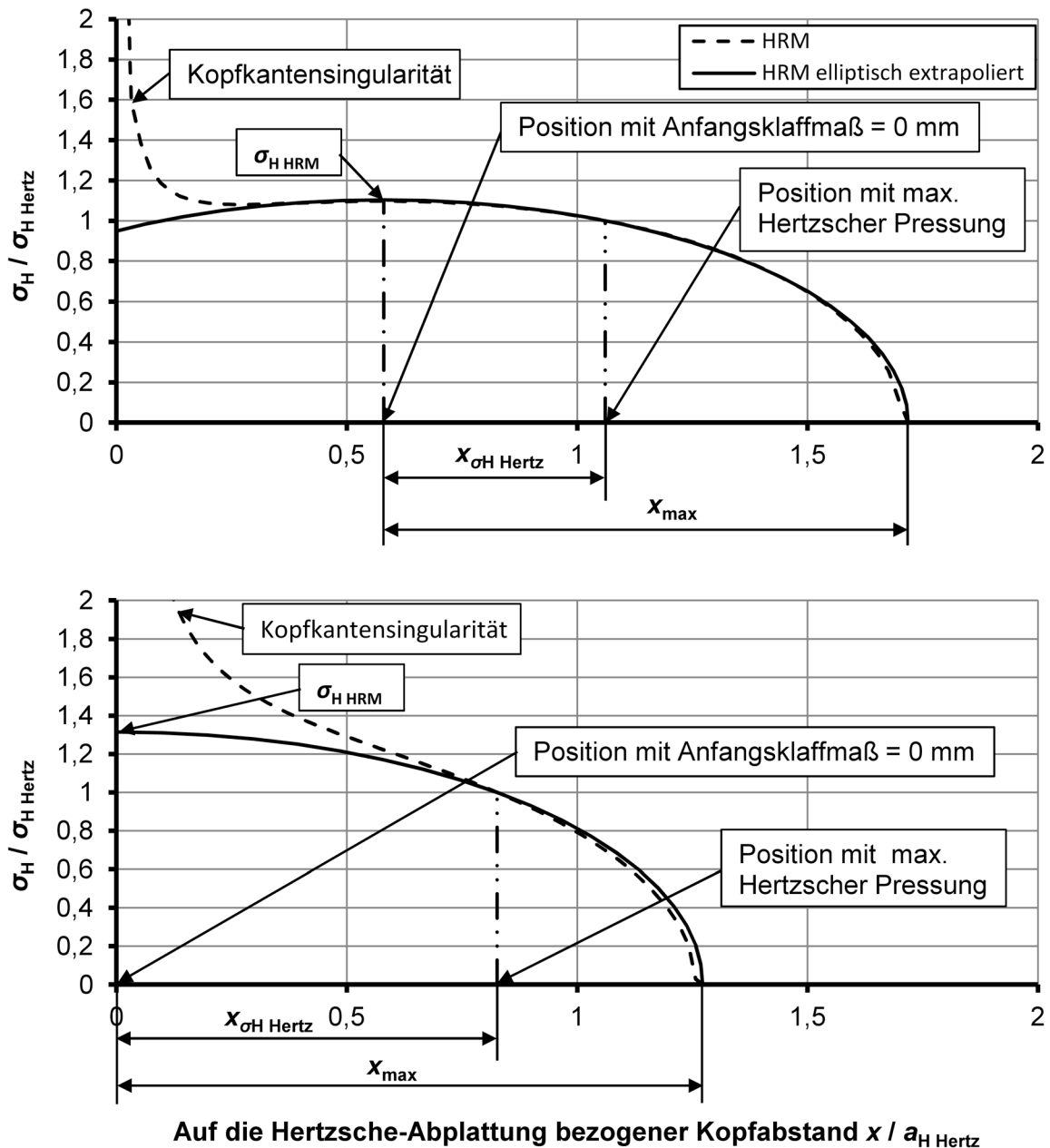


Abbildung 5.17: Elliptische Glättung der singulären Pressung an der Kopfkante für verschiedene Kopfkantenabstande

Abbildung 5.16 und Abbildung 5.17 zeigen, dass die Kontaktsimulation mit Kopfkantenkontakt eine Pressungssingularitat an der Kante aufweist. Diese löst sich allerdings sofort auf, wenn statt der Kante ein definierter Radius appliziert wird, auch wenn dieser sehr klein ist ( $< 0.02 \cdot a_H$ ). Mit zunehmenden Radius sinkt die unmittelbare Kantenpressung sehr schnell ab. Auch in der Realität werden sich in Abhängigkeit von lokaler Plastifizierung und Verschle Radien entsprechend der Abrollbewegung sowie der Kontaktbedingungen ausbilden. Der tatsächliche Kantenzustand ist damit nicht ausreichend genau quantifizierbar. Für die Festlegung der Flankenmodifikationen ist es aber unbedingt erforderlich, dass die Pressung einen definierten Wert annimmt und im Kopfkontakt die Pressungen singularitatsbedingt nicht überbewertet werden. Deshalb wird die Pressung im kopfkantennahen Bereich durch

die Extrapolation der kopfkantenunbeeinflussten Pressung berechnet. Die Extrapolation erfolgt dabei auf Basis einer Ellipse und die maximale Pressung  $\sigma_{H\ HRM}$  ergibt sich gemäß Gleichung (5.16) und Abbildung 5.17 als eine Halbachse der Ellipse. Dabei wird  $\sigma_{H\ Hertz}$  gemäß Gleichung (5.4) berechnet und  $x_{\sigma_{H\ Hertz}}$  sowie  $x_{max}$  mit der HRM bestimmt. Nach dieser Methode ergibt sich eine ca. 30 % größere Pressung im unmittelbaren Kopfeingriff.

$$\sigma_{H\ HRM} = \frac{\sigma_{H\ Hertz}}{\sin\left(\arccos\left(\frac{x_{\sigma_{H\ Hertz}}}{x_{max}}\right)\right)} \quad (5.16)$$

Die hier entwickelte Methode für die Kontaktsimulation von zwei Vollzylindern oder einem Voll- mit einem Teilzylinder liefert in Abhängigkeit von den Zylinderabmessungen, dem Kopfkantenwinkel und dem Kopfabstand die folgenden Ergebnisse:

- die Pressung auf Basis der elliptisch extrapolierten Halbraumlösung  $\sigma_{H\ HRM}$
- die Annäherung auf Basis der Halbraumlösung  $f_{H\ HRM}$
- die Abplattungsbreite auf Basis der Halbraumlösung  $a_{H\ HRM}$

## 5.5 Verbesserte Berechnung der Kontaktverformungseinflusszahl und der Pressung

Die Kontaktverformung und die Pressungen bzw. die Kontaktverformungseinflusszahlen werden wie im Abschnitt 5.2 beschrieben unter Vernachlässigung der Wechselwirkung und der Berandungseinflüsse auf Basis der ZZM berechnet. Allerdings sollen im Bereich des Kopfeingriffes die Einflüsse der Kopfkante mit der HRM erfasst werden. Um dies effektiv zu ermöglichen, wird die ZZM mit der HRM kombiniert. Weist ein entkoppelter Einzelkontakt entlang einer Berührlinie einen Kopfabstand auf, der unter dem 2,5fachen der halben Hertzschen Abplattungsbreite liegt, wird dieser als Kontakt zwischen Vollzylinder und Teilzylinder nach der HRM berechnet. Alle anderen Einzelkontakte entlang der Berührlinie werden nach der ZZM berechnet. Diese Kombination beider Methoden soll im Folgenden als Zylinder-Halbraum-Methode (ZHM) bezeichnet werden.

Mit Hilfe der ZHM kann zunächst für alle potenziellen Kontaktpunkte  $j$  die Kontaktverformung unter Vorgabe einer Standardeinheitslast (vgl. Abschnitt 5.2) berechnet werden. Die daraus ermittelten Kontaktverformungseinflusszahlen  $e_{Hj} = e_{ZHMj}$  werden mit der Hauptdiagonalen des Einflusszahlengleichungssystems gemäß Gleichung (3.4) addiert. Anschließend wird das Gleichungssystem (3.8) gelöst und man erhält die Lastverteilung. Die Kontaktverformungseinflusszahl  $e_{Hj}$  ist nichtlinear von der Größe der wirkenden Kraft  $F_j$  abhängig. Deshalb werden alle  $e_{Hj}$  in einer zusätzlichen Iterationsschleife bei der Lösung des Einflusszahlengleichungssystems solange neu bestimmt, bis sich die Kräfte in den Kontaktpunkten  $F_j$  nicht mehr ändern. Wurde die Lastverteilung berechnet, kann anschließend auch die Pressungsverteilung mit der ZHM bestimmt werden.





## 6 Näherungsweise Berechnung der Zahnfußspannung

### 6.1 Berechnungsmethode

Gesucht wird der Zahnbreitenverlauf der maximalen tangentialen Zahnfußspannung eines endlich langen Zahnes unter Wirkung einer punktförmigen Einzelkraft. Um auch hier analog der Biegeverformungsberechnung eine übersichtliche und effiziente Berechnungsmethode entwickeln zu können, baut die Zahnfußspannungsberechnung ebenfalls auf der Vereinfachung des Zahnes zu einem geraden Ersatzzahn mit veränderlicher Zahnbreitengeometrie auf (vgl. Abschnitt 4.1). Auch hier erfolgt die Beschreibung im Ersatzzahn-Bezugssystem wie es in Abbildung 4.1 dargestellt wird. Dieses unterscheidet sich gegenüber dem für die Biegeverformungsberechnung lediglich in der Bezeichnung der Ordinatenachse, welche im Falle der Fußspannungsberechnung mit  $\xi_{SZ}$  benannt wird.

Baumann [Ba91], [LHB95] entwickelte für Kegelräder unter Verwendung der FEM und von experimentellen Untersuchungen eine Näherungsmethode für die Berechnung der Zahnfußspannungsverteilung auf Basis des Ersatzzahnes mit veränderlicher Zahnbreitengeometrie. Das Prinzip ist analog der näherungsweisen Biegeverformungsberechnung gemäß Abschnitt 4.2 aufgebaut. Auch die Zahnfußspannung wird aus dem Produkt eines Bezugswertes und einer allgemeinen Abklingfunktion berechnet. Als Bezugswert dient die maximale tangentialen Zahnfußspannung  $\sigma_{F2D}$  eines Zahnabschnittes mit einer Breite von  $1 \cdot m_n$  unter Wirkung einer konstanten Streckenlast. Dieser Bezugswert wird wiederum aus dem Produkt der Biege-nennspannung des Zahnabschnittes mit dem Spannungskorrekturfaktor gemäß [DIN3991] bzw. [ISO10300] berechnet. Die allgemeine Spannungsabklingfunktion  $S$  wurde mittels Regressionsrechnung auf Basis von dreidimensionalen FEM-Berechnungen entwickelt und beschreibt das normalmodulbezogene Abklingverhalten der tangentialen Zahnfußspannung unter Wirkung einer Punktlast. Diese Kombination aus Bezugswert und allgemeiner Abklingfunktion ermöglicht es, die Zahnfußspannung sowie die Zahnfußspannungseinflusszahlen für den endlich langen Zahn unter Wirkung einer Einzelkraft vollständig analytisch zu berechnen. Baumann entwickelte diese Lösung für Kegelradverzahnungen auf Basis der grundlegenden Arbeiten für Stirnradverzahnungen parallel zu Kunert et al. [LHK95], [Ku99].

## 6.2 Allgemeine Spannungsabklingfunktion

### 6.2.1 Allgemeine Spannungsabklingfunktion für den unendlich und endlich langen Zahn

Wird der unendlich lang gedachte Zahn gemäß Abbildung 4.2. a) mit einer punktförmigen Einzelkraft  $F_j$  belastet, dann klingt die Zahnfußspannung nach einer endlichen Breitenentfernung von der Krafteinleitungsstelle vollständig ab (vgl. Abschnitt 4.3.1). Dieses Abklingverhalten soll von der Zahnfußspannungsabklingfunktion allgemeingültig beschrieben werden.

In Abbildung 4.2 a) sowie b) wird die Zahnfußspannung im relativen Zahnfußspannungssystem  $\xi^*$ - $\sigma_{F3D}$  bzw.  $\xi^*$ - $\sigma_{F2D}$  dargestellt mit den folgenden Prämissen:

- Der Ursprung des Zahnfußspannungssystems liegt immer auf dem Normalschnitt der Einzelkrafteinleitung auf der Höhenposition mit der größten tangentialen Zahnfußspannung.
- Die Abszissenachse  $\xi^*$  gibt den auf den Normalmodul  $m_n$  bezogenen Zahnbreitenabstand vom Normalschnitt an, auf dem die Krafteinleitung erfolgt an.
- Auf der Ordinatenachse  $\sigma_{F3D}$  bzw.  $\sigma_{F2D}$  wird die maximale tangentialen Zahnfußspannung abgetragen.

Der Bezugswert  $\sigma_{F2D}$  ergibt sich analog der Berechnung der Biegeverformungsabklingfunktion als Lösung der EVZ-Aufgabe gemäß Abbildung 4.2 b) unter Wirkung einer konstanten Streckenlast  $q_j$  gemäß Gleichung (4.1). Setzt man den Zahnfußspannungsverlauf für die punktförmige Einzelkraft  $\sigma_{F3D}(\xi^*)$  und den Bezugswert  $\sigma_{F2D}$  ins Verhältnis, dann erhält man das Zahnfußspannungsabklingverhalten gemäß Abbildung 4.2 c) und Gleichung (6.1). Dieses hängt nur noch von der Profilform, der Kraftangriffshöhe sowie von der Relativposition  $\xi^*$  gegenüber der Krafteinleitungsstelle und nicht mehr von der Belastungsgröße oder der Kerbwirkung ab.

$$S_{\infty j}(\xi^*) = \frac{\sigma_{F3Dj}(\xi^*)}{\sigma_{F2Dj}} \quad (6.1)$$

Die Zahnfußspannungsabklingfunktion ist symmetrisch bezüglich der Krafteinleitungsstelle und ihr Integral ist immer  $\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\infty} = 1$ . Unter Berücksichtigung dieser Eigenschaften wurde von Baumann eine allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion für Kegelradverzahnungen auf Basis von FEM-Berechnungen und experimentellen Untersuchungen entwickelt [LHB95]. Der Einfluss der Kraftangriffshöhe sowie der Profilform wurden dabei für typische Profilformen gemittelt, die in den markierten Bereich aus Abbildung 2.2 eingeordnet werden können. Diese von Baumann entwickelte allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion  $S_{\infty}$  für Kegelradverzahnungen wird durch Gleichung (6.2) beschrieben und in Abbildung 6.1 dargestellt.

$$S_{\infty}(\xi^*) = 0,232 \cdot (1 + 0,01627 \cdot \xi^* - 0,2887 \cdot \xi^{*2} + 0,0908 \cdot \xi^{*3} - 0,0084 \cdot \xi^{*4}) \quad (6.2)$$

mit

$$S_{\infty}(\xi^*) = 0 \text{ für } |\xi^*| \geq 5, \quad \xi^* = \frac{\xi}{m_n}$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\infty}(\xi^*) d\xi^* = 1, \quad \text{Maximalwert: } \hat{S}_{\infty}(\xi^* = 0) = 0,232$$

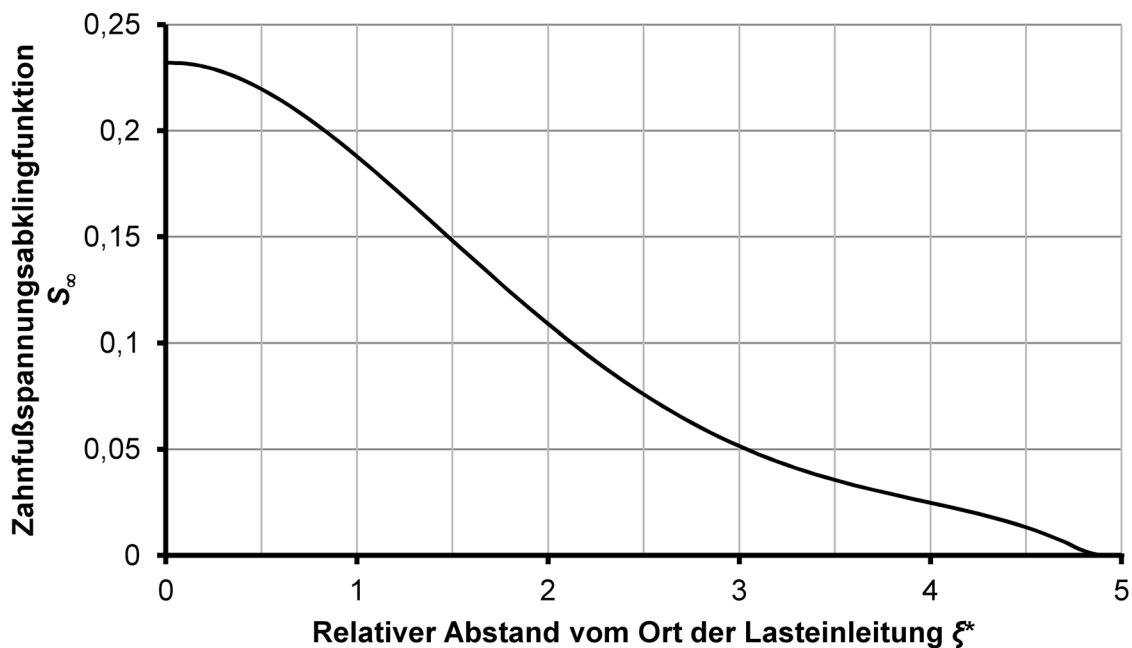


Abbildung 6.1: Allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion nach Baumann [LHB95]

Die allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion für den endlich langen Zahn  $S$  wird analog dem Vorgehen bei der allgemeinen Verformungsabklingfunktion gemäß Abschnitt 4.3.2 unter Verwendung der Spiegelungsmethode berechnet. Wenn man in den Gleichungen (4.4) bis (4.8) die Zahnbreitenkoordinate des Verformungssystems  $\chi$  durch die des Zahnfußspannungssystems  $\xi$  ersetzt, dann ergibt sich die allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion für den endlich langen Zahn auf Basis von Gleichung (6.3).

$$S = S_{\infty}(\xi_i^*) + \sum_{k \in Z} S_{\infty}(\xi_{Z ik}^*) + \sum_{k \in F} S_{\infty}(\xi_{F ik}^*) \quad (6.3)$$

mit

$$Z = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 1 \wedge S_{\infty}(\xi_{Z ik}^*) > 0\} \quad \text{und} \quad F = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 1 \wedge S_{\infty}(\xi_{F ik}^*) > 0\}$$

Wie bei der allgemeinen Verformungsabklingfunktion werden die Stirnseiten des Zahnes durch die Spiegelung zwar Schubspannungs- aber nicht normalspannungsfrei. Kunert untersuchte diesen Sachverhalt auf Basis von FEM-Berechnungen [LHK95], [Ku99] und stellte fest, dass die Spannung im Stirnseitenbereich signifikant abfällt. Abbildung 6.2 zeigt dies am Beispiel einer vergleichenden FEM-Berechnung für einen Zahn mit zahnstangenähnlichem Profil unter Wirkung einer konstanten Streckenlast entlang einer Flankenlinie mit unterschiedlichen Spannungszuständen an den freien Stirnseiten. Der relative Stirnseitenabstand  $\xi_S^*$  steht dabei wahlweise für den modulbezogenen Abstand von der Zehe  $\xi_{SZ}^*$  oder der Ferse  $\xi_{SF}^*$ . Der maximale Unterschied tritt unmittelbar an den Stirnseiten auf und beträgt ca. 25 %. Anders als bei der Zahnverformung, ist der unmittelbare Stirnseitenzustand unabhängig von Balligkeiten, Endrücknahmen und Fasen für die Zahnfußspannungsberechnung immer gleichermaßen relevant. Deshalb entwickelte Kunert eine Korrekturfunktion, mit welcher der Stirnseitenspannungsabfall berücksichtigt werden kann [LHK95], [Ku99]. Baumann übernahm diese Korrekturfunktion auch für Kegelräder [LHB95].

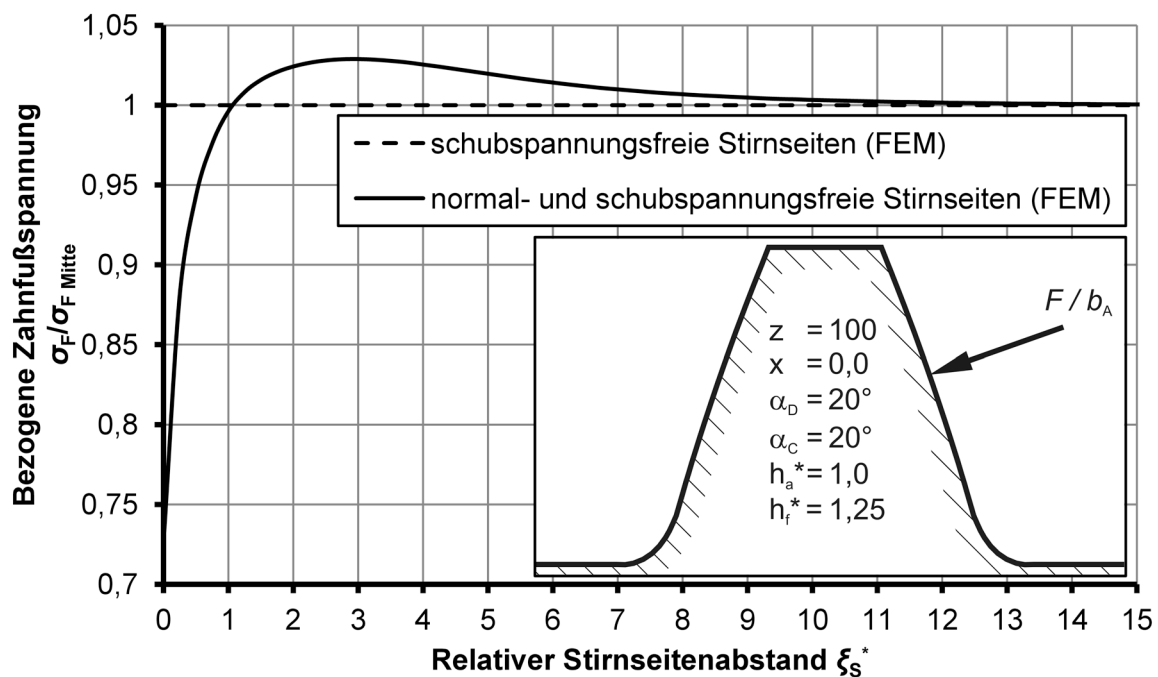


Abbildung 6.2: Gegenüberstellung von FEM-Zahnfußspannungen an den freien Stirnseiten mit unterschiedlichen Spannungszuständen

Auch für die allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion gilt wie schon für die allgemeine Verformungsabklingfunktion (vgl. Abschnitt 4.3.1), dass der durch die Untersuchungen von Baumann aufgespannte Profilformbereich um den in Abbildung 2.2 zusätzlich dargestellten Profilformbereich erweitert werden muss. Dies ist erforderlich, um die im Rahmen einer modernen Verzahnungsoptimierung notwendige Genauigkeit der Zahnfußspannungsberechnung gewährleisten zu können.

Wie schon für die allgemeine Verformungsabklingfunktion, sollen auch im Folgenden für die allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion FEM gestützte Untersuchungen durchgeführt

werden. Ziel dieser Untersuchungen ist es, die allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion so zu erweitern, dass eine Abbildung des erweiterten Profilformbereichs in einem ausreichenden Maße sichergestellt werden kann.

## 6.2.2 Einfluss der Kraftangriffshöhe und der Profilform

Abbildung 6.3 und Abbildung 6.4 veranschaulichen an zwei unterschiedlichen Profilformen stellvertretend für den in Abbildung 2.2 definierten Profilformbereich, dass die Quantität sowie Qualität der Zahnfußspannungsabklingfunktion von der Profilform und der Kraftangriffshöhe abhängen. Wie schon die allgemeine Verformungsabklingfunktion (vgl. Abschnitt 4.3.4), muss deshalb auch die Zahnfußspannungsabklingfunktion so erweitert werden, dass der Profilformeinfluss in einer übersichtlichen Darstellung erfasst wird.

In einem ersten Schritt wurde für alle definierten Profilformen der Einfluss der Kraftangriffshöhe separat untersucht. Der unmittelbare Kopfeingriff (Kraftangriffe oberhalb von  $F_1$  in Abbildung 6.3 und Abbildung 6.4) wird bei der Bewertung des Zahnfußspannungsabklingverhaltens nicht berücksichtigt, da durch Fasen und Kopfrücknahmen dieser Bereich in der Regel entlastet ist. Anhand von Abbildung 6.3 und Abbildung 6.4 lässt sich gut erkennen, dass sich das Zahnfußspannungsabklingverhalten zwischen den Kraftangriffspunkten  $F_1$  und  $F_2$  jeweils nur marginal unterscheidet. In Richtung des Zahnfußes, das heißt zwischen  $F_2$  und  $F_4$ , steigt der Maximalwert der Zahnfußspannungsabklingfunktion bei Profilformen mit großem Eingriffswinkel oder großer Profilverschiebung, also mit relativ spitzem Zahnkopf im Verhältnis zur Zahnfußdicke, allerdings sehr stark an. Dieses Verhalten lässt sich für alle hier definierten Profilformen allgemein feststellen. Abbildung 6.5 illustriert diesen Sachverhalt exemplarisch für ein Zahnprofil mit einer Ersatzzähnezahl von 100 und einem Eingriffswinkel von  $10^\circ$  sowie  $30^\circ$ . Es kann festgestellt werden, dass der Unterschied zwischen fußnahem und kopfnahem Kraftangriff umso größer ist, desto höher der Gradient des Nutzflankenverlaufes ausfällt. Der Zahnkopfbereich ist allerdings nur im Mehrfacheingriffsgebiet bzw. bei schrägverlaufender Traglinie im Eingriff und trägt weniger Last als der mittlere Zahnhöhenbereich. Bei einer Belastung im Zahnflankenbereich unterhalb von  $F_3$  fallen die Zahnfußspannungen aufgrund des kurzen Hebelarms klein aus und liefern damit nur einen untergeordneten Beitrag bei der Berechnung der Zahnfußspannungsverteilung. Deshalb kann wie schon bei der Verformungsabklingfunktion für jede Profilform ein charakteristischer Maximalwert  $\hat{S}_{\infty P}$  für die Zahnfußspannungsabklingfunktion gefunden werden, der die profilformabhängige Zahnfußspannung repräsentativ widerspiegelt. Der profilformabhängige charakteristische repräsentative Maximalwert der Zahnfußspannungsabklingfunktion  $\hat{S}_{\infty P}$  wird als Mittelwert  $\bar{S}_{\infty \max}$  des Integrals der kraftangriffshöhenabhängigen Verläufe  $\hat{S}_{\infty}(\eta^*)$ , wie sie in Abbildung 6.5 dargestellt sind, definiert (siehe Gleichung (6.4)). Die untere Integrationsgrenze  $a$  liegt auf  $1/4$  der Nutzflankenhöhe (Position von  $F_3$  in Abbildung 6.3 sowie Abbildung 6.4) und die obere Integrationsgrenze auf dem Zahnkopf. In Abbildung 6.5 wurden neben den kraftangriffshöhenabhängigen Verläufen  $\hat{S}_{\infty}(\eta^*)$  auch die profilformabhängigen Maximalwert  $\hat{S}_{\infty P}$  dargestellt. Die

profilformabhängigen Maximalwert  $\hat{S}_{\infty P}$  der Zahnfußspannungsabklingfunktion wurden für alle in Abbildung 2.2 aufgeführten Profilformen berechnet.

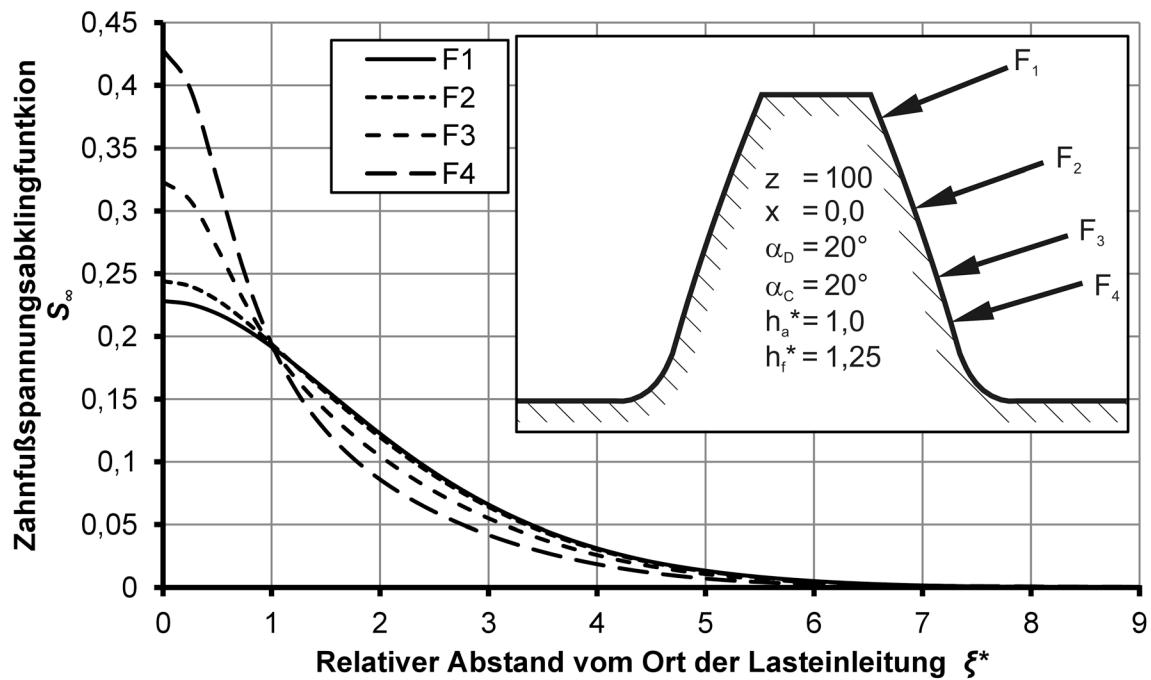


Abbildung 6.3: Vergleich der FEM-Zahnfußspannungsabklingfunktion für verschiedene Kraftangriffshöhen an einem zahnstangenähnlichen Profil

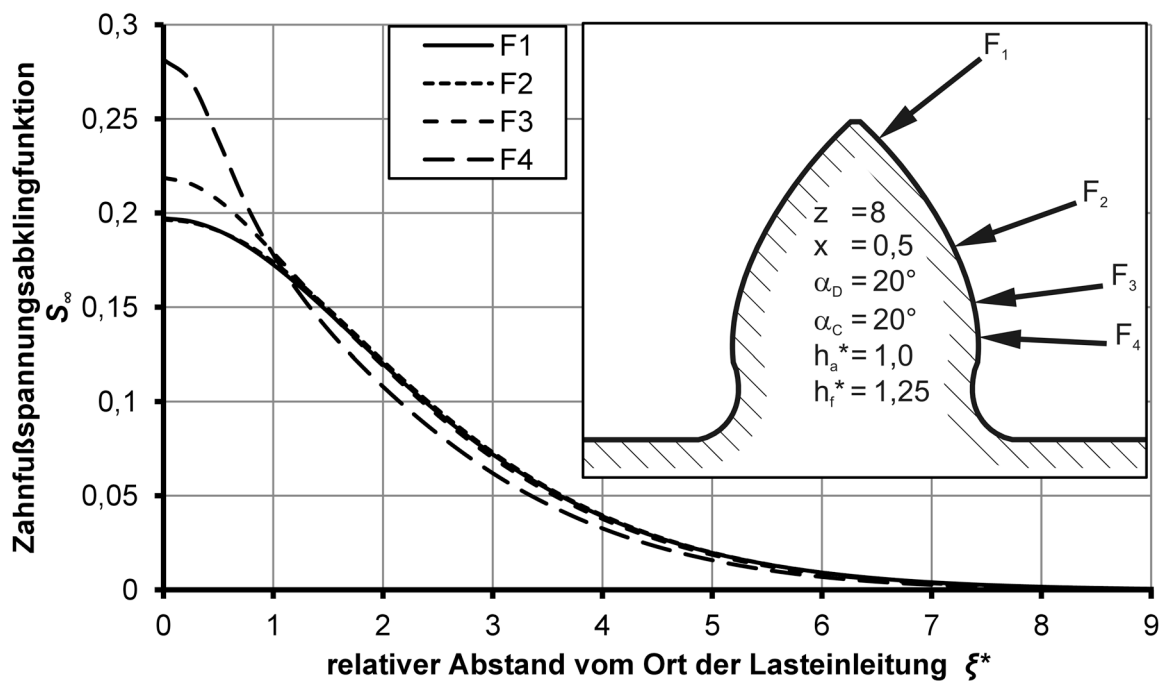


Abbildung 6.4: Vergleich der FEM-Zahnfußspannungsabklingfunktionen für verschiedene Kraftangriffshöhen an einem Profil mit Unterschnitt und spitzem Zahnkopf

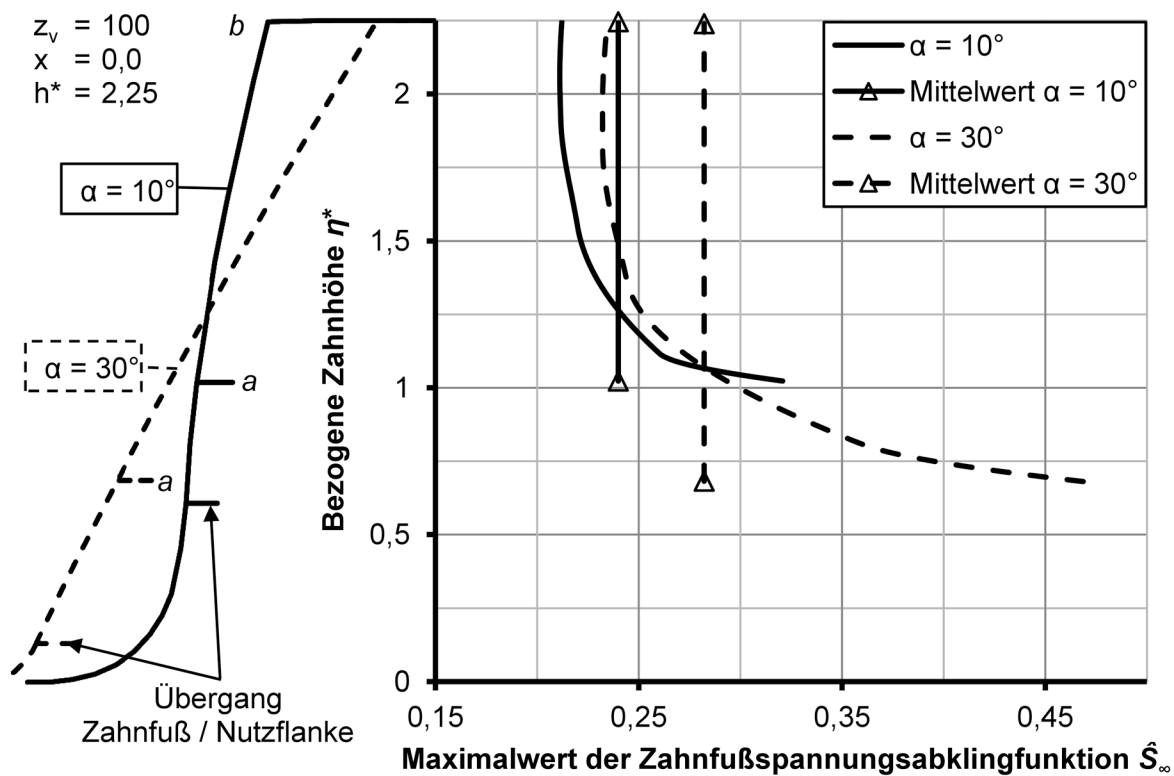


Abbildung 6.5: Kraftangriffshöhenabhängigkeit des Maximalwertes der Zahnfußspannungsabklingfunktion für zwei verschiedene Profilformen im Vergleich

$$\hat{S}_{\infty P} = \bar{S}_{\infty \max} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \hat{S}_{\infty}(\eta^*) d\eta \quad (6.4)$$

Die von der Profilform abhängigen Maximalwerte der Zahnfußspannungsabklingfunktion werden in Abbildung 6.6 über der Ersatzzähnezahl dargestellt. Wird jeweils über einer Ersatzzähnezahl der Eingriffswinkel variiert, dann bewirkt eine Verkleinerung des Eingriffswinkels ebenfalls eine Verkleinerung von  $\hat{S}_{\infty P}$  und eine Vergrößerung des Eingriffswinkels eine Vergrößerung  $\hat{S}_{\infty P}$ . Gleiches gilt für eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Profilverschiebung. Wobei die Auswirkung der Profilverschiebung mit zunehmender Ersatzzähnezahl abnimmt. Auch die Vergrößerung der Ersatzzähnezahl bewirkt eine Vergrößerung von  $\hat{S}_{\infty P}$ . Allerdings ist dieser Effekt nur bei Ersatzzähnezahlen kleiner als  $z_v = 30$  deutlich zu beobachten, bei Ersatzzähnezahlen über  $z_v = 30$  gibt es keinen nennenswerten Einfluss der Ersatzzähnezahl auf den Wert von  $\hat{S}_{\infty P}$  mehr. Eine Verkleinerung der Zahnhöhe bewirkt eine Vergrößerung von  $\hat{S}_{\infty P}$  und umgekehrt.

