

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Regelungstheoretische Analyse- und Entwurfsansätze für unteraktuierte mechanische Systeme

Carsten Knoll

von der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Dresden

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktoringenieurs

(Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. techn. Klaus Janschek (TU Dresden)
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack (TU Dresden)
Assoz. Prof. Dr. techn. Markus Schöberl (JKU Linz)
Tag der Einreichung: 06. Juni 2016
Tag der Verteidigung: 02. September 2016

Copyright © Carsten Knoll 2016
Alle Rechte vorbehalten.

Knoll, Carsten: *Regelungstheoretische Analyse- und Entwurfsansätze für unteraktuierte mechanische Systeme*

Gesetzt vom Autor mit L^AT_EX.
Dokument zuletzt erstellt am: 9. September 2016, 11:58 Uhr

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der TU Dresden. Dessen Direktor, Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack gilt mein ganz besonderer Dank, einerseits für die beständige Förderung und Unterstützung meiner Arbeiten sowie die vielfältigen Anregungen und andererseits für das Gewähren von Freiräumen, eigene Ideen zu verfolgen.

Herrn Assoz. Prof. Dr. techn. Markus Schöberl von der Johannes Kepler Universität Linz danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und die freundliche Übernahme des zweiten Gutachtens.

Das Entstehen dieser Arbeit war geprägt von einer ausgesprochen kollegialen Atmosphäre. Hierfür möchte ich meinen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen recht herzlich Danken. Dr.-Ing. Torsten Knüppel, Dr.-Ing. Matthias Franke, Dr.-Ing. Jan Winkler, Klemens Fritzsche, Chenzi Huang, Mirko Franke und Stefan Ecklebe haben mir beim Auffinden sprachlicher, stilistischer und inhaltlicher Ungereimtheiten große Hilfe geleistet. An meinen langjährigen und meinen aktuellen Raumteiler Dr.-Ing. Torsten Knüppel und Klemens Fritzsche ergeht zudem ein spezieller Dank für die angenehme und kooperative Zusammenarbeit, sowie für die inspirierenden Fachdiskussionen an der Tafel. Den ausführlichen Gesprächen mit Univ.-Prof. Dr.-Ing. Frank Woittennek verdanke ich ebenfalls vielfältige Ideen und Einsichten.

Bedanken möchte ich mich auch bei den Herrn Professoren Kurt Reinschke und Joachim Rudolph, deren Lehrveranstaltungen mein Interesse für Regelungstheorie weckten und befeuerten.

Ebenfalls gilt mein Dank den zahlreichen Studierenden, die sich meiner Betreuung anvertraut haben, für die gute Zusammenarbeit.

Neben den positiven fachlichen und institutionellen Rahmenbedingungen hatte ich das Glück, auch durch mein soziales Umfeld vielfältige Unterstützung zu erfahren. Ganz besonders herzlich möchte ich meinen Eltern für ihr Verständnis und ihren Beistand danken. Meinen Freundinnen und Freunden danke ich für viele interessante Gespräche und Erlebnisse und die dadurch erfolgte gelegentlich sehr hilfreiche Relativierung aktueller mathematischer Schwierigkeiten.

Schlussendlich möchte ich mich auch bei den Lehrerinnen und Lehrern des (inzwischen leider geschlossenen) Gellert-Gymnasiums Hainichen bedanken, für das richtige Verhältnis aus Forderungen und Förderungen, für plausible Erklärungen der Welt und für die Anleitung zum kritischen Hinterfragen selbiger.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit ist der regelungstheoretischen Betrachtung von mechanischen Systemen mit mehr Freiheitsgraden als Stellgrößen gewidmet. Dabei werden Aspekte aus den Teilgebieten Modellbildung, Systemanalyse, Steuerungsentwurf und Reglerentwurf behandelt.

Den Ausgangspunkt bilden die aus dem Lagrange-Formalismus resultierenden Bewegungsgleichungen, für welche neben verschiedene partiell linearisierten Zustandsdarstellungen auch eine spezielle Byrnes-Isidori-Normalform eingeführt wird. Im Unterschied zu einer früher vorgeschlagenen ähnliche Normalform existiert diese „Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform“ immer.

Weiterhin wird die bedeutende Eigenschaft der differentiellen Flachheit im Zusammenhang mit mechanischen Systemen untersucht. Die bestehende Lücke zwischen den bekannten notwendigen und hinreichenden Flachheitsbedingungen bildet die Motivation zur Anpassung der Regelflächenbedingung auf mechanische Systeme in Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform.

Parallel dazu wird die Flachheitsanalyse auf Basis des sogenannten Variationssystems betrachtet. Dabei handelt es sich um ein System von 1-Formen, die durch Anwendung der äußeren Ableitung auf die impliziten Systemgleichungen entstehen. Äquivalent dazu können auch die in einer rechteckigen Polynommatrix bezüglich des Zeitableitungsoperators zusammengefassten Koeffizienten der Basisformen untersucht werden. Die Flachheit eines Systems ist nun gerade äquivalent zur Existenz einer unimodularen Vervollständigung dieser Matrix, welche zudem noch eine bestimmte Integrabilitätsbedingung erfüllen muss. Durch Anwendung des Satzes von Frobenius können aus diesen in der bisherigen Formulierung nur schwer überprüfbar Bedingungen deutlich einfachere hergeleitet werden. Für den Eingrößenfall ergibt sich dadurch eine erheblich Verringerung des Rechenaufwandes im Vergleich zum Referenzansatz. Im Mehrgrößenfall ist die Situation komplizierter: Durch das Fallenlassen der Unimodularitätsforderung und die Ausnutzung der speziellen Struktur mechanischer Systeme erhält man eine neue notwendige Bedingung für Flachheit, welche sich in endlich vielen Schritten auswerten lässt. Allerdings konnte mit dieser die vermutete Nichtflachheit für die untersuchten mechanischen Beispielsysteme nicht nachgewiesen werden.

Einen weiteren Untersuchungsgegenstand bildet das Konzept der Konfigurationsflachheit. Für diese Eigenschaft ist gefordert, dass ein flacher Ausgang existieren muss, der nur von den Konfigurationskoordinaten abhängt. Basierend auf theoretischen Überlegungen und dem Fehlen von Gegenbeispielen wird die Hypothese aufgestellt, dass für konservative mechanische Systeme Flachheit und Konfigurationsflachheit äquivalent sind. Für lineare mechanische Systeme kann diese Hypothese mit Hilfe der Kronecker-Normalform von Matrizenfamilien verifiziert werden.

Bezüglich des Entwurfs von Solltrajektorien werden neben der Darstellung bekannter Verfahren für lineare und für flache Systeme zwei weitere Ansätze genauer diskutiert. Der erste basiert auf der numerischen Lösung des aus dem Steuerungsentwurf resultierenden Randwertproblems. Dazu wird ein angepasstes Kollokationsverfahren konstruiert, welches die Elimination von Systemgrößen durch die explizite Berücksichtigung von Integratorketten ermöglicht, die bei partiell linearisierten Systemen stets auftreten. Unter bestimmten Bedingungen bewirkt dies eine erhebliche Reduktion der Rechenzeit. Der zweite Ansatz betrachtet die Überführung zwischen zwei Ruhelagen und beruht auf der Zeitumkehrsymmetrie, die alle konservativen mechanischen Systeme aufweisen. Er besteht aus mehreren Schritten: Zunächst wird für beide Ruhelagen eine Rückführung mit möglichst großem Attraktivitätsgebiet entworfen. Danach wird das System simulativ ausgehend von der Zielruhelage in der Startruhelage stabilisiert. Die so erhaltene Eingangstrajektorie kann dann bezüglich der Zeit invertiert werden, um das System aus der Startruhelage in die Nähe der Zielruhelage zu überführen, wo schließlich der entsprechende Regler aktiviert wird.

In praktischen Realisierungen von unteraktuierten Regelungssystemen treten auf Grund von Effekten wie trockener Reibung und Getriebeispiel oft Dauerschwingungen mit schwer vorhersagbaren und beeinflussbaren Parametern auf. Als Alternative zur klassischen Stabilisierung einer (theoretischen) Ruhelage wird deshalb eine Rückführung hergeleitet, welche für ein gegebenes lineares System einen stabilen Grenzzyklus mit vorgebarerer Frequenz und Amplitude asymptotisch stabilisiert.

Abstract

This thesis considers mechanical systems with more degrees of freedom than inputs from the perspective of control theory. It investigates various aspects of the topics modeling, systems analysis, feedforward and feedback controller design.

Point of departure are the equations of motion which result from the Lagrangian formalism. For them certain types of partially linearized state space representations are discussed and a special type of the Byrnes-Isidori normal form is introduced. In contrast to earlier proposed similar normal forms, this “Lagrange-Byrnes-Isidori normal form” always exists.

Furthermore, the important property of differential flatness is investigated in the context of mechanical systems. The existent gap between the known necessary and sufficient flatness conditions motivates the adaption of the ruled manifold condition to mechanical systems, which are in Lagrange-Byrnes-Isidori normal form.

In parallel, the flatness analysis based on the so called variational system is considered. This term refers to a system of differential 1-forms which arise by applying the exterior derivative to the implicit system equations. Equivalently, one may regard the coefficients w.r.t. the basis forms, which can be assembled to a rectangular polynomial matrix in the time derivative operator. From this point of view, the flatness of a system is equivalent to the existence of a unimodular completion of this matrix, which in addition satisfies a certain integrability condition. In the so far proposed formulation this condition is hard to falsify. However, by application of the Frobenius theorem, it is possible to derive new conditions, which are simpler to evaluate. For the single input case this results in easier and significantly shorter calculations, compared to the the reference approach. The situation for the multiple input case is more involved: By dropping the unimodularity requirement and exploiting the special structure of mechanical systems, one arrives at finitely evaluable conditions which are necessary for flatness. However, it was not possible to show the suspected non-flatness for the investigated examples.

Another related object of study is the concept of configuration flatness. This property requires that a flat output exists, which only depends on the configuration coordinates, but not on their time derivatives. Basing on theoretical considerations and the absence of counterexamples the hypothesis is formulated, that for conservative mechanical systems flatness and configuration flatness are equivalent. For linear mechanical systems this hypothesis can be verified by means of the Kronecker normal form of matrix pencils.

Concerning the design of feedforward controllers, different variants are discussed. Besides the well known methods for linear and flat systems two further approaches are studied. The first is based on the numerical solution of the boundary value problem, arising from the control design task. An adapted collocation method is constructed which allows to explicitly respect the integrator chains which always occur in partially linearized

mechanical systems. Under certain circumstances, this allows a significant reduction of computational effort and time.

The second approach considers the transition between two equilibrium points and relies on the time reversal symmetry, a property which all conservative mechanical systems admit. It consists of several steps: At first for each equilibrium point an asymptotically stabilizing feedback controller is designed, each of which should have a possibly large region of attraction. Next, the system is simulated with the target equilibrium as initial conditions and with the feedback controller, designed for the start equilibrium, activated. The so obtained input trajectory can be inverted w.r.t. time to perform the transition from the start equilibrium to the vicinity of the target equilibrium, where eventually the respective feedback controller is activated.

Due to dry friction or backlash, practical realizations of controlled underactuated mechanical systems often show sustained oscillations, whose parameters are hard to predict and to influence. Therefore, as an alternative to the classical stabilization of an (theoretical) equilibrium point, a feedback law is deduced, which for a given linear system asymptotically stabilizes a periodic orbit with specified frequency and amplitude.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Modellbildung und -darstellung	5
2.1	Grundlegende Annahmen und physikalische Einordnung	5
2.2	Lagrange-Formalismus und Zustandsraumdarstellung	7
2.3	Partielle Linearisierung und Byrnes-Isidori-Normalform	11
2.3.1	Kollokierte partielle Linearisierung	11
2.3.2	Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform	13
2.3.3	Partielle Linearisierung und BI-NF basierend auf allgemeinen Ko- ordinaten	16
3	Linearisierung um Ruhelagen	24
3.1	Bestimmung der Ruhelagen	24
3.2	Taylor-Linearisierung um eine Ruhelage	25
3.3	Stabilitäts-Analyse konservativer linearer mechanischer Systeme	26
3.4	Zur Steuerbarkeit linearer mechanischer Systeme	29
4	Exakte Linearisierung und differentielle Flachheit im Kontext mecha- nischer Systeme	31
4.1	Allgemeine Bemerkungen	31
4.2	Eingangs-Zustands-Linearisierung durch statische Rückführung	36
4.3	Eingangs-Zustands-Linearisierung durch dynamische Rückführung	41
4.4	Flachheitsanalyse auf Basis des Variationssystems	44
4.5	Steuerbarkeit für nichtlineare (mechanische) Systeme	53
4.6	Die Regelflächen-Bedingung für mechanischer Systeme	58
4.6.1	Direkte Anwendung	58
4.6.2	Elimination auf Basis der LBI-Normalform	61
4.7	Eine notwendige Integrabilitätsbedingung	70
4.7.1	Allgemeine Systeme	70
4.7.2	Anwendung auf mechanische Systeme	77
4.7.3	Resümee	86
4.8	Konfigurationsflachheit	87
4.8.1	Allgemeine mechanische Systeme	87
4.8.2	Konfigurationsflachheit linearer Systeme	88
5	Entwurf von Solltrajektorien	96
5.1	Motivation und Überblick	96

5.2	Trajektorienplanung für lineare Systeme	98
5.3	Trajektorienplanung für flache Systeme	100
5.4	Trajektorienplanung durch Bestimmung einer numerischen Näherungslösung der Randwertaufgabe	104
5.4.1	Schießverfahren	104
5.4.2	Kollokationsmethode: Übersicht	104
5.4.3	Konstruktion eines Kollokationsverfahrens zur Trajektorienplanung für nichtlineare Systeme	105
5.4.4	Berücksichtigung von Integrator Ketten	108
5.5	Trajektorienplanung mittels Zeitumkehrsymmetrie	112
5.5.1	Zeitumkehrsymmetrie für allgemeine nichtlineare MIMO-Systeme	113
5.5.2	Zeitumkehrsymmetrie für quasi-konservative mechanische Systeme	114
5.5.3	Ruhelagenüberführung mittels Zeitumkehrsymmetrie und Rückführung	116
6	Erzeugung von Grenzyklen mit vorgebbarer Frequenz und Amplitude durch Rückführung	120
6.1	Motivation und Überblick	120
6.2	Polplatzierung und reelle Jordan-Normalform	121
6.3	Asymptotische Stabilisierung eines Grenzyklus	125
6.4	Simulation und experimentelle Ergebnisse	130
7	Zusammenfassung und offene Fragen	136
7.1	Zusammenfassung	136
7.2	Offene Fragen und Ausblick	138
7.2.1	Nichtkollokierte partielle Linearisierung und endliche Fluchtzeit	138
7.2.2	Notwendige Flachheitsbedingung auf Basis der Integrierbarkeitsbedingung	138
7.2.3	Konfigurationsflachheit	139
7.2.4	Verbesserungen der Trajektorienbestimmung mittels RWA-Lösung	139
7.2.5	Allgemeinere Charakterisierung und Kriterium für Zeitumkehrsymmetrie	140
7.2.6	Attraktivitätsgebiet von Ruhelagen und periodischen Orbits	140
A	Ausgewählte mathematische und systemtheoretische Konzepte	141
A.1	Stabilität	141
A.2	Attraktivitätsgebiet	141
A.3	Erstes Integral	142
A.4	Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen: $GL(n)$	142
A.5	Positiv definite Matrix	142
A.6	Mannigfaltigkeit	143
A.7	Diffeomorphismus	143
A.8	Vektorfeld	143
A.9	Lie-Ableitung eines Skalarfeldes	144