Um eine möglichst gute relative und absolute Vergleichbarkeit zwischen Berechnungen mit unterschiedlichen Profilformen besonders hinsichtlich des großen Einflusses der Ersatzzähnezahl zu gewährleisten, wird eine allgemeine Abklingfunktion für die Zahnfußspannung, deren Maximalwert von der Ersatzzähnezahl abhängt, entwickelt.

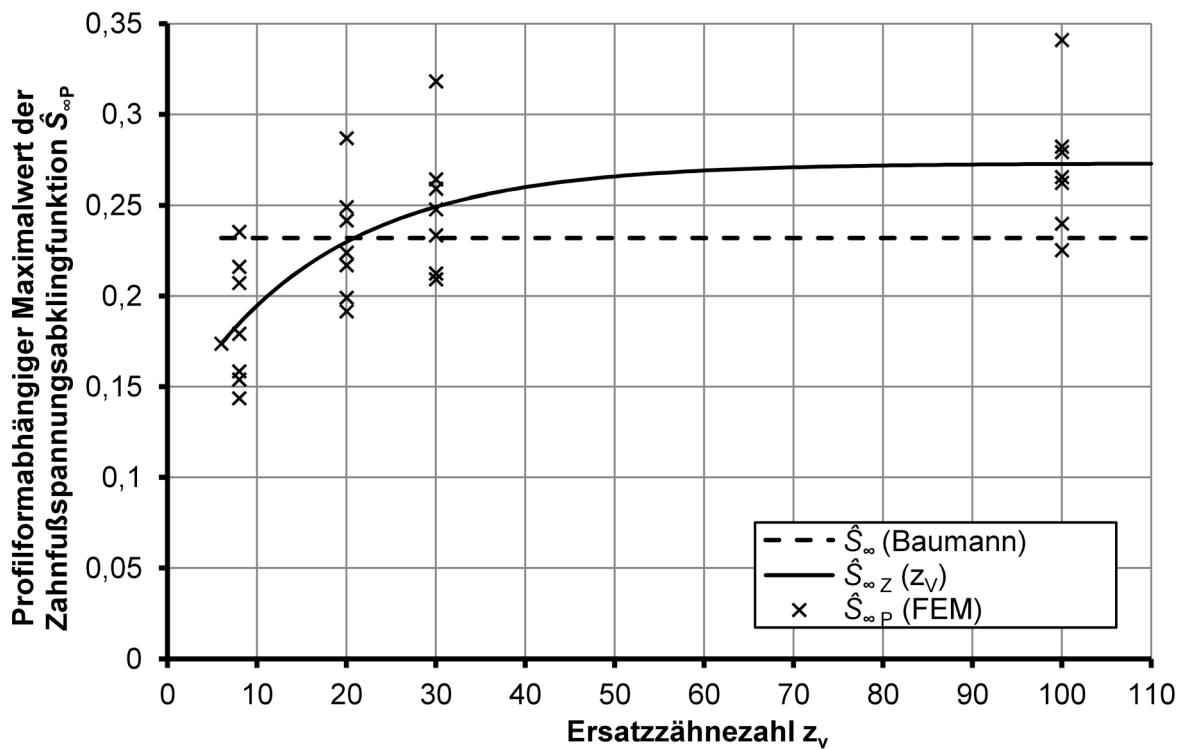


Abbildung 6.6: Profilformabhangige FEM-Maximalwerte  $\hat{S}_{\infty P}$  der Zahnfußspannungsabklingfunktion für die Zahnprofile aus Abbildung 2.2 und Gegenüberstellung mit dem Maximalwert nach Baumann  $\hat{S}_{\infty}$  sowie mit der Maximalwertfunktion  $\hat{S}_{\infty Z}(z_v)$

Abbildung 6.7 zeigt den Vergleich von Verformungs- und Zahnfußspannungsabklingfunktionen bei verschiedenen Maximalwerten. Es wird deutlich, dass Abklingfunktionen mit jeweils gleichen Maximalwerten weitestgehend übereinstimmen. Dies ermöglicht es, das Abklingverhalten für die Zahnverformung und Zahnfußspannung einheitlich auf Basis der allgemeinen Abklingfunktion  $f_{A\infty k}$  gemäß Gleichung (4.11) zu beschreiben. Dabei muss lediglich  $\chi^* = \xi^*$  gelten.

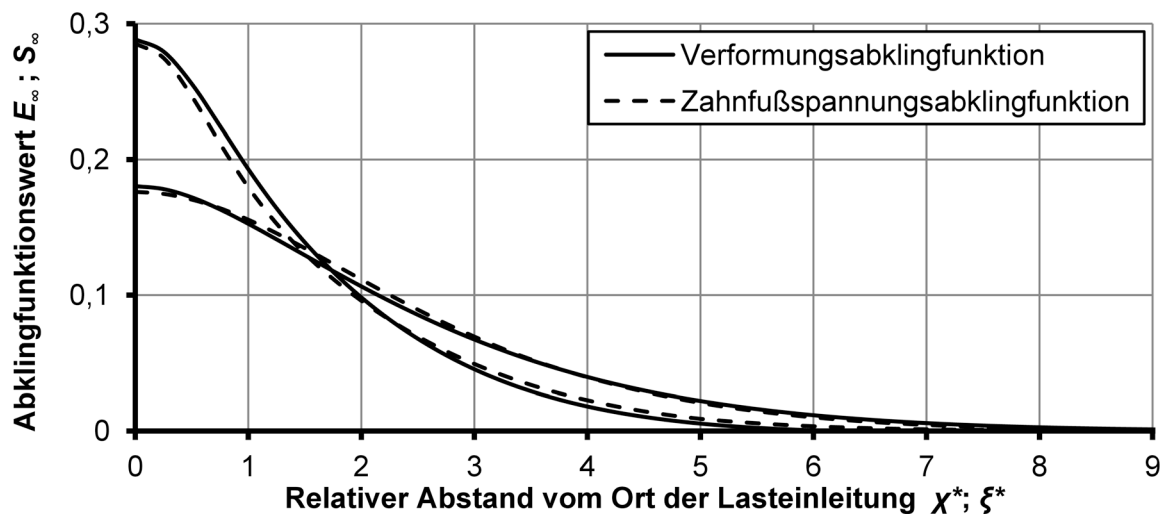


Abbildung 6.7: Vergleich von FEM-Verformungs- und Spannungsabklingfunktionen bei verschiedenen Maximalwerten



Auf Basis des profilformabhängigen Maximalwertes  $\hat{S}_{\infty P}$  der Zahnfußspannungsabklingfunktion für den unendlich langen Zahn aus Abbildung 6.6 wurde eine Funktion für eine zähnezahlabhängige Berechnung des Maximalwertes  $\hat{S}_{\infty Z}(z_V)$  der Zahnfußspannungsabklingfunktion entwickelt. Diese Funktion gibt jeweils den zähnezahlabhängigen gewichteten Mittelwert des profilformabhängigen Maximalwertes  $\hat{S}_{\infty P}$  wieder. Der so erhaltene Verlauf des Maximalwertes  $\hat{S}_{\infty Z}$  kann durch Gleichung (6.5) ausgedrückt werden und hat den in Abbildung 6.6 dargestellten Verlauf.

$$\hat{S}_{\infty Z}(z_V) = 0,27 - 0,142 \cdot e^{\left(\frac{-z_V}{16,803}\right)} \quad (6.5)$$

Damit kann die allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion nach Gleichung (6.6) in Abhängigkeit von der Zähnezahlabhängigkeit beschrieben werden.

$$S_{\infty Z}(\xi^*, z_V) = f_{A\infty}(\xi^*, \hat{S}_{\infty Z}(z_V)) \quad (6.6)$$

Die Änderung der Normalschnittgeometrie bzw. der Zahnfußspannungsabklingfunktion längs des Zahnes fällt vergleichsweise gering aus. Deshalb wird auf eine Berücksichtigung der zahnbreitenabhängigen Profilformänderung bei der Berechnung der allgemeinen Zahnfußspannungsabklingfunktion verzichtet. Allerdings können die Auswirkungen auf den Bezugswert besonders in den stirnseitennahen Zahnbereichen relativ groß sein. Weshalb auch eine Berücksichtigung der zahnbreitenabhängigen Änderung der Normalschnittgeometrie über eine breitenpositionsabhängige Bezugswertberechnung erfolgt.

### 6.2.3 Fehlerverhalten der allgemeinen Spannungsabklingfunktion

Abbildung 6.6 kann entnommen werden, dass der größte relative Fehler zwischen dem profilformabhängigen Maximalwert der Zahnfußspannungsabklingfunktion  $\hat{S}_{\infty P}$  und dem zähnezahlabhängigen Maximalwert  $\hat{S}_{\infty Z}$  über alle Ersatzzähnezahlen ca. 26 % beträgt. Wie schon in Abschnitt 4.3.5 erläutert, wird dieser Fehleranteil aber nur unter Applikation einer Einzelast voll wirksam. Aufgrund der Eigenschaft der Abklingfunktion, dass das Integral immer  $\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\infty} = 1$  ergibt, wird der Fehler mit zunehmender Traglinienlänge gegenüber der Zahnbreite schnell kleiner und geht bei 100 % Traglinienlänge sowie konstanter Lastverteilung gegen Null.

Im Folgenden wird der wirksame Fehleranteil der Zahnfußspannungsabklingfunktion an der Zahnfußspannung für einen Zahn mit einer Breite von  $b_A = 10 \cdot m_n$  und einer Variation der relativen Traglinienlänge  $b_{TL\text{eff}}$  zwischen 0 % (Einzellast) und 100 % der Zahnbreite abgeschätzt. Auf Basis einer elliptischen Lastverteilung werden die resultierenden Zahnfußspannungen in Abhängigkeit von der Traglinienlänge berechnet. Verglichen wird der Unterschied der maximalen Zahnfußspannung aus der Berechnung mit zwei Zahnfußspannungsabklingfunktionen, die unterschiedliche Maximalwerte besitzen. Der eine Maximalwert entspricht  $\hat{S}_{\infty Z}(z_V = 100)$  gemäß Gleichung (6.5) und der andere Maximalwert entspricht dem größten Maximalwert  $\hat{S}_{\infty P\text{max}}$ , der bei einer Ersatzzähnezahl von  $z_V = 100$  erreicht wird. Abbildung 6.8

zeigt das Ergebnis dieses Vergleiches als Fehlerkurve über der relativen Traglinienlänge. Wenn man bei einer Geradverzhung davon ausgeht, dass die beanspruchungsrelevanten Traglinien unter Vollast länger als 60 % der Zahnbreite sind, dann ist der maximale Zahnfußspannungsfehler bei der Anwendung der allgemeinen Verformungsabklingfunktion gemäss Gleichung (6.6) kleiner als  $\pm 7\%$ .

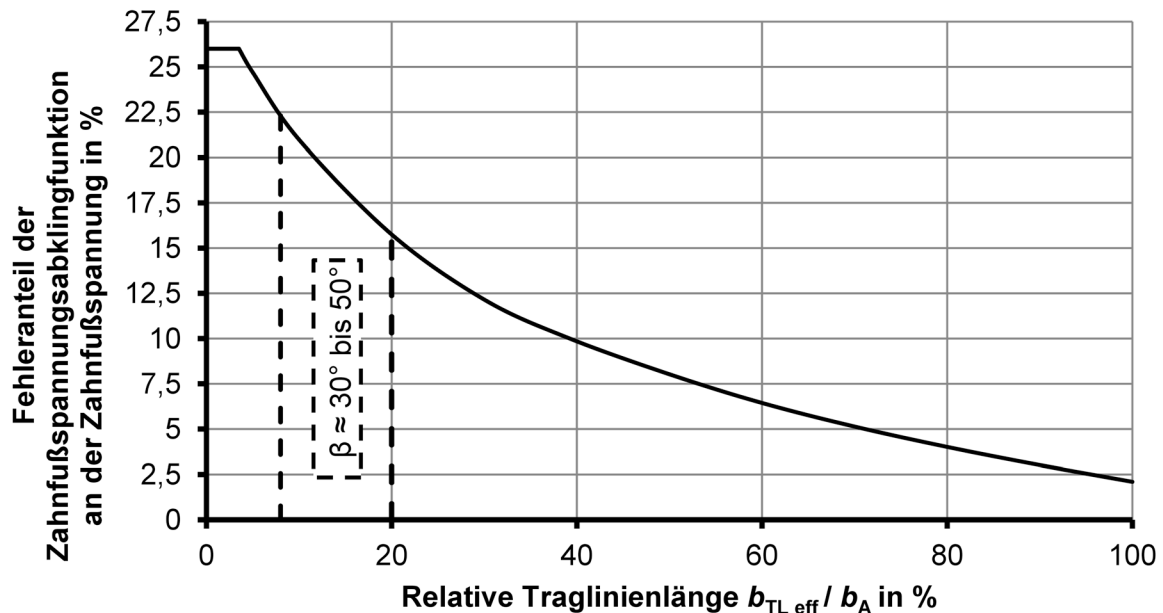


Abbildung 6.8: Fehleranteil der Zahnfußspannungsabklingfunktion an der Zahnfußspannung in Abhängigkeit der relativen Traglinienlänge

Bei Schrgverzhungen entspricht die effektive Traglinienlänge  $b_{TL\,eff}$  der Projektion der schräg verlaufenden Traglinie auf  $b_A$ . Mit größer werdendem Schrägungswinkel nimmt damit die Traglinienlänge ab und der Fehler wird dementsprechend größer. Der Fehler für Schrgverzhungen liegt demnach ca. zwischen  $\pm 15\%$  und  $\pm 20\%$ .

Diese Fehlerbetrachtungen zeigen, dass die gefundene ersatzzhnezahlabhngige allgemeine Zahnfußspannungsabklingfunktion das reale profilform- und kraftangriffshhenabhngige Zahnfußspannungsabklingverhalten tendenziell gut annähert.

### 6.3 Bezugswert der Zahnfußspannung

Die von Baumann [LHB95] eingesetzte Näherungslösung zur Ermittlung des Bezugswertes  $\sigma_{F2D}$  basiert auf der Lösung für die Berechnung der maximalen örtlichen tangentialen Zahnfußspannung (im weiteren nur als Zahnfußspannung bezeichnet) als Produkt aus Nennspannung und Spannungskonzentrationsfaktor (Spannungskorrekturfaktor  $Y_S$ ) nach [DIN3991]/[ISO10300]. Der Bezugswert kann mit Gleichung (6.7) bestimmt werden. Die Änderung der Normalschnittgeometrie wird dabei über eine breitenpositionsabhngige Bezugswertberechnung für jeden Normalschnitt  $i$  ermittelt.

$$\sigma_{F2D i} = \sigma_{bnenn i} \cdot Y_{S i} \quad (6.7)$$

In einem ersten Schritt wird die Zahnfußnennspannung für den Normalschnitt an der Stelle  $i$  berechnet. Dies geschieht unter Anwendung von Gleichung (6.8), mit der die Biege-nennspannung für einen Biegebalken mit der Breite  $1m_{n i}$  und der Dicke der Zahnfußsehne  $s_{F HE} = s_{F n i}$  an der  $30^\circ$ -Tangente bestimmt werden kann (siehe Abbildung 4.14). Als Belastung wirkt eine konstante Streckenlast mit dem Hebelarm  $y_{F i} = h_{F i}$  unter dem Kraftangriffswinkel  $\alpha_i$ .

$$\sigma_{bnenn i} = \frac{6 \cdot y_{F i}}{s_{F HE i}^2 \cdot m_{n i}} \cdot F_{N i} \cdot \cos \alpha_i \quad (6.8)$$

Der Spannungskorrekturfaktor  $Y_{S i}$  wird für den EVZ bestimmt. Die Spannungskonzentration infolge der Kerbwirkung im Zahnfuß einer Verzahnung hängt dabei vom Kerbparameter  $q_{s i}$  (mit dem Radius der Fußausrundung an der  $30^\circ$ -Tangente  $\rho_{F i}$ ) sowie vom Hebelarmverhältnis  $L_i$  ab und wird in Anlehnung an [DIN3991]/[ISO10300] unter Verwendung von Gleichung (6.9) berechnet werden.

$$Y_{S i} = (1,2 + 0,13 \cdot L_i) \cdot q_{s i}^{\frac{1}{1,21+2,3 \cdot L_i^{-1}}} \quad (6.9)$$

mit

$$L_i = \frac{s_{F HE i}}{y_{F i}}$$

und

$$q_{s i} = \frac{s_{F HE i}}{2 \cdot \rho_{F i}}$$

Die unter Anwendung von Gleichung (6.7) näherungsweise ermittelte örtliche Zahnfußspannung beruht nicht auf der realen Zahnfußgeometrie, die gemäß Abschnitt 2.2 für die Zahnkontakt-simulation vorgegeben wird, sondern auf der mittels der Messerkopfabrundung eines Standardmessers nach [DIN3991]/[ISO10300] berechneten theoretischen Zahnfußgeometrie.

Im Rahmen der Untersuchungen zum Einfluss der Nachbearbeitungsverfahren Schleifen und Hartverzahnungen auf die Zahnfußgeometrie sowie die Zahnfußspannung von Kegelradverzahnungen bewertete Hünecke [Hü01] auch die Qualität der näherungsweise bestimmten Spannungskonzentrationen nach [DIN3991]/[ISO10300]. Die Untersuchungen wurden mit dem Singularitätenverfahren (vgl. Abschnitt 4.4.3) durchgeführt. Auf dieser Basis kam Hünecke zu dem Ergebnis, dass die Spannungskonzentrationen nach [DIN3991]/[ISO10300] durchschnittlich 10 % größer sind als die exakten Werte und in Extremfällen bei Kegelrädern bis 28 % und bei Hypoidverzahnungen bis zu 45 % höher ausfallen. Ähnliche Erkenntnisse hatte Börner bereits für Stirnradverzahnungen erarbeitet [LB96].

Die mit dieser Arbeit angestrebte Berechnung freier Zahnfußgeometrien, wie sie bei der Fußoptimierung entstehen können, ist auf Basis der [DIN3991]/[ISO10300] nicht möglich, was ebenfalls für die Bewertung von Zusatzkerben wie z.B. Schleifabsätze gilt.

Um die Berechnung der Zahnfußspannung für beliebige Zahnfußgeometrien mit hoher absoluter und relativer Aussagekraft zu ermöglichen, muss deshalb auch für die Berechnung der Zahnfußspannungsbezugswerte ein numerisches Verfahren in BECAL implementiert werden. Wie schon für die Bestimmung des Verformungsbezugswertes (vgl. Abschnitt 4.4.4) kommt dafür das bereits im Rahmen dieser Arbeit entwickelte BEM-Programm-Modul zum Einsatz.

Die Berechnung der BEM-Bezugswerte erfolgt aus Effizienzgründen wie schon bei der Verformungsbezugswertberechnung unter Verwendung eines bilinearen Interpolationsschemas analog zu Abschnitt 4.4.7 und gemäß Abbildung 4.27. Dazu werden die BEM-Bezugswerte für ausgewählte Stützstellen entlang der Zahnbreite und über der Zahnhöhe normalschnittweise berechnet und in Form von Bezugswert-Stützstellen-Einflusszahlen  $s_{BBS\ j\ k}$  auf Basis von Gleichung (6.10) verallgemeinert.

$$s_{BBS\ j\ k} = \frac{\sigma_{F2D\ BEM\ j\ k}}{F_j \cdot m_{n\ k}} \quad (6.10)$$

Analog Abschnitt 4.4.7 kann die BEM-Bezugswerteinflusszahl der Zahnfußspannung für jeden beliebigen Kraftangriffspunkt sowie Normalschnitt durch die stützstellenbasierte Interpolation mit den Gleichungen (4.22), (4.24), (4.25) und (6.11) gemäß Abbildung 4.27 b) berechnet werden. Gesucht wird die Bezugswerteinflusszahl  $s_{BB\ j\ k}$  am Normalschnitt  $k$ , unter Kraftwirkung in Höhe  $\eta_j$  für die maximale tangentielle Zahnfußspannung. Der Normalschnitt  $k$  ist immer der Normalschnitt mit der Breitenkoordinate des Kraftwirkungspunktes. Damit gilt  $\xi_{SZ\ k} = \xi_{SZ\ j}$ . Das Gitterelement  $K$  ist das Element, welches den Ort der Krafteinleitung einschließt. Die Bezugswert-Stützstellen-Einflusszahl  $s_{BBS\ K\ m}$  ist der Knotenwert  $s_{BBS\ j\ k}$  des Elements  $K$  am  $m$ -ten Knoten. Die natürlichen Koordinaten des Kraftwirkungsorts im Element  $K$  sind durch  $\xi_{Kj}$  und  $\eta_{Kj}$  gegeben.

$$s_{BB\ j\ k} = \sum_{m=1}^4 N_m(\xi_{Kj}, \eta_{Kj}) \cdot s_{BBS\ K\ m} \quad (6.11)$$

## 6.4 Korrektur für den Ersatzzahn

Auch bei der Zahnfußspannungsberechnung gilt wie schon bei der Zahnverformungsberechnung, dass die reale Geometrie einer betrachteten Verzahnung von der vereinfachten Beschreibung als gerader Ersatzzahn mit veränderlicher Zahnbreitengeometrie (siehe Abbildung 4.1) abweichen kann. Dies ist dann der Fall, wenn es sich um eine Schräg- oder Bogenverzahnung handelt. In Abbildung 4.28 sind die spezifischen geometrischen Eigenschaften dargestellt, die bei schräg- und bogenverzahnten Kegelrädern nicht mehr implizit durch

den Ersatzzahn erfasst werden. Für relevante Auswirkungen muss deshalb eine Berücksichtigung bei der Zahnfußspannungsberechnung über entsprechende Korrekturen erfolgen.

#### 6.4.1 Einfluss des Schrägungswinkels auf die Zahnbreitenlage des Zahnfußspannungsmaximums

Betrachtet man die Lastverteilung über dem Eingriffsfeld, dann liegen die bei Schrägverzahnungen entlang der Höhe eines Profilschnittes breitenversetzt angeordneten Kraftangriffspunkte nach der Normalschnitttransformation der Profilschnitte (siehe Abbildung 4.1) direkt übereinander. Dieser Sachverhalt muss bei der Berechnung der Zahnfußspannung über eine relative schrägungswinkelabhängige Verschiebung des Kraftangriffspunktes gegenüber dem Normalschnitt berücksichtigt werden. Dieser Versatz  $\Delta\xi$  lässt sich geometrisch über die Dickendifferenz zwischen der Zahnfußdicke  $s_{Fnj}$  und der Zahndicke am Kraftangriffspunkt  $s_{nj}$  in Abhängigkeit vom Schrägungswinkel gemäß Gleichung (6.12) bestimmen [LB97]. Der Versatz  $\Delta\xi$  erhält ein schrägungswinkelrichtungs- sowie kontaktflankenabhängiges Vorzeichen. Dieses bewirkt eine Relativverschiebung in Richtung Zehe oder Ferse derart, dass der Verschiebungseffekt der Normalschnitttransformation hinsichtlich der Breitenposition der Kraftangriffspunkte aufgehoben wird.

$$\Delta\xi = 0,5 \cdot (s_{Fnj} - s_{nj}) \cdot \tan\beta_j \quad (6.12)$$

Der Versatz muss entsprechend bei der Berechnung der relativen Krafterleitungs- und Stirnseitenabstände für die Zahnfußspannungsabklingfunktion und deren Spiegelung gemäß Gleichung (6.13) bis (6.15) berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 4.3.2).

$$\xi_j^* = \frac{|b_{Aj} + \Delta\xi - b_{Ai}|}{m_n} \quad (6.13)$$

$$\xi_{Zj}^* = \frac{|b_{Aj} + \Delta\xi - b_{Ai} - 2 \cdot \Delta Z|}{m_n} \quad (6.14)$$

$$\xi_{Fj}^* = \frac{|b_{Aj} + \Delta\xi - b_{Ai} + 2 \cdot \Delta F|}{m_n} \quad (6.15)$$

#### 6.4.2 Stirnseitenunstetigkeit

Der Einfluss unterschiedlicher Stützwirkungen der stumpfen und spitzen Zahnstirnseite wurde von Baumann zwar für die Zahnverformungsberechnung [Ba91] (vgl. Abschnitt 4.5.1), aber noch nicht für die Zahnfußspannungsberechnung [LHB95] erfasst. Kunert [Ku99] hingegen machte für Stirnradverzahnungen nicht nur einen Vorschlag hinsichtlich der Berücksichtigung dieser Einflüsse bei der Zahnverformungsberechnung, sondern auch bei der Zahnfußspannungsberechnung. Allerdings scheint die Abbildungsqualität auf einen stirnradübli-

chen Schrägungswinkelbereich von bis zu ca.  $\beta = 40^\circ$  abgestimmt zu sein. Eine Anwendung auf Schrägungswinkel bis zu  $\beta = 55^\circ$  wird zwar von Kunert als möglich angegeben, aber der für Kegelräder notwendige Bereich von bis zu  $\beta = 60^\circ$  (an der Ferse sind sehr große Schrägungswinkel möglich), kann mit dieser Lösung nicht ausreichend erfasst werden. Deshalb wird im Folgenden eine Lösung entwickelt, welche einen für Kegelräder erforderlichen maximalen Schrägungswinkelbetrag bis  $\beta = 60^\circ$  repräsentativ abbilden kann. Dabei soll der Einfluss der Spannungszustandsänderung gemäß Abbildung 6.2 schrägungswinkelabhängig implizit erfasst werden.

Kunert [Ku99] zeigte auch für die Zahnfußspannung, dass der Kraftangriffshöheneinfluss auf das Abklingverhalten mit Stirnseitenunstetigkeit gut durch eine gemittelte Funktion erfasst werden kann. Diese wird, wie schon unter Abschnitt 4.5.1, auf Basis von FEM-Berechnungen am zahnstangenähnlichen Profil durch schrägungswinkelabhängige Variation der Stirnseitengeometrie entwickelt. Die Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion wird dabei so formuliert, dass sie den Einfluss der Stirnseitenunstetigkeit über eine Korrektur des Bezugswertes erfasst. Dies ermöglicht eine übersichtliche und einfache Implementierung in Form einer schrägungswinkel- sowie stirnseitenabstandsabhängigen Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion  $\Delta f_{F2D\ W\ k}(\xi_S^*)$ . Die Korrekturfunktion wird aus dem Quotienten der stirnseitenabstandsabhängigen Zahnfußspannung einer FEM-Berechnung mit schräger Stirnseitenfläche (stumpf oder spitz) und einer FEM-Berechnung mit gerader Stirnseitenfläche gemäß Gleichung (6.16) sowie analog Abbildung 4.29 gebildet. Die Zahnfußspannungen werden auf Basis einer konstanten Streckenlast bestimmt. Diese Streckenlast wirkt entlang der gesamten Zahnbreite auf der Höhe der Nutzflankenmitte. Die so mittels FEM berechneten Stirnseitenunstetigkeits-Faktoren für die Zahnfußspannung sind in Abbildung 6.9 für die spitze und in Abbildung 6.10 für die stumpfe Zahnstirnseite dargestellt.

$$\Delta f_{F2D\ W\ k}(\xi_S^*) = \frac{\sigma_{F3D\ k}(\xi_S^*)}{\sigma_{F2D}} \quad (6.16)$$

Der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfaktor für die spitze Stirnseite wird mit zunehmendem Schrägungswinkelbetrag größer. Auch die Abklinglänge wächst mit zunehmendem Schrägungswinkelbetrag an. Dies kann erwartungsgemäß auf die Verkleinerung der Stützwirkung zurückgeführt werden. In einem Randabstand bis zu einer Länge von  $1 \cdot m_n$  fällt der Korrekturfaktor aufgrund der Änderung des Randspannungszustandes stark ab. Wie schon bei der Korrekturfunktion für die Zahnverformung muss allerdings berücksichtigt werden, dass unter Wirkung einer Streckenlast die Abklinglänge des Einflusses der spitzen Zahnstirnseite ab einem Schrägungswinkelbetrag von  $\beta = 20^\circ$  zunehmend überbewertet wird. Betrachtet man das Verhalten der Zahnfußspannung an der spitzen Stirnseite unter der Wirkung einer Einzellast, kann man feststellen, dass der Einfluss der spitzen Stirnseite bei einem Schrägungswinkelbetrag von  $\beta = 30^\circ$  in einem Abstand von ca.  $6 \cdot m_n$  und bei  $\beta = 60^\circ$  von ca.  $10 \cdot m_n$  vollständig abgeklungen ist.

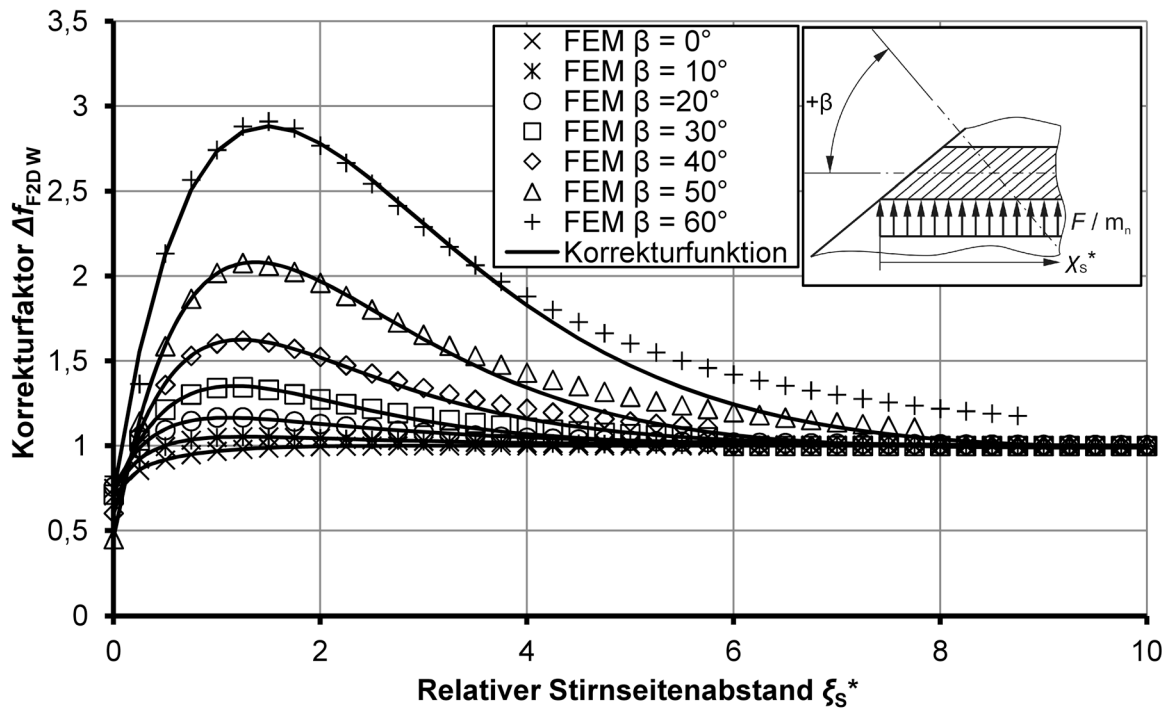


Abbildung 6.9: Mittels FEM berechnete Stirseitenunstetigkeits-Korrekturfaktoren für die spitze Stirseite und Vergleich mit der entwickelten Stirseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion

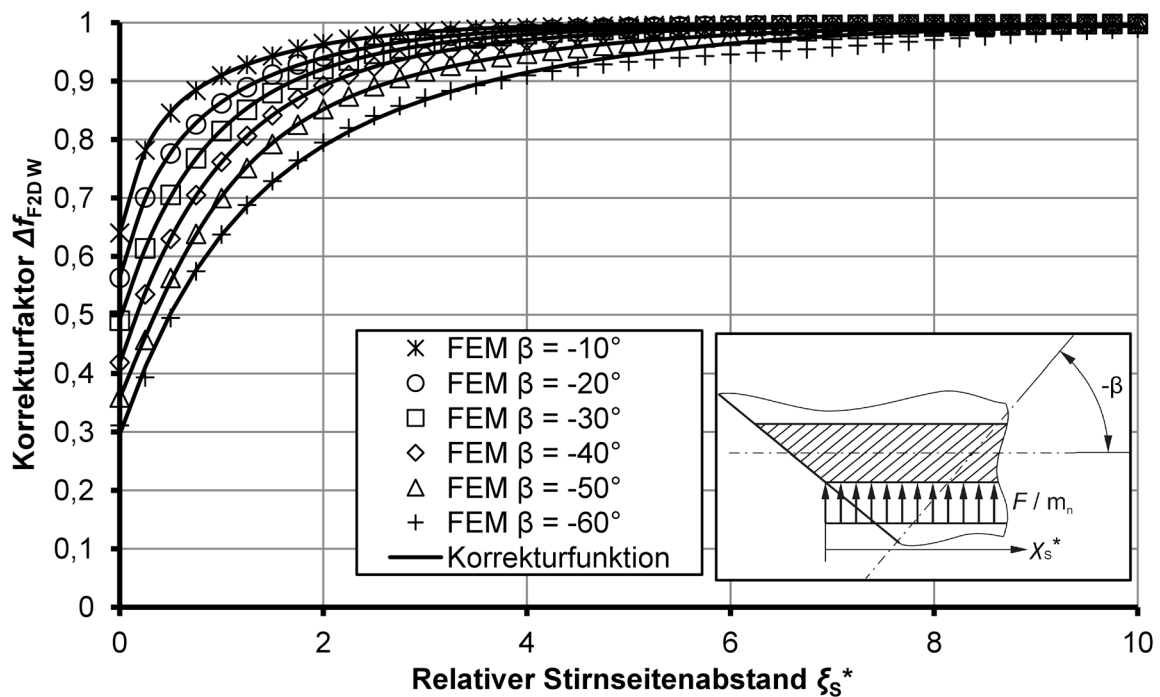


Abbildung 6.10: Mittels FEM berechnete Stirseitenunstetigkeits-Korrekturfaktoren für die stumpfe Stirseite und Vergleich mit der entwickelten Stirseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion

Der Stirseitenunstetigkeits-Korrekturfaktor für die stumpfe Stirseite wird erwartungsgemäß generell  $< 1$ . Bei einem Schrägungswinkel von  $0^\circ$  resultiert dies aus dem Randspannungsab-

fall, wie er in Abbildung 6.2 dargestellt wird. Bei Schrgungswinkeln  $\beta > 0^\circ$  bewirkt die vergrößerte Stützwirkung einen weiteren Abfall der Randspannung, der mit der Größe des Schrägungswinkels steigt.

Es hat sich gezeigt, dass die funktionsmaige Beschreibung dieser schrägungswinkel- und stirnseitenabstandsabhängigen Zusammenhänge ebenfalls durch Gleichung (4.28) und über eine lineare Interpolation von Sttztstellenfunktionen möglich ist. Es muss lediglich  $x = \xi_S^*$  gesetzt werden und die Funktionsparameter müssen über eine Regressionsrechnung auf Basis der FEM-Ergebnisse für die Fußspannungskorrektur neu bestimmt werden. Die so gefundenen Parameter für die Sttztstellenfunktionen  $\Delta f_{F2D W k}(\xi_S^*)$  der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion der Zahnfußspannung werden in Tabelle 6.1 angegeben.

Tabelle 6.1: Funktionsparameter der allgemeinen Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion der Zahnfußspannung  $\Delta f_{F2D W k}(\xi_S^*) = f_{W k}(\xi_S^*)$

$k$	$\beta_k$ in $^\circ$	$\beta_k$ in rad	$A_k$	$B_k$	$C_k$	$p_k$	$q_k$	$r_k$
1	-60	-1,047	-33,202	-32,968	65,466	1,381	1,540	1,457
2	-40	-0,698	-6,486	-0,263	6,166	1,075	1,924	1,096
3	-20	-0,349	-0,624	-0,279	0,467	0,322	1,296	0,322
4	0	0,0	-0,284	-10,341	10,331	0,211	0,385	0,379
5	20	0,349	-0,606	-2,452	2,816	0,425	2,014	2,014
6	40	0,698	28,018	22,165	-50,586	1,059	1,059	1,016
7	60	1,047	671,646	-99,555	-572,371	1,835	1,551	1,872

Damit kann die Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion  $\Delta f_{F2D W k}(\xi_S^*, \beta)$  der Zahnfußspannung unter Verwendung von Gleichung (6.19) berechnet werden. Sie hat einen Gültigkeitsbereich von  $\beta = -60^\circ$  bis  $60^\circ$  und berücksichtigt den Abstand der Auswertungsstelle von der jeweils betrachteten Stirnseite sowie die Änderung des Spannungszustandes im stirnseitennahen Bereich.

$$\Delta f_{F2D W}(\xi_S^*, \beta) = \Delta f_{F2D W k}(\xi_S^*) + \frac{(\beta - \beta_k)}{(\beta_{k+1} - \beta_k)} \cdot (\Delta f_{F2D W k+1}(\xi_S^*) - \Delta f_{F2D W k}(\xi_S^*)) \quad (6.17)$$

mit

$$\beta \in [\beta_k, \beta_{k+1}] \quad \text{für } k = 1, \dots, n - 1$$

und

$$\Delta f_{F2D W k}(\xi_S^*) = f_{W k}(\xi_S^*)$$



### 6.4.3 Einfluss der Zahnwindung auf die Zahnfußspannung

Baumann [LHB95] untersuchte auf Basis von Messungen an Polyamid-Modellen den Einfluss der Zahnwindung auf die Zahnfußspannung. Er führte Messungen an zahnstangenähnlichen Zahnprofilen für einen geraden Zahn und für einen um die Radachse gewundenen Zahn durch. Als Modell für den gewundenen Zahn wählte er eine Kreisringplatte ohne Steigung der Windung. Die Messungen ergaben eine Vergrößerung der Zahnfußdehnung bei einem Zahnwindungsradius  $r_{zw} = 10 \cdot m_n$  um ca. 6 %. Fresen [Fr81] untersuchte ebenfalls den Einfluss der Zahnwindung auf die Zahnfußdehnung. Er wählte statt eines Zahnprofils eine Rechteckplatte zur Abbildung des Zahnes und die Versuchskörper wurden aus Stahl gefertigt. Deshalb können die Untersuchungen von Baumann und Fresen nicht direkt in ihrer absoluten Größe verglichen, sondern nur relativ bewertet werden. Fresen ermittelte in seiner Untersuchung für eine Windung der Kreisringplatte  $r_{zw}$  ca.  $5 \cdot m_n$  eine Vergrößerung von 50 %. Des Weiteren führte er Messungen für eine schraubenförmige Windung des Zahnes (mit Steigung der Windung) um den gleichen Fußkreisdurchmesser aus. Diese ergaben eine ca. 70 % größere Zahnfußdehnung als am geraden Zahn. Auch auf Basis der analytischen Lösung [YBR07] für die am Innendurchmesser fest eingespannte Kreisringplatte unter Wirkung einer konstanten Streckenlast kann eine Vergrößerung des Biegemomentes von ca. 10 % – 17 % ermittelt werden. Der Betrag der Vergrößerung hängt dabei von der Kraftangriffshöhe ab. Diese Auswertung zeigt, dass der Einfluss der Zahnwindung auf die Zahnfußspannung groß ausfallen kann und deshalb näher untersucht werden muss.

Aufgrund der veränderlichen Zahnbreitengeometrie von Kegelrädern wird festgelegt, dass die mittlere Ersatzschrägverzahnung die Zahnwindung um den Radkörper und damit die Krümmung um die Radachse definiert. Diese wird durch den Ellipsenschnitt einer Ebene unter dem Schrägungswinkel  $\beta_m$  mit dem Fußkreiszyylinder der Ersatzschrägverzahnung beschrieben (siehe Abbildung 4.28). Die Krümmung der Ellipse wird als Maß für die Zahnwindung um den Radkörper mit dem Windungsradius  $r_{zw}$  festgelegt. Als Modellvorstellung soll dabei die Kreisringscheibe mit selbigem Krümmungsradius dienen. Für die mittlere Ersatzschrägverzahnung wurden die auf den Modul bezogenen Windungsradien in Abhängigkeit von der Zähnezahl und dem Schrägungswinkel berechnet und in Abbildung 6.11 dargestellt. Je größer der Schrägungswinkel und umso kleiner die Zähnezahl ist, desto größer ist die Krümmung um den Radkörper.

Abbildung 6.12 zeigt die Ergebnisse der FEM-Untersuchungen. Das Diagramm stellt den Vergrößerungsfaktor  $f_{zw}$  für die Zahnfußspannung über dem Zahnwindungsradius dar. Die Kurve "Kreisringplatte mit Zahnstangenprofil (FEM)" zeigt den Verlauf für das Modell der elastisch eingespannten Kreisringplatte mit einem zahnstangenähnlichen Zahnprofil unter Wirkung einer konstanten Streckenlast in Nutzflankenhöhenmitte. Die vorgenommenen FEM-Untersuchungen zeigen (Abbildung 6.12 mit Abbildung 6.11), dass ab einem Schrägungswinkel von  $\beta_m = 35^\circ$  in Abhängigkeit von der Zähnezahl eine Vergrößerung bis zu ca. 10 % erwartet werden kann. Da die Messungen von Baumann und Fresen die Vergrößerung der Zahnfußspannung mit steigendem Zahnwindungsradius bestätigen, wird dieser Sachverhalt über die Korrekturfunktion Gleichung (6.18) berücksichtigt.

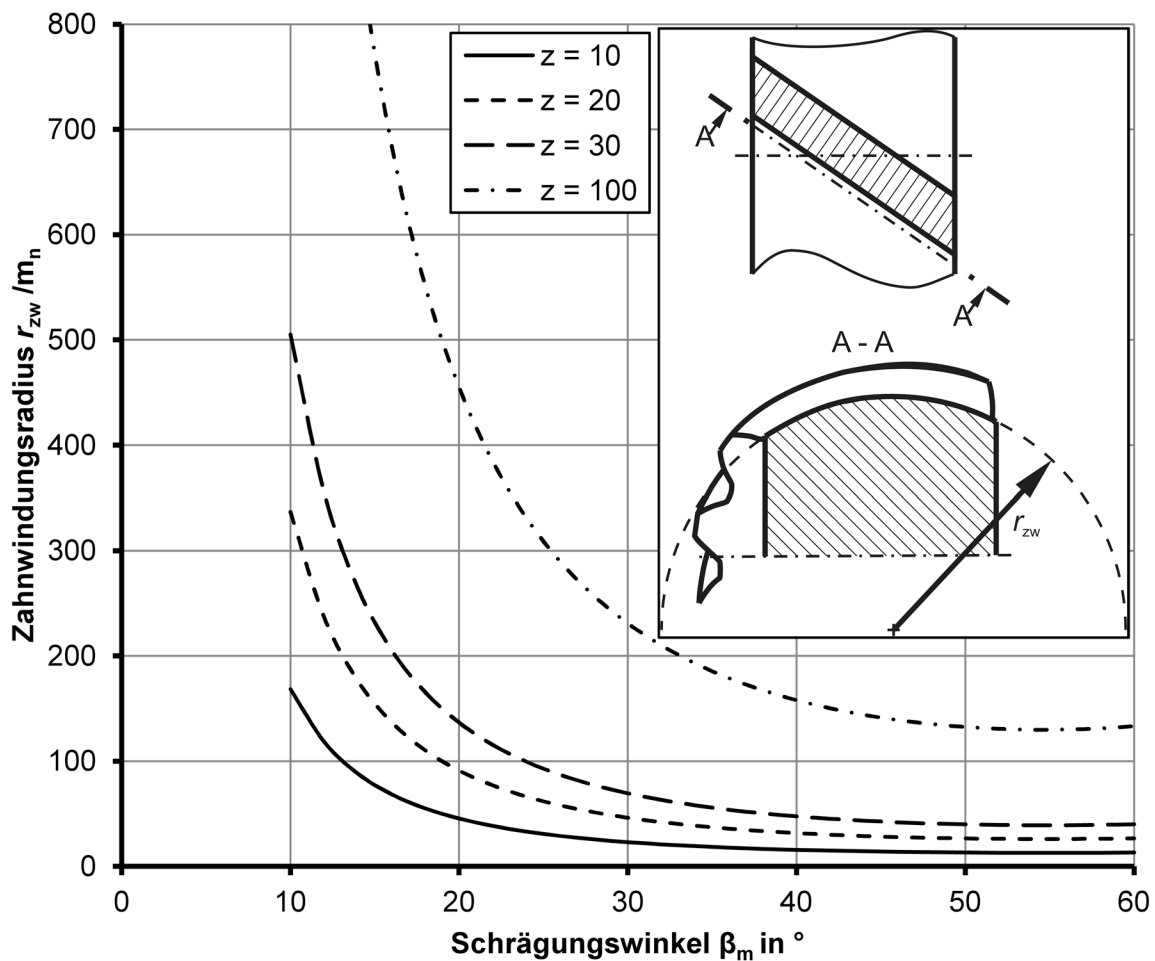


Abbildung 6.11: Zahnwindungsradius  $r_{zw}$  für verschiedene Zähnezahlen und Schrägungswinkel

$$f_{zw} \left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right) = 1 + 0,4911 \cdot e^{\left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right) / 6,8915} + 0,1067 \cdot e^{\left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right) / 53,4067} \quad (6.18)$$

Da die Messungen von Fresen [Fr81] ergaben, dass die Steigung der Zahnwindung einen deutlichen Einfluss auf die Vergrößerung der Zahnfußspannung hat, wurden auch FEM-Untersuchungen an Zahnprofilen mit Zähnezahlen zwischen  $z = 10$  und  $100$  sowie mit Schrägungswinkeln zwischen  $\beta_m = 20^\circ$  und  $60^\circ$  durchgeführt (siehe Abbildung 6.13). Damit die Ergebnisse möglichst den typischen Einfluss der Zahnwindung und der Steigung gut wiedergeben, wurden die Zahnfußspannungen auf Basis von realistischen Lastverteilungen berechnet ("Zahnwindung + Steigung (FEM)"). Der Vergrößerungsfaktor  $f_{zw}$  wurde als Quotient aus der FEM-Zahnfußspannung und der Zahnfußspannung aus Abklingfunktion und BEM-Bezugswert gebildet. Dieser Faktor gibt damit implizit weitere nicht quantifizierte Einflüsse zwischen der Näherungslösung und der komplexen FEM-Lösung wieder. Um eine Überbewertung durch den Korrekturfaktor zu vermeiden, wird der Einfluss des zusätzlichen Korrekturterms begrenzt. Die Korrekturfunktion nach Gleichung (6.18) wird gemäß Gleichung (6.19) erweitert.

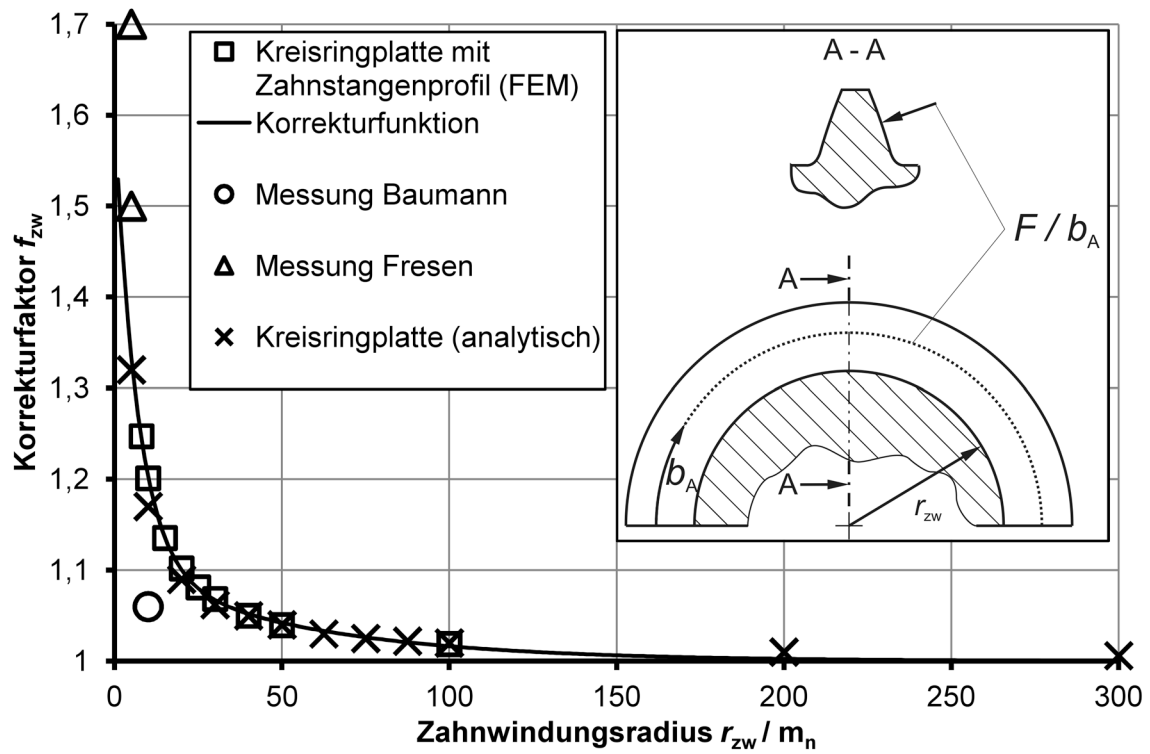


Abbildung 6.12: Korrekturfaktor  $f_{zw}$  für den Zahnwindungseinfluss auf die Zahnfußspannung

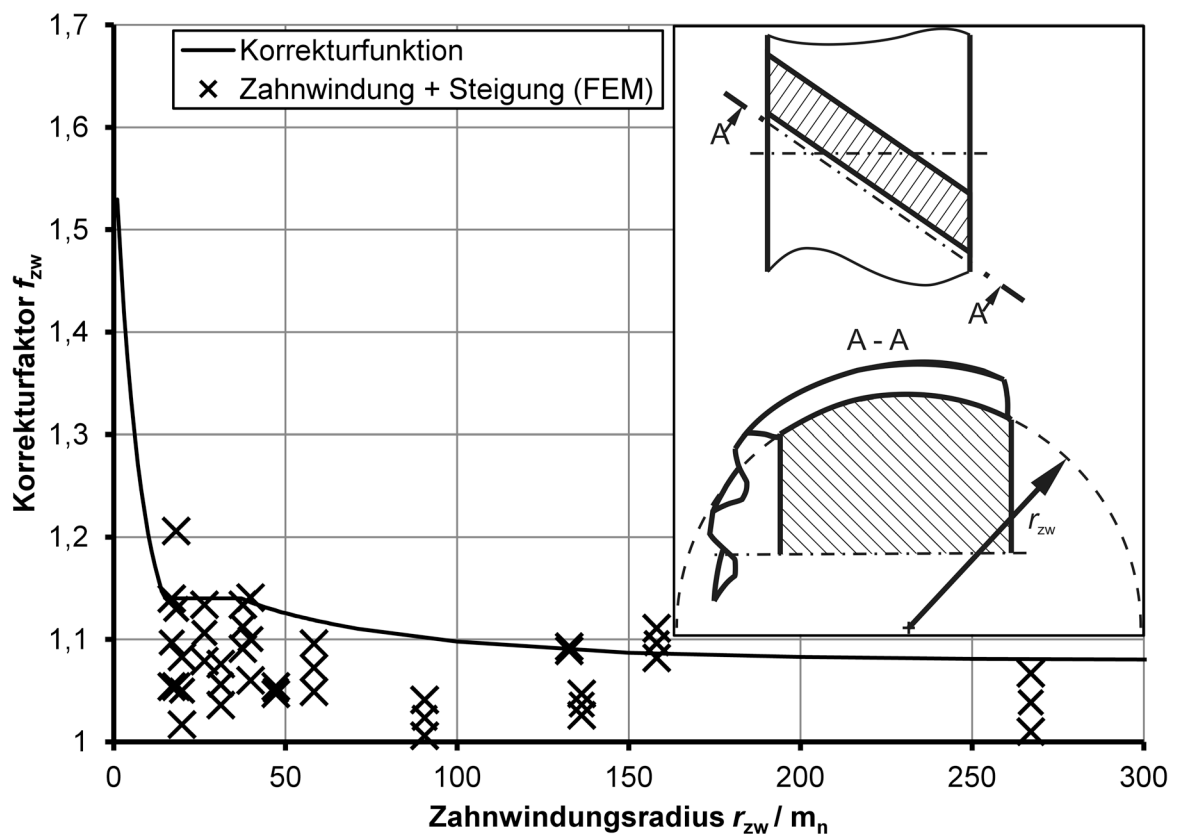


Abbildung 6.13: Erweiterung des Korrekturfaktors für den Zahnwindungseinfluss auf die Zahnfußspannung auf Basis einer Parameterstudie

$$f_{zwe} \left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right) = \begin{cases} \min \left( f_{zw} \left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right) \cdot 1,08; 1,14 \right), & f_{zw} \left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right) < 1,14 \\ f_{zw} \left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right), & f_{zw} \left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right) \geq 1,14 \end{cases} \quad (6.19)$$

#### 6.4.4 Einfluss der Flankenlinienkrümmung auf die Zahnfußspannung

Die Flankenlinienkrümmung wird bei bogenverzahnten Kegelrädern durch den Messerkopfradius definiert. Den folgenden Betrachtungen wird die konvexe bzw. konkave Krümmung in der Planradebene zugrunde gelegt.

Baumann [LHB95] stellt in seinen Versuchen an Polyamid-Modellen fest, dass bei einem Flankenlinienradius von  $r_{FK} = 10 \cdot m_n$  die Zahnfußdehnung gegenüber der eines geraden Zahnes abnimmt. Diese Verkleinerung beträgt laut Baumann auf der konvexen Flanke ca. 5 % und auf der konkaven Flanke ca. 20 %. Fresen [Fr81] führte seine Untersuchung wie schon bei der Zahnwindungsuntersuchung nicht mit zahnstangenähnlichen Zahnprofilen, sondern an rechteckförmigen Plattenprofilen aus Stahl durch. Der Flankenlinienradius  $r_{FK}$  betrug ca.  $13 \cdot m_n$ . Für die konvexe Flanke ermittelte er eine Vergrößerung der Zahnfußdehnung von ca. 6 % und für die konkave Flanke eine Verringerung der Zahnfußdehnung von ca. 6 %. Aufgrund der Unterschiede im Material und in der Geometrie können die Untersuchungen von Baumann und Fresen auch hier nicht direkt in ihrer absoluten Aussage verglichen, sondern nur relativ bewertet werden. Beide stellen demnach fest, dass die Zahnfußdehnung der konvex gekrümmten Flanke größer ist als die der konkav gekrümmten Flanke. Weiterhin zeigen die beiden Versuche, dass die Zahnfußdehnung der konkaven Flanke kleiner ist als die eines geraden Zahnes. Da die Ergebnisse der Zahnfußdehnungsmessung an der konvexen Flanke jeweils in der Größenordnung des wahrscheinlichen Versuchsfehlers liegen, kann allein auf Basis der Messungen keine belastbare Aussage zum Verhalten gegenüber der Zahnfußdehnung am geraden Zahn getroffen werden.

Um die durch Messung von Baumann und Fresen gefunden Einflüsse quantifizieren und ggf. in einer Korrekturfunktion abbilden zu können, wurden FEM-Berechnungen durchgeführt. Als Modell diente ein zahnstangenähnliches Zahnprofil mit elastischer Einspannung (Radkörperklotz) unter Wirkung einer konstanten Streckenlast auf Nutzflankenhöhenmitte. Abbildung 6.14 zeigt den Faktor, der sich aus dem Quotienten der Zahnfußspannung des gekrümmten Zahnes und des geraden Zahnes bei Kraftwirkung auf der konkaven Flanke ergibt. Abbildung 6.15 zeigt diesen Faktor bei Kraftwirkung auf der konvexen Seite. In beiden Abbildungen ist der Verlauf des Faktors über dem modulbezogenen Flankenlängskrümmungsradius ( $= r_{C0}$  (Messerkopfradius)/ $m_n$ ) dargestellt.

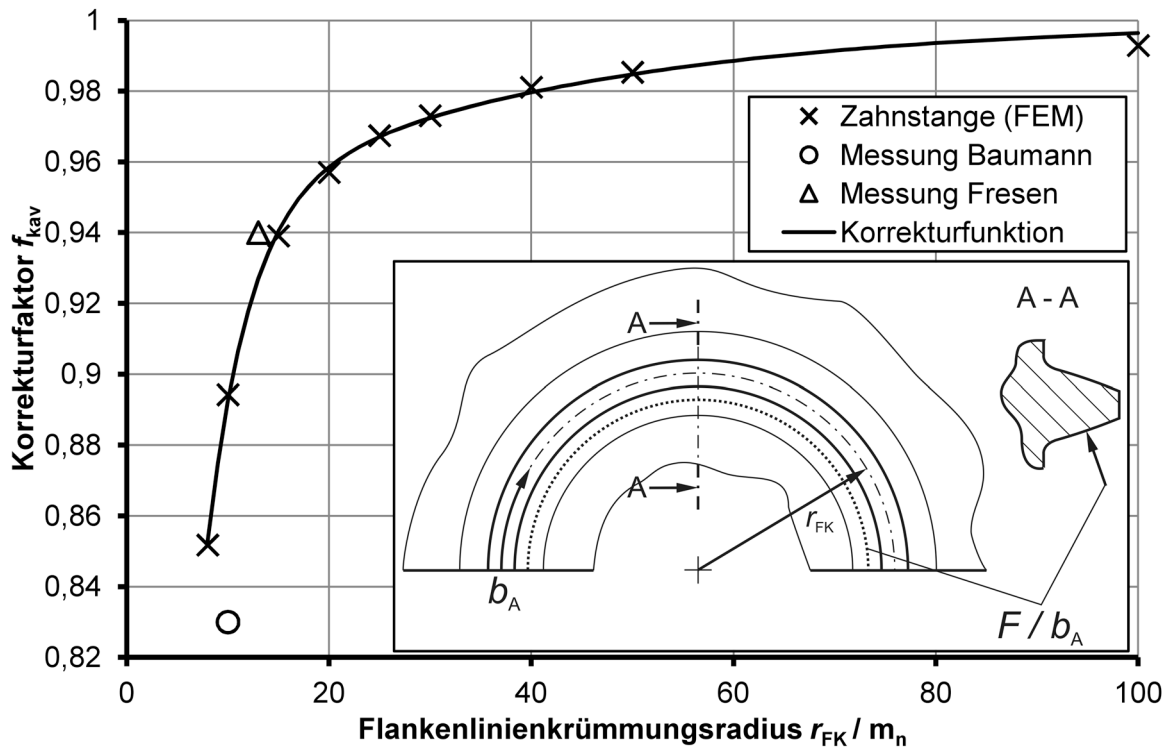


Abbildung 6.14: Korrekturfaktor für den Einfluss der konkaven Flankenlinienkrümmung auf die Zahnfußspannung

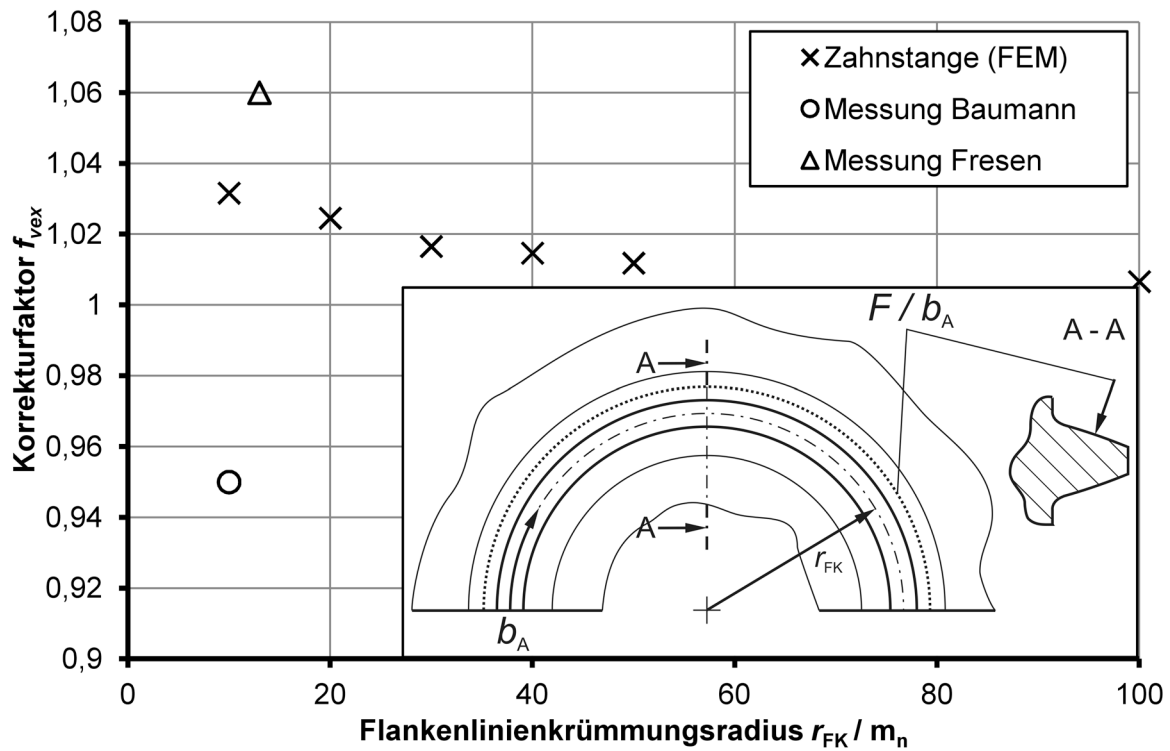


Abbildung 6.15: Korrekturfaktor für den Einfluss der konvexen Flankenlinienkrümmung auf die Zahnfußspannung

Auf der konkaven Flanke nimmt die Fußspannung demnach ab, was durch die Messungen bestätigt wird. Die Fußspannungen auf der konvexen Flanke nehmen hingegen leicht zu. Interpretiert man die Messergebnisse unter Berücksichtigung des wahrscheinlichen Fehlers, kann auch dieses Ergebnis als plausibel eingestuft werden. Da die Zunahme bei einem modulbezogenen Flankenlängskrümmungsradius von  $r_{FK} = 10 \cdot m_n$  nur 5 % beträgt und damit sehr klein ist, soll der Einfluss der konvexen Krümmung auf die Zahnfußspannung vernachlässigt werden. Der Einfluss der konkaven Krümmung auf die Zahnfußspannung soll hingegen durch eine Korrekturfunktion berücksichtigt werden.