A.10	Distribution	144
A.11	Lie-Klammer und Involutivität	145
A.12	Meromorphe Funktion	145
A.13	Differentialformen und äußere Ableitung	146
A.14	Integrabilitätsbedingungen für 1-Formen	147
A.15	Differentialformen auf Jet-Bündeln unendlicher Ordnung	149
A.16	Nichtkommutative Polynome in $\frac{d}{dt}$	151
A.17	Polynommatrizen und ihre Eigenschaften	152
	A.17.1 Zusammenhang zwischen Linksteilerfreiheit und Hyperregularität	158
	A.17.2 Überprüfung einer Polynommatrix auf Unimodularität	158
A.18	Vektor-Formen und Polynommatrizen mit differentialform-wertigen Einträgen	160
B	Ergänzende Detailrechnungen und Implementierungsaspekte	164
B.1	Existenzbedingung für passive und aktive Konfigurationskoordinaten	164
B.2	Beispiel zur Nichtexistenz der BI-Normalform aus [OS01] für bestimmte Systeme	172
B.3	Unimodulare Vervollständigung und Koeffizientenbestimmung für den Spezialfall $n_{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}n_{\mathbf{x}}$	172
B.4	Rangbestimmung von symbolischen Matrizen	174
	Symbolverzeichnis	178
	Literaturverzeichnis	181
	Abbildungsverzeichnis	194
	Verzeichnis implementierter Beispielrechnungen und weiterer Software	195

Kapitel 1

Einleitung

Von den verschiedenen Domänen der Physik ist die Mechanik vermutlich diejenige mit dem größten Einfluss auf die Erfahrungswelt des Menschen. Es überrascht deshalb nicht, dass die Untersuchung mechanischer Systeme auch in der Regelungstechnik bzw. -theorie eine große Rolle spielt. So wird beispielsweise die Entwicklung des Fliehkraftreglers für Dampfmaschinen als Beginn der Regelungstechnik [Lud95a, Abschnitt 1.1] oder zumindest als wesentliches Element [Rei14, Abschnitt 1.1] in ihrer Entwicklung zum eigenständigen Wissenschaftszweig gesehen. In der jüngeren Vergangenheit findet die Schnittmenge von Regelungstechnik und Mechanik z.B. in den Feldern Robotik sowie Luft- und Raumfahrttechnik Anwendung.

Aus regelungstheoretischer Sicht ist die Untersuchung von mechanischen Systemen, die über weniger Stellgrößen als Freiheitsgrade verfügen, besonders interessant. Solche sogenannten *unteraktuierten Systeme* waren in den letzten Jahren Anlass für die Veröffentlichungen einer Vielzahl von Fachbüchern und Aufsätzen, siehe z.B. [SB94, Spo98, FL01, CBCDB14, LY13, Sei14].

Die Differenz zwischen der Zahl der Freiheitsgrade und Stellgrößen kann unterschiedliche Ursachen haben. Bei vielen Typen von Luftfahrzeugen ist beispielsweise die Unteraktuiertheit von der Konstruktion vorgegeben. Bei anderen mechanischen Systemen ist die Berücksichtigung von (örtlich konzentrierten) Elastizitäten in der Modellbildung oder der Verzicht auf Stellglieder, etwa zur Kosten- oder Gewichtsreduktion oder zur Modellierung eines Aktorausfalls, ausschlaggebend. Eine aus Anwendungssicht bedeutende Rolle nehmen dabei unteraktuierte Manipulatoren [DLIMO02] ein.

Neben möglichen Anwendungen liegt aus Sicht des Autors eine weitere wesentliche Motivation für die Beschäftigung mit unteraktuierten Systemen in ihrer Anschaulichkeit und dem daraus resultierenden didaktischen Potential begründet. Bestes Beispiel dafür ist das inverse Pendel mit verschieblichem Aufhängepunkt als klassisches „Benchmark-System“ [Bou13]. Einerseits lässt sich die Dynamik des Systems auf qualitativer Ebene intuitiv erfassen, andererseits können eine Vielzahl von Methoden und Konzepten der modernen modellbasierten Regelungstheorie darauf angewendet werden: angefangen beim Aufstellen des mathematischen Modells, über die Linearisierung um Ruhelagen samt Stabilitätsanalyse, partielle Eingangs-Ausgangs-Linearisierung, die Untersuchung der Steuerbarkeit, die Planung von Trajektorien bis zum Entwurf von stabilisierenden Rückführungen. Auch andere unteraktuierte Beispielsysteme haben eine hohe Verbreitung in der Fachliteratur gefunden, so etwa das „Ball and Beam System“ oder das unter der

Bezeichnung „PVTOL“ bekannte ebene Modell eines Senkrechtstarters. In jüngerer Zeit hat z.B. das in [GEK13] untersuchte Aufschwingen eines Dreifachpendels eindrucksvoll die Leistungsfähigkeit regelungstheoretischer Methoden (im Verbund mit entsprechenden technischen Voraussetzungen) gezeigt.

Trotz der Bedeutung mechanischer Systeme für die Regelungstheorie und trotz vieler theoretischer Untersuchungsansätze sowie zahlloser erfolgreicher Anwendungen, gibt es bisher kein in sich geschlossenes Theoriegebäude für diese Systemklasse. Vielmehr steht eine Reihe von Ergebnissen mit beschränkter Aussagekraft zur Verfügung, z.B. Methoden, die sich für bestimmte Systeme anwenden lassen und für andere nicht. Exemplarisch sei hier die exakte Eingangs-Zustands-Linearisierung genannt. Hinzu kommen Eigenschaften, für die zwar jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen bekannt sind, jedoch kein Kriterium, d.h. ein gleichzeitig notwendige und hinreichende Bedingung. Prominentes Beispiel hierfür ist die sogenannte differentielle Flachheit [FLMR95]. Für einige mechanische Systeme ist bekannt, dass sie flach sind, für andere kann man zeigen, dass sie es nicht sind, aber im allgemeinen Fall ist der Flachheitsstatus unklar. Die Situation ist hier bei mechanischen Systemen nicht anders als bei allgemeinen nichtlinearen Systemen. Erstrebenswert wäre es dagegen, die sich aus den Bewegungsgleichungen ergebende Struktur, welchen allen mechanischen Systemen gemeinsam ist, auszunutzen, um damit stärkere Aussagen treffen zu können und somit zum Entstehen eines Theoriegebäudes beizutragen.

Zielstellung der vorliegenden Arbeit ist es in diesem Sinne, die aus Sicht des Autors wichtigsten bekannten Ergebnisse zur Analyse, sowie zum Entwurf von Steuerungen und Regelungen für unteraktuierte mechanische Systeme zusammenzufassen, sowie darauf aufbauende eigene ergänzende Detailergebnisse darzustellen.

Gliederung der Arbeit und eigene Beiträge

Die Gliederung der Arbeit orientiert sich an den typischen Teilschritten bei der Bearbeitung einer regelungstechnischen Aufgabe: Modellbildung, Analyse, Steuerungsentwurf und Reglerentwurf.

Kapitel 2 beschreibt die Herleitung eines mathematischen Modells für ein konzentriert-parametrisches mechanisches System mit holonomen Zwangsbedingungen auf Basis des Lagrange-Formalismus. Danach werden verschiedene Zustandsdarstellungen und ihre Eigenschaften diskutiert, von denen einige aus der Literatur seit längerem bekannt sind (z.B. die (nicht-)kollokierte partielle Linearisierung), andere dagegen bisher noch nicht betrachtet wurden, insbesondere die Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform. Zudem wird das Konzept der Trägheitskopplung gegenüber bisherigen Fassungen präzisiert.

Gegenstand des dritten Kapitels ist die Untersuchung linearer bzw. um eine Ruhelage linearisierter mechanischer Systeme. Seine Hauptergebnisse sind je eine Aussage zur Stabilität von Ruhelagen konservativer Systeme sowie zum Zusammenhang zwischen Steuerbarkeit und der Dimension der Ruhelagenmannigfaltigkeit.

Das Kapitel 4 widmet sich dem Themenkomplex *exakte Linearisierung durch Rückführung bzw. Flachheit*. Das oben erwähnte Fehlen eines Flachheitskriteriums wird zum Anlass genommen, die bisher bekannten hinreichenden und notwendigen Bedingungen

darzustellen und auf mechanische Beispielsysteme anzuwenden. Für die Regelflächenbedingung wird gezeigt, dass diese sich sehr zweckmäßig auf die in Kapitel 2 eingeführte Systemdarstellung in Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform anwenden lässt. Im Anschluss wird eine, nach Kenntnis des Autors neue, notwendige Bedingung für die Flachheit eines allgemeinen Systems hergeleitet und ihre prinzipielle Anwendbarkeit an einem akademischen Eingrößensystem nachgewiesen. Speziell für mechanische Systeme ergeben sich Vereinfachungen, so dass eine auch für den Mehrgrößenfall vergleichsweise leicht auswertbare notwendige Flachheitsbedingung resultiert. Allerdings konnte kein Mehrgrößensystem gefunden werden, dessen Nichtflachheit mit diesem Ansatz zu zeigen ist.

Im letzten Abschnitt des vierten Kapitels wird das Konzept der Konfigurationsflachheit betrachtet. Ausgehend von der durch viele Beispiele unterstützten Hypothese, dass für konservative Systeme Flachheit und Konfigurationsflachheit äquivalent sind, wird gezeigt, dass dies zumindest für lineare Systeme der Fall ist.

Kapitel 5 befasst sich mit der Berechnung von Trajektorien. Zunächst wird die Trajektorienplanung für lineare und für flache Systeme in gängiger Form dargestellt. Im Anschluss wird ein aus der Literatur bekannter Ansatz, der auf der Lösung einer nichtlinearen Randwertaufgabe basiert, aufgegriffen und inklusive des unterlagerten numerischen Algorithmus formuliert. Dieser wird dann so erweitert, dass im Systemmodell vorhandene Integratorketten explizit berücksichtigt werden können, was sich auf Rechenzeit und Konvergenz auswirkt. Den Abschluss bildet die Vorstellung eines auf der Zeitumkehrsymmetrie konservativer mechanischer Systeme basierenden Ansatzes zur Trajektorienplanung.

Als Alternative zu dem üblichen Vorgehen, mittels einer Rückführung eine Trajektorie und als Spezialfall davon eine Ruhelage zu stabilisieren, stellt das Kapitel 6 die Stabilisierung eines geschlossenen Orbits, d.h. die Erzeugung eines stabilen Grenzzyklus, vor. Der grundlegende Ansatz wird für allgemeine lineare Systeme hergeleitet und dann simulativ und experimentell auf ein mechanisches System angewendet.

Das abschließende Kapitel 7 fasst den Inhalt und die Ergebnisse der Arbeit zusammen und listet die sich daraus ergebenden offenen Fragen auf.

Im Anhang A werden die für die Arbeit notwendigen mathematischen Konzepte kurz erklärt bzw. wird auf die entsprechende Literatur verwiesen. Zusätzlich werden einige Zusammenhänge, welche die Grundlage für die Argumentation in Kapitel 4 bilden, ausführlicher erläutert. Das betrifft beispielsweise den Zusammenhang zwischen der Smith-Form und der unimodularen Vervollständigung einer Polynommatrix.

Anhang B enthält schließlich einige Detailrechnungen und Überlegungen zu Implementierungsaspekten, auf die im Haupttext verwiesen wird. Erwähnenswert ist dabei die Herleitung eines Kriteriums, wann für ein mechanisches System eine Aufspaltung in aktuierte und nichtaktuierte Konfigurationskoordinaten möglich ist.

Beispiel-Konzept und Software

Diese Arbeit verfolgt das Ziel, ein möglichst hohes Maß an Nachvollziehbarkeit und Reproduzierbarkeit zu erreichen. Da viele der untersuchten Beispielsysteme auf umfangreiche Gleichungen führen, ist ein klassisches Nachrechnen der entsprechenden Ergebnisse

nicht praktikabel. Stattdessen wurden, angeregt durch [IHGC12], alle Beispiele mit aufwendigen Rechnungen als sogenannte *IPython-Notebooks* implementiert, aufbereitet und digital veröffentlicht. Dabei handelt es sich um ein Dokumentenformat in dem ausführbarer Quellcode zusammen mit den daraus resultierenden Ausgaben und zusätzlicher Dokumentation in Form von Text, Formeln und Grafiken abgespeichert wird. Diese Notebooks können einerseits *gelesen* werden und geben dabei Aufschluss über die konkret ausgeführten Rechenschritte und Zwischenresultate. Andererseits können sie auch erneut *ausgeführt* werden und erlauben so die Reproduktion der Ergebnisse bzw. die Anpassung für weitere Untersuchungen. Alle diese Notebooks sind in spitzen Klammern referenziert (wie z.B. [$\langle 1 \rangle$]) und in einem eigenen Verzeichnis ab S. 195 aufgelistet sowie verlinkt. Im Text werden für die Beispiele dann nur die wesentlichen Zwischen- und Endergebnisse eingefügt.

Neben einigen etablierten Software-Bibliotheken für symbolische und numerische Mathematik, werden in den Beispiel-Rechnungen die drei vom Autor wesentlich mitentwickelten Pakete `sympytools`, `pycartan` und `PyTrajectory` verwendet. Für diese ist auf S. 197 eine kurze Beschreibung und ein Link zu den Quelltexten angegeben.