Die Korrekturfunktion für den Einfluss der konkaven Flankenlinienkrümmung auf die Zahnfußspannung wird über die Funktion nach Gleichung (6.20) ausgedrückt. Die Funktionsparameter wurden auf Basis einer Regressionsrechnungen für die Stützstellen der FEM-Untersuchungen in Abbildung 6.14 bestimmt.

$$f_{kav}\left(\frac{r_{FK}}{m_n}\right) = \begin{cases} 1 - 0,6606 \cdot e^{\left(\frac{r_{FK}}{m_n}\right) \cdot \frac{1}{4,152}} - 0,0644 \cdot e^{\left(\frac{r_{FK}}{m_n}\right) \cdot \frac{1}{34,681}}, & \text{konkave Flanke} \\ 1, & \text{konvexe Flanke} \end{cases} \quad (6.20)$$

## 6.5 Berechnung der Zahnfußspannung nach der verbesserten Methode

Auf Basis der Lastverteilung, die als Lösung des Kontaktproblems unter Verwendung von Gleichungssystem (3.8) berechnet werden kann, ist es möglich, ebenfalls die Zahnfußspannung mittels Einflusszahlen zu bestimmen. Dies geschieht analog Gleichungssystem (3.3) unter Verwendung von Zahnfußspannungseinflusszahlen gemäß Gleichungssystem (6.21).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{F1} \\ \vdots \\ \sigma_{Fn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Im Folgenden wird beschrieben, wie die Zahnfußspannungseinflusszahlen  $s_{ij}$  für die Verwendung im Gleichungssystem (6.21) unter Nutzung der entwickelten verbesserten Näherungslösung ermittelt werden.

Wird ein Zahnabschnitt  $j$  (Normalschnitt) mit einer Normalkraft  $F_j$  belastet, verteilt sich die Zahnfußspannung auf mehrere Abschnitte  $i$  (Wechselwirkung). Dies kann nun auf Basis der BEM-Bezugswerte und der allgemeinen Zahnfußspannungsabklingfunktion mit Stirnseiten- und Krümmungseinfluss berechnet werden. Für die Berechnung der Zahnfußspannungseinflusszahlen eines Zahnes ergibt sich folgendes Vorgehen, wobei der Abschnitt  $i$  für die Wechselwirkung mit der entsprechenden Krafteinleitungsstelle steht:

1. Berechnung der BEM-Bezugswerteinflusszahl  $s_{BB\ jk}$  mittels Interpolation gemäß Abschnitt 6.3 am Abschnitt  $k = j$  unter Wirkung der Kraft  $F_j$  in der Höhe  $\eta_j$ .

2. Berechnung der Stirnseitenunstetigkeits-Korrekturfunktion gemäß Abschnitt 6.4.2 in Abhängigkeit vom Schrägungswinkel unter Berücksichtigung des relativen Stirnseitenabstandes. Die Berechnung erfolgt für den relativen Stirnseitenabstand des Abschnittes  $i$  jeweils hinsichtlich der Zehe und der Ferse. Dabei wird für die Berechnung an der Stelle  $i$  der Schrägungswinkel  $\beta_i$  verwendet. Die so gewonnenen Korrekturfaktoren werden mit der BEM-Bezugswerteinflusszahl  $s_{BBjk}$  multipliziert. Das Ergebnis ist eine um den Stirnseiteneinfluss korrigierte BEM-Bezugswerteinflusszahl.

$$s_{BBijk} = s_{BBjk} \cdot \Delta f_{F2DW}(\xi_{SZi}^*, \beta_i) \cdot \Delta f_{F2DW}(\xi_{SF i}^*, \beta_i) \quad (6.22)$$

3. Berechnung der krümmungskorrigierten BEM-Bezugswerteinflusszahl  $s_{BBijk}$  auf Basis des Zahnwindungskorrekturfaktors gemäß Abschnitt 6.4.3 und des Flankenlinienkrümmungskorrekturfaktors gemäß Abschnitt 6.4.4

$$s_{BBijk} = s_{BBijk} \cdot f_{zwe} \left( \frac{r_{zw}}{m_n} \right) \cdot f_{kav} \left( \frac{r_{fk}}{m_n} \right) \quad (6.23)$$

4. Berechnung der allgemeinen Zahnfußspannungsabklingfunktion gemäß Abschnitt 6.2.2 in Abhängigkeit von der Ersatzzähnezahl und dem relativen Abstand  $\xi_i^*$  des Abschnittes  $i$  vom Abschnitt  $j$ . Der relative Abstand  $\xi_i^*$  von der Kraffteinleitungsstelle sowie die relativen Stirnseitenabstände müssen gemäß Abschnitt 6.4.1 korrigiert werden. Die Ausführung der stirnseitenabstandsabhängigen Spiegelung der allgemeinen Zahnfußspannungsabklingfunktion analog Abschnitt 4.3.2 erfolgt ebenfalls in diesem Berechnungsschritt. Durch die Multiplikation der so erhaltenen allgemeinen Zahnfußspannungsabklingfunktion für den endlich langen Zahn mit der korrigierten BEM-Bezugswerteinflusszahl erhält man die gesuchte Zahnfußspannungseinflusszahl  $s_{ij}$ .

$$s_{ij} = \left( S_{\infty}(\xi_i^*) + \sum_{k \in Z} S_{\infty}(\xi_{Zik}^*) + \sum_{k \in F} S_{\infty}(\xi_{Fik}^*) \right) \cdot s_{BBijk} \quad (6.24)$$

mit

$$Z = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 1 \wedge S_{\infty}(\xi_{Zik}^*) > 0\} \quad \text{und} \quad F = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq 1 \wedge S_{\infty}(\xi_{Fik}^*) > 0\}$$





## 7 Verifikation und Validierung der verbesserten Berechnungsmethoden

### 7.1 Herangehensweise bei der Verifikation und Validierung

Die in Kapitel 4 bis 6 entwickelten verbesserten Berechnungsmethoden für die näherungsweise Bestimmung der Zahnverformung, Flankenpressung sowie Zahnfußspannung bei Kegelrädern werden im Folgenden verifiziert und validiert. Zu diesem Zweck erfolgte eine Implementierung in BECAL, um die Verifizierung sowie Validierung auf Basis von BECAL-Zahnkontaktsimulationen praxisnah umsetzen zu können.

Die Interpretation der Begriffe Verifizierung und Validierung baut in dieser Arbeit auf den folgenden Begriffserklärungen des U. S. Defense Modeling and Simulation Office (DMSO) auf, z.B. dokumentiert in [MIL3022]:

- **Verifikation**  
The process of determining that a model, simulation, or federation of models and simulations implementations and their associated data accurately represents the developer's conceptual description and specifications
- **Validierung**  
The process of determining the degree to which a model, simulation, or federation of models and simulations, and their associated data are accurate representations of the real world from the perspective of the intended use(s)

Wobei die Verifikation in Form eines Vergleichs der BECAL-Lastverteilung, -Flankenpressung sowie -Zahnfußspannung mit anderen numerischen Referenzlösungen erfolgt. Des Weiteren wird im Rahmen der Verifikation die Genauigkeit hinsichtlich der anderen numerischen Referenzlösungen abgeschätzt.

Die Berechnung der Lastverteilung, Flankenpressung sowie Zahnfußspannung auf Basis der FEM unterliegt nicht den Vereinfachungen, die den Näherungscharakter der in Kapitel 4 bis 6 entwickelten Methoden ausmachen. Dies geht auf Kosten deutlich höherer Aufwände, Ressourcennutzung und Rechenzeiten (vgl. Abschnitt 2.3). Da dies für ausgesuchte Einzeluntersuchungen, Fall- sowie Sensibilitätsstudien nicht relevant ist, sollen FEM-Lösungen als Vergleichsmaßstab für die Genauigkeit der entwickelten Näherungsmethoden herangezogen

werden. Ziel ist es, einen Vertrauensbereich für die relative und absolute Aussagequalität der verbesserten Näherungsmethoden abzuschätzen. Im Folgenden werden die Begriffe und die damit bezeichneten Berechnungsmethoden erläutert, die im Rahmen der Verifikation sowie Genauigkeitsbewertung Anwendung finden:

- **BECAL-BEM**

Die Verformungseinflusszahlen, die Flankenpressung sowie die Zahnfußspannung werden auf Basis der in Kapitel 4 bis 6 beschriebenen verbesserten Berechnungsmethoden ermittelt.

- **BECAL-4x**

Die Verformungseinflusszahlen, die Flankenpressung sowie die Zahnfußspannung werden auf Basis der in [Ba91], [LHB95], [LB97] beschriebenen Näherungsmethoden berechnet. Dies entspricht dem Ausgangszustand vor der Umsetzung der in Kapitel 4 bis 6 entwickelten Erweiterungen und Verbesserungen der Berechnungsmethoden.

- **FEM-Einflusszahlen**

Auf Basis der Arbeit von [Ne83], [Sc11] wurden Biegeverformungseinflusszahlen mit einem FEM-Programm berechnet. Diese wurden mit Hilfe der Elementformfunktionen lastfall- und flankenpositionsabhängig auf das mit BECAL berechnete potenzielle Eingriffsfeld interpoliert. Wesentlich ist dabei, dass die Einflusszahlen unter Subtraktion des singulären Verformungsanteils gemäß Abschnitt 4.3.3 berechnet werden und somit direkt in das BECAL-Einflusszahlengleichungssystem zur Lösung des Kontaktproblems gemäß Abschnitt 3.6 als Biegeverformungseinflusszahlen eingesetzt werden können. Die Kontaktverformungen sowie die Flankenpressungen werden auf Basis der ZHM berechnet. Um die Zahnfußspannungen zu erhalten, wird die Lastverteilung über die Anwendung der Elementformfunktionen wieder auf das FEM-Modell aufgebracht und die Zahnfußspannung in Form der maximalen 1. Hauptspannung über der Zahnfußbreite ausgewertet [Sc11]. Somit sind die Berechnungsergebnisse zur Last-, Pressungs- und Zahnfußspannungsverteilung von BECAL-BEM sowie BECAL-4x und FEM direkt miteinander vergleichbar.

- **FEM-Zahnfußspannungsberechnung**

Die Berechnung der Lastverteilung erfolgt auf Basis der näherungsweise ermittelten Verformungseinflusszahlen unter Verwendung von BECAL-BEM bzw. BECAL-4x. Über die Anwendung der Elementformfunktionen wird diese Lastverteilung auf das FEM-Modell aufgebracht und die Zahnfußspannung in Form der maximalen 1. Hauptspannung über der Zahnfußbreite ausgewertet [Sc11]. Dies ermöglicht es, die Genauigkeit der Zahnfußspannungsberechnungen getrennt von der Genauigkeit der Lastverteilungsberechnung zu bewerten.

- **FEM-Kontaktsimulation**

Die Anforderung an die Lastverteilungsberechnung mit FEM-Einflusszahlen, direkt vergleichbar mit BECAL-BEM sowie BECAL-4x zu sein, hat zwei wesentliche Vereinfachungen zur Folge. Zum einen wird die Zahnwechselwirkung und zum anderen wird

die Wechselwirkung bei der Berechnung der Kontaktverformung vernachlässigt. Um diese Einflüsse im komplexen Zusammenspiel aller relevanten Einflussgrößen des reibungsfreien Zahnkontaktes abschätzen zu können, werden Kontaktsimulationen mit einem FEM-Programm durchgeführt. Die Lastverteilungen über den Kontaktgebieten werden in äquivalente Linienlasten auf die Traglinien umgerechnet, um wiederum einen Vergleich mit BECAL-Berechnungen zu ermöglichen. Besonders für Verzahnungen mit großen Schrägungswinkeln und einer großen Verwindung um die Radkörperachse ist es sehr schwierig und berechnungsaufwendig, vollständig konvergierte Kontaktrechnungen mit stetigen Lastverteilungen zu erhalten. Deshalb wurde das Vorgehen von Gosselin [GGB94] adaptiert und das FEM-Kontaktmodell auf Basis der potenziellen Berührlinien der lastfreien BECAL-Zahnkontaktsimulation vernetzt [Ku13].

Die Validierung der BECAL-BEM-Berechnungsmethoden erfolgt auf Basis eines Vergleichs mit experimentell ermittelten Lasttragbildern sowie Zahnfußspannungen. Dieser Vergleich soll den über die Verifikation festgelegten Vertrauensbereich bestätigen.

## 7.2 Verifikation

### 7.2.1 Allgemeine Vorbetrachtungen zur Genauigkeit

Auf Basis der Fehlerfortpflanzung unter Zugrundelegung bekannter Einzelabweichungen kann eine qualitative Abschätzung der zu erwartenden Gesamtabweichungen der maximalen Last, Pressung sowie Zahnfußspannung zwischen BECAL-BEM und den entsprechenden FEM-Lösungen erfolgen. Die qualitativ bekannten Einzelabweichungen  $\Delta x_i$  sind in Tabelle 7.1 aufgeführt. Die Angaben beziehen sich auf die entsprechende FEM-Lösung. Das heißt, bei einem negativen Vorzeichen ist der Wert, der mit BECAL-BEM berechnet wurde, kleiner als der Wert einer FEM-Berechnung und umgekehrt. Da sich die Abweichungen teilweise oder ganz aufheben können, soll hier die wahrscheinliche Gesamtabweichung gemäß Gleichung (7.1) abgeschätzt werden.

$$\Delta x_{\text{ges}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \Delta x_i^2} \quad (7.1)$$

Die Abschätzung der wahrscheinlichen Gesamtabweichung unter Verwendung von Gleichung (7.1) wird getrennt nach relativer und absoluter Aussagegenauigkeit betrachtet.

Tabelle 7.1: Qualitativ bekannte relative Einzelabweichungen bei der Lastverteilungs- und Zahnfußspannungsberechnung gegenüber FEM-Berechnungen ohne Modellvereinfachung

<i>i</i>	Qualitativ bekannte Hauptquellen für Abweichungen	Auswirkung auf	Relative Einzelabweichung $\Delta x_i$ in %
1	Abweichung der Lastverteilung hinsichtlich der Wirksamkeit auf die maximale Last, verursacht durch die Vernachlässigung der Zahnwechselwirkung gemäß Abschnitt 3.7.	maximale Last	-15
		maximale Zahnfußspannung	-10
2	Abweichung der Lastverteilung, verursacht durch die allgemeine Verformungsabklüpfung gemäß Abschnitt 4.3.5.	maximale Last	$\pm 5$ (bei $\beta = 0^\circ$ ) $\pm 10$ (bei $\beta > 30^\circ$ )
3	Aus den FEM-Untersuchungen von Baumann [Ba91] kann abgeleitet werden, dass bei Vernachlässigung der Zahnwindung im Extremfall die Verformung 4,6 % geringer ausfällt und die maximale Last dementsprechend größer berechnet wird, als mit Zahnwindungseinfluss.	maximale Last	+5
4	Baumann [Ba91] gibt an, dass bei der Verwendung üblicher Messerköpfe eine Vernachlässigung der Flankenlinienkrümmung zu ca. 5 % größeren Verformungen führt.	maximale Last	-5
5	Die Abweichung der Bezugswerte wird auf Basis der Untersuchungen in Abschnitt 4.4.6 als sehr klein eingestuft.	maximale Last	$\pm 3$
		maximale Zahnfußspannung	
6	Abweichung der Zahnfußspannung, verursacht durch die allgemeine Zahnfußspannungsabklüpfung gemäß Abschnitt 6.2.3.	maximale Zahnfußspannung	$\pm 7$ (bei $\beta = 0^\circ$ ) $\pm 20$ (bei $\beta > 30^\circ$ )

Tabelle 7.2: Abschätzung der wahrscheinlichen Gesamtabweichung zwischen BECAL-BEM-Maximalwerten und entsprechender FEM-Lösungen auf Basis qualitativ bekannter Einzelabweichungen

Größe	Formelzeichen	Wahrscheinliche relative Gesamtabweichung in %		
		Relative Aussagekraft der Methode $\Delta x_{...rel}$	Absolute Aussagekraft der Methode	
			Ohne Zahnwechselwirkung $\Delta x_{...abs}$	Mit Zahnwechselwirkung $\Delta x_{...abs ZW}$
Max. Last	$\Delta x_L$	±3	±13	±20
Max. Pressung	$\Delta x_P$	±2	±6	±10
Max. Zahnfußspannung (unter Vernachlässigung der Abweichung der max. Last)	$\Delta x_F$	±3	±20	±23
Max. Zahnfußspannung (unter Berücksichtigung der Abweichung der max. Last)	$\Delta x_{LF}$	±4	±24	±26

Die Kenntnis der relativen Aussagegenauigkeit der Berechnungsmethoden ist immer dann von Bedeutung, wenn eine vorausgelegte Verzahnung optimiert werden soll (z.B. Eingriffswinkel, Zahnhöhe, Zahnfußgeometrie, Tragbildentwicklung). Dafür ist es erforderlich, beurteilen zu können, wie groß die Unterschiede zwischen einzelnen Auslegungsvarianten hinsichtlich der maximalen Last, Flankenpressung sowie Fußspannung ausfallen müssen, um eindeutige Tendenzen identifizieren zu können.

Die Kenntnis der absoluten Aussagegenauigkeit ist immer dann erforderlich, wenn auf Basis von lokalen Tragfähigkeitsnachweisen [Wi08], [SS12], [KI12], [Ho13] oder Auswertungen von Versuchen sowie Felderfahrungen die maximal übertragbaren Drehmomente bestimmt werden müssen.

Hinsichtlich der relativen Aussagekraft bei der Verzahnungsoptimierung ist es fast ausschließlich die Genauigkeit des Bezugswertes, die über die Größenordnung der Abweichungen entscheidet. Hinsichtlich der absoluten Aussagegenauigkeit kommen Einflüsse aus Zähnezahl, Schrägungswinkel, Überdeckung, Lastverteilung sowie Lastaufteilung hinzu.

Bei der Abschätzung der wahrscheinlichen Gesamtabweichung wird auch zwischen der Abweichung hinsichtlich eines Vergleichswertes ohne und mit Berücksichtigung der Zahnwechselwirkung unterschieden.

Die gemäß Gleichung (7.1) abgeschätzten wahrscheinlichen Gesamtabweichungen auf Basis der bekannten Einzelabweichungen nach Tabelle 7.1 werden in Tabelle 7.2 angegeben. Die Abweichung für die maximale Pressung ergibt sich dabei aus der Wurzel des Korrekturfaktors der maximalen Last.

### 7.2.2 Sensibilitätsstudie

Da auf Grund der komplexen Abweichungsüberlagerung der Näherungslösungen der BECAL-BEM-Berechnungsmethoden sowie noch nicht berücksichtigter Einzelabweichungen eine vollständige Abweichungsbetrachtung allein auf Basis der Fehlerfortpflanzung nicht möglich ist, müssen die in Tabelle 7.2 angegebenen Abschätzungen der wahrscheinlichen Gesamtabweichung über eine Sensibilitätsstudie abgesichert und präzisiert werden. Erst dies ermöglicht es, unter Zugrundelegung der Abweichungsschätzung einen Vertrauensbereich für BECAL-BEM-Lösungen zu definieren.

Mit Hilfe dieser Sensibilitätsstudie soll die maximale, minimale und mittlere Abweichung unter Variation der folgenden Parameter bestimmt werden:

- Zähnezahl und Übersetzungsverhältnis  $z = 8 - 100$ ;  $i = 1 - 4$
- Kegelminkel  $\Sigma = 5^\circ - 120^\circ$
- relativer Achsversatz  $a_v^* = 2 a_v / d_{m2} = |0,00 - 0,61|$
- Eingriffswinkel symmetrisch und asymmetrisch  $\alpha_{c/d} = 15^\circ - 35^\circ$
- relativer Messerkopfradius  $r_{c0}^* = r_{c0} / m_n = 10 - \infty$
- Schrägungswinkel  $\beta_m = 0^\circ - 60^\circ$
- Zahnkophöhenfaktor  $k_{hap} = 0,75 - 1,30$
- Profilverchiebungsfaktor  $x_{nm} = -0,5 - 0,5$

Auf Basis der minimalen und maximalen Abweichungen soll die Schätzung der absoluten Aussagekraft verbessert werden.

Die mittlere Abweichung soll als Maß für die relative Aussagekraft herangezogen werden. Dies ist nur für die verbesserten Näherungsmethoden aufgrund der hohen Genauigkeit der BEM-Bezugswerte möglich. Es wird dabei angenommen, dass die Genauigkeit des BEM-Bezugswertes nicht direkt als Maß für die Definition des Vertrauensbereiches verwendet werden kann. Dies beruht auf der Annahme, dass die Abbildungsgenauigkeit der schrägungswinkel- und profilformabhängigen Bezugswertkorrektur sowie der Abklingfunktion auch bei der Optimierung einer vorausgelegten Verzahnung zu einem gewissen Anteil wirksam werden. Es wird davon ausgegangen, dass der wirksame Anteil auf die relative Aussagekraft wesentlich kleiner als auf die absolute Aussagekraft ist und die mittlere Abweichung der Sensibilitätsstudie nicht überschreitet.

Um die Verbesserungen der neuen Berechnungsmethoden gegenüber den Berechnungsmethoden der BECAL-4x-Version bewerten zu können, wird die Sensibilitätsstudie mit denselben Verzahnungen auch für die BECAL-4x-Version durchgeführt.

Die in den Diagrammen der Abbildung 7.1 bis Abbildung 7.6 eingezeichneten Abweichungsgrenzen entsprechen der jeweils geschätzten wahrscheinlichen Gesamtabweichung der absoluten Aussagekraft ohne Zahnwechselwirkung  $\Delta x_{\dots abs}$  gemäß Tabelle 7.2.

Abbildung 7.1 stellt die maximale Pressung, berechnet mit BECAL-4x, der Berechnung der maximalen Pressung auf Basis von FEM-Einflusszahlen gegenüber. In Abbildung 7.2 wird die maximale Pressung, berechnet mit BECAL-BEM, ebenfalls den maximalen Pressungen, berechnet mit FEM-Einflusszahlen, gegenübergestellt. Die Abbildungen verdeutlichen, dass die Berechnung der Pressung mit BECAL-BEM eine kleinere Abweichung sowie eine geringere Streuung aufweist als die maximalen Pressungen, die mittels BECAL-4x berechnet wurden. Dies ist ein deutlicher Beleg für die effektive Verbesserung der Berechnungsmethoden hinsichtlich der Last- und Pressungsverteilung. Des Weiteren entsprechen die Abweichungen zwischen der BECAL-BEM- und der FEM-Einflusszahlen-Berechnung in etwa dem abgeschätzten Bereich  $\Delta x_{P abs}$  von  $\pm 6 \%$

Abbildung 7.3 und Abbildung 7.4 zeigen als Referenz analog zum Vergleich der maximalen Pressung die Gegenüberstellung der maximalen Zahnfußspannung, berechnet auf Basis der verschiedenen Modelle mit den jeweiligen FEM-Zahnfußspannungsberechnungen. Dieser Vergleich ermöglicht eine direkte Aussage über die Abweichungen der Zahnfußspannungsberechnungen der Näherungslösung, da sowohl die BECAL- als auch die FEM-Ergebnisse mit der jeweils selben Lastverteilung berechnet wurden. Abbildung 7.3 zeigt den FEM-Vergleich mit den BECAL-4x-Zahnfußspannungen. Überall dort, wo die Spannungen deutlich kleiner als die FEM-Spannungen ausfallen, handelt es sich um Verzahnungen mit stark ausgeprägtem asymmetrischen Zahnprofil, mit Schrägungswinkeln von mindestens  $40^\circ$  oder um eine Kombination dieser Charakteristika in Form von Hypoidverzahnungen, die zusätzlich noch unterschiedlich breite Ritzel- und Radzähne aufweisen. All diese Einflüsse wirken sich deutlich auf die Größe der Zahnfußspannung aus und werden im Berechnungsmodell von BECAL-4x nicht oder nur stark vereinfacht erfasst. Damit sind die teilweise großen Abweichungen erklärbar. Die relativ geringe mittlere Abweichung von  $8 \%$  zeigt, dass es allerdings nur wenige extreme Abweichungen gibt und für die überwiegende Zahl der praxisrelevanten Verzahnungen eine ausreichende Abbildungsgenauigkeit erzielt wird. Abbildung 7.4 zeigt, dass die neuen Berechnungsmethoden der BECAL-BEM-Version für alle schon zuvor betrachteten Verzahnungsvarianten gleichbleibend niedrige maximale Abweichungen mit einer kleinen Streuung und einer kleinen mittleren Abweichung aufweisen. Die größte Abweichung ist mit  $16 \%$  deutlich geringer als die zuvor abgeschätzte Abweichung  $\Delta x_{F abs}$  von  $\pm 20 \%$ .

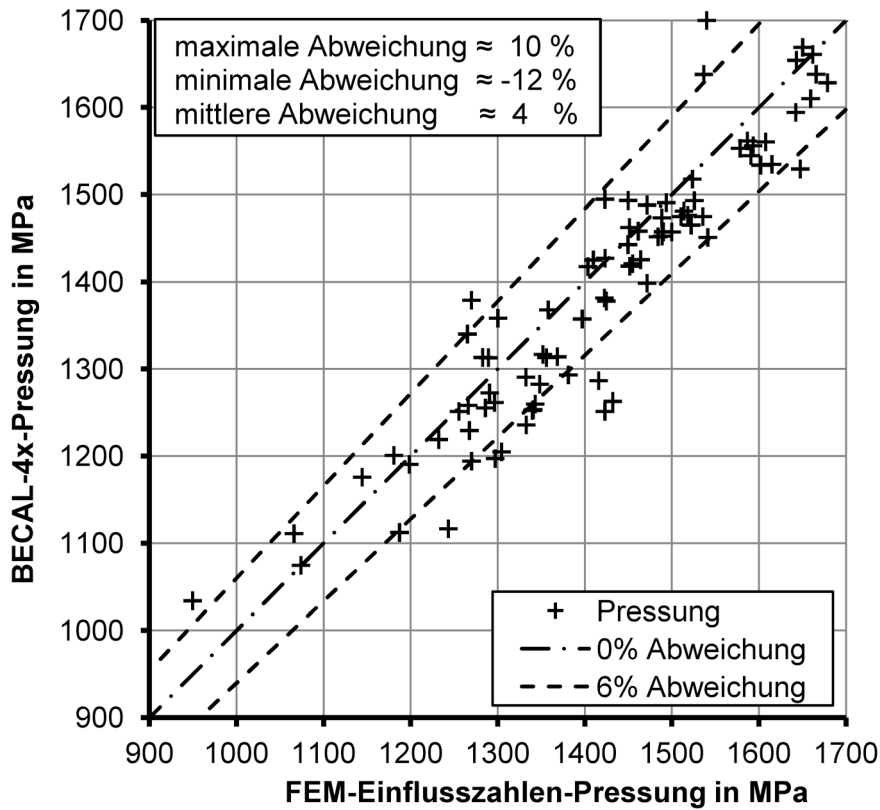


Abbildung 7.1: Gegenüberstellung der maximalen Flankenpressung auf Basis von BECAL-4x und FEM-Einflusszahlen

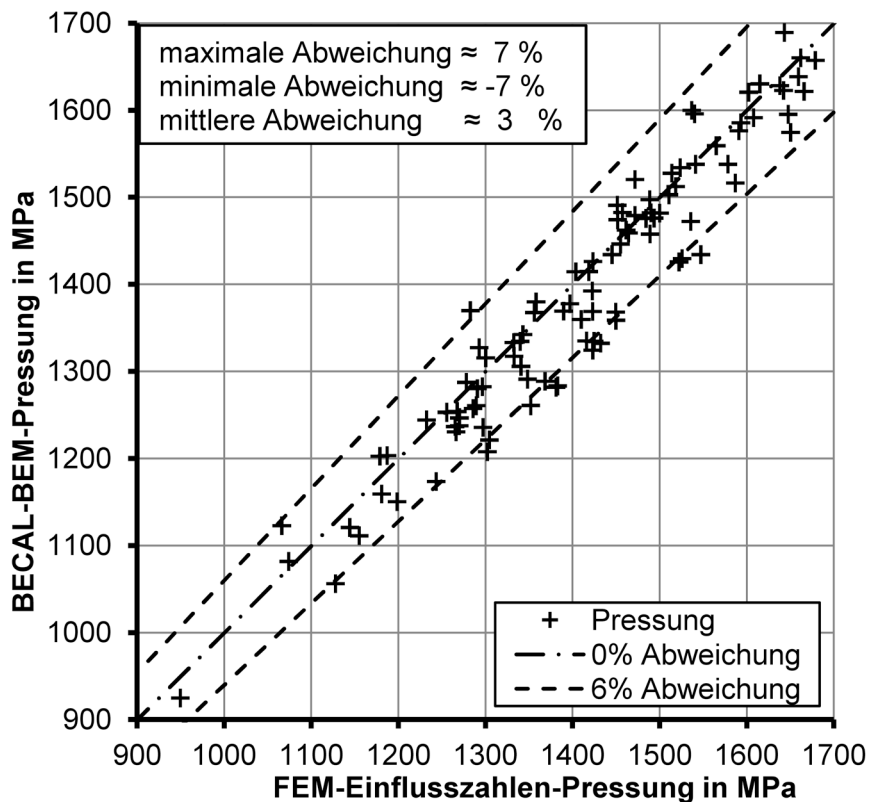


Abbildung 7.2: Gegenüberstellung der maximalen Flankenpressung auf Basis von BECAL-BEM und FEM-Einflusszahlen



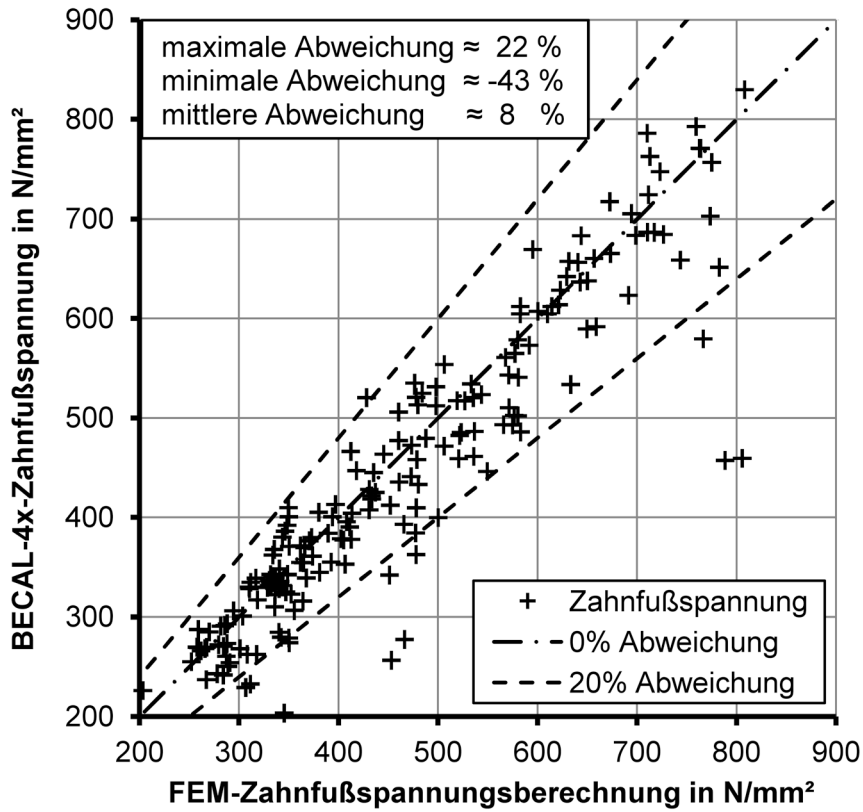


Abbildung 7.3: Gegenüberstellung der maximalen Zahnfußspannung auf Basis von BECAL-4x und FEM-Zahnfußspannungsberechnung