Kapitel 2

Modellbildung und -darstellung

2.1 Grundlegende Annahmen und physikalische Einordnung

Bezogen auf den Gegenstand dieser Arbeit ist zunächst die Frage zu klären, was mit der Bezeichnung „mechanisches System“ konkret gemeint ist. Unter „Mechanik“ wird üblicherweise die Lehre von der Bewegung physikalischer Körper und den damit verbundenen Kräften verstanden [GPS06]. Betrachtet man erdnahe Körper, deren Massen und Abmessungen sich nur um einige Größenordnungen von den für menschliche Alltagserfahrungen typischen Werten 10^0kg bzw. 10^0m unterscheiden und keine Geschwindigkeiten nahe der Vakuumlichtgeschwindigkeit erreichen, so spricht man in den Ingenieurwissenschaften von der „technischen Mechanik“. Effekte der relativistischen Mechanik oder der Quantenmechanik sind dann für eine hinreichend genaue mathematische Beschreibung der realen Vorgänge nicht zu berücksichtigen, ebensowenig die Ortsabhängigkeit der Gravitation. Eine weitere und zugleich deutlich einschränkendere Vereinfachung ist die Annahme *starrer* Körper. D.h. die betrachteten massebehafteten Körper können sich im Modell nicht verformen und umgekehrt besitzen elastische Elemente (Federn) im Modell keine Masse.

Holonomie, Nichtholonomie und Integrierbarkeit

Modelle technisch relevanter mechanischer Systeme bestehen oft aus mehreren Starrkörpern, die miteinander und mit der Umgebung verbunden sind und dabei über verallgemeinerte Kräfte¹ in Wechselwirkung treten. Diese Verbindungen werden Zwangsbedingungen genannt, wobei man zwischen *holonomen*² und *nichtholomen* Zwangsbedingungen unterscheidet. Erstere schränken die Konfiguration des mechanischen Systems ein, d.h. sie schließen bestimmte räumliche Anordnungen der beteiligten Körper aus. Nichtholome Zwangsbedingungen hingegen verhindern nur bestimmte Änderungen der Konfiguration.

¹Wenn keine Unterscheidung zwischen translatorisch wirkenden Kräften und rotatorisch wirkenden Drehmomenten notwendig ist, werden hier beide Typen von physikalischen Größen unter der Bezeichnung „Kraft“ zusammenfasst, siehe z.B. [BL04, Abschnitt 4.4] und [Rei14, Abschnitt 2.5.1].

²Diese Begriffsbildung geht auf Heinrich Hertz zurück und bedeutet so viel wie „ganz-gesetzlich“ [B⁺03, Kap. 1].

Ein einfaches Beispiel für den holonomen Fall ist ein Zug, der auf einer Schiene fährt. Die möglichen Konfigurationen dieses Systems sind global durch den Verlauf der Schiene vorgegeben. Ein Standardbeispiel für den nichtholonomen Fall ist ein kinematisches Fahrzeugmodell, bei dem das seitliche Rutschen der Räder (per Modellannahme) ausgeschlossen ist. Mit anderen Worten, die vektorielle Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu den Radachsen verschwindet stets per definitionem. Offensichtlich stellt diese Zwangsbedingung anders als die Schiene aber keine globale Einschränkung der Konfiguration des Fahrzeugs dar.

Mathematisch lässt sich dieser Unterschied auf die Frage der Integrabilität zurückführen: Holonome Zwangsbedingungen liegen entweder schon auf Ebene der Konfigurationsvariablen vor oder, falls sie bei der Modellbildung als geschwindigkeitsabhängige Gleichungen auftreten, kann man sie durch Integration in eine solche Darstellung umformen. Nichtholonome Zwangsbedingungen können nicht integriert werden [B⁺03, Kap. 1], d.h. es gibt keinen mathematischen Ausdruck, der nur von den Konfigurationen abhängt, aus dem man die betreffende Zwangsbedingung durch Ableitung nach der Zeit herleiten kann. In der vorliegenden Arbeit werden in diesem (mechanischen) Sinne nur holonome Systeme betrachtet.

Der Zusammenhang zwischen Integrabilität und Holonomie wird in der regelungstechnischen Literatur teilweise als Begründung für eine verwandte, aber dennoch zu unterscheidende Verwendung der Bezeichnung „nichtholonom“ herangezogen. Unter bestimmten Umständen weist ein dynamisches System eine sogenannte Erhaltungsgröße auf, d.h. eine Funktion der Systemvariablen, deren Wert nur von den Anfangsbedingungen abhängt und sich unabhängig vom Verlauf der Eingangssignale entlang der Trajektorien des Systems nicht ändert. Man spricht auch von einem „ersten Integral“, siehe Abschnitt A.3 bzw. [Arn01, Abschnitt 10.5]. Beispiele für solche Erhaltungsgrößen sind etwa der Impuls oder Drehimpuls eines Teilsystems, siehe auch Beispiel 4.34.

Lässt sich aus einer skalaren Bewegungsgleichung keine Erhaltungsgröße konstruieren, d.h. lässt sich die Gleichung nicht integrieren, so wird diese Gleichung mitunter als „nichtholonome Zwangsbedingungen zweiter Ordnung“ bezeichnet, siehe z.B. [ON91], [OS01, Abschnitt 2.4], [BS06, Kapitel 1]. In einigen Beiträgen wird die Bezeichnung „nichtholonom“ von diesen (vermeintlichen) Zwangsbedingungen auch auf das ganze System übertragen, siehe z.B. [Mor01]. Aus Sicht der Modellbildung handelt es sich dabei aber um holonome Systeme. Die Zeitableitungen der zur Beschreibung der Konfiguration notwendigen Koordinaten unterliegen, anders als beispielsweise beim oben diskutierten Fahrzeugmodell, keinen kinematischen Zwangsbedingungen.

Bemerkung 2.1. Während die Existenz eines ersten Integrals aus der Perspektive der Physik bzw. der theoretischen Mechanik typischerweise begrüßt wird, weil es die Vorhersage des dynamischen Verhaltens eines Systems erheblich vereinfachen kann, ist eine solche Eigenschaft für eine gezielte Beeinflussung des Systems natürlich hinderlich. Das Auftreten von Systemgrößen, die nur von den Anfangswerten abhängen, schließt damit eine vollständige Steuerbarkeit des Systems aus, siehe auch Abschnitt 4.5. \triangleleft

2.2 Lagrange-Formalismus und Zustandsraumdarstellung

Nachdem die betrachtete Systemklasse abgegrenzt ist, soll der in dieser Arbeit verwendete Modellbildungsansatz mittels der „Lagrange’schen Gleichungen 2. Art“, dokumentiert werden. Ausgangspunkt ist die Menge \mathcal{Q} der möglichen **Konfigurationen** des betrachteten mechanischen Systems. Unter Konfiguration wird dabei die Lage und die Orientierung der beteiligten Starrkörper verstanden. Mathematisch lässt sich \mathcal{Q} als glatte Mannigfaltigkeit auffassen, weshalb die Bezeichnung **Konfigurationsmannigfaltigkeit** üblich ist, siehe [BL04, Abschnitt 4.1] bzw. Abschnitt A.6. Die natürliche Zahl $n := \dim(\mathcal{Q})$ entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems. Man kann also mit Hilfe von n reellen Variablen

$$\boldsymbol{\theta} := (\theta_1, \dots, \theta_n)^T, \quad (2.1)$$

die Konfiguration des Systems eindeutig beschreiben, was der Wahl von (lokalen) Koordinaten auf \mathcal{Q} entspricht. Die Systemgrößen $\boldsymbol{\theta}$ werden dementsprechend als **Konfigurationskoordinaten** bezeichnet. Obwohl die Konfigurationsmannigfaltigkeit im Allgemeinen nicht isomorph zum \mathbb{R}^n ist, hat sich dennoch³ die Notation $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{Q}$ etabliert, siehe z.B. [Spo98, OS01, LY13]. Um die zeitliche Änderung der Konfiguration zu modellieren, werden die Konfigurationskoordinaten als Zeitfunktionen aufgefasst $\boldsymbol{\theta}(t) := (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))^T$, und ihre zeitlichen Änderungen als **(Konfigurations-)Geschwindigkeiten** bezeichnet.

Die kinetische und die potentielle Energie eines Systems, ausgedrückt durch die als differenzierbar vorausgesetzten Funktionen $T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ und $V(\boldsymbol{\theta})$, stellen wichtige physikalische Beschreibungsgrößen dar. Weil die kinetische Energie des Systems jeweils vom Betragsquadrat der Geschwindigkeitsvektoren der einzelnen (gedachten) Massenpunkte abhängt (siehe z.B. [GPS06, Abschnitt 1.4]), können in $T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ nur Terme zweiter Ordnung bezüglich $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ auftreten. Die als **Massenmatrix** bezeichnete Hesse-Matrix dieser Funktion bezüglich $\dot{\boldsymbol{\theta}}$,

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_1 \partial \dot{\theta}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_n \partial \dot{\theta}_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_1 \partial \dot{\theta}_n} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_n \partial \dot{\theta}_n} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

ist somit unabhängig von $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ und außerdem symmetrisch. Es gilt also

$$T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.3)$$

Da für ein physikalisch sinnvolles Modell

$$T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

³Streng genommen müsste man zwischen einer Konfiguration (als Element von \mathcal{Q}) und ihrer Darstellung in den gewählten lokalen Koordinaten unterscheiden. Der daraus resultierende zusätzliche Notationsaufwand mit eigenen Symbolen für die sogenannten Kartenabbildungen und Kartengebiete, siehe z.B. [Jän05, Abschnitt 1.1] ist jedoch für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Systeme wie auch in den zitierten Quellen überflüssig. Eine mathematisch strenge Behandlung der Konfigurationsmannigfaltigkeit ist z.B. in [BL04] zu finden.

erfüllt sein muss, ist $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ darüber hinaus stets positiv definit und somit auch regulär, siehe auch Abschnitt A.5.

Dem üblichen Vorgehen folgend (siehe z.B. [GPS06, Abschnitt 1.5] bzw. [Rei14, Abschnitt 2.5.3]) wird die Lagrange-Funktion

$$L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - V(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.5)$$

als Differenz der kinetischen Energie⁴ T und der potentiellen Energie V eingeführt, mit der die Bewegungsgleichungen direkt angegeben werden können:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Dabei ist Q_i die bezüglich der Koordinate θ_i durch externe Effekte eingeprägte verallgemeinerte Kraft. Mit diesen Größen werden sowohl die frei vorgebbaren äußeren Kräfte – d.h. die Stellgrößen – erfasst, als auch Reibungskräfte, die aus dem System selbst herrühren. Eine strenge Herleitung der Gleichung (2.6) läuft auf die Anwendung der Variationsrechnung und das Prinzip der virtuellen Arbeit hinaus, siehe z.B. [Nol04, Abschnitt 1.3.4]. Durch geeignete Wahl der Koordinaten $\boldsymbol{\theta}$ lassen sich die Ausdrücke für Q_1, \dots, Q_n , jedoch deutlich einfacher aus der Anschauung gewinnen.

Bemerkung 2.2. In der Literatur werden Systeme mit einer Lagrange-Funktion der Form $L = T - V$ als „simple mechanische Systeme“ bezeichnet (siehe z.B. Kapitel 4 und speziell Bemerkung 4.61 in [BL04]). Diese Begriffswahl impliziert die Existenz von mechanischen Systemen, deren Lagrange-Funktion eine andere Struktur hat. Nach Kenntnis des Autors besitzen jedoch alle relevanten Beispiele diese Struktur. In der vorliegenden Arbeit wird diese deshalb für alle mechanischen Systeme vorausgesetzt. <

Bei (2.6) handelt es sich um ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGLn) zweiter Ordnung, die im allgemeinen miteinander verkoppelt sind. Spaltet man den Vektor der äußeren Kräfte entsprechend

$$(Q_1 \quad \dots \quad Q_n)^T = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} - \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.7)$$

in einen eingangsabhängigen und einen dissipativen Anteil auf, so ergibt sich aus (2.6) die für die regelungstheoretische Analyse typische Matrix-Darstellung der Bewegungsgleichungen [SB94, Spo98, OS01, CBCDB14]

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau}. \quad (2.8)$$

Dabei enthält der Vektor $\boldsymbol{\tau}$ die von den m unabhängigen Eingängen (Aktoren) eingepprägten Kräfte τ_1, \dots, τ_m , welche über die $n \times m$ -Matrix $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ den einzelnen Differentialgleichungen zugeordnet werden. Weiterhin bezeichnet \mathbf{M} die oben eingeführte

⁴Genauer gesagt handelt es sich um die sogenannte kinetische Koenergie $T^*(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$, allerdings ist diese für die hier betrachteten Systeme der nicht-relativistischen Mechanik identisch zur kinetischen Energie [Jan10, Abschnitt 2.3].

Massenmatrix, der Vektor \mathbf{C} beschreibt die Wirkung von Zentrifugal- bzw. Corioliskraft und der Vektor \mathbf{K} erfasst die aus der potentiellen Energie abgeleiteten konservativen Kräfte (Gravitation, Elastizität) sowie die aus den $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ herrührenden dissipative Kräfte (Reibung). Die Zusammenhänge dieser Ausdrücke mit der Lagrange-Funktion (2.5) lauten komponentenweise (siehe z.B. [MLS94, Abschnitt 3.2])

$$(\mathbf{M})_{ij}(\boldsymbol{\theta}) := \frac{\partial^2 T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \dot{\theta}_i \partial \dot{\theta}_j}, \quad (2.9a)$$

$$(\mathbf{C})_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) := \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \theta_i}, \quad (2.9b)$$

$$(\mathbf{K})_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) := \frac{\partial V(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} + (\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}))_i, \quad (2.9c)$$

wobei aus Lesbarkeitsgründen diese Abbildungen in den nachfolgenden Verwendungen oft auch ohne Argumente geschrieben werden.

Für $m > n$ gibt es mehr Aktoren als Freiheitsgrade. Während eine solche Redundanz aus praktischer Sicht sinnvoll sein kann, ist sie aus regelungstheoretischer Sicht ungünstig. In einem solchen Fall sollte entweder das Modell um entsprechende elastische Verbindungen erweitert, oder die redundanten Aktoren zu einem virtuellen Aktor zusammengefasst werden. Im Folgenden gelten deshalb immer die Annahmen

$$m \leq n \quad \text{und} \quad (2.10a)$$

$$\text{rank}(\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})) = m. \quad (2.10b)$$

Hätte \mathbf{B} keinen vollen Spaltenrang, besäße es linear abhängige Spalten. Das wäre wiederum gleichbedeutend mit einer Aktor-Redundanz.

Im Fall von $m = n$ spricht man von vollständig direkt gesteuerten [Rei14, Abschnitt 7.2.3] oder **vollständig aktuierten** Systemen. Man kann leicht zeigen, dass diese Systemklasse durch eine statische Zustandsrückführung exakt linearisierbar (und damit differentiell flach) ist, siehe Definition 4.63 und Bemerkung 4.65. Aus regelungstheoretischer Sicht ist die Behandlung solcher Systeme vergleichsweise einfach. Beispielsweise sind mit der Methode der berechnete Momente (“Computed Torque Method”) [MLS94, Abschnitt 5.2] übliche Steuerungs- und Regelungsaufgaben prinzipiell algorithmisch lösbar⁵, weshalb sie in dieser Arbeit keine wesentliche Rolle spielen.