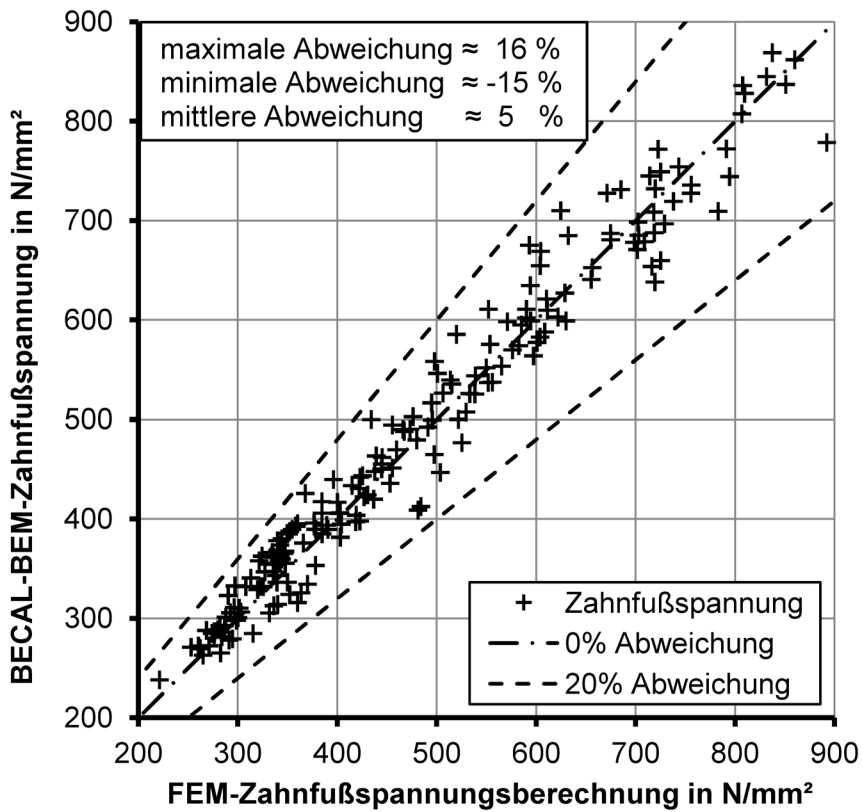


Abbildung 7.4: Gegenüberstellung der maximalen Zahnfußspannung auf Basis von BECAL-BEM und FEM-Zahnfußspannungsberechnung

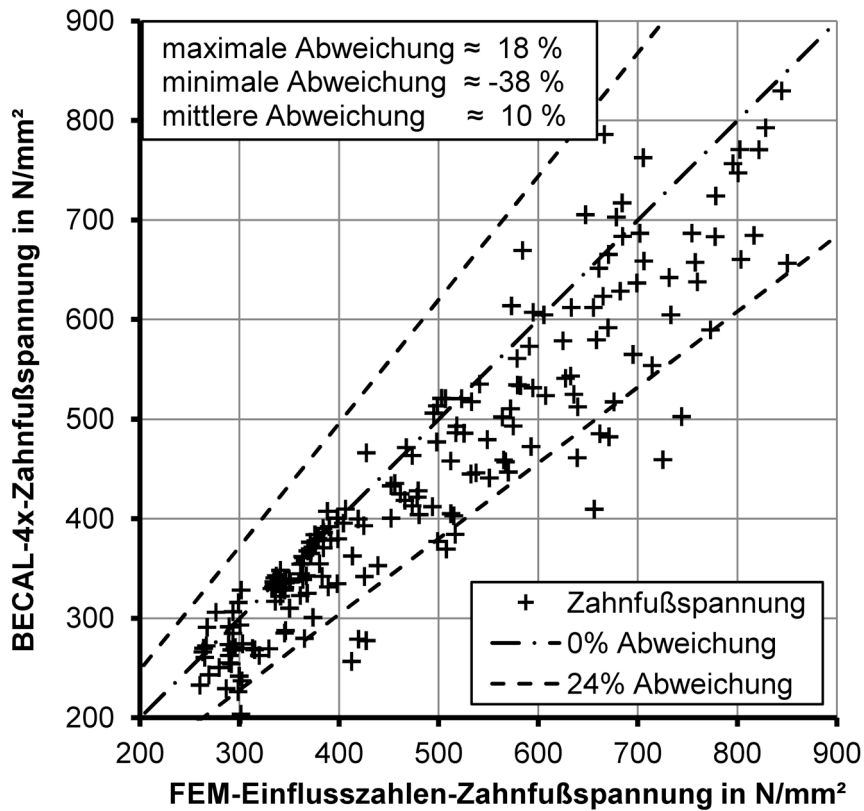


Abbildung 7.5: Gegenüberstellung der maximalen Zahnfußspannung auf Basis von BECAL-4x und FEM-Einflusszahlen

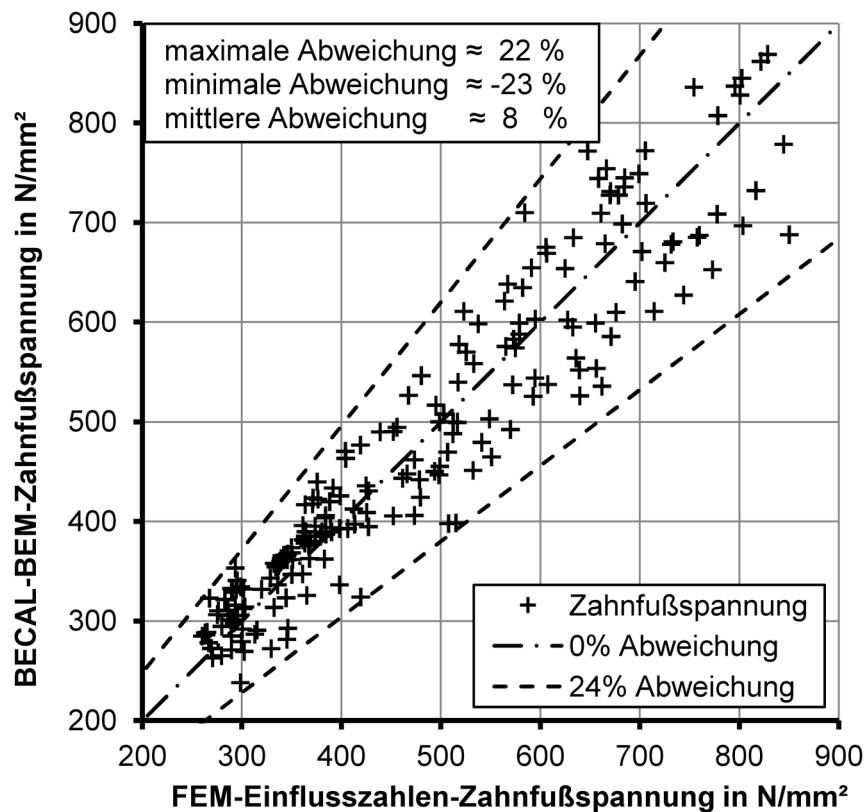


Abbildung 7.6: Gegenüberstellung der maximalen Zahnfußspannung auf Basis von BECAL-BEM und FEM-Einflusszahlen

Abbildung 7.5 und Abbildung 7.6 zeigen den Vergleich der Zahnfußspannungen, einmal berechnet mit BECAL-4x bzw. BECAL-BEM und zum anderen bestimmt über FEM-Einflusszahlen. Der Vergleich ermöglicht die Bewertung der Zahnfußspannungsgesamtabweichung, die aus der Kombination der Näherungslösung für die Biegeverformungsberechnung (Lastverteilungsberechnung) und der Zahnfußspannungsberechnung resultiert. Auch hier ist wieder erkennbar, dass die Berechnungsergebnisse der BECAL-BEM-Version deutlich geringere maximale, minimale und mittlere Abweichungen gegenüber der FEM-Lösung aufzeigen, als die Berechnungsergebnisse der BECAL-4x-Version. Auch hier liegt die berechnete maximale Abweichung von 23 % im Bereich der geschätzten  $\Delta X_{LF\text{ abs}}$  von  $\pm 24$  %.

Aufgrund der Notwendigkeit der direkten Vergleichbarkeit zwischen der BECAL-BEM- sowie BECAL-4x- und der FEM-Einflusszahlen-Lösung wurde die Zahnwechselwirkung bei den FEM-Lösungen vernachlässigt. Um bewerten zu können, wie sich diese Vereinfachung auf die Gesamtabweichung auswirkt, werden die Lastverteilungen für die Eingriffsstellung mit der maximalen Flankenpressung von drei ausgewählten Verzahnungen mittels FEM-Kontaktsimulation bestimmt. Die Lastverteilung über den Kontaktflächen der FEM-Kontaktsimulation wird zahn- bzw. traglinienweise in äquivalente Streckenlast umgerechnet und kann somit direkt mit der BECAL-BEM-Lösung verglichen werden.

Es werden die drei Verzahnungen A, B und C untersucht. Die Verzahnungsdaten können Tabelle A.1 sowie Tabelle A.2 im Anhang entnommen werden. Abbildung 7.7 bis Abbildung 7.9 zeigen die Lastverteilung im Vergleich zwischen BECAL-BEM, FEM-Einflusszahlen und FEM-Kontaktsimulation der drei Verzahnungen. Der wesentliche Unterschied zwischen der Lastverteilungsberechnung mit FEM-Einflusszahlen und FEM-Kontaktsimulation liegt in der Zahnwechselwirkung. Deshalb soll der Unterschied in der maximalen Last zwischen diesen Varianten als Maß für die Abweichung der Lastverteilung dienen, verursacht durch die vernachlässigte Zahnwechselwirkung. Die Gegenüberstellung der Lastverteilungsberechnung von BECAL-BEM und FEM-Kontaktsimulation soll zur qualitativen Bewertung der Lastverteilung herangezogen werden.

Verzahnung A wurde so ausgewählt, dass drei Zähne im Eingriff sind, denn gemäß der Betrachtungen in Abschnitt 3.7 hat dies die größte Auswirkung auf die Lastverteilung, allerdings nur bei einer Höhenballigkeit, bei der die Zahnköpfe gerade noch im Eingriff sind. Wenn die Höhenballigkeiten kleiner oder auch deutlich größer ausfallen, sinkt der Zahnwechselwirkungseinfluss. Der Vergleich in Abbildung 7.8 bestätigt diese Erkenntnisse aus der Vorbetrachtung in Abschnitt 3.7, denn der Unterschied zwischen der maximalen Last, berechnet mit FEM-Einflusszahlen und FEM-Kontaktsimulation beträgt 2 %. Die Gegenüberstellung der Lastverteilung, berechnet mit BECAL-BEM und FEM-Kontaktsimulation, zeigt ebenfalls eine gute qualitative und quantitative Übereinstimmung und eine Abweichung der max. Last von 8 %.

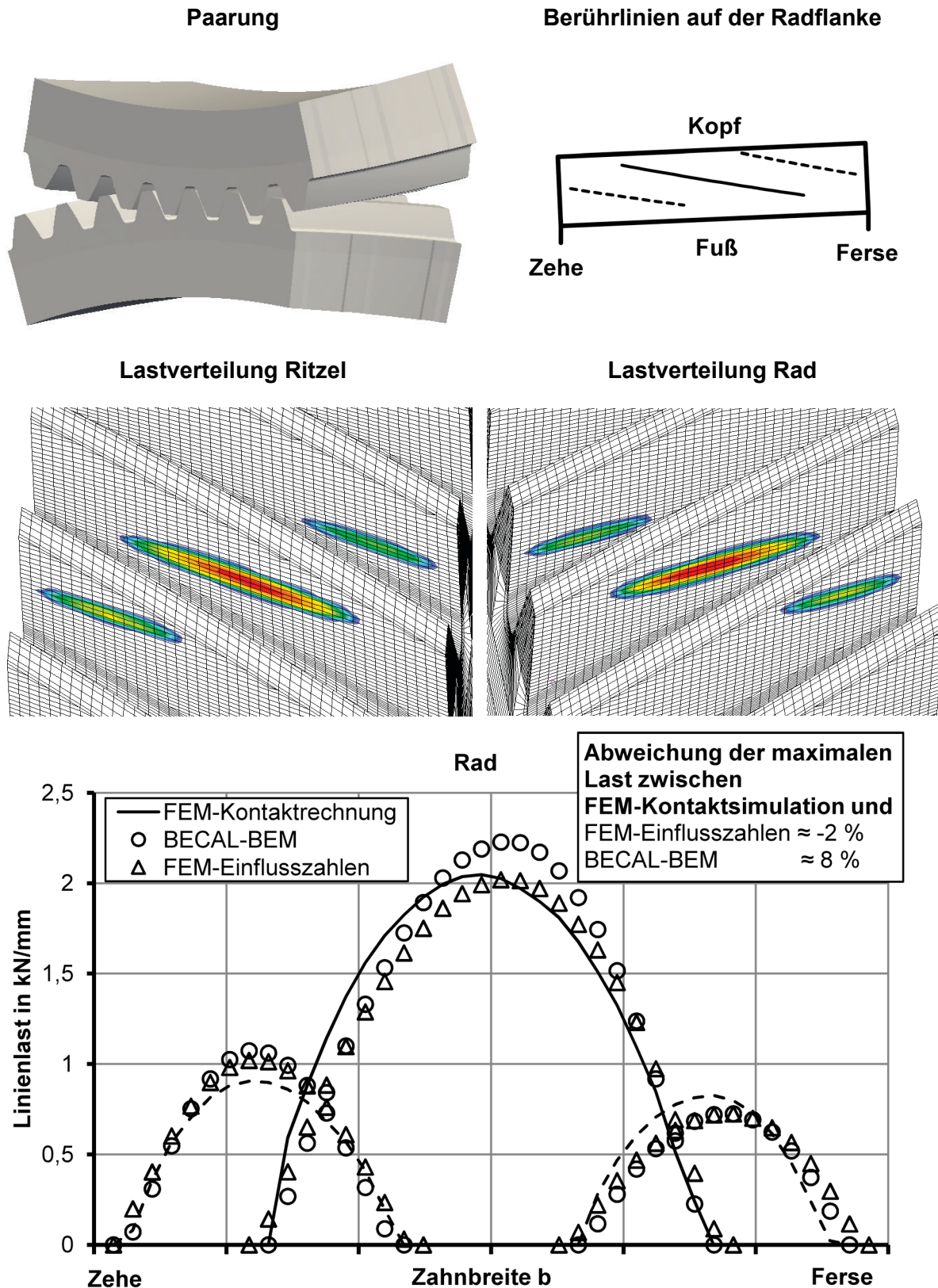


Abbildung 7.7: Lastverteilung in der mittleren Eingriffsstellung der Verzahnung A, berechnet mit verschiedenen Methoden

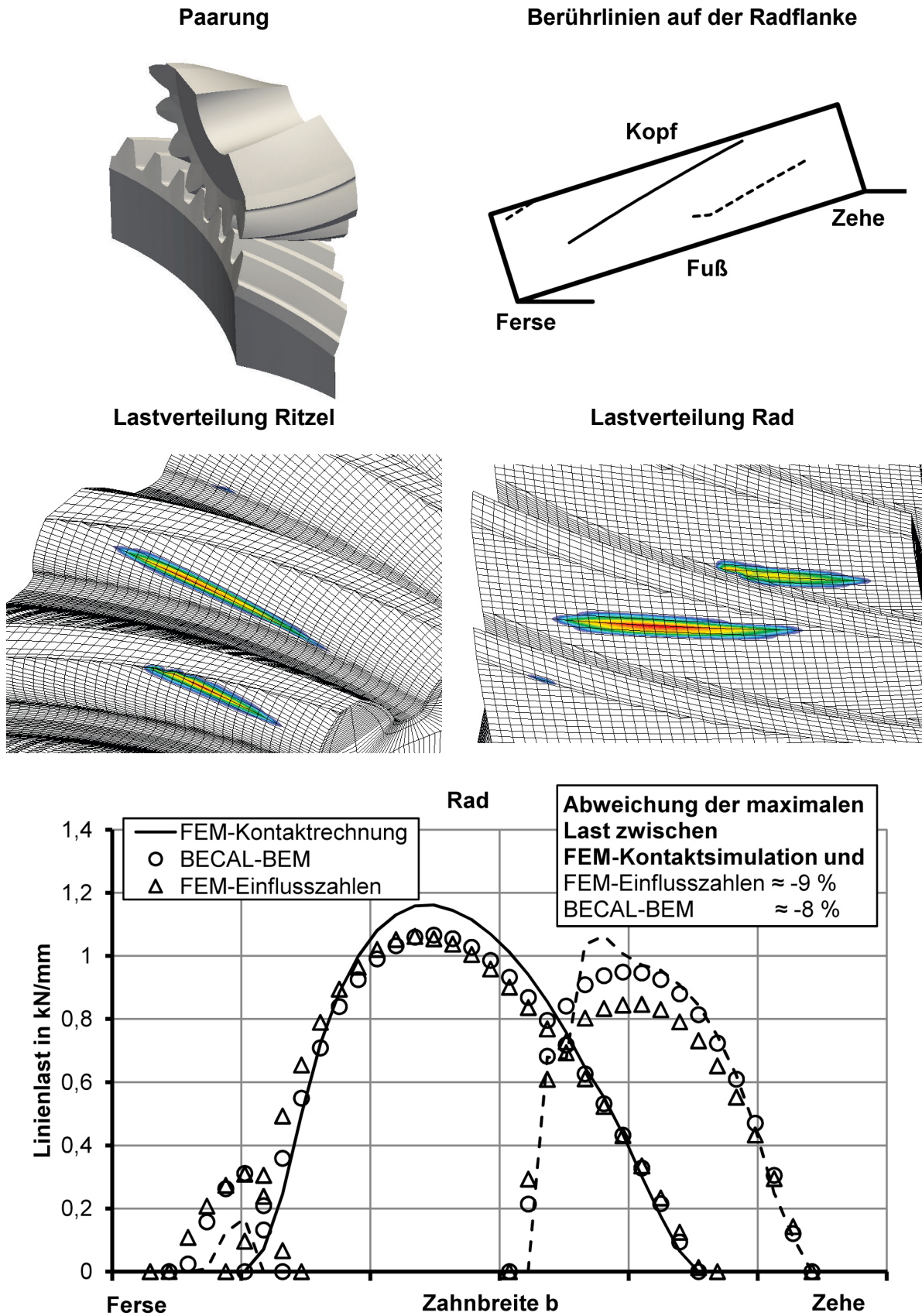


Abbildung 7.8: Lastverteilung in der mittleren Eingriffsstellung der Verzahnung B, berechnet mit verschiedenen Methoden

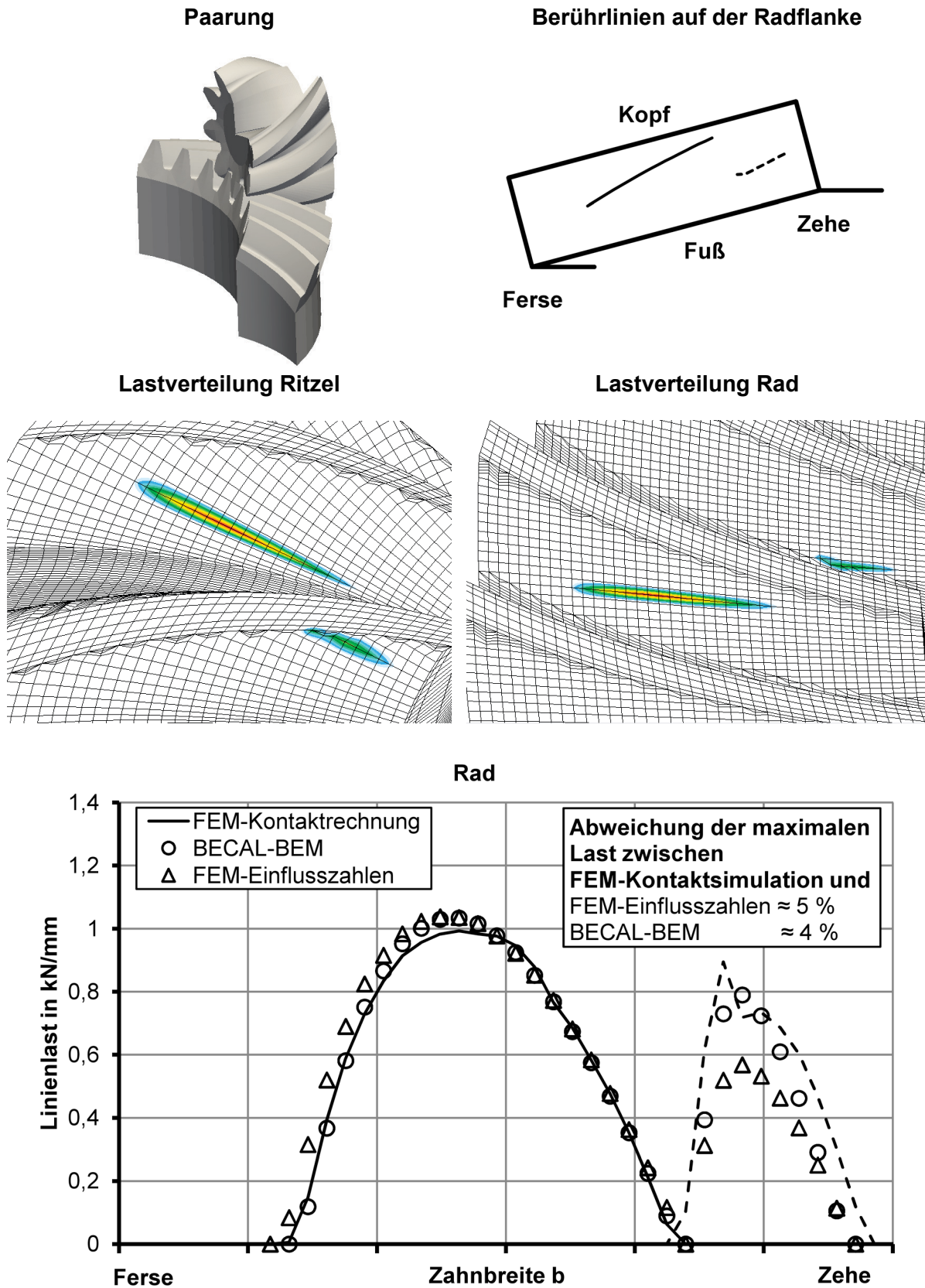


Abbildung 7.9: Lastverteilung in der mittleren Eingriffsstellung der Verzahnung C, berechnet mit verschiedenen Methoden

Die Vorbetrachtungen in Abschnitt 3.7 haben gezeigt, dass die Abweichungen, resultierend aus der Vernachlässigung der Zahnwechselwirkung, nur dann voll wirksam werden, wenn sich drei Zähne im Eingriff befinden und die Zahnköpfe des ersten und des letzten Zahnes gerade noch im Eingriff sind. Verzahnung B wurde dementsprechend zur Ermittlung der maximalen Zahnwechselwirkungsabweichung ausgewählt. Der Vergleich in Abbildung 7.8 zeigt eine Abweichung von  $-9\%$ . Das fällt kleiner aus, entspricht aber tendenziell den Vorbetrachtungen sehr gut. Auch für diese Eingriffssituation kann wieder eine gute qualitative und quantitative Übereinstimmung für die Lastverteilungsberechnung mit BECAL-BEM festgestellt werden.

Um zu prüfen, ob die Zahnwechselwirkungseinflüsse bei zwei Zähnen mit Kopfeingriff kleiner ausfallen als bei drei Zähnen mit Kopfeingriff, wie in Abschnitt 3.7 festgestellt, soll abschließend noch eine Verzahnung mit zwei Zähnen und Kopfeingriffsanteil betrachtet werden. Dieser Sachverhalt wird mit Verzahnung C in Abbildung 7.9 untersucht. Die Abweichung der maximalen Last zwischen FEM-Einflusszahlen und FEM-Kontaktsimulation beträgt trotz großem Voreingriffseinfluss nur  $6\%$ , allerdings in positive Richtung, das heißt, die maximale Last ohne Zahnwechselwirkung ist größer. Dies entspricht nicht der Vorbetrachtung und bestätigt die Annahme aus Abschnitt 7.2, dass die Zahnwechselwirkungsabweichung durch andere Abweichungen kompensiert bzw. sogar überkompensiert werden kann. Dies liegt unter anderem am großen Einfluss des Kopfkanteneingriffs. Auch hier kann wieder im Vergleich mit den FEM-Lösungen eine gute qualitative und quantitative Abbildung der Lastverteilung durch BECAL-BEM festgestellt werden.

Die Vergleiche mit den FEM-Kontaktsimulationen haben gezeigt, dass die Vernachlässigung der Zahnwechselwirkung, wie in den Vorbetrachtungen aus Abschnitt 3.7 festgestellt, besonders dann Auswirkungen hat, wenn Vor- bzw. Kopfeingriff stattfindet. Des Weiteren legt der Vergleich der mit den verschiedenen Methoden berechneten Lastverteilungen eine Begrenzung der maximalen Abweichung, resultierend aus der Vernachlässigung der Zahnwechselwirkung (vgl. Tabelle 7.2) auf  $\pm 10\%$  nahe, um eine Überbewertung zu vermeiden.

Abbildung 7.8 und Abbildung 7.9 weisen im Vergleich zu Abbildung 7.7 auf den wichtigen zusätzlichen Sachverhalt hin, dass im Falle von direktem Kopfkantenkontakt, besonders bei der Auswertung, Bewertung und Gegenüberstellung von verschiedenen Kontaktsimulationen, die Ergebnisse kritisch zu bewerten sind. Gemäß Abbildung 7.7 kann festgestellt werden, dass die Lastaufteilung auf die Zähne qualitativ zwischen allen Berechnungsmethoden gut übereinstimmen, aber bei den Fällen in Abbildung 7.8 und Abbildung 7.9 ist dem nicht mehr so. Dies liegt zu einem großen Teil an der unmittelbaren Beteiligung der Kopfkante. Bei allen Berechnungsmethoden existieren numerische Unschärfen im Bereich des Kopfeingriffes. Dazu gehören z.B. Approximationsabweichungen bei der Annäherung der Flankengeometrie oder die Singularitäten bei der Lösung des elastischen Kontaktproblems. Je größer der Anteil des Kopfeingriffes bzw. Voreingriffes an der Berührlinie wird, umso komplizierter wird die absolute Bewertung der Lastverteilung. Dies gilt für alle Berechnungsansätze, die ideal elastisch rechnen. Abbildung 7.7 und Abbildung 7.9 zeigen deutlich erkennbar, dass sich die Ergebnisse für die ungestört auslaufende Traglinie im Rahmen der abgeschätzten

wahrscheinlichen Gesamtabweichung befinden. Im Bereich des Kopf- bzw. des Voreingriffs sind die Unterschiede allerdings größer. Generell ist die reale Geometrie im unmittelbaren Kopfbereich z.B. bedingt durch Fasen (vgl. Abschnitt 5.3.2) sowie eventuell auftretenden erhöhten Einlaufverschleiß und plastischer Verformung, bisher noch nicht ausreichend genau untersucht. Aufgrund der aufgeführten komplexen Problemstellung bei der Bewertung dieser Eingriffsbereiche lässt sich nicht eindeutig feststellen, welches Verfahren die Realität besser wiedergibt. Wenn man allerdings davon ausgeht, dass ein erhöhter Einlaufverschleiß und gegebenenfalls plastische Verformung auftreten, dann könnte sich eine Lastverteilung ähnlich jener der BECAL-BEM-Version einstellen, die in diesem Bereich einen stetigen Verlauf zeigt.

Unter Zugrundelegung der geschätzten Gesamtabweichung gemäß Tabelle 7.2, der Untersuchungsergebnisse der Sensibilitätsstudie und der FEM-Kontaktrechnungen (vgl. Abbildung 7.5 bis Abbildung 7.9) wird ein Vertrauensbereich für die Berechnung der Last-, Flankenpressungs- und Zahnfußspannungsverteilung mit der BECAL-BEM-Version definiert. Tabelle 7.3 gibt diesen nach relativer und absoluter Aussagekraft getrennt an. Die Vernachlässigung der Zahnwechselwirkung wird dabei mit  $\pm 10\%$  erfasst. Der Vertrauensbereich der Zahnfußspannungsberechnung wurde auf Basis der Kombination der Abweichung der maximalen Last und Zahnfußspannung definiert.

Tabelle 7.3: Auf Basis der Abweichungs-Vorbetrachtungen und der Sensibilitätsstudie ermittelter Vertrauensbereich

Größe	Vertrauensbereich in %	
	Relative Aussage	Absolute Aussage
Max. Last	$\pm 6$	$\pm 18$
Max. Pressung	$\pm 3$	$\pm 9$
Max. Zahnfußspannung	$\pm 8$	$\pm 25$

Bei der Verzahnungsauslegung ist es erforderlich, bei bereits festgelegter Zähnezahl und Größenordnung des Schrägungswinkels Parameterstudien durchzuführen, um die optimale Auslegung zu finden. Im Rahmen dieser Parameterstudien können neben den Flankenmodifikationen (Tragbildentwicklung), in der Regel auch Eingriffswinkel, Profilverschiebung, Zahnhöhe und ggf. die Zahnfußkurve variiert werden. Um auf Basis der Variationen in einer Parameterstudie eindeutige Tendenzen hinsichtlich der max. Last, Flankenpressung und Zahnfußspannung erkennen zu können, müssen zwischen den einzelnen Auslegungsvarianten Mindestunterschiede existieren. Diese können der Spalte "relative Aussage" der Tabelle 7.3 entnommen werden. Dementsprechend bedeutet dies z.B. für die Zahnfußspannungsoptimierung, dass der Unterschied zwischen zwei Auslegungsvarianten mindestens  $\pm 8\%$  be-



tragen muss, um mit ausreichender Sicherheit von einer eindeutigen Tendenz sprechen zu können.

Wenn das übertragbare Drehmoment für eine Verzahnung bestimmt werden soll, wird für die Festlegung der erforderlichen Mindestsicherheiten die Vertrauensbereichsangabe der Spalte "absolute Aussage" der Tabelle 7.3 benötigt. Im Zusammenhang mit dem lokalen Tragfähigkeitsnachweis, z.B. für Grübchen und Zahnfußbruch nach Wirth [Wi08], können auf Basis von Tabelle 7.3 Mindestsicherheiten definiert werden. Wenn man beachtet, dass diese ausschließlich die Unsicherheiten der Berechnungsmethode für die Flankenpressung und Zahnfußspannung enthalten, kann für die Grübchentrugfähigkeit eine Mindestsicherheit von 1,1 und für die Zahnfußtragfähigkeit von 1,25 festgelegt werden.

## 7.3 Validierung

### 7.3.1 Vorgehensweise bei der Validierung

Die Messungen von Pressungsverteilungen im Zahnkontakt ist prinzipiell möglich, z.B. über Feinpapier [LK00]. Allerdings hängen die Qualität solcher Messungen und die Realisierbarkeit stark von der Zahnwindung und Flankenlinienkrümmung ab. Bei Kegelrädern sind diese so groß, dass eine zuverlässige Messung der Pressungsverteilung nicht mehr bzw. nur mit einem relativ großen Fehler möglich ist. Deshalb soll eine qualitative Bewertung der mittels BECAL-BEM simulierten Last- bzw. Pressungsverteilung über einen Vergleich mit experimentell bestimmten Tragbildern erfolgen.