Für ein System mit $m < n$, ist die Bezeichnung **unteraktuiertes mechanisches System** üblich, siehe z.B. [ON91, Spo98, FL01, CBCDB14]. Die im Übersichtsbeitrag [SB94] verwendete Bezeichnung „super-articulated mechanical systems“ (etwa: übergelenkige mechanische Systeme) hat sich dagegen nicht durchgesetzt.

Oft wird in der Literatur eine Aufspaltung in ein vollständig aktuiertes und ein (damit verkoppeltes) nicht aktuiertes Teilsystem vorgenommen. Das heißt, die Konfigurationsko-

⁵Natürlich können Aspekte wie Beschränkungen, Singularitäten, Parameterunbestimmtheiten etc. trotzdem erhebliche Herausforderungen darstellen.

ordinaten $\boldsymbol{\theta}$ und die Stellgrößen $\boldsymbol{\tau}$ werden so gewählt, dass mit der Unterteilung

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1 \ \dots \ \theta_{n-m} \ \theta_{n-m+1} \ \dots \ \theta_n)^T = \underbrace{(p_1 \ \dots \ p_{n-m})^T}_{=:\mathbf{p}^T} \underbrace{(q_1 \ \dots \ q_m)^T}_{=:\mathbf{q}^T} \quad (2.11)$$

die Gleichung (2.8) die spezielle Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{M}_{12}^T(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{M}_{22}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{C}_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

annimmt, siehe z.B. [ON91, Spo98, RvdSMK99, CBCDB14, LY13]. Auch für die weiteren Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit ist diese Darstellung zweckmäßig, weshalb ihre Existenz im Folgenden vorausgesetzt wird. Die Frage, ob eine solche Darstellung überhaupt existiert, wurde nach Kenntnis des Autors in der Literatur bisher nicht gestellt. Da für die allermeisten unteraktuierten Beispielsysteme die Zuordnung von Stellgrößen zu einzelnen (Gelenk-)Koordinaten offensichtlich ist und somit die Voraussetzung von (2.12) keine große Einschränkung darstellt, ist sie auch weniger relevant. Der Vollständigkeit halber wird diese Frage im Abschnitt B.1 durch Satz B.1 beantwortet. Letztlich ist die Integrabilität der von den Zeilen von $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})^T$ aufgespannten Kodistribution $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})^T d\boldsymbol{\theta}$ ausschlaggebend.

Die separierte Darstellung (2.12) ermöglicht nun folgende Begriffsfestlegung.

Definition 2.3. Ein mechanisches System der Form (2.12) heißt **konservativ** wenn die beiden Jacobimatrizen $\frac{\partial \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}$, $i = 1, 2$ identisch verschwinden. Gilt lediglich $\frac{\partial \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{0}$, so heißt das System **quasi-konservativ**. \triangleleft

Mit anderen Worten: Quasi-Konservativität ist eine Verallgemeinerung von Konservativität, wobei nicht-konservative Terme (z.B. der Einfluss von Reibung in Gelenken) durch entsprechende Wahl der Stellgrößen kompensiert werden können.

Gleichung (2.12) stellt ein System von n verkoppelten DGLn 2. Ordnung dar. Die Regularität der Massenmatrix erlaubt es stets, dieses Gleichungssystem nach $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ aufzulösen,

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(-\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \end{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \right) =: \mathbf{f}_{\ddot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{G}_{\ddot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\tau}, \quad (2.13)$$

d.h. die Beschleunigungen aus den eingprägten verallgemeinerten Kräften, den Konfigurationskoordinaten und den Geschwindigkeiten zu berechnen. Basierend auf der Unterteilung in „passive“ Koordinaten \mathbf{p} und „aktive“ Koordinaten \mathbf{q} wird die folgende Symbolik eingeführt:

$$n_{\mathbf{p}} := \dim(\mathbf{p}) = n - m \quad (2.14a)$$

$$n_{\mathbf{q}} := \dim(\mathbf{q}) = m \quad (2.14b)$$

$$\mathbf{u} := \dot{\mathbf{p}} \quad (\text{Geschwindigkeiten der passiven Freiheitsgrade}) \quad (2.14c)$$

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{Geschwindigkeiten der aktiven Freiheitsgrade}) \quad (2.14d)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \text{col}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (2.14e)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \text{col}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (2.14f)$$

Setzt man nun den Zustandsvektor

$$\mathbf{x} := \text{col}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \text{col}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.15)$$

an, so erhält man aus den n definitorischen Gleichungen $\dot{x}_i = x_{n+i}$, $i = 1, \dots, n$ und (2.13) die Zustandsdarstellung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{f}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{\ddot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{G}(\mathbf{x})} \boldsymbol{\tau} \quad (2.16)$$

bzw. in allgemeiner eingangsaffiner Form geschrieben:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}. \quad (2.17)$$

2.3 Partielle Linearisierung und Byrnes-Isidori-Normalform

2.3.1 Kollokierte partielle Linearisierung

Aus Gleichung (2.12) ist direkt ersichtlich, dass die untere Hyperzeile durch entsprechende Wahl der Eingangsgrößen $\boldsymbol{\tau}$ immer erfüllbar ist. Anders ausgedrückt: Statt der verallgemeinerten Stellkräfte kann man ebenso die zu den aktuierten Koordinaten gehörenden Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}} =: \mathbf{a}$ vorgeben, d.h. als neue Eingangsgrößen auffassen. Daraus resultiert die Systemdarstellung

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{u} \quad (2.18a)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (2.18b)$$

$$\ddot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})) + \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{a} \quad (2.18c)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}. \quad (2.18d)$$

Die positive Definitheit von \mathbf{M} sichert dabei die Existenz von \mathbf{M}_{11}^{-1} , siehe Abschnitt A.5. Durch Einsetzen von (2.18c) in die zweite Hyperzeile von (2.12) ergibt sich das von $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ und \mathbf{a} abhängige Stellgesetz

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\mathbf{M}_{22} - \mathbf{M}_{12}^T \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} \right) \mathbf{a} - \mathbf{M}_{12}^T \mathbf{M}_{11}^{-1} (\mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1) + \mathbf{C}_2 + \mathbf{K}_2. \quad (2.19)$$

Mit anderen Worten, diese vom Zustand (2.15) abhängige Rückführung überführt (2.12) in die partiell linearisierte Darstellung (2.18). Sie heißt deshalb auch *linearisierende Rückführung*.

Obwohl die rechte Seite von (2.18c) in der angegebenen allgemeinen Form ähnlich umfangreich aussieht, wie die rechte Seite von (2.13), ergeben sich für konkrete Systeme meist deutliche einfachere Ausdrücke, wie das folgende Beispiel illustriert.

Beispiel 2.4 (Unteraktuierter ebener Zweigelenkmanipulator; Implementierung: $\{\langle 1 \rangle\}$). Betrachtet wird das in Abbildung 2.1 dargestellte mechanische System mit zwei rotatorischen Freiheitsgraden ($n_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{q}} = 1$).

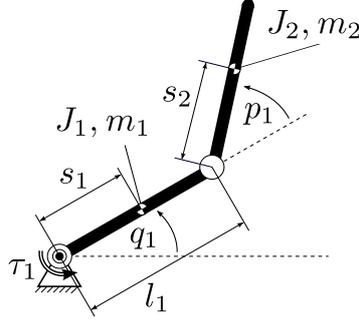


Abbildung 2.1: Ebener unteraktuierter Zweigelenkmanipulator. Das System besteht aus zwei Körpern, die untereinander bzw. mit der Umgebung durch Drehgelenke mit parallelen Achsen verbunden sind. Es wird außerdem angenommen, dass die Drehachsen parallel zur Gravitationsrichtung liegen, sodass die Schwerkraft keinen Einfluss hat. In dem mit der Umgebung verbundenen Drehgelenk wirkt die Stellgröße τ_1 . Das Drehgelenk zwischen den beiden Gliedern ist nicht aktuiert.

Mit den Abkürzungen

$$M_1 := J_1 + m_1 s_1^2 + m_2 l_1^2, \quad M_2 := J_2 + m_2 s_2^2, \quad M_3 := m_2 l_1 s_2 \quad (2.20)$$

lauten die Bewegungsgleichungen in der Form (2.12)

$$\begin{pmatrix} M_2 & M_2 + M_3 \cos p_1 \\ M_2 + M_3 \cos p_1 & M_1 + M_2 + 2M_3 \cos p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{q}_1 \end{pmatrix} + M_3 \sin p_1 \begin{pmatrix} \dot{q}_1^2 \\ -2\dot{p}_1 \dot{q}_1 - \dot{p}_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Daraus resultiert durch Linksmultiplikation mit $\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ und Einführung des Vektors $\mathbf{x} := (p_1 \ q_1 \ u_1 \ v_1)^T$ die Zustandsdarstellung bezüglich des Eingangs $\boldsymbol{\tau}$ (vgl. (2.16))

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ M_3 \sin p_1 \frac{((M_2 + M_3 \cos p_1)(u_1^2 + 2u_1 v_1) + v_1^2 (M_1 + M_2 + 2M_3 \cos p_1))}{-M_1 M_2 + M_3^2 \cos^2 p_1}} \\ M_3 \sin p_1 \frac{(M_2 u_1 (u_1 + 2v_1) + v_1^2 (M_2 + M_3 \cos p_1))}{M_1 M_2 - M_3^2 \cos^2 p_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-M_2 - M_3 \cos p_1}{M_1 M_2 - M_3^2 \cos^2 p_1} \\ \frac{M_2}{M_1 M_2 - M_3^2 \cos^2 p_1} \end{pmatrix} \tau_1. \quad (2.22)$$

Dagegen erhält man für die partiell linearisierte Darstellung (2.18) deutlich übersichtlichere Terme. Statt der bisher drei Trägheitsparameter M_1, M_2, M_3 tritt nur noch der dimensionslose Parameter

$$\kappa := \frac{M_3}{M_2} \quad (2.23)$$

auf und es gilt

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ -\kappa v_1^2 \sin p_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1 + \kappa \cos p_1) \\ 1 \end{pmatrix} a_1. \quad (2.24)$$

◁

Die in (2.8) angegebene partiellen Linearisierung lässt sich vor dem Hintergrund allgemeiner nichtlinearer Regelungssysteme als exakte Eingangs-Ausgangs-Linearisierung auffassen [Isi95, Abschnitt 5.6], wobei der Ausgang hierbei durch die aktuierten Koordinaten gebildet wird, d.h. es gilt $\mathbf{y} := \mathbf{q}$. Im Unterschied zur exakten Eingangs-Zustands-Linearisierung hat das lineare Teilsystem im Allgemeinen eine kleinere Zustandsdimension als das Originalsystem. Die exakte Linearisierung erfolgt also nur teilweise („partiell“). In [Spo94b] wird dieses Vorgehen als **kollokierte Linearisierung** durch Rückführung bezeichnet, weil sich für $i = 1, \dots, m$ jeweils die i -te Komponente des Eingangs und des Ausgangs auf das gleiche Gelenk beziehen, d.h. „kollokiert“ - also am gleichen Ort platziert - sind. Offensichtlich ist die Transformation des Systems (2.12) in die Darstellung (2.18) immer und ohne Singularitäten möglich, unabhängig von der konkreten Struktur oder Parameterwerten. Für eine partielle Linearisierung basierend auf einer anderen Wahl des Ausgangs \mathbf{y} ist das, wie in Abschnitt 2.3.3 gezeigt, im Allgemeinen nicht der Fall.

2.3.2 Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform

In der partiell linearisierten Systemdarstellung (2.18) treten die (neuen) Eingangsgrößen \mathbf{a} nicht nur im linearen Teilsystem $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$, sondern, aufgrund der mechanischen Verkopplungen, im Allgemeinen auch in den Gleichungen (2.18c) für die nichtaktuierten Konfigurationsvariablen auf. In diesem Abschnitt wird konstruktiv gezeigt, dass sich diese Eingangsabhängigkeit des nichtlinearen Teilsystems durch eine geeignete Zustandstransformation stets beseitigen lässt, siehe auch [KR15b].

Definition 2.5. Ein allgemeines eingangsaffines System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{a} \quad (2.25)$$

mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ und dem Eingang $\mathbf{a}(t) \in \mathbb{R}^m$ befindet sich in **Byrnes-Isidori-Normalform** (BI-NF), wenn das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ und die $n \times m$ -Matrix $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ der Darstellung

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_3 \\ \dot{\mathbf{x}}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_3(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}_4(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \mathbf{a} \quad (2.26)$$

genügen.

◁

Satz 2.6. Für jedes mechanische System der Form (2.12) existiert ein globaler Diffeomorphismus⁶, welcher es in die BI-Normalform (2.26) überführt.

Beweis: Ausgangspunkt ist die zu (2.12) äquivalente partiell linearisierte Darstellung (2.18). Der wesentliche Unterschied zu (2.26) besteht, neben einer anderen Sortierung, im Auftreten des Blocks $-\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12}\mathbf{a}$ in (2.18c). Durch die Einführung des neuen Zustandes

$$\mathbf{z} := \Psi(\mathbf{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}_2}^T, \quad \text{mit} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{w} := \mathbf{u} + \mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12}\mathbf{v} \quad (2.28)$$

wird erreicht, dass der Eingang \mathbf{a} im zu $\dot{\mathbf{w}}$ gehörenden Block nicht mehr auftritt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \underbrace{-\mathbf{M}_{11}^{-1}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1) - \mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12}\mathbf{a}}_{\dot{\mathbf{u}}} + \mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12} \underbrace{\mathbf{a}}_{\dot{\mathbf{v}}} + \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12})\mathbf{v} \\ &= -\mathbf{M}_{11}^{-1}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1) + \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12})\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die gegenüber (2.15) angepasste Sortierung der Zustandsdefinition (2.27) sichert die Kompatibilität zur Definition der Normalform in (2.26). Die globale Invertierbarkeit, d.h. die Existenz einer Rücktransformation $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{z})$ folgt aus der Struktur von (2.28), da sich diese Gleichung ohne weiteres nach \mathbf{u} auflösen lässt. Alle anderen (vektoriellen) Zustandskomponenten erhält man durch Umbenennung. Zusammen ergibt sich

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \Phi(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{0}_{n_p \times 1} \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_4 - \mathbf{M}_{11}^{-1} \left(\overbrace{\text{col}(\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1)}^{\boldsymbol{\theta}} \right) \mathbf{M}_{12} \left(\overbrace{\text{col}(\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1)}^{\boldsymbol{\theta}} \right) \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Die Differenzierbarkeit der Koordinatentransformation folgt aus der vorausgesetzten Differenzierbarkeit der kinetischen Energie $T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$. \square

Ihre spezielle Konstruktion unter Ausnutzung der Struktur der Bewegungsgleichung unterscheidet diese von anderen Varianten der BI-Normalform, siehe z.B. [OS01, Abschnitt 3.7] und den folgenden Abschnitt. Um diese Unterscheidung zu verdeutlichen, wurde in [KR15b] die Bezeichnung **Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform (LBI-NF)** vorgeschlagen.

Die kompletten Bewegungsgleichung des Systems (2.12) lauten in der LBI-NF-Darstellung

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{z}_3}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{f}_{\mathbf{z}_4}(\mathbf{z}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}_{12}\mathbf{v} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1}(\tilde{\mathbf{C}}_1 + \tilde{\mathbf{K}}_1) + \frac{d}{dt}(\tilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1}\tilde{\mathbf{M}}_{12})\mathbf{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

⁶Siehe Abschnitt A.7.

wobei die Tilde über den Funktionen $\tilde{\mathbf{C}}_1, \tilde{\mathbf{K}}_1, \tilde{\mathbf{M}}_{11}, \tilde{\mathbf{M}}_{12}$ die vorherige Anwendung der durch die Gleichungen (2.30) gegebenen Rücktransformation $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{z})$ ausdrückt. Beispielsweise gilt $\tilde{\mathbf{C}}_1 \hat{=} \tilde{\mathbf{C}}_1(\mathbf{z}) = \mathbf{C}_1(\Phi(\mathbf{z})) \hat{=} \mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) |_{\text{col}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \Phi(\mathbf{z})}$.

Bemerkung 2.7. Aus (2.28) erkennt man, dass die physikalische Dimension von \mathbf{w} identisch zu der von \mathbf{u} ist. Es handelt sich um eine gewichtete Summe von Gelenkgeschwindigkeiten, welche sich als sogenannte Quasigeschwindigkeiten auffassen lassen, siehe dazu z.B. [CB97, ZF14]. Für $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ gilt außerdem $\mathbf{w} = \mathbf{u}$. \triangleleft

Beispiel 2.8 (Fortsetzung von Beispiel 2.4 (Zweigenkmanipulator); Implementierung: [$\langle 1 \rangle$]). Für das System (2.24) ergibt sich durch Anwendung der Transformation $\Psi(\mathbf{x})$ für die letzte Komponente des neuen Zustandsvektors

$$w_1 = u_1 + (1 + \kappa \cos(p_1))v_1. \quad (2.32)$$

Die Bewegungsgleichungen in der LBI-NF lauten dann

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{w}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ w_1 - (1 + \kappa \cos p_1)v_1 \\ \kappa v_1 (\kappa v_1 \cos p_1 - w_1) \sin p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a_1. \quad (2.33)$$

Offensichtlich wird das nichtlineare Teilsystem nicht direkt durch den Eingang a_1 (Beschleunigung des ersten Gelenks) beeinflusst. \triangleleft

Bemerkung 2.9. Für ein allgemeines System der Form (2.25) ist die Involutivität⁷ der Eingangsdistribution eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Darstellung in Byrnes-Isidori-Normalform [Isi95, Prop. 5.1.2]. Für mechanische Systeme der Form (2.16) ist diese stets erfüllt: Die Eingangsvektorfelder \mathbf{g}_i (d.h. die Spalten der Matrix \mathbf{G}) hängen nur von den Konfigurationskoordinaten $\boldsymbol{\theta}$ ab und haben gleichzeitig in den ersten n Komponenten nur Nulleinträge. Dadurch verschwinden paarweise alle Lie-Klammern zwischen diesen Vektorfeldern und somit ist die Distribution $\text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ involutiv. \triangleleft

Anmerkung zur BI-NF von Olfati-Saber

Die Dissertationsschrift [OS01] widmet sich u.a. ausführlich verschiedenen Normalformen für unteraktuierte Systeme. In [OS01, Abschnitt 2.7] werden sogenannte normalisierte Impulse als spezielle Systemgrößen eingeführt. Diese stimmen mit den zur Konstruktion der LBI-NF in Abschnitt 2.3.2 definierten Größen $\mathbf{w} := \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12}\dot{\mathbf{q}}$ überein.

Im Abschnitt 3.7 von [OS01] wird dann basierend auf der kollokierten partiellen Linearisierung eine Normalform für unteraktuierte Systeme eingeführt, welche ebenfalls kompatibel mit Definition 2.5 (Byrnes-Isidori-Normalform) ist. Allerdings wird diese

⁷ Zur Definition der Lie-Klammer zweier Vektorfelder sowie zum Konzept einer (involutiven) Distribution siehe Abschnitt A.11.

auf Koordinaten-Ebene konstruiert und nicht, wie in der vorliegenden Arbeit, auf Geschwindigkeitsebene. Genauer gesagt wird eine $n_{\mathbf{p}}$ -dimensionale Funktion $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ der Koordinaten gesucht, deren erste zeitliche Ableitung die normalisierten Impulse liefert und deren zweite Ableitung unabhängig vom Eingang ist. Eine solche Funktion existiert genau dann, wenn die Spalten der Matrix

$$\tilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\theta}) := \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{I}_{n_{\mathbf{q}}} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

eine involutive Distribution aufspannen (Beweis: siehe [OS01, Abschnitt 3.7]). Motiviert durch die Tatsache, dass wegen Satz 2.6 für jedes System der Form (2.8) eine LBI-NF existiert, stellt sich die Frage, ob diese Bedingung möglicherweise immer erfüllt ist. Der Text geht auf diese Frage nicht ein, jedoch lässt sich die Vermutung durch ein Gegenbeispiel falsifizieren, siehe Abschnitt B.2.

Auch für Systeme, welche die Involutivitätsbedingung erfüllen, ist die Berechnung von $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ im Allgemeinen nicht geschlossen möglich, da sie die Lösung einer partiellen Differentialgleichung erfordert.

2.3.3 Partielle Linearisierung und BI-NF basierend auf allgemeinen Koordinaten

Nicht-kollokierte partielle Linearisierung und Trägheitskopplung

Aus Gleichung (2.13) ist ersichtlich, dass der (physikalische) Systemeingang $\boldsymbol{\tau}$ im Allgemeinen neben den Beschleunigungen der aktuierten Freiheitsgrade auch die Beschleunigungen der nicht aktuierten Freiheitsgrade beeinflusst. Umgekehrt kann man also, unter bestimmten Bedingungen, den Eingang $\boldsymbol{\tau}$ derart vorgeben, dass für die nicht aktuierten Freiheitsgrade eine gewünschte Beschleunigung realisiert wird. In [Spo94a, Spo94b, Spo98] wird dieser Prozess als „nicht-kollokierte Eingangs-Ausgangs-Linearisierung“ bezeichnet und systematisch behandelt. Als Bedingung für die globale Existenz der auftretenden Koordinatentransformationen wird die sogenannte starke Trägheitskopplung (strong inertial coupling, [Spo94a, Definition 1]) angegeben. Diese Begriffsbildung wird im Folgenden aufgegriffen und erweitert.

Definition 2.10. In dem mechanischen System (2.12) liegt genau dann **starke (vollständige) Trägheitskopplung** vor, wenn die Bedingung

$$\text{rank } \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}) = n_{\mathbf{p}} \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{Q} \quad (2.35)$$

erfüllt ist. Hat $\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})$ nur für fast⁸ alle $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{Q}$ vollen Zeilenrang, so spricht man von **schwacher (vollständiger) Trägheitskopplung**. Gilt hingegen $\text{rank } \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}) < n_{\mathbf{p}} \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{Q}$ liegt eine **unvollständige Trägheitskopplung** vor. \triangleleft

⁸D.h. die Menge der Ausnahmen hat das Maß null, [GZZZ13, S.331].

Aus (2.35) folgt unmittelbar, dass

$$n_{\mathbf{q}} \geq n_{\mathbf{p}} \quad (2.36)$$

eine notwendige Voraussetzungen für vollständige Trägheitskopplung darstellt. Ob starke oder schwache vollständige Trägheitskopplung vorliegt, kann von den Systemparametern abhängen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.11 (Unteraktuierter Zweigelenkmanipulator (Fortsetzung von Beispiel 2.4); Implementierung: $[\langle 1 \rangle]$). Ausgangspunkt sind die Bewegungsgleichungen (2.21). Die 1×1 -Matrix $\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})$ lautet

$$\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}) = M_2 + M_3 \cos p_1 \stackrel{(2.23)}{=} M_2(1 + \kappa \cos p_1). \quad (2.37)$$

Für $\kappa \geq 1$ gibt es also Konfigurationen für die ein Rangabfall auftritt:

$$\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = \pm \arccos\left(\frac{1}{\kappa}\right) + 2k\pi, \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}. \quad (2.38)$$

Mit anderen Worten: Für den unteraktuierten Zweigelenkmanipulator gilt entsprechend Definition 2.10 für $\kappa < 1$ starke vollständige Trägheitskopplung und für $\kappa \geq 1$ schwache vollständige Trägheitskopplung. Wegen

$$\kappa = \frac{M_3}{M_2} = \frac{m_2 l_1 s_2}{J_2 + m_2 s_2^2} \quad (2.39)$$

ist die Bedingung $\kappa < 1$ für typische Längen- und Massenverhältnisse nicht erfüllt. Beispielsweise erhält man für die Annahme homogener Stäbe der Masse m und der Länge l :

$$m_2 = m, \quad l_1 = l, \quad s_2 = \frac{1}{2}l, \quad J_2 = \frac{1}{12}ml^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{\frac{1}{2}ml^2}{\frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2} = \frac{3}{2}. \quad (2.40)$$

Eine konstruktive Möglichkeit, starke Trägheitskopplung zu erreichen, ist die Verkleinerung von s_2 durch die Nutzung eines Gegengewichts, siehe z.B. [KLR11]. \triangleleft

Liegt vollständige Trägheitskopplung vor, kann man die erste Hyperzeile von Gleichung (2.12), ggf. bis auf Singularitäten, nach $\dot{\mathbf{q}}$ auflösen und erhält somit die aktiven Beschleunigungen in Abhängigkeit der als neuen Eingang auffassbaren passiven Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{p}}$, der Konfigurationen und Geschwindigkeiten. Völlig analog zur Definition der Lagrange-Byrnes-Isidori Normalform in Abschnitt 2.3.2 lässt sich auch für die nicht kollokierte partielle Linearisierung eine einfache Transformation in BI-NF finden. Tatsächlich lässt sich diese Situation als Spezialfall der folgenden Überlegungen auffassen, siehe insbesondere auch Bemerkung 2.14.

Partielle Linearisierung basierend auf allgemeinen Konfigurationskoordinaten

Der für die partielle Linearisierung zugrunde gelegte allgemeine Systemausgang \mathbf{y} (der Dimension $n_{\mathbf{q}}$) wird nun als eine beliebige zeilenreguläre Linearkombination aus aktiven und passiven Konfigurationskoordinaten angesetzt. Um eine vollständige Koordinatentransformation zu erhalten werden mit \mathbf{k} außerdem noch $n_{\mathbf{p}}$ komplementäre Konfigurationskoordinaten eingeführt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} := \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_1 & \bar{\mathbf{R}}_2 \\ \bar{\mathbf{S}}_1 & \bar{\mathbf{S}}_2 \end{pmatrix}}_{\in \text{GL}(n_{\mathbf{p}}+n_{\mathbf{q}})} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

wobei $\text{GL}(n)$ die Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen bezeichnet, siehe Abschnitt A.4. Zur vereinfachten Darstellung wird dabei von einer konstanten Transformation ausgegangen. Die Ergebnisse lassen sich jedoch unter bestimmten Differenzierbarkeits- und Regularitätsbedingungen auf konfigurationsabhängige Block-Matrizen verallgemeinern.

Aus der entsprechend aufgeteilten inversen Darstellung von (2.41),

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1 & \hat{\mathbf{R}}_2 \\ \hat{\mathbf{S}}_1 & \hat{\mathbf{S}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

gewinnt man unmittelbar

$$\ddot{\mathbf{q}} = \underbrace{\hat{\mathbf{S}}_1}_{\in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{q}} \times n_{\mathbf{p}}}} \cdot \ddot{\mathbf{k}} + \underbrace{\hat{\mathbf{S}}_2}_{\in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{q}} \times n_{\mathbf{q}}}} \cdot \ddot{\mathbf{y}}. \quad (2.43)$$

Ziel ist es nun, eine Beziehung der Form $\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\varphi}(\ddot{\mathbf{y}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta})$ herzuleitenden, d.h. also den bisherigen Eingang $\ddot{\mathbf{q}}$ außer durch Konfigurationen und Geschwindigkeiten nur durch die zweite Ableitung des Ausgangs \mathbf{y} auszudrücken und diese damit beliebig vorgeben zu können. Um zu bestimmen, unter welchen Bedingungen das möglich ist, wird die 1. Hyperzeile von (2.12)

$$\mathbf{M}_{11}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

herangezogen und durch Einsetzen der zweifach nach der Zeit differenzierten Transformation (2.42) umgeformt zu

$$\underbrace{\left(\mathbf{M}_{11}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{S}}_1 \right)}_{=: \tilde{\mathbf{M}}_1 \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{p}} \times n_{\mathbf{p}}}} \ddot{\mathbf{k}} + \underbrace{\left(\mathbf{M}_{11}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{R}}_2 + \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{S}}_2 \right)}_{=: \tilde{\mathbf{M}}_2 \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{p}} \times n_{\mathbf{q}}}} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{p}}}. \quad (2.45)$$

Satz 2.12. *Seien der Ausgang \mathbf{y} und die komplementären Koordinaten \mathbf{k} entsprechend (2.41) gewählt. Eine Beziehung der Form $\ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\varphi}(\ddot{\mathbf{y}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\theta})$ existiert genau dann, wenn*

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 := \left(\mathbf{M}_{11}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{S}}_1 \right) \in \text{GL}(n_{\mathbf{p}}) \quad (2.46)$$

gilt, d.h. wenn $\tilde{\mathbf{M}}_1$ invertierbar ist.

Beweis. Dass (2.46) eine hinreichende Bedingung darstellt ist offensichtlich: Wenn $\tilde{\mathbf{M}}_1^{-1}$ existiert, kann man (2.45) nach $\ddot{\mathbf{k}}$ auflösen und in (2.43) einsetzen.