Zahnfußdehnungen bzw. -spannungen können unter Verwendung von Dehnungsmessstreifen (DMS) ermittelt werden. Dies wurde für Kegelräder z.B. in den Arbeiten [HB99], [Ho11] durchgeführt. Aufgrund dessen, dass nur punktuell gemessen wird, ergibt sich ein großer Interpretationsspielraum bei der quantitativen Gegenüberstellung von Simulation und Experiment. Für eine zuverlässige Bestimmung der maximalen Zahnfußspannung über der Zahnfußausrundung werden deshalb bevorzugt DMS-Ketten eingesetzt [Pa86], [Vo92], [LHB95]. Die Aussagekraft eines Vergleiches von gemessenen sowie simulierten Zahnfußspannungen ist besonders groß, wenn die Zahnfußspannungsmessungen für einzelne Zähne (Traglinien) über der Zahnbreite sowie für unterschiedliche Tragbildlagen durchgeführt wurden. Im Zusammenhang mit bekannten Relativlagen und Lasttragbildern können so zusätzlich Einschätzungen zur Genauigkeit der Lastverteilungssimulation abgeleitet werden. Deshalb sollen entsprechende Zahnfußspannungsmessungen für den Vergleich mit BECAL-BEM herangezogen werden.

### 7.3.2 Ausgewählte Messungen von Paul

Die unter Abschnitt 7.3.1 spezifizierten Anforderungen hinsichtlich der Zahnfußspannungsmessungen werden durch die Versuche von Paul [Pa86] erfüllt. Die Validierungsvergleiche

werden für Messverzahnung C (im Weiteren als CP bezeichnet, vgl. Tabelle A.2 im Anhang) durchgeführt, da diese im Gegensatz zu den anderen von Paul untersuchten Verzahnungen, eine praxisübliche Breitenballigkeit aufweist.

Unter anderem wurden durch Paul die Lasttragbilder sowie die Zahnfußspannungen unter Variation des Ritzeleinbaumaßes experimentell ermittelt. Die von ihm für die Ritzeleinbaumaßabweichungen  $\Delta P = 0,8 \text{ mm}$ ,  $0,0 \text{ mm}$  sowie  $-0,8 \text{ mm}$  dokumentierten Lasttragbilder und Zahnfußspannungsverläufe werden der folgenden Validierung zugrunde gelegt. Die Zahnfußspannungsvergleiche werden für die Eingriffsstellung durchgeführt, in der die maximale Zahnfußspannung gemessen wurde.

Abbildung 7.10 zeigt die Gegenüberstellung der Tellerradtragbilder aus dem Versuch von Paul mit denen aus der BECAL-BEM-Zahnkontaktsimulation. Tragbildform, -lage und -größe zwischen Versuch und Simulation zeigen eine gute Übereinstimmung.

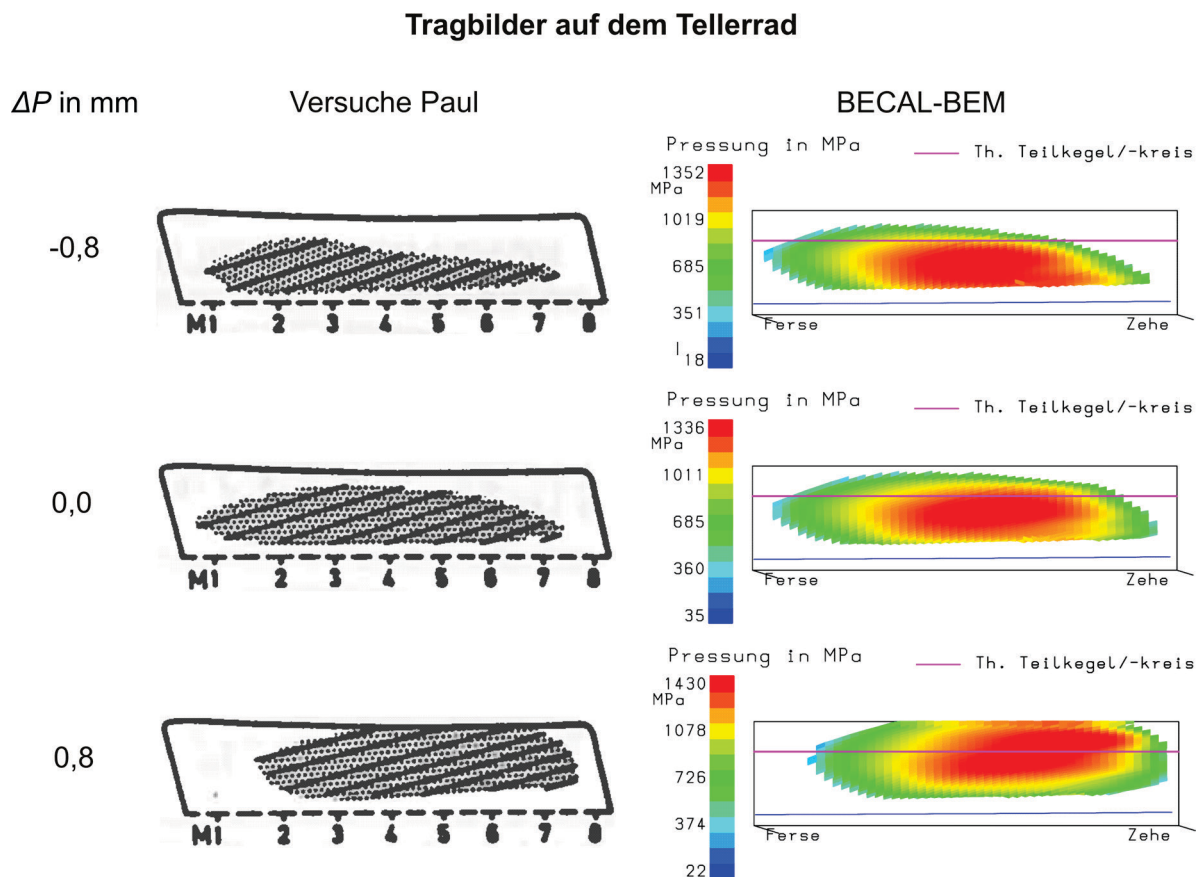


Abbildung 7.10: Experimentell ermittelte Tragbilder der Verzahnung CP ( $T_1 = 8 \text{ kNm}$ ) im Vergleich mit simulierten BECAL-BEM-Tragbildern für verschiedene Ritzeleinbaumaßabweichungen

Abbildung 7.11 bis Abbildung 7.16 zeigen die Gegenüberstellung der gemessenen Zahnfußspannungen mit den nach verschiedenen Berechnungsmethoden ermittelten Zahnfußspannungen. Die Gegenüberstellung erfolgt für Ritzel und Tellerrad bei drei verschiedenen Ritzeleinbaumaßabweichungen  $\Delta P$ . Dargestellt wird jeweils der Zahnfußspannungsbreitenverlauf über einem Zahn für die Traglinie mit der maximal gemessenen Zahnfußspannung.

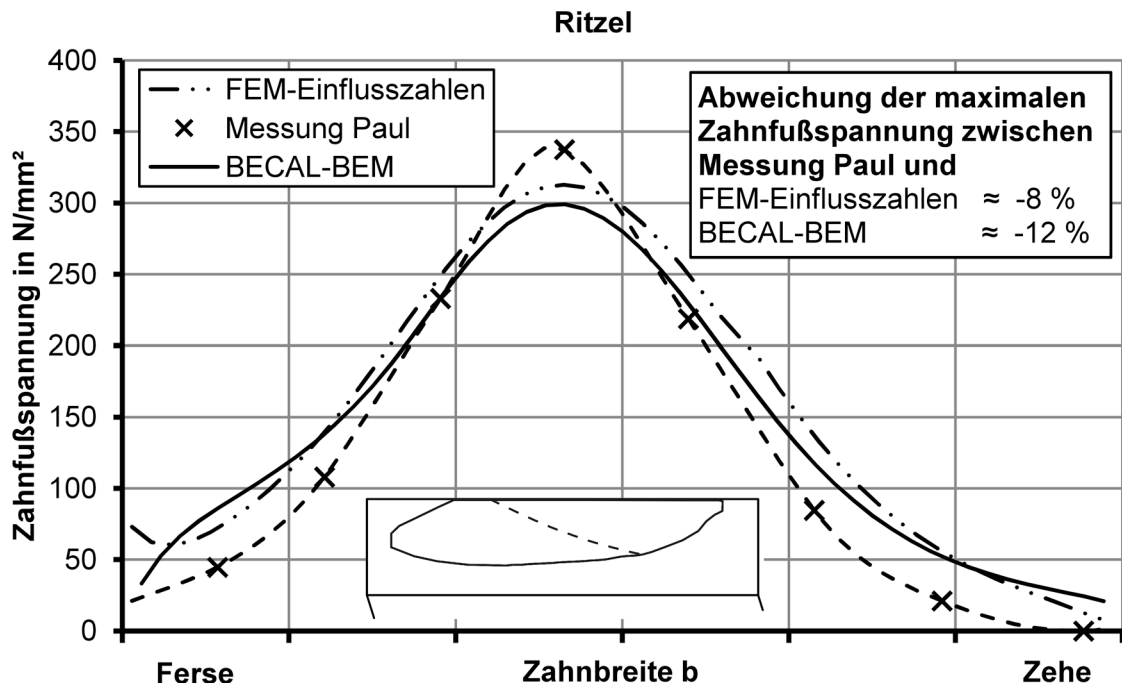


Abbildung 7.11: Breitenverlauf der Zahnfußspannung für den Ritzelzahn mit der maximalen Zahnfußspannung der Verzahnung CP bei  $T_1 = 6 \text{ kNm}$  sowie  $\Delta P = -0,8 \text{ mm}$ , gemessen von Paul [Pa86] und berechnet mit verschiedenen Methoden

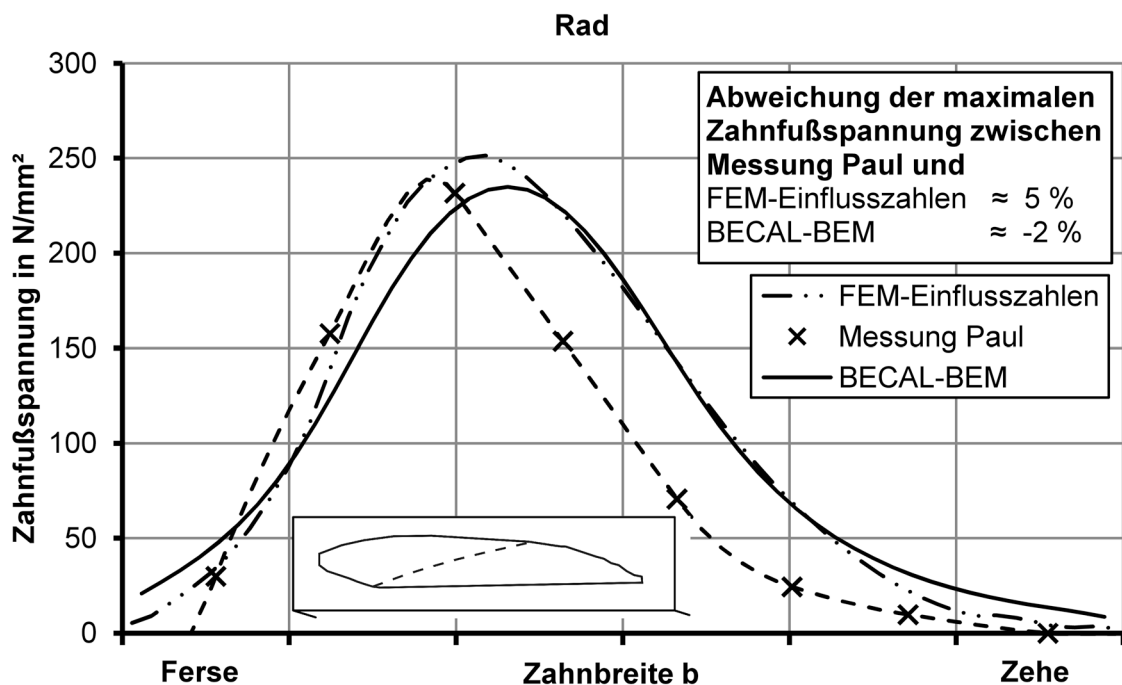


Abbildung 7.12: Breitenverlauf der Zahnfußspannung für den Radzahn mit der maximalen Zahnfußspannung der Verzahnung CP bei  $T_1 = 6 \text{ kNm}$  sowie  $\Delta P = -0,8 \text{ mm}$ , gemessen von Paul [Pa86] und berechnet mit verschiedenen Methoden

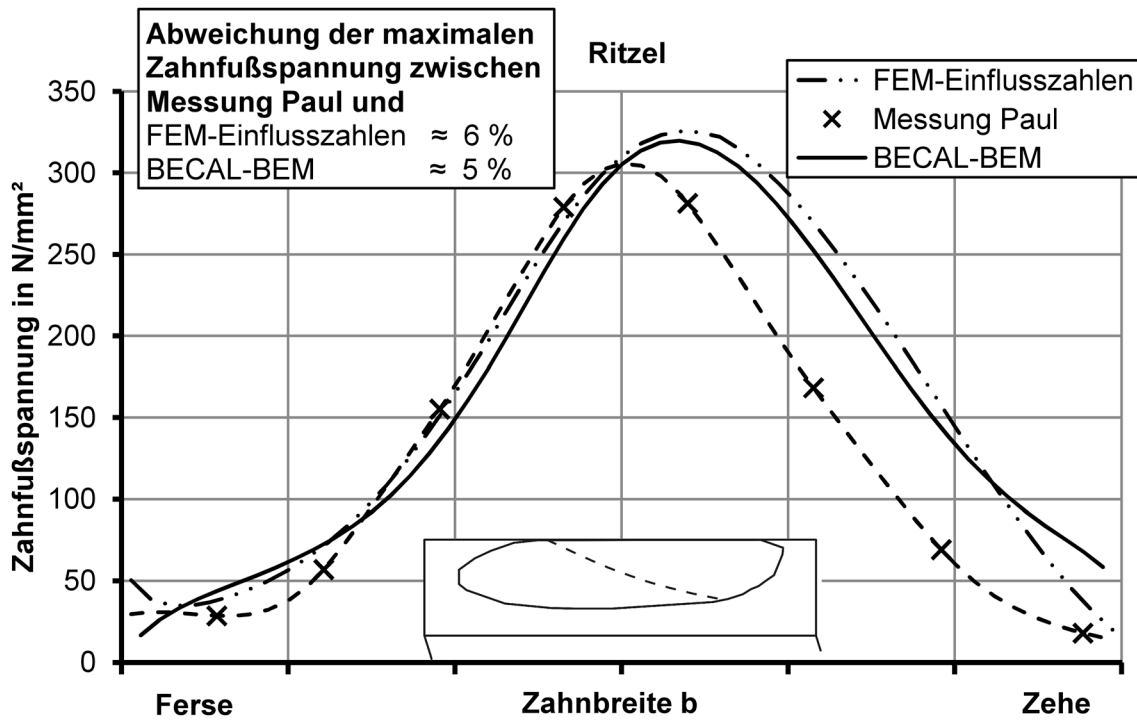


Abbildung 7.13: Breitenverlauf der Zahnfußspannung für den Ritzelzahn mit der maximalen Zahnfußspannung der Verzahnung CP bei  $T_1 = 6 \text{ kNm}$  sowie  $\Delta P = 0,0 \text{ mm}$ , gemessen von Paul [Pa86] und berechnet mit verschiedenen Methoden

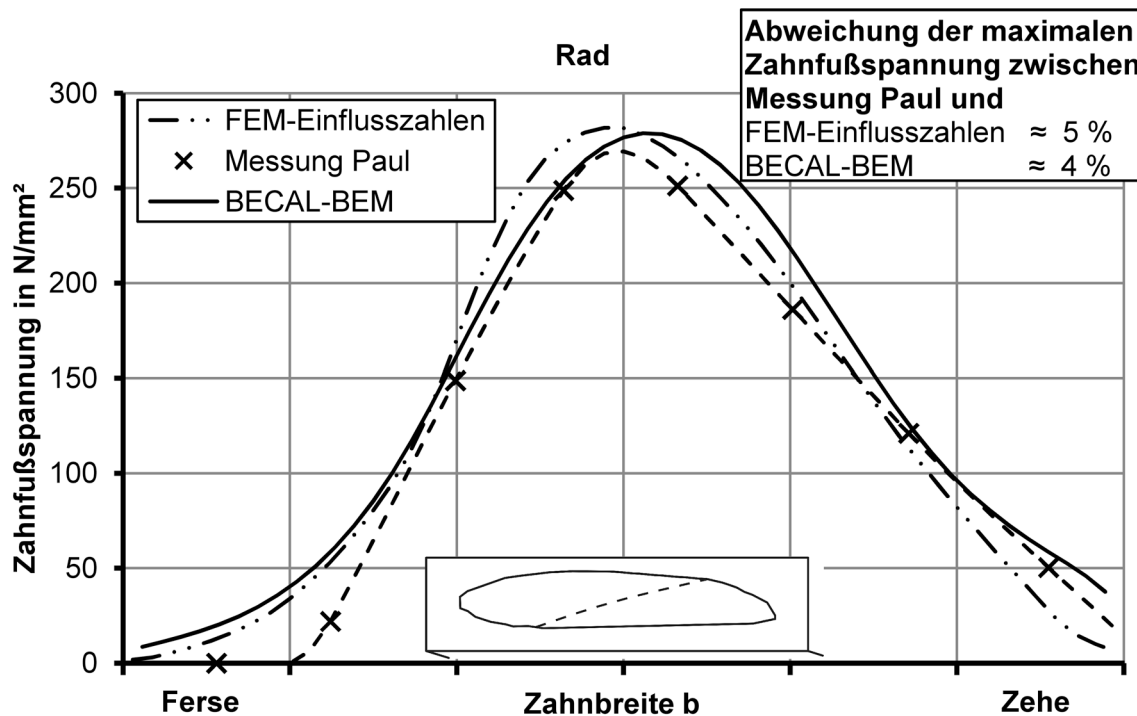


Abbildung 7.14: Breitenverlauf der Zahnfußspannung für den Radzahn mit der maximalen Zahnfußspannung der Verzahnung CP bei  $T_1 = 6 \text{ kNm}$  sowie  $\Delta P = 0,0 \text{ mm}$ , gemessen von Paul [Pa86] und berechnet mit verschiedenen Methoden

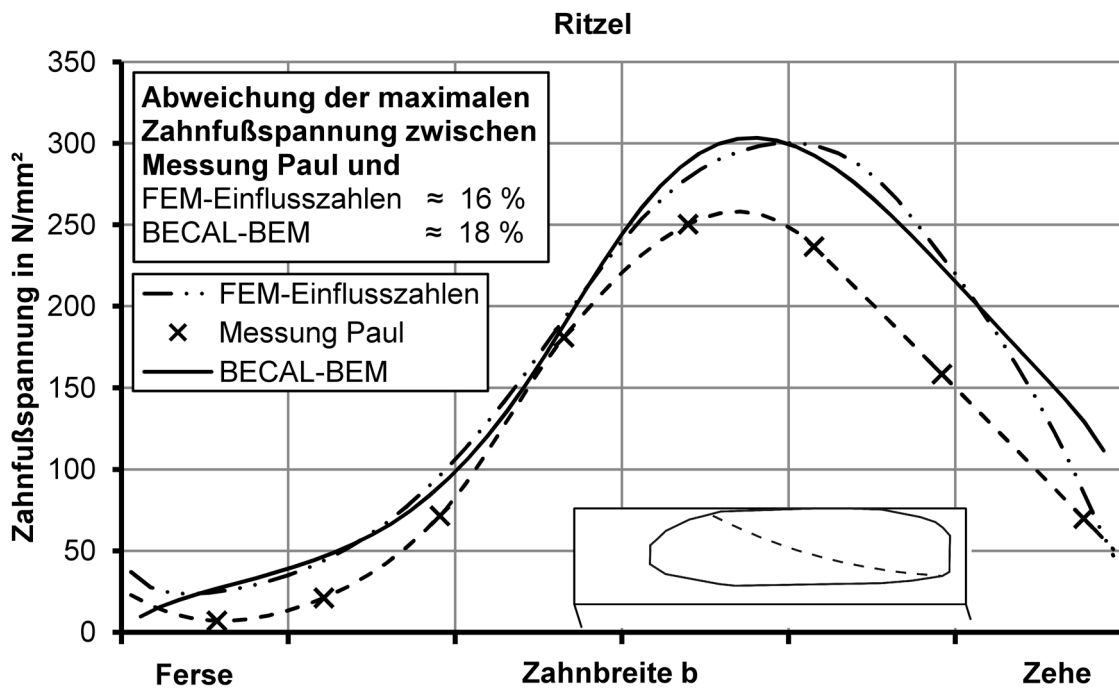


Abbildung 7.15: Breitenverlauf der Zahnfußspannung für den Ritzelzahn mit der maximalen Zahnfußspannung der Verzahnung CP bei  $T_1 = 6 \text{ kNm}$  sowie  $\Delta P = 0,8 \text{ mm}$ , gemessen von Paul [Pa86] und berechnet mit verschiedenen Methoden

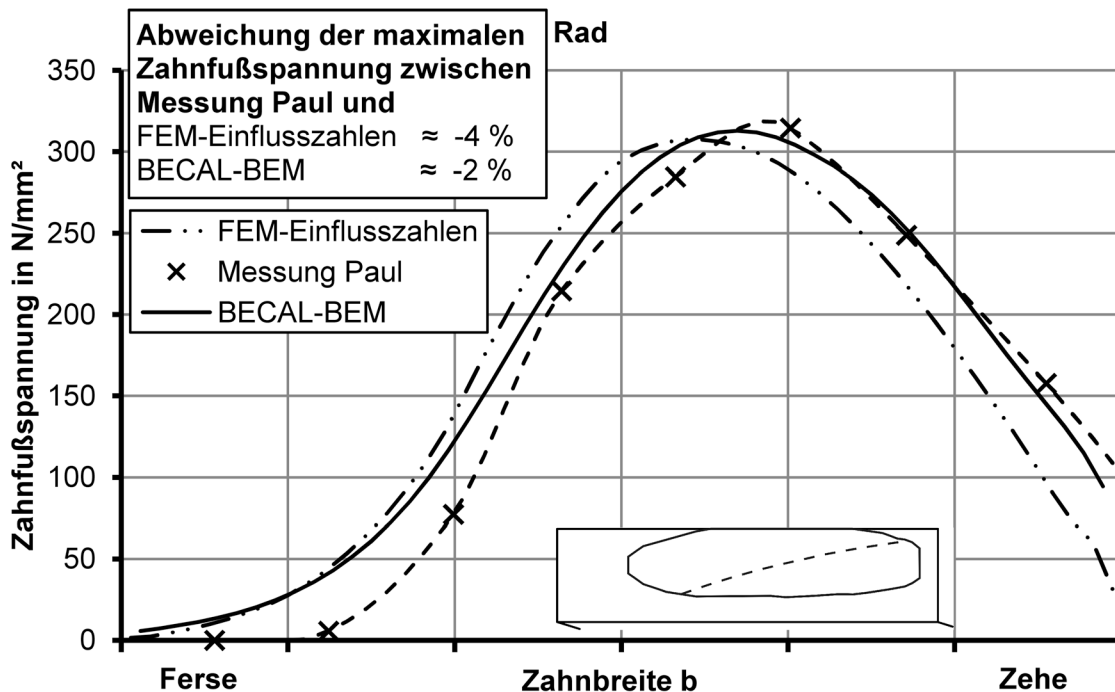


Abbildung 7.16: Breitenverlauf der Zahnfußspannung für den Radzahn mit der maximalen Zahnfußspannung der Verzahnung CP bei  $T_1 = 6 \text{ kNm}$  sowie  $\Delta P = 0,8 \text{ mm}$ , gemessen von Paul [Pa86] und berechnet mit verschiedenen Methoden

Der Vergleich der FEM-Einflusszahlen-Berechnungen mit den Messungen dient als Nachweis für die Anwendbarkeit der FEM-Berechnungen als Referenzlösung für die BECAL-Verifikation. Die größte Abweichung hinsichtlich des Zahnfußspannungsmaximums tritt mit 16 % am Ritzel für  $\Delta P = 0,8$  mm auf (siehe Abbildung 7.15). Diese Abweichung liegt aber noch unterhalb des von Paul spezifizierten maximalen Messfehlers von 17 %. Die mittleren Abweichungen aller Messungsvergleiche liegen mit ca. 7 % deutlich unter dem wahrscheinlichen Messfehler von 13 %. Damit bestätigt der Messvergleich die gute Wiedergabe der maximalen Zahnfußspannung auf Basis der FEM-Einflusszahlen. Weiterhin kann festgestellt werden, dass die Qualität des Zahnfußspannungsbreitenverlaufes ebenfalls gut erfasst wird. Die gute Übereinstimmung zwischen simulierten und experimentell ermittelten Tragbildern (vgl. Abbildung 7.10) sowie Fußspannungen lässt die Schlussfolgerung zu, dass es sich mit der Qualität und Quantität der Lastverteilung analog verhält.

Die BECAL-BEM-Zahnfußspannungen besitzen eine ähnlich gute Übereinstimmung hinsichtlich des Maximalwertes der Zahnfußspannung und des qualitativen Verlaufs selbiger, wie die FEM-Einflusszahlen-Berechnungen. Die maximale Abweichung tritt mit ca. 18 % ebenfalls für den Vergleich in Abbildung 7.15 auf und entspricht damit in etwa dem maximalen Messfehler. Die mittlere Abweichung aller Messungsvergleiche beträgt wie schon für die FEM-Einflusszahlen ca. 7 %. Damit wird gezeigt, dass die realen Verhältnisse von den Berechnungsmethoden der BECAL-BEM-Version gut beschrieben werden.

Der Vergleich der Zahnfußspannungsberechnungen der BECAL-BEM-Version mit denen der FEM-Einflusszahlen verdeutlicht die gute Abbildungsqualität der BECAL-BEM-Berechnungsmethoden zusätzlich. Die mittlere Abweichung zwischen BECAL-BEM und FEM-Einflusszahlen beträgt hier ca. 3 %.

Die Tragbild- und Zahnfußspannungsvergleiche sind ein deutlicher Beleg für die realitätsnahe Abbildung der Last-, Pressungs- sowie Zahnfußspannungsverteilung durch die verbesserten Berechnungsmethoden der BECAL-BEM-Version.

### 7.3.3 Tragbildvergleich an Praxisverzahnungen

Für zwei Praxisverzahnungen soll eine qualitative Bewertung der mittels BECAL-BEM simulierten Pressungsverteilung über einen Vergleich mit experimentell bestimmten Tragbildern erfolgen. Die Tragbilder wurden auf einem Prüfstand der SCHOTTEL GmbH für verschiedene Drehmomente ermittelt. Es sollen die Tragbildform, -lage und -größe verglichen werden. Wenn die qualitative Übereinstimmung gut ist, dann ist es naheliegend, davon auszugehen, dass die maximale Last und Pressung innerhalb der rechnerisch definierten Vertrauensbereiche gemäß Tabelle 7.3 liegen. Die der Zahnkontaktsimulation zugrunde liegende Relativlage zwischen Ritzel und Tellerrad wurde rechnerisch ermittelt (Umfeldberechnung). Die Umfeldberechnungsmethode baut auf der FEM auf und wurde durch eine Messung bestätigt.

Die Vergleiche werden an zwei Verzahnungen durchgeführt, an einer konventionell hergestellten, klassisch ausgelegten Verzahnung (im Weiteren mit Verzahnung D bezeichnet) und einer Verzahnung, die aufgrund ihrer speziellen Profilform und Flankenmodifikationen auf einer Freiformfräsmaschine hergestellt werden muss (im weiteren als Verzahnung E bezeichnet). Verzahnung E besitzt ein asymmetrisches Zahnprofil, logarithmische und elliptische Flankenmodifikationen sowie ein elliptisches Zahnfußprofil. Sie wurde gemäß der Optimierungsstrategien in [SSH11], [Po16] sowie [Sc15] ausgelegt. Die Verzahnungsdaten der Verzahnung D und E können Tabelle A.3 im Anhang entnommen werden. Verzahnung D steht exemplarisch für den Bereich, für welchen die Berechnungsansätze in BECAL-4x entwickelt wurden und die Verzahnung E steht exemplarisch für den erweiterten Verzahnungsbereich, für den die verbesserten Berechnungsansätze der BECAL-BEM-Version entwickelt wurden. Neben dem experimentellen Vergleich der Tragbilder werden auch Zahnfußspannungsberechnungen auf Basis von FEM-Einflusszahlen in den Vergleich mit einbezogen.

Abbildung 7.17 und Abbildung 7.20 zeigen die Gegenüberstellung der experimentell ermittelten Tragbilder und der mittels BECAL-BEM berechneten. Für alle Laststufen beider Verzahnungsvarianten können sehr gute Übereinstimmungen der Tragbildlage, -form und -größe zwischen Versuch und Simulation festgestellt werden. Damit konnte die sehr gute Qualität der Last- und Flankenpressungsverteilungsberechnung mit der BECAL-BEM-Version auch anschaulich experimentell bestätigt werden.

Abbildung 7.18, Abbildung 7.19, Abbildung 7.21 und Abbildung 7.22 zeigen den Vergleich der Zahnfußspannungsberechnung mit FEM-Einflusszahlen, BECAL-4x sowie BECAL-BEM. Die Gegenüberstellung erfolgt bei  $T_{\text{nen}}$  für Ritzel sowie Tellerrad. Verglichen werden die Hüllkurven der maximalen Zahnfußspannung über dem gesamten Eingriffsfeld und der Zahnbreite.

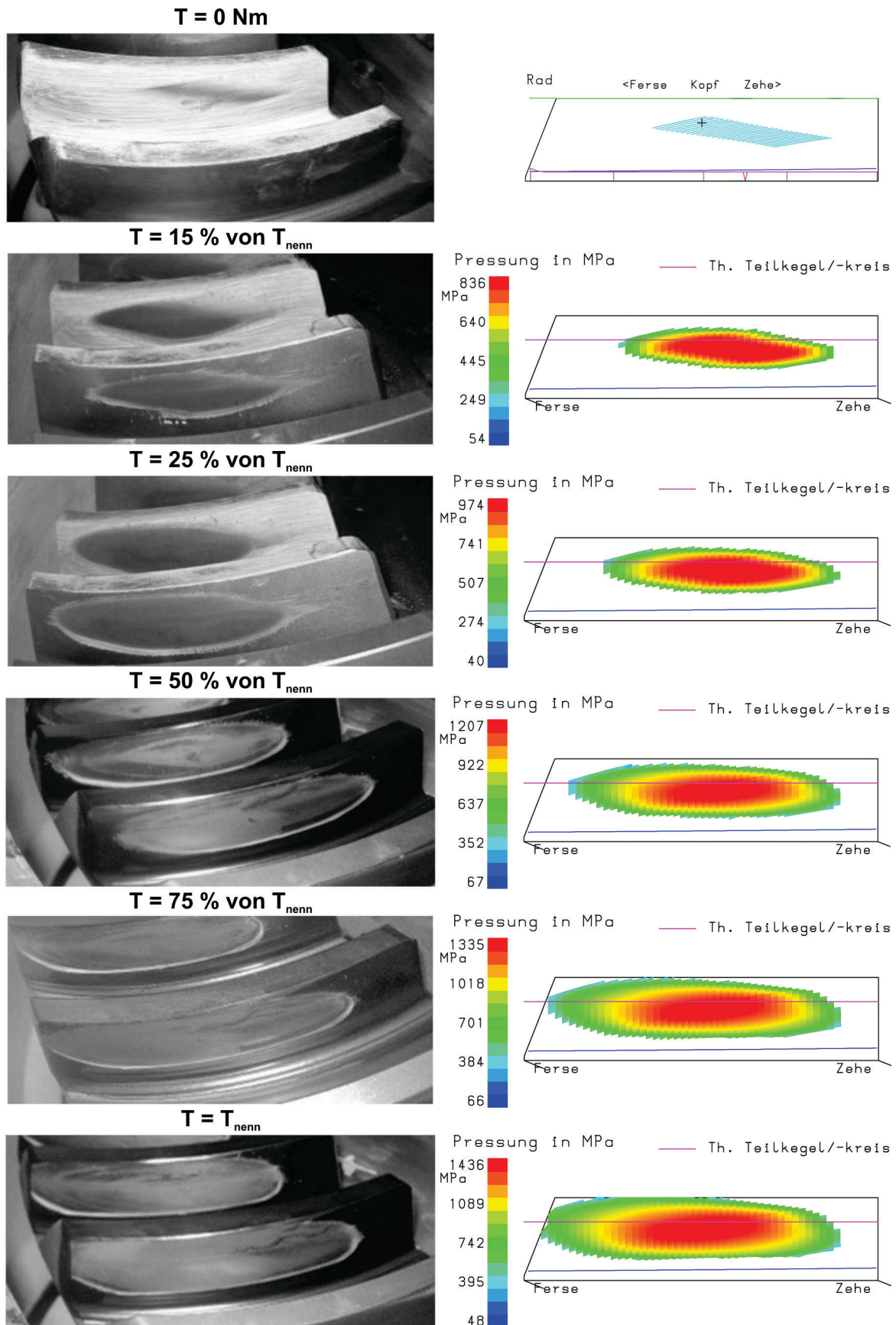


Abbildung 7.17: Experimentell ermittelte Tragbilder am Tellerrad der Verzahnung D im Vergleich mit simulierten BECAL-BEM-Tragbildern für verschiedene Laststufen



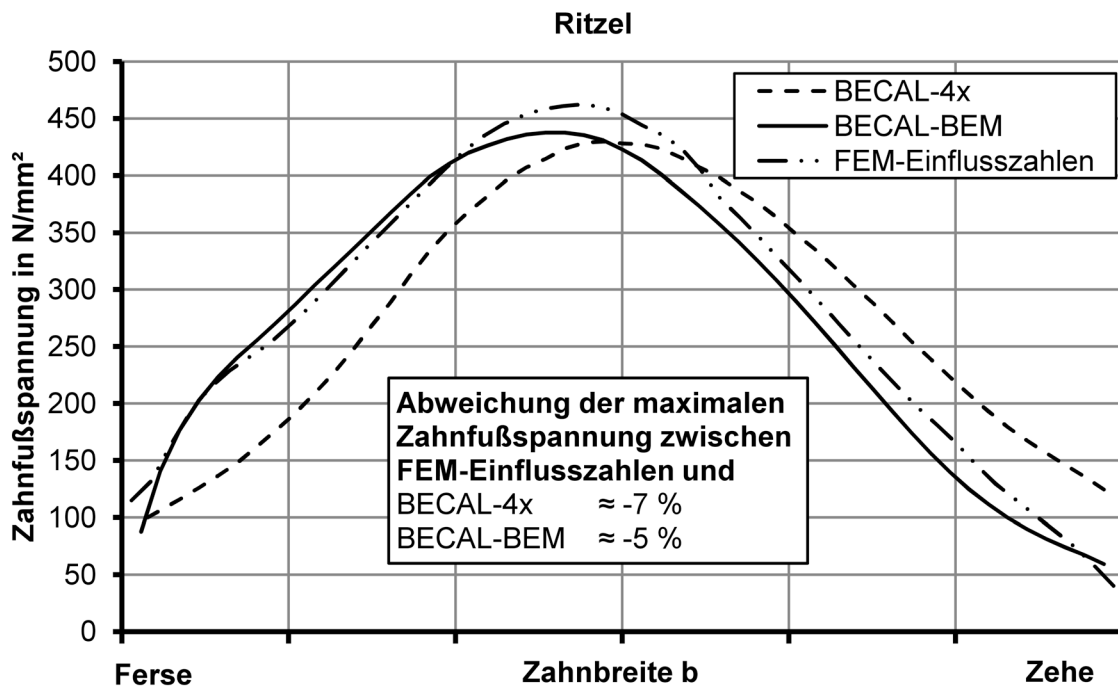


Abbildung 7.18: Hüllkurve der maximalen Zahnfußspannung aller Eingriffsstellungen über der Zahnbreite des Ritzels der Verzahnung D bei  $T_{\text{enn}}$ , berechnet mit verschiedenen Methoden

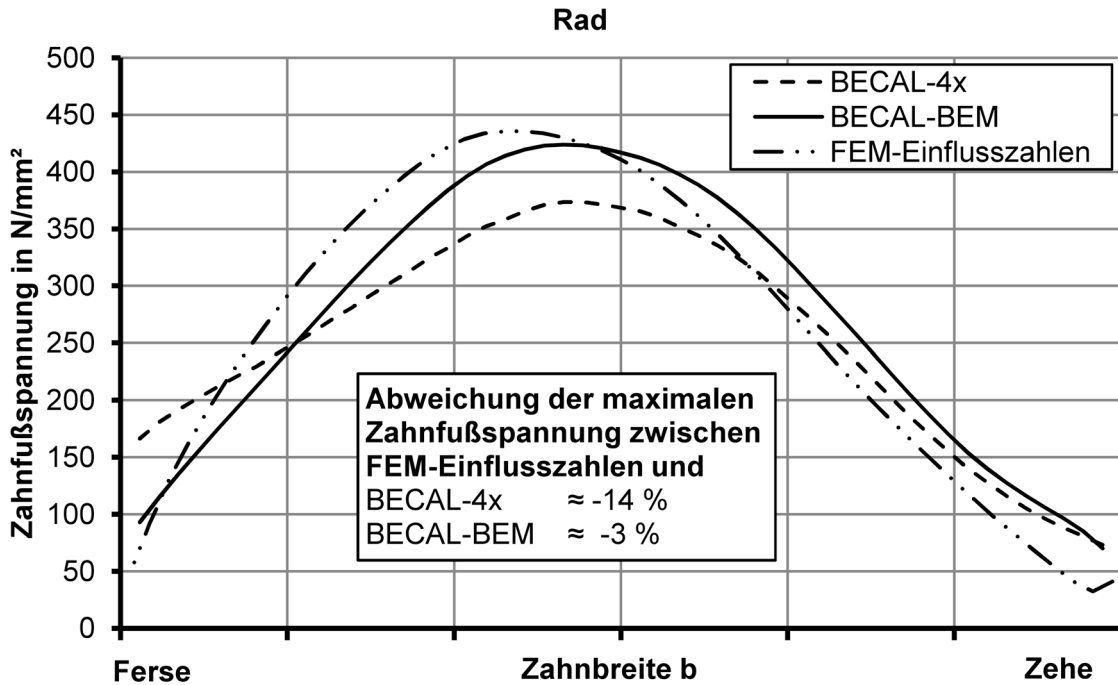


Abbildung 7.19: Hüllkurve der maximalen Zahnfußspannung aller Eingriffsstellungen über der Zahnbreite des Tellerrades der Verzahnung D bei  $T_{\text{enn}}$ , berechnet mit verschiedenen Methoden

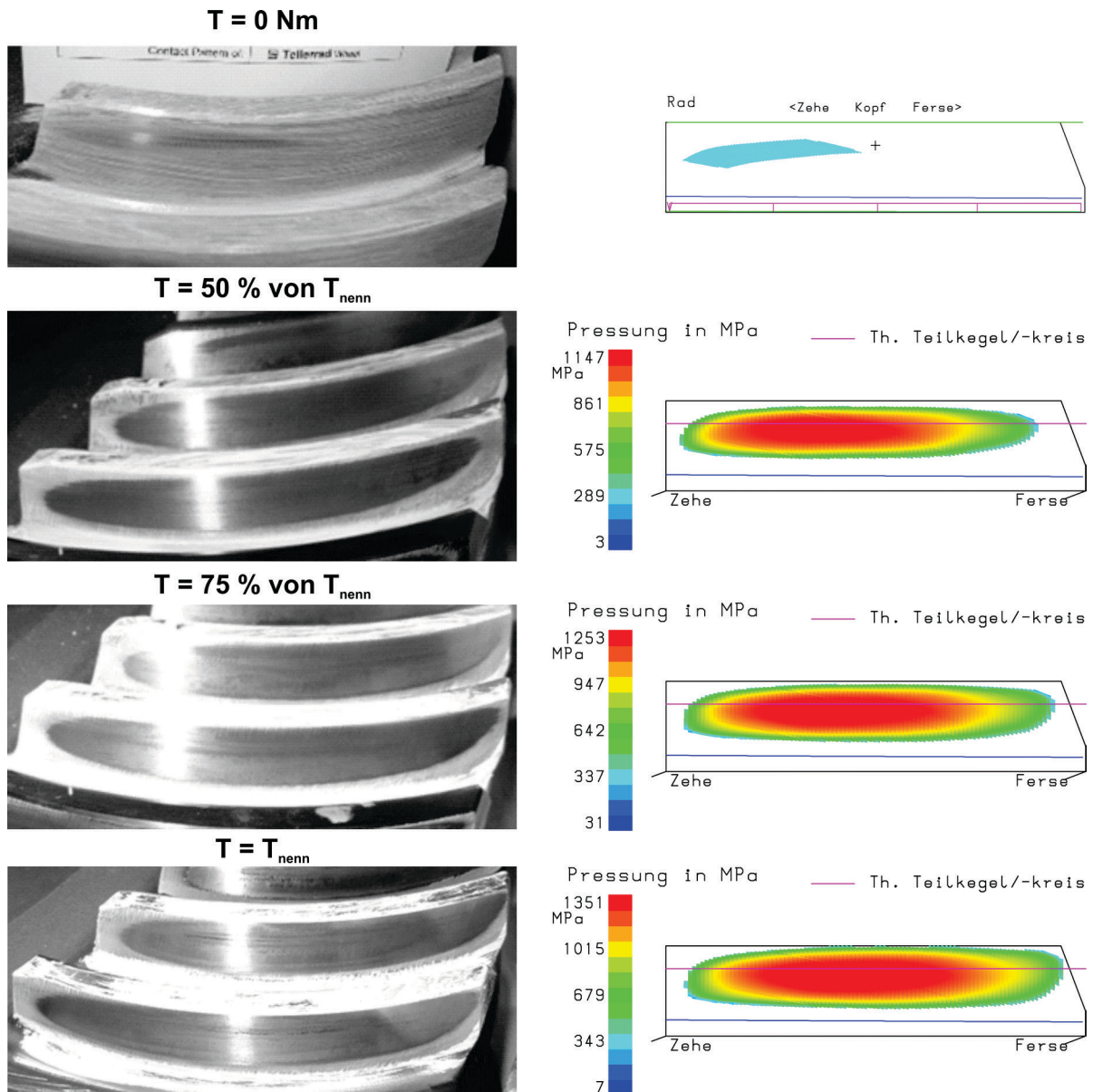


Abbildung 7.20: Experimentell ermittelte Tragbilder am Tellerrad der Verzahnung E im Vergleich mit simulierten BECAL-BEM-Tragbildern für verschiedene Laststufen

Abbildung 7.18 und Abbildung 7.19 zeigen die Zahnfußspannungsvergleiche für Verzahnung D. Die Ergebnisse der BECAL-BEM-Version zeigen eine sehr gute qualitative und quantitative Übereinstimmung mit der FEM-Einflusszahlenlösung. Während die BECAL-4x-Version ebenfalls eine gute quantitative Übereinstimmung zeigt, wird der qualitative Zahnbreitenverlauf deutlich schlechter als durch die BECAL-BEM-Version abgebildet.

Abbildung 7.21 und Abbildung 7.22 zeigen die Zahnfußspannungsvergleiche für Verzahnung E. Die Ergebnisse der BECAL-BEM-Version zeigen wieder eine sehr gute qualitative und quantitative Übereinstimmung mit der FEM-Einflusszahlenlösung. Wie zu erwarten war, fällt die quantitative und die qualitative Abbildung der Zahnfußspannung durch BECAL-4x deutlich schlechter aus als mit der BECAL-BEM-Version.

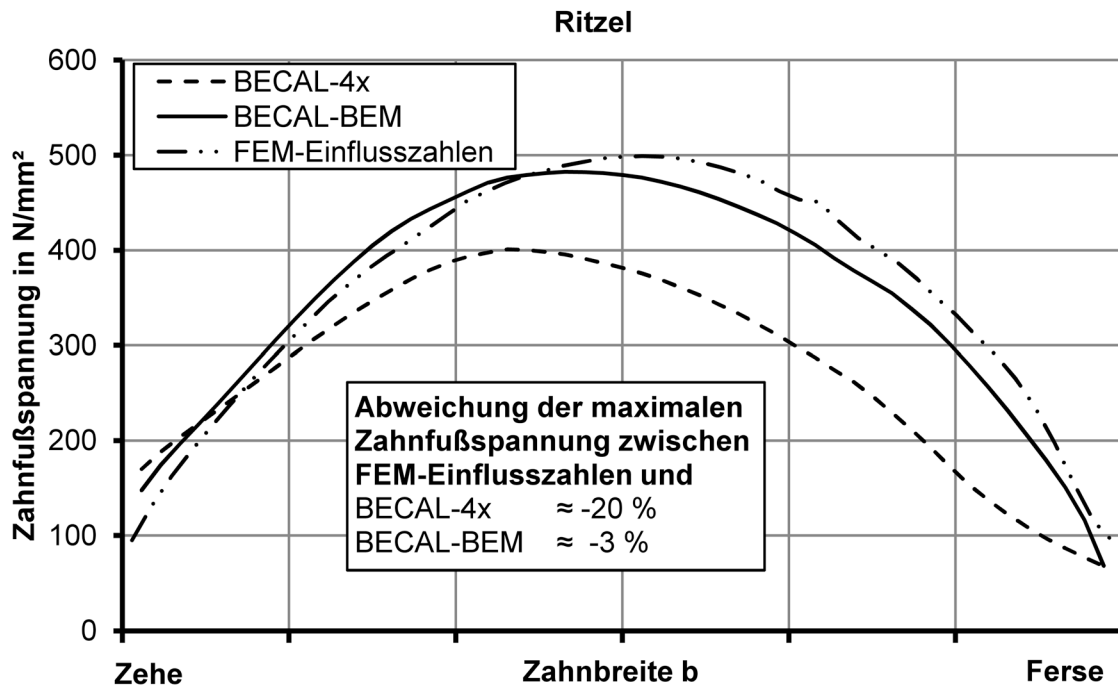


Abbildung 7.21: Hüllkurve der maximalen Zahnfußspannung aller Eingriffsstellungen über der Zahnbreite des Ritzels der Verzahnung B bei  $T_{\text{nenn}}$ , berechnet mit verschiedenen Methoden

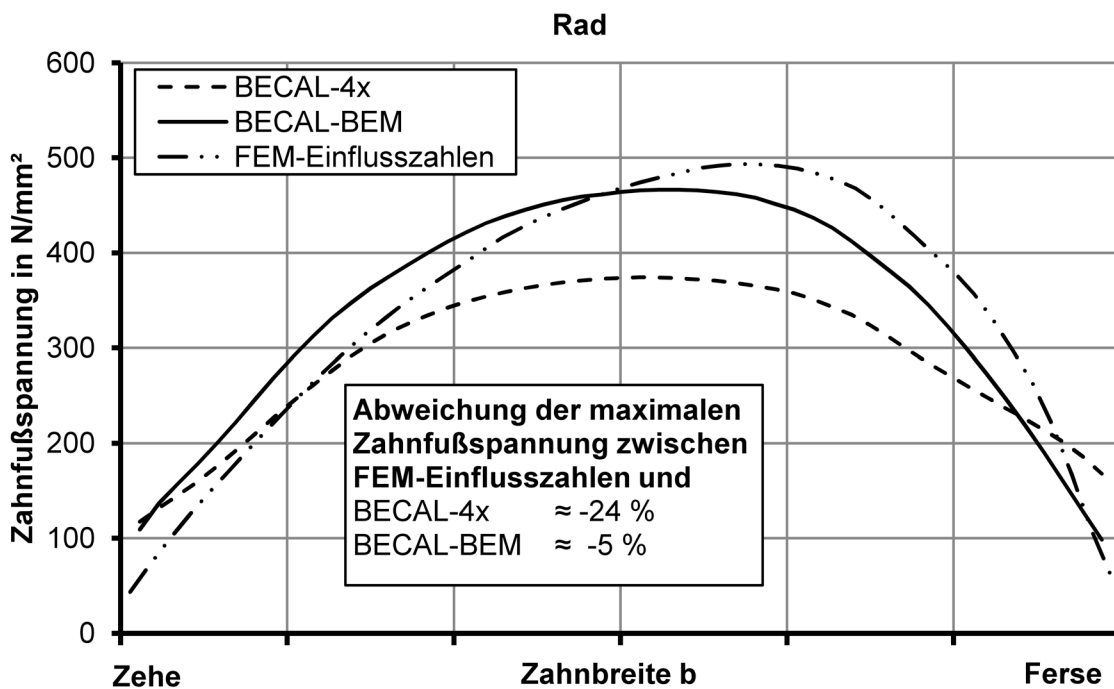


Abbildung 7.22: Hüllkurve der maximalen Zahnfußspannung aller Eingriffsstellungen über der Zahnbreite des Tellerrades der Verzahnung E bei  $T_{\text{nenn}}$ , berechnet mit verschiedenen Methoden

## 7.4 Konvergenzverhalten bei der Zahnkontaktsimulation mit BECAL-BEM

Eine wichtige und besonders vorteilhafte Eigenschaft der in Kapitel 4 bis 6 vorgestellten und entwickelten Näherungsmethoden für die Zahnkontaktsimulation ist das gute Konvergenzverhalten. Die Ergebnisgenauigkeit hängt in einem deutlich geringerem Maße von der gewählten Simulationsauflösung ab, als dies bei anderen numerischen Methoden wie z.B. der FEM-Kontaktsimulation der Fall ist.

Abbildung 7.23 zeigt die maximale Flankenpressung und Zahnfußspannung für die Verzahnung CP bei  $T_1 = 6 \text{ kNm}$  sowie  $\Delta P = 0,0 \text{ mm}$ , berechnet mit unterschiedlichen Simulationsauflösungen. Dabei wurde die Anzahl der Zahnbreitenabschnitte variiert und die Anzahl der Eingriffsstellungen konstant gehalten. Es wurde ein Bereich zwischen 5 und 97 Zahnbreitenabschnitten betrachtet. Die größte Abweichung hinsichtlich des Konvergenzwertes mit ca. 6 % weist in diesem Fall die Radzahnfußspannung berechnet mit 5 Zahnbreitenabschnitten auf. Ab einer Anzahl von 7 Zahnbreitenabschnitten sind die Abweichungen in dem betrachteten Fall hinsichtlich der Konvergenzwerte kleiner als 1 %.

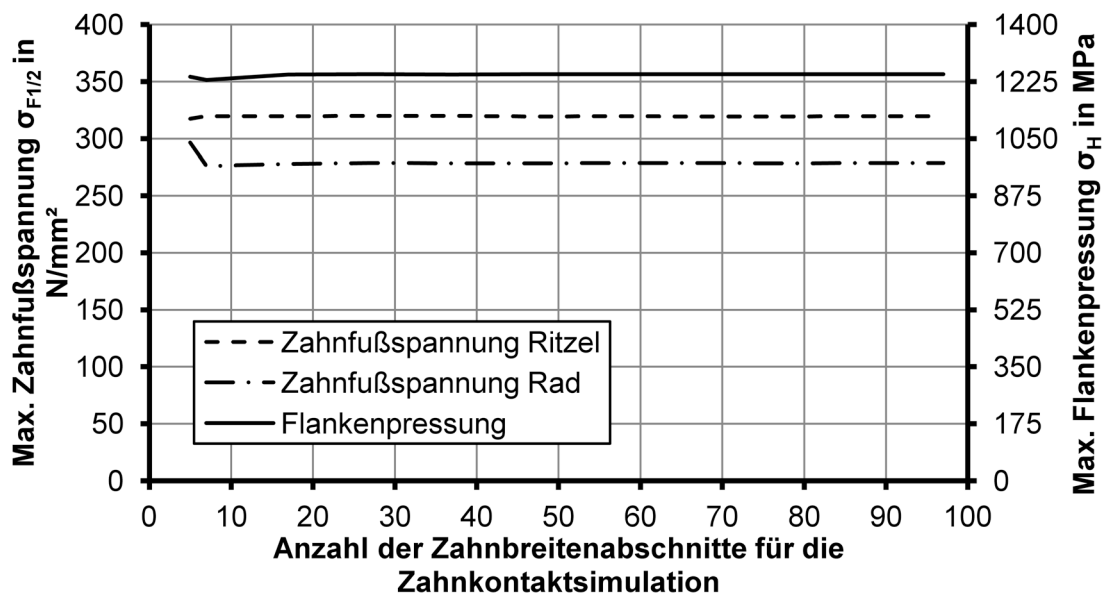


Abbildung 7.23: Konvergenzuntersuchung mit der BECAL-BEM-Version für Verzahnung CP bei  $T_1 = 6 \text{ kNm}$  sowie  $\Delta P = 0,0 \text{ mm}$

Die geringe Abhängigkeit der BECAL-BEM-Zahnkontaktsimulation von der gewählten Simulationsauflösung resultiert aus der geschlossenen analytischen Beschreibung des Abklingverhaltens der Zahnverformung (vgl. Kapitel 4) sowie der Zahnfußspannung (vgl. Kapitel 6). Des Weiteren spielt die Verwendung des Linienkontaktmodells auf Basis der ZZM bei der Berechnung der Kontaktverformung und Flankenpressung eine wesentliche Rolle (vgl. Kapitel 5).

Für die zuverlässige Berechnung der Maximalwerte der Flankenpressung und der Zahnfußspannung ist in der Regel eine Berechnungsauflösung von 10 bis 20 Zahnbreitenabschnitten

ausreichend. Werden detaillierte Informationen über die Spannungsgradienten oder die Flankenpressungen in Zahnberandungsnähe (Stirnseiten sowie Zahnkopfbereich) benötigt, dann sollte die Zahnkontaktsimulation mit ca. 50 Zahnbreitenabschnitten sowie Eingriffsstellungen durchgeführt werden. Aufgrund der vergleichsweise extrem kurzen Simulationszeiten ist dies auch für umfangreiche Optimierungsstudien effektiv möglich.



## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Die erweiterten Möglichkeiten moderner Flankengeneratoren und Fertigungstechnologien für Kegelräder erlauben den Einsatz neuer Auslegungsstrategien und die Realisierung optimaler makro- sowie mikrogeometrischer Eigenschaften, die in dieser Weise bisher nicht wirtschaftlich herstellbar waren. Für die Verzahnungsauslegung und Optimierung werden in der Regel hochspezialisierte Näherungsmethoden für die Zahnkontaktsimulation genutzt. Bei Kegelrädern hat sich das Programm BECAL in der Praxis bewährt und besitzt dementsprechend einen großen Verbreitungsgrad in Industrie sowie Forschung [Sc10], [SSH12]. Diesem Programm liegen Näherungsmethoden zugrunde, die unter der Voraussetzung bestimmter praxisrelevanter geometrischer und technologischer Grenzen eine sekundenschnelle, übersichtliche und zuverlässige Zahnkontaktsimulation ermöglichen. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist es, die Näherungsmethoden des Programmes BECAL entsprechend der neuen geometrischen und technologischen Grenzen moderner Auslegungsstrategien zu erweitern. Die Erweiterungen bewegen sich dabei in einem Rahmen, der es weiterhin ermöglicht, im Vergleich zu anderen Berechnungsmethoden extrem schnelle, übersichtliche und zuverlässige Zahnkontaktsimulationen durchzuführen.

Bisher waren die den Berechnungsmethoden zugänglichen Zahnprofilformen auf die gemäß DIN und ISO genormten Bereiche beschränkt. Um die Berechnung der Zahnverformung und der Zahnfußspannung auf beliebige Zahnprofilformen zu erweitern, wurde eine numerische Lösung für die Ermittlung der Bezugswerte auf Basis der Boundary-Element-Method (BEM) implementiert. Dies ermöglicht nun auch die Berechnung der Zahnfußspannung freier Zahnfußgeometrien, wie sie z.B. bei der Zahnfußoptimierung oder der Analyse von Schleifabsätzen sowie Graten im Zahnfußgrund auftreten können. Die Profilform- sowie die Kraftangriffshöheneinflüsse auf das Zahnverformungs- / Zahnfußspannungsabklingverhalten wurden rechnerisch mittels FEM untersucht und über integrale Mittelwerte erfasst. Die Auswirkungen von Stirnseitenunstetigkeiten, Zahnwindung sowie Flankenlinienkrümmung auf die Zahnverformung und Zahnfußspannung wurden ebenfalls bewertet. Darauf aufbauend erfolgte eine Berücksichtigung der Einflüsse der Stirnseitenunstetigkeiten auf die Zahnverformungs- und Zahnfußspannungsberechnung. Zusätzlich zu den Stirnseitenunstetigkeiten wurden bei der Zahnfußspannungsberechnung die Zahnwindung sowie die Flankenlinienkrümmung berücksichtigt.

Weiterhin wurden die Auswirkungen von Zahnberandungsmodifikationen auf die Berechnung der Zahnverformung untersucht und auf Basis von FEM-Berechnungen gezeigt, dass deren

Einfluss im Rahmen der näherungsweise Ermittlung der Biegeverformungseinflusszahlen nicht explizit erfasst werden muss.

Die Berechnungsmethoden der Kontaktverformungen und Flankenpressungen wurden hinsichtlich ihrer Aussagequalität im Bereich des Zahnkopfes und der Zahnstirnseiten überprüft. Betrachtet wurde der Einfluss der Wechselwirkung, der Änderung des Spannungszustandes im Stirnseitenbereich und des Kopfkantenkontaktes im Voreingriff. Es konnte anhand theoretischer Untersuchungen gezeigt werden, dass die Wechselwirkung bei der Berechnung der Kontaktverschiebungen und -spannungen im Zahnkontakt auch bei großen Lastverteilungsgradienten vernachlässigt werden kann. Die Zahnstirnseiteneinflüsse spielen gegenüber den durch die Biege-, Schub-, Druck-, und Radkörperverformung eingebrachten Anteilen eine stark untergeordnete Rolle und werden deshalb zugunsten der Übersichtlichkeit und Praxis-tauglichkeit nicht einbezogen. Eine optimale Tragbildentwicklung bewirkt, dass auch noch im zahnkopfnahen Flankenbereich relativ große Kontaktlasten auftreten und die Traglinien bis hin zum Voreingriffsbereich genutzt werden. Um die Zahnhöhenmodifikationen, Kopf- und Fußrücknahmen in diesen Fällen zielsicher festlegen zu können, müssen der Kopfkantenkontakt sowie der Kopfkanteneinfluss im kopfnahen Kontakt bei der Berechnung der Kontaktverformungen und Flankenpressungen berücksichtigt werden. Unter Verwendung der Theorie des elastischen Halbraumes wurde eine Berechnungsmethode entwickelt, die dies auf Basis des effektiven und besonders zuverlässigen Linienkontaktmodells ermöglicht.

Im Rahmen der Verifikation der verbesserten und erweiterten Berechnungsmethoden wurden umfangreiche Sensibilitäts- sowie Fallstudien unter Verwendung der FEM durchgeführt. Dabei konnte gezeigt werden, dass die Ergebnisse der entwickelten Berechnungsmethoden qualitativ und quantitativ sehr gut mit denen von FEM-Lösungen übereinstimmen.

Die Validierung der verbesserten und erweiterten Berechnungsmethoden erfolgte auf Basis von Vergleichen mit aus Zahnfußdehnungsmessungen gewonnenen Zahnfußspannungen. Des Weiteren wurden die in Form von Last- und Pressungsverteilungen simulierten Lasttragbilder mit experimentell ermittelten Lasttagbildern verglichen. Auf diese Weise konnte gezeigt werden, dass die entwickelten Berechnungsmethoden die realen Bedingungen im Zahneingriff von Kegelradverzahnungen sehr gut widerspiegeln.

Mit der Erweiterung und Verbesserung der Näherungsmethoden für die Zahnverformungs-, Flankenpressungs- sowie Zahnfußspannungsberechnung konnte neben der absoluten auch die relative Aussagekraft von BECAL-Zahnkontaktsimulationen deutlich erhöht werden. Wesentliche Steigerungen konnten besonders auch hinsichtlich der Berechnung der Zahnfußspannung erzielt werden. Die Genauigkeit der Zahnfußspannungsberechnung konnte für sehr große Schrägungswinkel und asymmetrische Zahnprofile um mehr als 20 Prozentpunkte vergrößert und die Streuung der Genauigkeit erheblich verringert werden. Die bisher hinsichtlich solcher Parameter wie freie Zahnfußgeometrie, großer Unterschnitt, Zahnprofile mit großer Asymmetrie und Zahnkopfeingriff eingeschränkte Anwendbarkeit der Berechnungsmethoden im Ausgangszustand konnte auf den relevanten Bereich moderner Optimierungs- und Auslegungsstrategien erweitert werden.



Die Betrachtung des Konvergenzverhaltens unterstreicht deutlich einen weiteren großen Vorteil der BECAL-Berechnungsmethoden gegenüber von FEM-Lösungen. Neben den sehr kurzen Simulationszeiten besteht dieser darin, dass die Ergebnisqualität nur im geringen Maße von der gewählten Berechnungsauflösung der Zahnkontaktsimulation abhängt. Damit können in der Praxis schnell und zuverlässig geordnete Auslegungserfahrungen aufgebaut und durch gezielte fallspezifische Verzahnungsoptimierungen effektiv für eine Produktverbesserung eingesetzt werden.

Weiteres Potenzial in der Verzahnungs- und Getriebeauslegung unter Nutzung von BECAL erschließt sich z.B. über die folgenden Methodenentwicklungen:

- die Berechnung der Zahnfußspannung auf der Druckseite der Zähne, als Basis für die Bestimmung der Wechselfestigkeit,
- eine schädigungssummenbasierte automatische Flankenoptimierung unter Berücksichtigung von Verlagerungskollektiven,
- eine optionale Berücksichtigung der Radkörpergeometrie und der Zahnwechselwirkung z.B. unter Anwendung der schnellen 3D Fast-Multipole-Boundary-Element-Method (FMBEM). Dies würde die Auslegung leichter Tellerradträger und Tellerradzahnkränze für großmodulige Kegelradverzahnungen ermöglichen.
- Aufgrund der kurzen Simulationszeiten und des geringen Einflusses der Berechnungsauflösung auf die Zahnkontaktsimulation wird die Entwicklung einer effizienten Methode zur Co-Simulation mit der Multi-Body Simulation (MBS) begünstigt. Dies würde eine integrierte Optimierung im direkten Kontext des Gesamtgetriebesystems ermöglichen.

Diese Beispiele zeigen, dass auch zukünftig wichtige Innovationsimpulse von einer BECAL-Weiterentwicklung erwartet werden können.



---

## Literaturverzeichnis

- [AGMA2003] AGMA 2003-B97: Rating the pitting resistance and bending strength of generated straight bevel, zerol bevel, and spiral bevel gear teeth. American Gear Manufacturers Association, Alexandria, VA, 1997.
- [AGMA2005] ANSI/AGMA 2005-D03: Design Manual for Bevel Gears. American Gear Manufacturers Association, Alexandria, VA, 2003.
- [AKM83] Ahmadi, N.; Keer, L. M.; Mura, T.: Non-Hertzian contact stress analysis for an elastic half space. Normal and sliding contact. In International Journal of Solids and Structures, 1983, 19; S. 357–373.
- [Ba13] Baumann, F.: Theoretische Untersuchungen zur Lastaufteilung und Lastverteilung in Planetengetrieben. Dissertation, TU Dresden, 2013.
- [Ba91] Baumann, V.: Untersuchungen zur Last- und Spannungsverteilung an bogenverzahnten Kegelrädern. Dissertation, TU Dresden, 1991.
- [BD92] Brebbia, C. A.; Dominguez, J.: Boundary elements. Computational Mechanics Publications; Copublished with McGraw-Hill, Southampton, Boston, New York, 1992.
- [Be90] Becker, A.: Numerische Berechnung des Kontaktes beliebig gekrümmter Körper unter besonderer Berücksichtigung der Einflußgrößen des Rad-Schiene-Systems. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1990.
- [Be98] Beulker, K.: Ermittlung der realen Verzahnungsgeometrie von Stirn- und Kegelradgetrieben durch Simulation der Herstellverfahren. Dissertation, RWTH Aachen, 1998.
- [BG07] Brecher, C.; Gacka, A.: Simulationsmodell zur Abbildung des dynamischen Verhaltens von Kegelradgetrieben – Berücksichtigung weiterer Anregungsmechanismen: In 48. Arbeitstagung Zahnrad- und Getriebeuntersuchungen. WZL, Aachen, 2007.
- [BH96] Bibel, G. D.; Handschuh, R. F.: Meshing of a Spiral Bevel Gearset with 3D Finite Element Analysis, NASA Technical Memorandum NASA-TM-107336, 1996.