Die Notwendigkeit der Regularität von $\tilde{\mathbf{M}}_1$ ist dagegen nicht so einfach zu sehen. Denkbar wäre, dass in (2.43) nicht alle Komponenten von $\ddot{\mathbf{k}}$ eingehen und demzufolge (2.45) nicht nach dem kompletten $\ddot{\mathbf{k}}$ aufgelöst werden müsste. Diese Situation lässt sich durch die Wahl geeigneter Koordinaten erfassen. Mittels

$$\mathbf{k} = \underbrace{(\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2)}_{\text{GL}(n_{\mathbf{p}})} \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

lassen sich neue Koordinaten einführen, so dass \mathbf{k}_2 nach dem Einsetzen von (2.47) in (2.43) nicht mehr auftritt. Dass ist genau dann der Fall, wenn man für die zweite Hyperspalte der Transformationsmatrix

$$\hat{\mathbf{S}}_1 \mathbf{T}_2 \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{T}_2 = \hat{\mathbf{S}}_1^{\perp \text{R}} \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{p}} \times n_1} \quad \text{mit } n_1 := n_{\mathbf{p}} - \text{rank } \hat{\mathbf{S}}_1 \geq 0, \quad (2.48)$$

d.h. ein Rechtsorthokomplement der Matrix $\hat{\mathbf{S}}_1$ ansetzt. Allerdings reicht es nun nicht, die Gleichung (2.45)|_(2.47), d.h.

$$\left(\mathbf{M}_{11} \hat{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{M}_{12} \hat{\mathbf{S}}_1 \right) \mathbf{T}_1 \ddot{\mathbf{k}}_1 + \mathbf{M}_{11} \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{T}_2 \ddot{\mathbf{k}}_2 + \left(\mathbf{M}_{11} \hat{\mathbf{R}}_2 + \mathbf{M}_{12} \hat{\mathbf{S}}_2 \right) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1 = \mathbf{0}, \quad (2.49)$$

nach $\ddot{\mathbf{k}}_1$ aufzulösen, denn darin tritt $\ddot{\mathbf{k}}_2$ noch auf. Man führt also eine weitere Koordinatentransformation durch, um aus $\ddot{\mathbf{k}}_2$ diejenigen Beschleunigungen $\tilde{\ddot{\mathbf{k}}}_2$ zu isolieren, die weder in (2.43) noch in (2.45) vorkommen. Dies geschieht mit der Transformation

$$\mathbf{k}_2 = \underbrace{(\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2)}_{\in \text{GL}(n_1)} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_2 \\ \hat{\mathbf{k}}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

wobei man \mathbf{U}_2 als Rechtsorthokomplement von $(\hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{T}_2)$ wählt, d.h. es gilt

$$\hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.51)$$

Da \mathbf{T}_2 und \mathbf{U}_2 jeweils Hyperspalten von (regulären) Transformationsmatrizen sind, hat auch $\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{U}_2$ vollen Spaltenrang. Andererseits ist $\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1 \\ \hat{\mathbf{S}}_1 \end{pmatrix}$ ebenfalls eine Hyperspalte einer Transformationsmatrix, siehe (2.42). Wegen (2.48) und (2.51) muss gelten

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1 \\ \hat{\mathbf{S}}_1 \end{pmatrix} \mathbf{T}_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.52)$$

Das stellt jedoch einen Widerspruch zu den Regularitätsforderungen dar. Mit anderen Worten: Aus (2.43) und (2.45) lassen sich nicht gleichzeitig Linearkombinationen der Komponenten von $\ddot{\mathbf{k}}$ eliminieren. Die Regularität von $\tilde{\mathbf{M}}_1$ ist also nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig. \square

Bemerkung 2.13. Aus Satz 2.12 wird deutlich, dass die oben getroffene Annahme $\dim \mathbf{y} \stackrel{!}{=} \dim \mathbf{q} = n_{\mathbf{q}}$ sinnvoll ist. Andernfalls würde $\dim \mathbf{k} \neq n - n_{\mathbf{q}} = n_{\mathbf{p}}$ gelten und $\tilde{\mathbf{M}}_1 \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{p}} \times \dim \mathbf{k}}$ wäre nicht quadratisch. Im Fall $\dim \mathbf{k} < n_{\mathbf{p}}$ (entspricht $\dim \mathbf{y} > n_{\mathbf{q}}$) gäbe es in (2.45) mehr skalare Gleichungen als Komponenten von \mathbf{k} . Das Gleichungssystem ließe sich also nicht auflösen. Anders ausgedrückt: Eine gleichzeitige unabhängige Vorgabe von mehr als $n_{\mathbf{q}}$ Beschleunigungen ist mit $n_{\mathbf{q}}$ Stellgliedern nicht möglich. Im Fall $\dim \mathbf{k} > n_{\mathbf{p}}$ (entspricht $\dim \mathbf{y} < n_{\mathbf{q}}$) hat $\tilde{\mathbf{M}}_1$ keinen vollen Spaltenrang, d.h. das Gleichungssystem (2.45) hat keine eindeutige Lösung. Diese Situation wird im Folgenden untersucht. \triangleleft

Bemerkung 2.14. In den Arbeiten von Spong [Spo94a, Spo94b, Spo98] wird näher auf die oben erwähnte nicht-kollokierte Linearisierung eingegangen. Dabei wird unter der Bedingung der starken Trägheitskopplung (und folglich $n_{\mathbf{q}} \geq n_{\mathbf{p}}$) der Ausgang $\mathbf{y} := \mathbf{p}$ gewählt und mithilfe der Moore-Penrose-Rechtsinversen von \mathbf{M}_{12} ,

$$\mathbf{M}_{12}^+ := \mathbf{M}_{12}^T (\mathbf{M}_{12} \mathbf{M}_{12}^T)^{-1}, \quad (2.53)$$

der Eingang $\mathbf{a}(= \ddot{\mathbf{q}})$ von (2.18) durch den neuen Eingang $\mathbf{a}_{\mathbf{y}}(= \ddot{\mathbf{y}})$ ausgedrückt:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M}_{12}^+ (\mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1 + \underbrace{\mathbf{M}_{11} \cdot \ddot{\mathbf{p}}}_{= \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}_{\mathbf{y}}}). \quad (2.54)$$

Für den Fall $n_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{q}}$ ist dieses Vorgehen identisch mit der Wahl (siehe (2.41))

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_1 & \bar{\mathbf{R}}_2 \\ \bar{\mathbf{S}}_1 & \bar{\mathbf{S}}_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_{\mathbf{q}}} \\ \mathbf{I}_{n_{\mathbf{q}}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

und dem oben beschriebenen Vorgehen. Für diesen Spezialfall ergibt sich $\tilde{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_{12}$ und $\mathbf{M}_{12}^+ = \mathbf{M}_{12}^{-1}$.

Allerdings wird bei der nicht-kollokierten partiellen Linearisierung nach Spong durch die Festlegung $\mathbf{y} = \mathbf{p}$ für Systeme mit mehr aktuierten als nichtaktuierten Freiheitsgraden die Situation $\dim \mathbf{y} = n_{\mathbf{p}} < n_{\mathbf{q}}$ erzeugt, was einen scheinbaren Widerspruch zur Forderung $\dim \mathbf{y} = n_{\mathbf{q}}$ darstellt.

Aus dem Beweis von Satz 2.12 ist bekannt, dass sich für $\dim \mathbf{k} > n_{\mathbf{p}}$ Gleichung (2.45) nicht eindeutig nach \mathbf{k} auflösen lässt: Die Anzahl der Bedingungen ist dann kleiner als die Anzahl der Variablen, Es gibt also unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems (2.44) bezüglich $\ddot{\mathbf{q}}$. Anders ausgedrückt: Durch geeignetes Hinzufügen von weiteren Bedingungen erreicht man eine eindeutige Lösbarkeit. Beim Ansatz von Spong werden diese zusätzlichen Bedingungen durch die Festlegung auf die Moore-Penrose-Rechtsinverse in der Rückführung (2.54) eingebracht. Im Fall $\dim \mathbf{k} > n_{\mathbf{p}}$ gibt es unendlich viele Rechtsinversen. Die Moore-Penrose-Konstruktion liefert aber diejenige Lösung des Gleichungssystems mit minimaler Norm [Ber09, Proposition 6.1.7]. Vor dem Hintergrund des hier betrachteten Zugangs, kann man diese zusätzlichen Bedingungen für bestimmte (Linarkombinationen der) Komponenten von $\ddot{\mathbf{k}}$ aber als externe Vorgaben interpretieren. Das heißt, effektiv sind diese Komponenten von $\ddot{\mathbf{k}}$ Teil von $\ddot{\mathbf{y}}$, also des neuen Eingangs. Zur Illustration dieses Sachverhalts dient das folgende Beispiel. \triangleleft

Beispiel 2.15 (Translatorisches unteraktuiertes System mit $n_{\mathbf{p}} = 1$ und $n_{\mathbf{q}} = 2$; Implementierung: $[\langle 2 \rangle]$). Betrachtet wird die nichtkollokierte Linearisierung⁹ des in Abbildung 2.2 dargestellte Systems aus drei über Federn miteinander verbundenen Körpern. Als

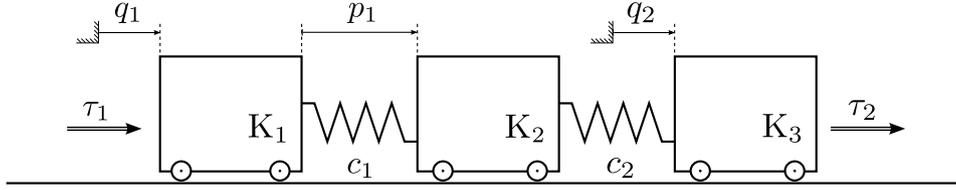


Abbildung 2.2: Lineares mechanisches System mit drei translatorischen Freiheitsgraden ($n_{\mathbf{p}} = 1$, $n_{\mathbf{q}} = 2$).

Ausgang wird also $\mathbf{y} = \mathbf{p} = p_1$ gewählt. Die Bewegungsgleichungen in der Form (2.12) lauten

$$\begin{pmatrix} m_2 & m_2 & 0 \\ m_2 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 p_1 + c_2 (p_1 + q_1 - q_2) \\ c_2 (p_1 + q_1 - q_2) \\ -c_2 (p_1 + q_1 - q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

woraus man $\mathbf{M}_{12} = \begin{pmatrix} m_2 & 0 \end{pmatrix}$ und somit via (2.53) $\mathbf{M}_{12}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_2} & 0 \end{pmatrix}^T$ direkt ablesen kann. Für das Rückführgesetz der nichtkollokierten partiellen Linearisierung nach Spong erhält man nun

$$\mathbf{a} \stackrel{(2.54)}{=} \begin{pmatrix} -\frac{1}{m_2} (c_1 p_1 + c_2 (p_1 + q_1 - q_2) + m_2 \ddot{p}_1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

d.h. durch die Festlegung auf die Moore-Penrose-Pseudoinverse erfolgt implizit die Vorgabe $\ddot{q}_2 = 0$. Damit ist q_2 aber effektiv Teil des Ausgangs, dessen Beschleunigung bei der partiellen Linearisierung vorgegeben wird. Die Darstellung (2.41) mit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}}_1 & \bar{\mathbf{R}}_2 \\ \bar{\mathbf{S}}_1 & \bar{\mathbf{S}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

bildet mithin einen allgemeineren Zugang zur Vorgabe von \dot{p}_1 , weil der verbleibenden Freiheitsgrad explizit in \mathbf{y} auftritt. \triangleleft

Sind die Voraussetzungen von Satz 2.12 erfüllt, kann unter Nutzung von (2.43), (2.45), und (2.46) $\ddot{\mathbf{q}}$ in Abhängigkeit von $\ddot{\mathbf{y}} =: \mathbf{a}_{\mathbf{y}}$ ausgedrückt werden:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{S}}_2 \mathbf{a}_{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{S}}_1 \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} (\mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1 + \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{a}_{\mathbf{y}}) = \underbrace{-\hat{\mathbf{S}}_1 \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} (\mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1)}_{=: \mathbf{D}_1} + \underbrace{(\hat{\mathbf{S}}_2 - \hat{\mathbf{S}}_1 \tilde{\mathbf{M}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_2)}_{=: \mathbf{D}_2} \mathbf{a}_{\mathbf{y}}, \quad (2.59)$$

⁹Dass dieses System bereits in der angegebenen Form durch lineare Gleichungen beschrieben wird, verhindert die Anwendung der Methoden selbstverständlich nicht, aber sorgt für überschaubare Ausdrücke.

was in einem zweiten Substitutionsschritt zur Beziehung

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{k}} &\stackrel{(2.41)}{=} \bar{\mathbf{R}}_1 \ddot{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{R}}_2 \ddot{\mathbf{q}} \stackrel{(2.18c)}{=} -\bar{\mathbf{R}}_1 \left(\mathbf{M}_{11}^{-1} (\mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1) - \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} \ddot{\mathbf{q}} \right) + \bar{\mathbf{R}}_2 \ddot{\mathbf{q}}. \\
 &\stackrel{(2.59)}{=} \underbrace{-\bar{\mathbf{R}}_1 \left(\mathbf{M}_{11}^{-1} (\mathbf{C}_1 + \mathbf{K}_1) - \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} \mathbf{D}_1 \right) + \bar{\mathbf{R}}_2 \mathbf{D}_1}_{=: \mathbf{H}_1} + \underbrace{\left(\bar{\mathbf{R}}_1 \mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} + \bar{\mathbf{R}}_2 \right) \mathbf{D}_2}_{=: \mathbf{H}_2} \mathbf{a}_y
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

führt. Nun lässt sich eine partiell linearisierten Darstellung bezüglich des mittels (2.42) definierten Ausgangs \mathbf{y} explizit angeben:

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{r} \tag{2.61a}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{s} \tag{2.61b}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{a}_y \tag{2.61c}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{a}_y, \tag{2.61d}$$

wobei die ersten beiden Gleichungen definitorischer Natur sind und die zu \mathbf{y} bzw. \mathbf{k} gehörenden Geschwindigkeiten einführen.

Dabei ist zu beachten, dass die Matrizen $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{12}, \mathbf{C}_1, \mathbf{K}_1$ in ihrer ursprünglichen Form von $\boldsymbol{\theta}$ und $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ abhängen. Bei den eingeführten Abkürzungen $\tilde{\mathbf{M}}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{H}_i, i = 1, 2$, wurden von Beginn an die Argumente zugunsten einer übersichtlicheren Notation weggelassen, aber selbstverständlich hängen diese Matrizen im Allgemeinen auch von den Konfigurationskoordinaten und ggf. von den Geschwindigkeiten ab. Für eine Darstellung, die vollständig in den Koordinaten des zu (2.61) zugehörigen Zustandes

$$\mathbf{x}_y := (\mathbf{k}, \mathbf{y}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) \tag{2.62}$$

angeschrieben ist, nutzt man also noch die Transformation (2.42).

Eigenschaften der allgemeinen Eingangs-Ausgangs-Linearisierung

Strukturell gleichen sich die beiden partiell linearisierten Darstellungen (2.18) und (2.61). Allerdings ist zu beachten, dass die in der kollokierten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung (2.18) auftretenden Ausdrücke für alle $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{Q}$ wohldefiniert sind, während bei schwacher oder unvollständiger Trägheitskopplung je nach Festlegung des Ausgangs in (2.41) für bestimmte Konfigurationen Singularitäten in der Rückführung (2.59) auftreten können.

Zusätzlich kann auch bei starker Trägheitskopplung das Phänomen der endlichen Fluchtzeit auftreten [Rei96]. D.h., dass unter bestimmten Anfangsbedingungen für $t = 0$ aus einer bestimmten (beschränkten) Vorgabe des neuen Eingangs, wie z.B. $\mathbf{a}_y \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$, ggf. Trajektorien resultieren, die nach endlicher Zeit gegen $\pm\infty$ streben und somit nicht für alle $t > 0$ definiert sind. Für den unteraktuierten Zweigelenkmanipulator wurde dieses Phänomen in [Kno09, Abschnitt 2.5.1] untersucht.

Nach Kenntnis des Autors ist die Frage, unter welchen Bedingungen für $(\bar{\mathbf{S}}_1 \ \bar{\mathbf{S}}_2)$ (siehe (2.41)) endliche Fluchtzeit prinzipiell auftreten kann und welche Rolle konkrete Anfangsbedingungen spielen, nach wie vor offen.

BI-NF basierend auf allgemeinen Konfigurationskoordinaten

Ausgehend von (2.61) ist es nun sehr leicht, nach dem gleichen Schema wie in Abschnitt 2.3.2 eine Zustandsdarstellung in Byrnes-Isidori-Normalform zu bestimmen. Als neuer Zustand wird

$$\mathbf{z} := (\mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{k}, \mathbf{w}) \quad \text{mit} \quad (2.63a)$$

$$\mathbf{w} := \mathbf{r} - \mathbf{H}_2 \mathbf{s} \quad (2.63b)$$

gewählt und durch zeitliches Ableiten

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{H}_1 + \underbrace{\mathbf{H}_2 \mathbf{a}_y - \mathbf{H}_2 \mathbf{a}_y}_{=:0} - \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_2 \right) \mathbf{s} \quad (2.64)$$

überzeugt man sich von der Kompatibilität zur Definition 2.5.

Kapitel 3

Linearisierung um Ruhelagen

3.1 Bestimmung der Ruhelagen

Eine Trajektorie eines dynamischen Systems ist genau dann eine Ruhelage, wenn alle Zeitableitungen der Systemgrößen verschwinden. Setzt man diese Bedingung in die Systemgleichungen ein, ergibt sich ein algebraisches Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge die Menge aller Ruhelagen ist. Für mechanische Systeme der Form (2.12) erhält man ein vergleichsweise einfaches algebraisches Gleichungssystem, wenn man die kolloziert partiell linearisierte Darstellung (2.18)

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{u} \quad (3.1a)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (3.1b)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})) - \mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{a} \quad (3.1c)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \quad (3.1d)$$

als Ausgangspunkt wählt. Aus der Forderung, dass alle Zeitableitungen verschwinden müssen, folgt unmittelbar $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ und $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \text{col}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Die Einträge des n -dimensionalen „Coriolis-Vektors“ $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ sind auf Grund von (2.9b) und (2.3) stets homogene Polynome zweiter Ordnung in den Geschwindigkeiten. Mithin verschwindet $\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{0})$ für alle $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{Q}$. Aus (3.1c) folgt

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \underbrace{(\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{0}) + \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{0}))}_{\mathbf{0}} \quad (3.2)$$

Die Matrix \mathbf{M}_{11}^{-1} ist regulär und ggf. in \mathbf{K}_1 auftretende Reibungsterme verschwinden für $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ per Annahme. Für alle Ruhelagen muss deshalb schließlich

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{0}) = \frac{\partial V(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.3)$$

gelten. D.h. Ruhelagen sind genau diejenigen Konfigurationen, für die die potentielle Energie, aufgefasst als Funktion der passiven Koordinaten, einen stationären Wert annimmt. Entsprechend (2.19) ergibt sich für die verallgemeinerten Stellkräfte in der Ruhelage

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{RL}} = \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\theta}_{\text{RL}}, \mathbf{0}). \quad (3.4)$$

Die Menge aller Ruhelagen \mathcal{Q}_{RL} bildet eine Untermannigfaltigkeit der Konfigurationsmannigfaltigkeit \mathcal{Q} . In konkreten Beispielen kann sowohl $\mathcal{Q}_{\text{RL}} = \mathcal{Q}$ (siehe Beispiel 2.4), als auch $\mathcal{Q}_{\text{RL}} = \{\}$ (z.B.: Körper im ebenen freien Fall mit senkrecht zur Gravitation wirkender externe Kraft als Stelleingang) gelten.

3.2 Taylor-Linearisierung um eine Ruhelage

Sei $\boldsymbol{\theta}_{\text{RL}} \in \mathcal{Q}_{\text{RL}}$ fest. Ein naheliegender und verbreiteter Analyse-Ansatz ist die Betrachtung der linearen Approximation des dynamischen (mechanischen) Systems in einer Umgebung der Ruhelage, siehe z.B. [Rei14]. Die Taylor-Linearisierung kann dabei auf verschiedene Darstellungen des (nichtlinearen) Systems angewendet werden, ohne deren Äquivalenz zu zerstören. Insbesondere sind die Schritte „Auflösen von (2.8) nach $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ “ und „Taylor-Linearisierung um eine Ruhelage“ vertauschbar. Grund hierfür ist, dass per Ruhelagen-Definition $\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{\text{RL}} = \mathbf{0}$ gilt und dadurch in der Linearisierung von (2.8) keine partiellen Ableitungen von Termen aus der Massenmatrix \mathbf{M} auftreten. Mit der Festlegung der auf die betrachtete Ruhelage bezogenen Stellkräfte und Konfigurationskoordinaten,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} := \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{\text{RL}} \quad (3.5a)$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} := \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{\text{RL}}, \quad (3.5b)$$

aus der direkt $\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$ und $\ddot{\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \ddot{\boldsymbol{\theta}}$ folgt, erhält man die linearisierten Bewegungsgleichungen

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\boldsymbol{\theta}}} + \bar{\mathbf{R}}\dot{\bar{\boldsymbol{\theta}}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n_{\mathbf{q}}} \end{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (3.6)$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{M}} := \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}_{\text{RL}}), \quad \bar{\mathbf{R}} := \left. \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \right) \right|_{\substack{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{\text{RL}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{K}} := \left. \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \right) \right|_{\substack{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{\text{RL}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}}}. \quad (3.7)$$

Beginnt man dagegen mit der aufgelösten Darstellung (2.13), müssen Produkt-Terme linearisiert werden. Die partiellen Ableitungen der Terme aus \mathbf{M}^{-1} fallen aber auch hier aufgrund der Ruhelagen-Bedingungen weg.

Bei (3.6) handelt es sich offensichtlich um ein System linearer DGLn zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das durch diese Gleichungen beschriebene mechanische System lässt sich somit als LTI-System¹ auffassen. Einige mechanische Systeme sind von Natur aus linear, siehe etwa Beispiel 2.15. Für konservative Systeme ist das genau dann der Fall, wenn die kinetische Energie $\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ und damit die Massenmatrix unabhängig von der Konfigurationen des Systems ist und in der potentiellen Energie $V(\boldsymbol{\theta})$ nur Terme nullter und zweiter Ordnung in $\boldsymbol{\theta}$ auftreten. Im Allgemeinen sind diese Bedingungen nicht erfüllt und die Bewegungsgleichungen sind nichtlinear. Dann gelten die linearisierten Systemgleichungen (3.6) nur näherungsweise in einer Umgebung der Ruhelage. Allerdings lässt sich a priori nur schwer abschätzen, wie gut (d.h. wie zweckmäßig) ein lineares Modell ist.

¹Engl. Abkürzung für „Lineares zeitinvariantes System“.

Bemerkung 3.1. Eine bewährte Vorgehensweisen bei der Regelung mechanischer Systeme besteht darin, ein lineares Entwurfsmodell zusammen mit dem realistischeren nicht-linearen Systemmodell für die Simulation zu verwenden, siehe z.B. [Rei14, Kap. 10] bzw. [KR14a]. Für das dort behandelte einachsige System (siehe auch Abbildung 4.8) kann sogar eine Überführung zwischen verschiedenen Ruhelagen auf Basis der LTI-Approximation geplant und robust (gegenüber Fehlern in den Anfangswerten und Systemparametern) stabilisiert werden. Grund hierfür ist, dass sich Anfangs- und Endruhelage nur im Wert einer sogenannten zyklischen Koordinate unterscheiden, d.h. einer Koordinate die in $T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ und $V(\boldsymbol{\theta})$ nicht auftritt, vgl. [Nol04, Definition 1.2.6]. Folglich liefern die Linearisierungen um diese Ruhelagen jeweils die gleichen Systemmatrizen. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall.

Bemerkung 3.2. Die Eigenschaft eines dynamischen Systems „mechanisch“ zu sein, d.h. eine mit (2.8) kompatible Struktur zu haben, wird durch die lineare Approximation der Systemgleichungen nicht gestört [RR12].

3.3 Stabilitäts-Analyse konservativer linearer mechanischer Systeme

Basierend auf (3.6) können für ein lineares mechanisches System nun zwei Analysepfade eingeschlagen werden. Eine Möglichkeit ist die Darstellung des Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung als polynomiale Matrix-Gleichung im Ableitungsoperator, beispielsweise mit Hilfe der Laplace-Transformation und die Anwendung der für solche Systeme verfügbaren Methoden. Dieser Weg wird in Abschnitt 4.8.2 besprochen. Andererseits kann, wie im Fall von Gleichung (2.16), durch das Hinzufügen von n definitiven Gleichungen für den Zusammenhang zwischen Konfigurationskoordinaten und -geschwindigkeiten auf kanonische Art wie in (2.15) ein Zustandsvektor eingeführt werden: $\mathbf{x} := \text{col}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$. Mit den Abkürzungen

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 := -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{K}}, \quad (3.8a)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 := -\bar{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{R}} \quad \text{und} \quad (3.8b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} := \bar{\mathbf{M}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{n_q} \end{pmatrix} \quad (3.8c)$$

erhält man dann die lineare Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 & \tilde{\mathbf{A}}_2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}} \bar{\boldsymbol{\tau}}. \quad (3.9)$$

Offensichtlich gilt für konservative Systeme (siehe Definition 2.3) $\tilde{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{0}$. Bezüglich der Eigenwertstruktur der Systemmatrix lässt sich dann folgendes feststellen:

Satz 3.3. Sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Eigenwert von $\tilde{\mathbf{A}}_1$ und $\boldsymbol{\nu}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

a) $\sqrt{\lambda}$ und $-\sqrt{\lambda}$ sind Eigenwerte von \mathbf{A} und

b) $\text{col}(\boldsymbol{\nu}, \sqrt{\lambda}\boldsymbol{\nu})$ und $\text{col}(\boldsymbol{\nu}, -\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\nu})$ sind jeweils zugehörige Eigenvektoren von \mathbf{A} .

Beweis: Weil $\tilde{\mathbf{A}}_1$ entsprechend (3.8a) symmetrisch ist, sind alle seine Eigenwerte rein reell [Ber09, Proposition 4.4.5]. Die Eigenwerte von \mathbf{A} folgen aus der charakteristischen Gleichung

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \det(\lambda \mathbf{I}_{2n} - \mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n \\ -\tilde{\mathbf{A}}_1 & \lambda \mathbf{I}_n \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Da alle Blöcke in der Blockmatrix kommutieren² kann die Schur'sche Determinantenformel (siehe z.B. [Ber09, Fact 2.14.13] oder [Gan86, Abschnitt. 2.5]) angewendet werden,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n \\ -\tilde{\mathbf{A}}_1 & \lambda \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \det(\lambda^2 \mathbf{I}_n - \tilde{\mathbf{A}}_1). \quad (3.12)$$

Die Behauptung a) folgt nun aus der Tatsache, dass λ im charakteristischen Polynom nur in geradzahigen Potenzordnungen auftritt. Die Behauptung b) lässt sich direkt nachrechnen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \pm\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\nu} \\ \tilde{\mathbf{A}}_1\boldsymbol{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\nu} \\ \lambda\boldsymbol{\nu} \end{pmatrix} = \pm\sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \pm\sqrt{\lambda}\boldsymbol{\nu} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

□

Aus Satz 3.3 a) folgt unmittelbar, dass kein lineares konservatives mechanische System asymptotisch stabil sein kann (siehe A.1), da niemals alle Eigenwerte in der linken offenen Halbebene von \mathbb{C} liegen. Genauer, kann man bezogen auf die mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezeichneten Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{A}}_1$ bzw. die zugehörigen $2n$ Eigenwertpaare von \mathbf{A} drei Fälle unterscheiden:

- (a) Für alle Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{A}}_1$ gilt $\lambda_1, \dots, \lambda_n < 0$. Die Eigenwerte von \mathbf{A} sind folglich rein imaginär und treten in konjugiert komplexen Paaren auf. Die betrachtete Ruhelage ist dann stabil im Sinne von Ljapunov aber nicht asymptotisch stabil. Die Systemmatrix \mathbf{A} ist diagonalisierbar, denn es gibt auf Grund von Satz 3.3 (b) und der Symmetrie von $\tilde{\mathbf{A}}_1$ genau $2n$ linear unabhängige Eigenvektoren von \mathbf{A} . Für $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}$ treten nur oszillierende Lösungen mit beschränkter Amplitude auf.

²Zwei Matrizen \mathbf{A}, \mathbf{B} „kommutieren“, wenn $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gilt. Zwar gelten die beiden Versionen der Schur'sche Determinantenformel allgemein auch für nichtkommutierende Teilmatrizen, allerdings muss dann je einer der Diagonalblöcke regulär sein. Im vorliegenden Fall soll aber $\lambda = 0$ nicht ausgeschlossen werden, weshalb von der Kommutativität Gebrauch gemacht wird.

- (b) Mindestens ein Eigenwert von $\tilde{\mathbf{A}}_1$ ist identisch 0 und es gilt $\lambda_i \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Als Konsequenz ist die Systemmatrix \mathbf{A} nicht diagonalisierbar, denn auf Grund von Satz 3.3 ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 0 (von \mathbf{A}) doppelt so groß wie seine geometrische Vielfachheit. Es gibt dann Lösungen für $\bar{\tau} = 0$ deren Amplitude linear in t anwächst. Das System ist also instabil im Sinne von Ljapunov. Der einfachste Spezialfall dieser Situation liegt vor, wenn $\tilde{\mathbf{A}}_1$ einen einfachen und \mathbf{A} dementsprechend einen doppelten Eigenwert bei null hat. Dieser Umstand kann als Doppelintegrator-Teilsystem interpretiert werden.
- (c) Mindestens ein Eigenwert von $\tilde{\mathbf{A}}_1$ ist positiv. Dann ist die gleiche Anzahl von Eigenwerten von \mathbf{A} positiv und mithin gibt es für $\bar{\tau}$ exponentiell anwachsende Lösungen.