- [Bo90] Bong, H.-B.: Erweiterte Verfahren zur Berechnung von Stirnradgetrieben auf der Basis numerischer Simulationen und der Methode finiter Elemente. Dissertation, RWTH Aachen, 1990.
- [BP16] Brecher, C.; Piel, D.: Verifikation der Zahnkontaktanalyse für Innenverzahnungen unter Berücksichtigung der lastbedingten gemessenen Verlagerungen. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 127 IX, FVA-Forschungsheft 1188, Frankfurt am Main, 2016.
- [Br69] Brechling, J.: Zur Berechnung der Spannungsverteilung im festen Körper im Fall des ebenen Spannungs- oder Verformungszustandes infolge äußerer Belastungen. In *Maschinenbautechnik*, 1969, 18; S. 617–623.
- [BS95] Börner, J.; Senf, M.: Verzahnungsbeanspruchung im Eingriffsfeld - effektiv berechnet. In *Antriebstechnik*, 1995, 34.
- [BSD08] Beer, G.; Smith, I.; Duenser, C.: *The boundary element method with programming*. Springer, Wien, London, 2008.
- [CG0036] CG 0036: Calculation of Gear Rating for Marine Transmissions. DNV-GL Class Guideline, 2015.
- [CH94] Clapper, M. L.; Houser, D. R.: Boundary Element Procedure for Predicting Helical Gear Root Stresses and Load Distribution Factors, AGMA Technical Paper 94FTM6, Alexandria, Va., 1994.
- [CS71] Conry, T. F.; Seireg, A.: A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact. In *Journal of Applied Mechanics*, 1971, 38; S. 387–392.
- [CS73] Conry, T. F.; Seireg, A.: A Mathematical Programming Technique for the Evaluation of Load Distribution and Optimal Modifications for Gear Systems. In *Journal of Engineering for Industry*, 1973, 95; S. 1115.
- [DIN3991] DIN 3991: Tragfähigkeit von Kegelrädern ohne Achsversatz. Deutsches Institut für Normung e.V. (DIN). Beuth Verlag, Berlin, 1989.
- [DIN867] DIN 867: Bezugsprofile für Evolventenverzahnungen an Stirnrädern (Zylinder- rädern) für den allgemeinen Maschinenbau und den Schwermaschinenbau. Deutsches Institut für Normung e.V. (DIN). Beuth Verlag, Berlin, 1986.
- [Du94] Dutschk, R.: Geometrische Probleme bei Herstellung und Eingriff bogenver- zahnter Kegelräder. Dissertation, TU Dresden, 1994.
- [EDM05] Eberwien, U.; Duenser, C.; Moser, W.: Efficient calculation of internal results in 2D elasticity BEM. In *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2005, 29; S. 447–453.

- 
- [Fr12] Frühe, T.: Berechnung und Minimierung der Zahnfußspannung von Standard- und LowLoss-Verzahnungen. Dissertation, TU München, 2012.
- [Fr81] Fresen, G.: Untersuchungen über die Tragfähigkeit von Hypoid- und Kegelradgetrieben. Grübchen, Ridging, Rippling, Graufleckigkeit und Zahnbruch. Dissertation, TU München, 1981.
- [FVAWB] FVA GmbH: FVA-Workbench®. Modellierung, Parametrisierung und Berechnung von Getriebesystemen. FVA GmbH.
- [FW07] Fan, Q. F.; Wilcox, L.: New Developments in Tooth Contact Analysis (TCA) and Loaded TCA for Spiral Bevel and Hypoid Gear Drives. In *Gear Technology*, 2007; S. 26–35.
- [FZ75] Francavilla, A.; Zienkiewicz, O. C.: A note on numerical computation of elastic contact problems. In *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1975, 9; S. 913–924.
- [Ga86] Gajewski, G.: Ermittlung der allgemeinen Einflussfunktion für die Berechnung der Lastverteilung bei Stirnrädern. Forschungsbericht, TU Dresden, 1986.
- [GF97] Gaul, L.; Fiedler, C.: *Methode und Berechnung in Statik und Dynamik*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.
- [GGB94] Gosselin, C.; Gingras, D.; Brousseau, J.; Gakwaya, A.: A Review of the Current Contact Stress and Deformation Formulations Compared to Finite Element Analysis: In *Proceedings of the 1994 International Gearing Conference*. Newcastle. Mechanical Engineering Publ., London, 1994; S. 155–160.
- [GGC05] Guilbault, R.; Gosselin, C.; Cloutier, L.: Express Model for Load Sharing and Stress Analysis in Helical Gears. In *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127; S. 1161–1172.
- [GGC98] Gosselin, C.; Gagnon, P.; Cloutier, L.: Accurate Tooth Stiffness of Spiral Bevel Gear Teeth by the Finite Strip Method. In *Journal of Mechanical Design*, 1998, 120; S. 599–605.
- [GGG00] Gosselin, C.; Guilbault, R.; Gagnon, P.: The finite strips method as an alternative to the finite elements in gear tooth stress and strain analysis, AGMA Technical Paper 2000FTM12, Alexandria, Va., 2000.
- [GH89] Göldner, H.; Holzweissig, F.: *Leitfaden der technischen Mechanik*. Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig, 1989.
- [Go95] Gosselin, C.: A general formulation for the calculation of the load sharing and transmission error under load of spiral bevel and hypoid gears. In *Mechanism and Machine Theory*, 1995, 30; S. 433–450.

- [Gr91] Gründemann, H.: Randelementmethode in der Festkörpermechanik. Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig, 1991.
- [Gu11] Guilbault, R.: A Fast Correction for Elastic Quarter-Space Applied to 3D Modeling of Edge Contact Problems. In Journal of Tribology, 2011, 133; S. 031402-1–031402-10.
- [GVI04] Guingand, M.; Vaujany, J. P. de; Icard, Y.: Fast Three-Dimensional Quasi-Static Analysis of Helical Gears Using the Finite Prism Method. In Journal of Mechanical Design, 2004, 126; S. 1082–1088.
- [Ha63] Hayashi, K.: Load Distribution on the Contact Line of Helical Gear Teeth. Part 1 Fundamental Concept. In Bulletin of JSME, 1963, 6; S. 336–343.
- [HB99] Handschuh, R. F.; Bibel, G. D.: Comparison of Experimental and Analytical Tooth Bending Stress of Aerospace Spiral Bevel Gears, NASA Technical Memorandum NASA/TM—1999-208903, 1999.
- [He07] Hemmelmann, J. E.: Simulation des lastfreien und belasteten Zahneingriffs zur Analyse der Drehübertragung von Zahnradgetrieben. Dissertation, RWTH Aachen, 2007.
- [Hi76] Hirt, M.: Einfluss der Zahnfußausrundung auf Spannung und Festigkeit von Geradstirnrädern. Dissertation, TU München, 1976.
- [HL91] Handschuh, R. F.; Litvin, F. L.: A method for determining spiral-bevel gear tooth geometry for finite element analysis, NASA Technical Report NASA-TP-3096, 1991.
- [HM12] Höhn, B.-R.; Matt, P.: Einfluss der Stirnkante auf die Tragfähigkeit von Zahnradern unter Berücksichtigung des Schrägungswinkels. Forschungsvorhaben Nr. 284 IV, FVA-Forschungsheft 1023, Frankfurt am Main, 2012.
- [HN115206] HN 115 206: Fasen von Außenverzahnungen. Gleason-Hurth Werksnorm.
- [Ho11] Hotait, M. A.: A theoretical and experimental investigation on bending strength and fatigue life of spiral bevel and hypoid gears. Dissertation, Ohio State University, 2011.
- [Ho13] Hombauer, M. R.: Grauflecken an Kegelrad- und Hypoidverzahnungen und deren Einfluss auf die Grübchentrugfähigkeit. Dissertation, TU München, 2013.
- [Ho90] Houser. D. R: Gear Noise Sources and their Prediction using Mathematical Models: In Gear design. Manufacturing and inspection manual. American technical publishing, London, 1990; S. 213–222.

- 
- [Ho95] Horst, B.: A Basic Guide to Deburring and Chamfering Gears. In Gear Technology, 1995; S. 26–29.
- [HS78] Hohrein, A.; Senf, M.: Untersuchung zur Last- und Spannungsverteilung an schrägverzahnten Stirnrädern. Dissertation, TU Dresden, 1978.
- [Hü01] Hünecke, C.: Untersuchungen zur Zahnfußbeanspruchung bogenverzahnter Kegelräder ohne und mit Achsversatz auf Basis der genauen Zahngeometrie. Dissertation, TU Dresden, 2001.
- [HyGEARS] Gosselin, C.: HyGEARS. Gear Simulation, Design and Analysis. Involute Simulation Softwares Inc.
- [ISO10300] ISO 10300: Calculation of load capacity of bevel gears. International Organization for Standardization (ISO), Genf, 2001.
- [ISO23509] ISO 23509: Bevel and hypoid gear geometry. International Organization for Standardization (ISO), Genf, 2016.
- [Jo04] Johnson, K. L.: Contact mechanics. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [Ka61] Kagawa, T.: Deflection and Moment Due to a Concentrated Edgeloading on an Cantilever Plate of Finite Length: In Proceedings of the 11th Japan National Congress for Appl. Mech., 1961.
- [Ka90] Kalker, J.: Three-dimensional elastic bodies in rolling contact. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, op. 1990.
- [KB02] Kreißig, R.; Benedix, U.: Höhere Technische Mechanik. Springer-Verlag, Wien, 2002.
- [KB17] Klocke, F.; Brecher, C.: Zahnrad- und Getriebetechnik. Hanser, München, München, 2017.
- [KHY79] Kubo, A.; Hirasawa, H.; Yamada, T.: Strength Calculation of Large Helical Gears. In Bulletin of JSME, 1979, 22; S. 605–612.
- [KIMoS] Klingelnberg: KIMoS. Programmsystem zur Auslegung von Kegelrad- und Hypoidverzahnungen. Klingelnberg.
- [KI08] Klingelnberg, J. Hrsg.: Kegelräder. Grundlagen, Anwendungen. Springer, Berlin u.a., 2008.
- [KI12] Klein, M. M.: Zur Fresstragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidgetrieben. Dissertation, TU München, 2012.

- 
- [KLB13] Krüger, D.; Linke, H.; Brechling, J.; Hess, R. et al.: Increasing the load capacity of gear teeth by asymmetric gear tooth design. Proceedings of International Conference on Gears: In International Conference on Gears. München. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2013.
- [KLM84] Keer, L. M.; Lee, J. C.; Mura, T.: A contact problem for the elastic quarter space. In International Journal of Solids and Structures, 1984, 20; S. 513–524.
- [KN3030] KN 3030: Tragfähigkeits-Berechnung für Spiralkegelräder mit Klingelberg Zylo-Palloid-Verzahnung. Klingelberg Werksnorm.
- [Ko09] Kolivand, M.: Development of Tooth Contact and Mechanical Efficiency Models for Face-Milled and Face-Hobbed Hypoid and Spiral Bevel Gears. Dissertation, Ohio State University, 2009.
- [KTG97] Kubo, A.; Tarutani, I.; Gosselin, C.; NONAKA, T. et al.: A Computer Based Approach for Evaluation of Operating Performances of Bevel and Hypoid Gears. In JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing, 1997, 40; S. 749–758.
- [Ku13] Kupietz, R.: Ermittlung der Kontakt- und Zahnfußspannungen für Verzahnungen mit parallelen und kreuzenden Achsen. Diplomarbeit, TU Dresden, 2013.
- [KU77] Kubo, A.; Umezawa, K.: On the Power Transmitting Characteristics of Helical Gears with Manufacturing and Alignment Errors. 1st Report, Fundamental Consideration. In Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1977, 43; S. 2771–2783.
- [Ku81] Kubo, A.: Estimation of Gear Performance: In Proceedings of the International Symposium on Gearing and Power Transmissions. Tokyo. Japan Society of Mechanical Engineers, Tokyo, 1981; S. 201–206.
- [Ku99] Kunert, J.: Experimentell gestützte Untersuchungen zum Verformungs- und Spannungsverhalten an außenverzahnten Stirnrädern für eine verbesserte Beanspruchungsanalyse. Dissertation, TU Dresden, 1999.
- [LB94] Linke, H.; Börner, J.: The influence of neighbouring teeth on the tooth root capacity: In Proceedings of the 1994 International Gearing Conference. Newcastle. Mechanical Engineering Publ., London, 1994; S. 177–182.
- [LB96] Linke, H.; Börner, J.: Weiterentwicklung der Zahnfußtragfähigkeitsberechnung durch genauere Erfassung der Spannungskonzentration mit Analyse der AGMA-Methode. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 264, FVA-Forschungsheft 492, Frankfurt am Main, 1996.



- 
- [LB97] Linke, H.; Baumann, V.: Einfluß des Schrägungswinkels auf die Zahnfußbeanspruchung bogenverzahnter Kegelräder. FVA Forschungsvorhaben Nr. 279, FVA-Forschungsheft 516, Frankfurt am Main, 1997.
- [LBB02] Linke, H.; Bär, G.; Baumann, V.; Haase, A. et al.: Erweiterung des Programms BECAL auf mit Zusatzbewegungen gefertigte bogenverzahnte Kegelräder. Forschungsvorhaben Nr. 223/lc, FVA-Forschungsheft 548, Frankfurt am Main, 2002.
- [LHB95] Linke, H.; Höhn, B.-R.; Baumann, V.; Thomas, J.: Grundlagen zur Ermittlung der Zahnflanken- und Zahnfußbeanspruchung bogenverzahnter Kegelräder auf der Basis experimentell gestützter Näherungsbeziehungen. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 223, FVA-Forschungsheft 429, Frankfurt am Main, 1995.
- [LHK95] Linke, H.; Höhn, B.-R.; Kunert, J.; Trempler, U. et al.: Weiterentwicklung der Grundlagen zur Ermittlung der Lastaufteilung und Lastverteilung bei außenverzahnten Gerad- und Schrägstirnrädern durch Verformungs- und Spannungsmessungen. Forschungsvorhaben Nr. 224 I+II, FVA-Forschungsheft 458, Frankfurt am Main, 1995.
- [Li10] Linke, H.: Stirnradverzahnung. Hanser, 2010.
- [Li14] Liu, Y.: Fast multipole boundary element method. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [Li69] Linke, H.: Untersuchungen zur Ermittlung dynamischer Zahnkräfte von einstufigen Stirnradgetrieben mit Geradverzahnung. Dissertation, TU Dresden, 1969.
- [Li78] Linke, H.: Ergebnisse und Erfahrungen bei der Anwendung des Singularitätenverfahrens zur Ermittlung der Spannungskonzentration an Verzahnungen. In Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden, 1978, 27; S. 757–761.
- [Li96] Linke, H.: Stirnradverzahnung. Hanser, München, Wien, 1996.
- [LK00] Linke, H.; Kupfer, R.: Lastverteilungsmessung mit Feinpapier. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 319/II, FVA-Forschungsheft 597, Frankfurt am Main, 2000.
- [MIL3022] MIL-STD -3022: Documentation of Verification, Validation, and Accreditation (VV&A) for Models and Simulations. Department of Defense United States Military Standard, 2008.

- 
- [MKF86] Mul, J. M. de; Kalker, J. J.; Fredriksson, B.: The Contact Between Arbitrarily Curved Bodies of Finite Dimensions. In *Journal of Tribology*, 1986, 108; S. 140–148.
- [Mv88] Mul, J. M. de; van Engelenburg, H.: The Line Contact Between Two Cylinders. Some Experiments and Theoretical Predictions. In *Journal of Tribology*, 1988, 110; S. 285–291.
- [Ne01] Neuber, H.: *Kerbspannungslehre*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [Ne83] Neupert, B.: *Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben*. Dissertation, RWTH Aachen, 1983.
- [NHW05] Niemann, G.; Höhn, B.-R.; Winter, H.: *Maschinenelemente. Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern, Wellen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [Nü15] Nützel, F. P.: *Entwicklung und Anwendung eines Finite-Elemente-Systems auf Basis von Z88 zur Berechnung von Kontaktaufgaben aus der Antriebstechnik*. Dissertation, Universität Bayreuth, 2015.
- [Ny96] Nyamagoudar, B.: Chamfering and Deburring External Parallel Axis Gears. In *Gear Technology*, 1996; S. 25–31.
- [Oe75] Oehme, J.: *Beitrag zur Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder auf der Grundlage experimenteller Zahnverformungsuntersuchungen*. Dissertation, TU Dresden, 1975.
- [OP88] Olakorede, A. A.; Play, D.: Development of the Finite Prism Method in Computer Aided Design of Spur Gears: In *The fourth SAS World Conf. FEMCAD*. Paris, 1988; S. 384–391.
- [Ot09] Otto, M. K.: *Lastverteilung und Zahnradtragfähigkeit von schrägverzahnten Stirnrädern*. Dissertation, TU München, 2009.
- [Pa86] Paul, M.: *Einfluss von Balligkeit und Lageabweichungen auf die Zahnfußbeanspruchung spiralverzahnter Kegelräder*. Dissertation, TU München, 1986.
- [PI88] Placzek, T.: *Lastverteilung und Flankenkorrektur in gear- und schrägverzahnten Stirnradstufen*. Dissertation, TU München, 1988.
- [PM08] Prášil, L.; Mackerle, J.: Finite element analyses and simulations of gears and gear drives. A bibliography 1997-2006. In *Engineering Computations*, 2008, 25; S. 196–219.
- [Po16] Potts, M.: *Steigerung der Tragfähigkeit freiformgefräster Kegelräder*. Dissertation, TU Dresden, 2016.

- 
- [Re77] Reusner, H.: Druckflächenbelastung und Oberflächenverschiebung im Wälzkontakt von Rotationskörpern. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 1977.
- [SBR10] Schlecht, B.; Bauer, C.; Rosenlöcher, T.: Stress analysis of gearings within their elastic environment under the influence of its dynamic behaviour: In International Conference on Gears. Garching (München). VDI, Düsseldorf, 2010; S. 755–766.
- [Sc08] Schäfer, J.: Erweiterung des Linienkontaktmodells für die Finite-Elementebasierte Zahnkontaktanalyse von Stirnradverzahnungen. Dissertation, RWTH Aachen, 2008.
- [Sc10] Schlecht, B.: Maschinenelemente 2. Pearson Studium, München, 2010.
- [Sc11] Schumann, S.: Einfluss der Zahnberandung und Geometrie der Zahnstirnseiten auf die Lastverteilung. Diplomarbeit, TU Dresden, 2011.
- [Sc15] Schumann, S.: Möglichkeiten und Grenzen asymmetrischer Kegelradverzahnungen. Dissertation, TU Dresden, 2015.
- [Sc73] Schmidt, G.: Berechnung der Walzenpressung schrägverzahnter Stirnräder unter Berücksichtigung der Lastverteilung. Dissertation, TU München, 1973.
- [SHS06] Schlecht, B.; Henlich, T.; Seeger, D.: BECAL, Beanspruchungsgerechte Gestaltung von Kegelrad-Rohlingen, Abschlussbericht und Handbuch-Ergänzung C zur Version 3.4.0. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 456, FVA-Forschungsheft 548, Frankfurt am Main, 2006.
- [SHS14] Schlecht, B.; Hutschenreiter, B.; Schaefer, S.: Entwicklung einer Zahnkontaktanalyse zur Berechnung der Tragfähigkeit und Geräuschanregung von kegelförmigen Stirnrädern (Beveloidräder). FVA-Forschungsvorhaben Nr. 657 I, FVA-Forschungsheft 1115, Frankfurt am Main, 2014.
- [Si00a] Simon, V.: Load Distribution in Hypoid Gears. In Journal of Mechanical Design, 2000a, 122; S. 529–535.
- [Si00b] Simon, V.: FEM stress analysis in hypoid gears. In Mechanism and Machine Theory, 2000b, 35; S. 1197–1220.
- [Si07] Simon, V.: Load Distribution in Spiral Bevel Gears. In Journal of Mechanical Design, 2007, 129; S. 201–209.
- [SLH03] Schlecht, B.; Linke, H.; Henlich, T.: BECAL, Vervollständigte Beanspruchungsanalyse mit Schnittstelle zum Tragfähigkeitsnachweis, Abschlussbericht und Handbuch-Ergänzung B zur Version 3.2.0. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 223/le, FVA-Forschungsheft 548, Frankfurt am Main, 2003.

- 
- [SS12] Schlecht, B.; Schaefer, S.: Berechnung der Zahnfuß-, Grübchen- und Fresstragfähigkeit von Kegelrad- und Hypoidverzahnungen in BECAL. FVA Forschungsvorhaben Nr. IX, FVA-Forschungsheft 1035, Frankfurt am Main, 2012.
- [SS13] Stahl, K.; Stiller, S.: Erweiterung Ritzelkorrekturprogramm (RIKOR) zur Bestimmung der Lastverteilung von Stirnradgetrieben. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 30 VII, FVA-Forschungsheft 1077, Frankfurt am Main, 2013.
- [SSH10] Schlecht, B.; Schaefer, S.; Hutschenreiter, B.: Effiziente und nutzerfreundliche Modellierung des Umfeldes der Kegelradverzahnung in BECAL / Verfahren zur genauen Analyse von Kegelrad-Lastkollektiven. FVA Forschungsvorhaben Nr. 223 VI + VII, FVA-Forschungsheft 938, Frankfurt am Main, 2010.
- [SSH11] Schlecht, B.; Schaefer, S.; Hutschenreiter, B.; Potts, M.: Entwicklung eines Hochleistungs-Kegelradgetriebes, SCHOTTEL GmbH, Wismar, 2011.
- [SSH12] Schlecht, B.; Schaefer, S.; Hutschenreiter, B.: BECAL – Programm zur Berechnung der Zahnflanken- und Zahnfußbeanspruchung an Kegelrad- und Hypoidgetrieben bei Berücksichtigung von Relativlage und Flankenmodifikationen (Version 4.1.0). FVA-Forschungsvorhaben Nr. 223X, FVA-Forschungsheft 1037, Frankfurt am Main, 2012.
- [SSS11] Schlecht, B.; Schaefer, S.; Schropp S.; Hutschenreiter, B. et al.: Zahnkontakt-simulation und Tragfähigkeitsanalyse bei Kegelrädern: In DMK 2011. Dresdner Maschinenelemente Kolloquium. TUDpress, Dresden, 2011; S. 193–212.
- [SSZ12] Stahl, K.; Scheurle, J.; Zimmer, M.; Huber, P.: Erzeugung allgemeiner Flankengeometrien. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 604 I, FVA-Forschungsheft 1017, Frankfurt am Main, 2012.
- [St13] Stadtfeld, H. J.: Gleason Kegelradtechnologie. expert Verlag, Renningen, 2013.
- [SZ16] Stahl, K.; Zimmer, M.: Anwendernahe Umsetzung der Erzeugung allgemeiner Flankengeometrien nach FVA 604/I und Adaption an bestehende FVA-Programme. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 604 II, FVA-Forschungsheft 1176, Frankfurt am Main, 2016.
- [UI73] Umezawa, K.; Ishikawa, J.: Deflection Due to Contact between Gear Teeth with Finite Width. In Bulletin of JSME, 1973, 16; S. 1085–1093.
- [UIH69] Umezawa, K.; Ishikawa, J.; Hayashi, K.: Deflections due to a Concentrated Load on a Cantilever Thick Plate of Finite Length for Gears. In Bulletin of JSME, 1969, 12; S. 1204–1211.

- 
- [Um72a] Umezawa, K.: The Meshing Test On Helical Gears under Load Transmission. 1st Report, The Approximate Formula for Deflections of Gear Tooth. In Bulletin of JSME, 1972a, 15; S. 1632–1639.
- [Um72b] Umezawa, K.: Deflections and Moments Due to a Concentrated Load on a Rack-Shaped Cantilever Plate with Finite Width for Gears. In Bulletin of JSME, 1972b, 15; S. 116–130.
- [Um73] Umezawa, K.: The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission. 2nd Report, The Approximate Formula for Bending-Moment Distribution of Gear Tooth. In Bulletin of JSME, 1973, 16; S. 407–413.
- [Um74] Umezawa, K.: The Meshing Test on Helical Gears under Load Transmission. 3rd Report, The static Behaviours of Driven Gear. In Bulletin of JSME, 1974, 17; S. 1348–1355.
- [Va93] Vaidyanathan, S.: Application of plate and shell models in the loaded tooth contact analysis of bevel and hypoid gears. Dissertation, Ohio State University, 1993.
- [Ve05] Vecchiato, D.: Design and simulation of face-hobbed hypoid gears, and tooth contact analysis by boundary element method. Dissertation, University of Illinois at Chicago, 2005.
- [Ve81] Vedmar, L.: On the design of external involute helical gears. Dissertation, Lund Technical University, 1981.
- [VH88] Vijayakar, S. M.; Houser, D. R.: The Use of Boundary Elements For The Determination of The AGMA Geometry Factor. In Gear Technology, 1988, 5; S. 7-9; 33-36.
- [Vi16] Vijayakar, S. M.: Calyx Users Manual, Hilliard OH, 2016.
- [Vi87] Vijayakar, S. M.: Finite element methods for quasi-prismatic bodies with application to gears. Dissertation, Ohio State University, 1987.
- [Vi91] Vijayakar, S. M.: A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem. In International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 31; S. 525–545.
- [Vi96] Vijayakar, S. M.: Edge effects in gear tooth contact: In Int. Power Trans. Gearing Conf. San Diego, 1996; S. 205–212.
- [Vo07] Vogel, O.: Gear-tooth-flank and gear-tooth-contact analysis for hypoid gears. An application of singularity theory. Dissertation, TU Dresden, 2007.
- [Vo92] Vollhüter, F.: Grübchen- und Zahnfußtragfähigkeit von Kegelrädern mit und ohne Achsversetzung. Dissertation, TU München, 1992.

- [WA77] Wilcox, L. E.; Auble, R.: Three-Dimensional Stress Analysis of Meshing Gear Teeth: In World Congress on Gearing. Paris, 1977; S. 93–107.
- [WBN55] Weber, C.; Banaschek, K.; Niemann, G.: Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern. F. Vieweg, Braunschweig, 1955.
- [WGN97] Wilcox, L. E.; Chimner, T. D.; Nowell, G. C.: Improved finite element model for calculating stresses in bevel and hypoid gear teeth, AGMA Technical Paper 97FTM5, Alexandria, Va., 1997.
- [WH00] Weck, M.; Hemmelmann, J.: Kegelaradzahngeometrie, Programm zur Berechnung der Kegelaradzahngeometrie mit Durchdringungstheorie auf allgemein beschreibbaren Verzahnmaschinen. Forschungsvorhaben Nr. 301, FVA-Forschungsheft 600, Frankfurt a. M., 2000.
- [Wi08] Wirth, C.: Zur Tragfähigkeit von Kegelarad- und Hypoidgetrieben. Dissertation, TU München, 2008.
- [Wi81] Wilcox, L. E.: An Exact Analytical Method for Calculating Stresses in Bevel and Hypoid Gear Teeth: In Proceedings of the International Symposium on Gearing and Power Transmissions. Tokyo. Japan Society of Mechanical Engineers, Tokyo, 1981.
- [Wi85] Wilcox, L. E.: Analyzing Gear Tooth Stress as a Function of Tooth Contact Pattern Shape and Position. In Gear Technology, 1985; S. 9-15,23.
- [WN76] Weck, M.; Neupert, B.: Berechnung der Lastverteilung und Zahnfußspannungen an Schrägverzahnten Zylinderrädern. In Industrie-Anzeiger, 1976, 98; S. 1693–1694.
- [WS60] Wellauer, E. J.; Seireg, A.: Bending Strength of Gear Teeth by Cantilever-Plate Theory. In Journal of Engineering for Industry, 1960, 3; S. 213–220.
- [WSW95] Weck, M.; Stadtfeld, H.; Weyand, C.: Programmkette - Kegelaradberechnung, Benutzeranleitung. FVA-Forschungsvorhaben Nr. 49, FVA-Forschungsheft 261, Frankfurt am Main, 1995.
- [YBR07] Young, W. C.; Budynas, R. G.; Roark, R. J.: Roark's formulas for stress and strain. McGraw-Hill, New York, NY, 2007.
- [Za69] Zablonskij, K. I.: Load distribution on gear drive contact lines. In Russian Engineering Journal, 1969, 8; S. 26–31.
- [Zi71] Ziegler, H.: Verzahnungssteifigkeit und Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder. Dissertation, RWTH Aachen, 1971.
- [ZT05] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: The finite element method for solid and structural mechanics. Elsevier Butterworth-Heinemann, Amsterdam, Boston, 2005.

- 
- [ZZ92] Zienkiewicz, O. C.; Zhu, J. Z.: The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1. The recovery technique. In *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 33; S. 1331–1364.





## Anhang

Tabelle A.1: Verzahnungsdaten der Verzahnungen A und B

	Symbol	Einheit	Verzahnungsdaten			
			A		B	
<b>Achsversetzung</b>	<b>a</b>	mm	0		0	
<b>Zähnezahl</b>	<b>z</b>	–	100	100	18	57
<b>Normalmodul</b>	<b>m<sub>mn</sub></b>	mm	3,00		2,22	
<b>Achsenwinkel</b>	<b>Σ</b>	°	5		90	
<b>Schrägungswinkel</b>	<b>β<sub>m</sub></b>	°	40	–40	–33	33
<b>Zahnbreite</b>	<b>b</b>	mm	30	30	20	20
<b>Eingriffswinkel Schubflanke</b>	<b>α<sub>nD</sub></b>	°	20		20	
<b>Eingriffswinkel Zugflanke</b>	<b>α<sub>nC</sub></b>	°	20		20	
<b>mittlerer Teilke- geldurchmesser</b>	<b>d<sub>m</sub></b>	mm	391,62	391,62	47,67	150,95
<b>Teilkegelwinkel</b>	<b>δ</b>	°	2,50	2,50	17,53	72,47
<b>Profilverschie- bungsfaktor</b>	<b>x<sub>hm1</sub></b>	–	0,0		0,45	
<b>Kopfhöhenfaktor</b>	<b>k<sub>hap</sub></b>	–	1,0		1,00	
<b>Fußhöhenfaktor</b>	<b>k<sub>hfp</sub></b>	–	1,25		1,25	
<b>Messerkopfradius</b>	<b>r<sub>c0</sub></b>	mm	∞		69,85	

Tabelle A.2: Verzahnungsdaten der Verzahnungen C und CP

			Verzahnungsdaten			
	Symbol	Einheit	C		CP	
<b>Achsversetzung</b>	<b>a</b>	mm	0		0	
<b>Zähnezahl</b>	<b>z</b>	–	9	34	11	36
<b>Normalmodul</b>	<b>m<sub>mn</sub></b>	mm	3,57		12,00	
<b>Achsenwinkel</b>	<b>Σ</b>	°	90		90	
<b>Schrägungswinkel</b>	<b>β<sub>m</sub></b>	°	–33	33	34,6	–34,6
<b>Zahnbreite</b>	<b>b</b>	mm	26	26	110	110
<b>Eingriffswinkel Schubflanke</b>	<b>α<sub>nD</sub></b>	°	20		20	
<b>Eingriffswinkel Zugflanke</b>	<b>α<sub>nC</sub></b>	°	20		20	
<b>mittlerer Teilke- geldurchmesser</b>	<b>d<sub>m</sub></b>	mm	38,36	144,90	160,37	524,80
<b>Teilkegelwinkel</b>	<b>δ</b>	°	14,83	75,17	21,54	68,46
<b>Profilverschie- bungsfaktor</b>	<b>x<sub>hm1</sub></b>	–	0,45		0,34	
<b>Profilseitenver- schiebungsfaktor</b>	<b>x<sub>smn</sub></b>	–	0,00	0,00	0,025	–0,025
<b>Kopfhöhenfaktor</b>	<b>k<sub>hap</sub></b>	–	1,00		1,00	
<b>Fußhöhenfaktor</b>	<b>k<sub>hfp</sub></b>	–	1,25		1,25	
<b>Messerkopfradius</b>	<b>r<sub>c0</sub></b>	mm	57.15		210	

Tabelle A.3: Verzahnungsdaten der Verzahnungen D und E

			Verzahnungsdaten			
	Symbol	Einheit	D		E	
<b>Achsversetzung</b>	<b>a</b>	mm	0		0	
<b>Zähnezahl</b>	<b>z</b>	–	15	38	17	45
<b>Normalmodul</b>	<b>m<sub>mn</sub></b>	mm	13,30		10,67	
<b>Achsenwinkel</b>	<b>Σ</b>	°	90		90	
<b>Schrägungswinkel</b>	<b>β<sub>m</sub></b>	°	30	–30	35	–35
<b>Zahnbreite</b>	<b>b</b>	mm	125	125	127	127
<b>Eingriffswinkel Schubflanke</b>	<b>α<sub>nD</sub></b>	°	20		23	
<b>Eingriffswinkel Zugflanke</b>	<b>α<sub>nC</sub></b>	°	20		17	
<b>mittlerer Teilke- geldurchmesser</b>	<b>d<sub>m</sub></b>	mm	230,42	583,73	221,45	586,20
<b>Teilkegelwinkel</b>	<b>δ</b>	°	21,54	68,46	20,70	69,30
<b>Profilverschie- bungsfaktor</b>	<b>x<sub>hm1</sub></b>	–	0,33		0,45	
<b>Kopfhöhenfaktor</b>	<b>k<sub>hap</sub></b>	–	1,00		1,2	
<b>Fußhöhenfaktor</b>	<b>k<sub>hfp</sub></b>	–	1,25		1,45	
<b>Messerkopfradius</b>	<b>r<sub>c0</sub></b>	mm	210		210	