Offensichtlich unterscheidet sich das Verhalten der Lösungen in den drei Fällen sehr stark. Abbildung 3.1 veranschaulicht die drei Fälle für ein System mit $n_{\mathbf{p}_1} = 1$ und $n_{\mathbf{q}} = 0$.

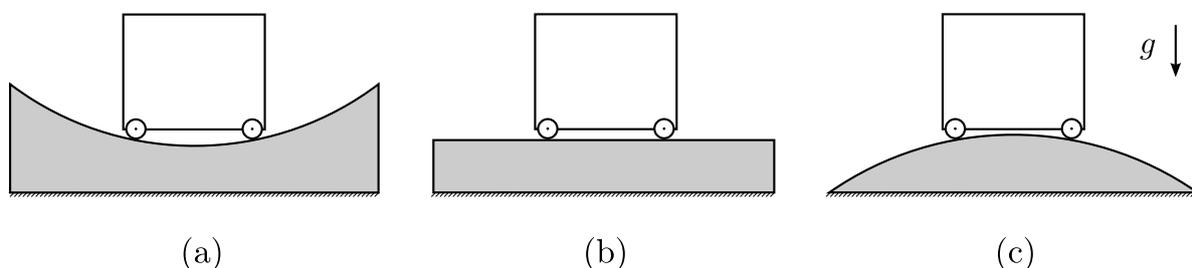


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der drei möglichen Fälle für die (In-)Stabilität von Ruhelagen eines konservativen mechanischen Systems. a) Ljapunov stabil, oszillierende Lösungen mit konstanter Amplitude. b) Ljapunov instabil, linear wachsende Zeitfunktionen als Lösungen. c) Ljapunov instabil, exponentiell wachsende Zeitfunktionen als Lösungen.

Satz 3.4. Die Zuordnung einer Ruhelage zu den Fällen (a), (b) bzw. (c) hängt allein von der Matrix $\bar{\mathbf{K}}$ ab.

Beweis: Zu zeigen ist, dass $\bar{\mathbf{M}}$ auf die Anzahl der negativen, verschwindenden und positiven Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{A}}_1$ keinen Einfluss hat. Ausgangspunkt dafür ist die Zerlegung der positiv definiten, symmetrischen und damit diagonalisierbaren Matrix $\bar{\mathbf{M}}$ in das Produkt zweier symmetrischer positiv definiten Matrizen,

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{M}}^{1/2} \bar{\mathbf{M}}^{1/2}, \quad (3.14)$$

welche sich direkt aus der Jordan-Normalform von $\bar{\mathbf{M}}$ berechnen lässt. Weiterhin wird ausgenutzt, dass das Spektrum eines Produkts von Matrizen der gleichen Dimensionen nicht von der Multiplikationsreihenfolge abhängt [Ber09, Fact 4.4.10]. Nun bezeichne in (\mathbf{H})

den sogenannten **Trägheitsindex**³ einer quadratischen Matrix \mathbf{H} , d. h. das Zahlentripel, bestehend aus der Anzahl der Eigenwerte mit positivem, negativem und verschwindendem Realteil [Ber09, Abschnitt 4.4, S.245]. Die Behauptung ist damit äquivalent zu⁴

$$\text{in}(\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{K}}) = \text{in}(\overline{\mathbf{K}}). \quad (3.15)$$

Der Trägheitssatz von Sylvester [Ber09, Korollar 5.4.7] besagt: Für zwei reelle symmetrische Matrizen \mathbf{H}, \mathbf{S} gilt $\text{in}(\mathbf{H}) = \text{in}(\mathbf{S})$ genau dann, wenn es eine regulär reelle Matrix \mathbf{R} gibt, sodass

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{S} \quad (3.16)$$

erfüllt ist. Man sagt dann auch die Matrizen sind *kongruent*. Aus der Rechnung

$$\text{in}(\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{K}}) = \text{in}(\overline{\mathbf{M}}^{1/2}\overline{\mathbf{M}}^{1/2}\overline{\mathbf{K}}) = \text{in}(\overline{\mathbf{M}}^{1/2}\overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{M}}^{1/2}) = \text{in}\left(\left(\overline{\mathbf{M}}^{1/2}\right)^T \overline{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{M}}^{1/2}\right). \quad (3.17)$$

folgt die Behauptung nun, indem man im Trägheitssatz von Sylvester $\mathbf{H} := \overline{\mathbf{K}}$ und $\mathbf{R} := \overline{\mathbf{M}}^{1/2}$ wählt und Satz 3.3 berücksichtigt. \square

3.4 Zur Steuerbarkeit linearer mechanischer Systeme

Eine zentraler Aspekt der regelungstechnischen Analyse ist die Frage nach der Steuerbarkeit. Für lineare Systeme steht zur Überprüfung dieser Eigenschaft u.a. das Kriterium von Hautus zur Verfügung, siehe z.B. [Rei14, Satz 8.1]: Ein durch (3.9) gegebenes System ist genau dann steuerbar, wenn für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\text{rank}(s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{A}, \mathbf{B}) = 2n. \quad (3.18)$$

Man stellt nun fest, dass ähnlich wie für die Stabilität die aus der potentiellen Energie herrührende Steifigkeitsmatrix $\overline{\mathbf{K}}$ eine entscheidende Rolle spielt.

Satz 3.5. *Eine notwendige Bedingung für die Steuerbarkeit des linearen mechanischen Systems (3.9) lautet:*

$$(n_{\mathbf{q}} =) \text{rank } \mathbf{B} \geq \dim \mathcal{Q}_{RL}. \quad (3.19)$$

Mit anderen Worten: Ein steuerbares lineares mechanisches System muss mindestens so viele Eingangskomponenten aufweisen, wie Freiheitsgrade in der Wahl einer Ruhelage bestehen.

Beweis: Genau wie für das nichtlineare Modell eine Eingangstransformation durchgeführt werden kann, sodass der neue Eingang mit den Beschleunigungen der aktuierten Konfigurationskoordinaten übereinstimmt (siehe (2.18)), ist dies auch für das lineare

³Engl. nur „inertia“.

⁴Die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt direkt aus [Ber09, Fact 5.8.12]. Allerdings wird das Ergebnis dort nicht bewiesen, sodass eine ausführliche Begründung hier sinnvoll erscheint.

Zustandsraummodell (3.9) möglich. Dabei ändern sich im Allgemeinen gegenüber (3.9) sowohl die Systemmatrix als auch die Eingangsmatrix. Man erhält die Struktur

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_q} \\ \hat{\mathbf{A}}_1 & & & \hat{\mathbf{A}}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{=:\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}}_{=:\hat{\mathbf{B}}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{I}_{n_q} \end{pmatrix} \mathbf{a}. \quad (3.20)$$

Durch die Eingangstransformation bleiben sowohl der Rang der Eingangsmatrix als auch die Ruhelagemannigfaltigkeit erhalten. Für Ruhelagen muss in der Darstellung (3.20), wie bereits in Abschnitt 3.1 festgestellt, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ gelten. Die Ruhelagemannigfaltigkeit des linearisierten Systems ist folglich durch $\ker \hat{\mathbf{A}}$ gegeben, und demnach gilt $\dim \mathcal{Q}_{\text{RL}} = \dim \ker \hat{\mathbf{A}}$. Aus dem Hautus-Kriterium folgt nun für $s = 0$, dass der Rangabfall von $\hat{\mathbf{A}}$ welcher gerade der Dimension von $\ker \hat{\mathbf{A}}$ entspricht, durch $\hat{\mathbf{B}}$ ausgeglichen werden muss. \square

Kapitel 4

Exakte Linearisierung und differentielle Flachheit im Kontext mechanischer Systeme

4.1 Allgemeine Bemerkungen

Eine Alternative zu der letzten Kapitel betrachteten im Allgemeinen nur näherungsweise gültigen Taylor- bzw. Jacobi-Linearisierung stellt die exakte Linearisierung durch Rückführung dar. In Abgrenzung zur exakten Eingangs-Ausgangs-Linearisierung wird auch von „Eingangs-Zustands-Linearisierung“ gesprochen, siehe z.B. [Unb98, Abschnitt 9.3]. Dabei wird eine Transformation der Zustandskoordinaten zusammen mit einer zustandsabhängigen Eingangstransformation vorgenommen, sodass die Systemgleichungen in den neuen Koordinaten ein lineares steuerbares System bilden. Man unterscheidet dabei zwischen statischer und dynamischer Linearisierung. Bei der exakten Linearisierung durch statische Rückführung darf die Eingangstransformation nur von den Zustandskomponenten des Originalsystems abhängen. Die Zustandsdimension bleibt also unverändert. Bei der exakten Linearisierung mittels dynamischer Rückführung hingegen hängt die Eingangstransformation von zusätzlichen Zustandsgrößen ab. Dem Originalsystem werden zusätzliche Differentialgleichungen hinzugefügt und folglich übersteigt die Dimension des neuen Zustands die des ursprünglichen.

Aufgrund dieses zusätzlichen Freiheitsgrades ist die Klasse der dynamisch linearisierbaren Systeme eine echte Obermenge der Systeme, die durch statische Rückführung exakt linearisierbar sind. Für Systeme mit einem Eingang sind beide Klassen jedoch identisch [ST95].

Während zur Überprüfung eines Systems auf statische Linearisierbarkeit seit längerem Verfahren bekannt sind, siehe Abschnitt 4.2, ist dieses Problem für die dynamische Linearisierung trotz zahlreicher Detailergebnisse nach wie vor offen.

Eng mit der exakten Linearisierung verknüpft ist das Konzept der „differenziellen Flachheit“. Tatsächlich wird in [Lev07] gezeigt, dass die Klasse der flachen Systeme äquivalent zur Klasse der dynamisch linearisierbaren Systeme ist.

Der Begriff „differenzielle Flachheit“ bezeichnet die spezielle Eigenschaft eines dynamischen Systems, in einem bestimmten Sinn äquivalent zu einem linearen steuerbaren System zu sein: Ein System ist genau dann flach, wenn es eine umkehrbar eindeutige

Abbildung seiner Trajektorien auf die Trajektorien eines linearen steuerbaren Systems gibt. Zwischen beiden Systemen besteht dann eine sogenannte „Lie-Bäcklund-Äquivalenz“ [FLMR99]. Die Klasse der differentiell flachen Systeme liegt „zwischen“ der Klasse der lokal steuerbaren und der Klasse der durch statische Rückführung eingangs-zustands-linearisierbaren Systeme, siehe z.B. [SSK14] bzw. Satz 4.7 und Abschnitt 4.5. Abbildung 4.1 visualisiert diese Einordnung. Für den Spezialfall linearer Systeme (aufgefasst als Teilmenge allgemeiner nichtlinearer Systeme) fallen die Eigenschaften Steuerbarkeit und Flachheit zusammen [FLMR95, Theorem 2].

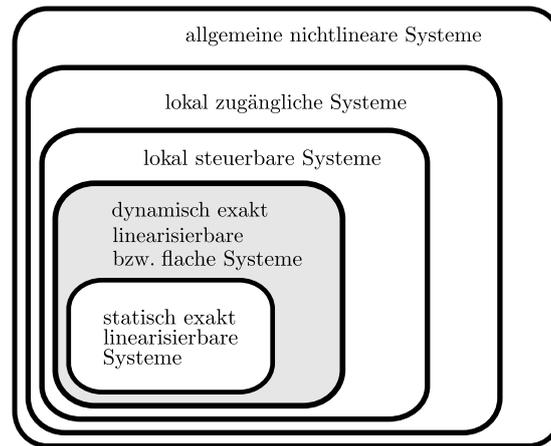


Abbildung 4.1: Klassifikationsschema („Taxonomie“) von Regelungssystemen zur Einordnung differentiell flacher Systeme. Eine formale Definition der jeweiligen Eigenschaften wird in den folgenden Abschnitten gegeben.

Ein flaches System ist durch die Existenz eines flachen Ausgangs $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ gekennzeichnet. Dabei handelt es sich um ein Tupel spezieller Systemgrößen, welches einerseits keinerlei Einschränkung in Form von Differentialgleichungen unterliegt und andererseits die Lösungen des dynamischen Systems vollständig parametriert.

Ist ein solcher flacher Ausgang bekannt, erleichtert dies die Planung von Solltrajektorien erheblich. Auf Grund der Parametrierbarkeit kann das dafür im Allgemeinen zu lösende Randwertproblem auf ein deutlich einfacheres Interpolationsproblem zurückgeführt werden, siehe auch Abschnitt 5.3. Auch der Entwurf von (Folge-)Reglern und Beobachtern wird mit Hilfe eines flachen Ausgangs deutlich einfacher, da z.B. lineare Methoden verwendet werden können.

Die für allgemeine dynamische Systeme definierte Flachheits-Eigenschaft ist offensichtlich auch für mechanische Regelungssysteme sehr nützlich. Tatsächlich stammen viele der in der Literatur diskutierten flachen Systeme aus der Mechanik, siehe z.B. [MRS95, FRA13] und [MMR03, Abschnitt 7.1].

Zur Ausnutzung der Flachheit für die Lösung von konkreten Steuerungs- und Regelungsaufgaben steht seit geraumer Zeit ein leistungsfähiges und weitestgehend vollständiges Theoriegebäude zur Verfügung, siehe z.B. [RRZ97, Rot97, Hag03, KS15]. Die Kenntnis eines flachen Ausgangs für das jeweilige System wird dabei allerdings stets vorausgesetzt.

Für viele praktisch relevante Systeme ist ein flacher Ausgang bekannt, oft sogar mit einer guten physikalischen Interpretation wie z. B. raumfesten Schwerpunktskoordinaten [MRS95]. Tatsächlich ist davon auszugehen, dass die meisten flachen Ausgänge für Modelle physikalischer Systeme bisher heuristisch auf Basis eines vertieften Systemverständnisses gefunden wurden [Fra14, S. 2].

Darüber hinaus wurden in der jüngeren Vergangenheit Algorithmen zur systematischen Bestimmung flacher Ausgänge vorgeschlagen, siehe z.B. [Lé11, Fra14, SS14b, SSK15, FF-KR16]. Allerdings ist die praktische Anwendbarkeit dieser Algorithmen für nichtlineare Mehrgrößensysteme begrenzt, da sie entweder die symbolische Lösung partieller Differentialgleichungen erfordern, und/oder nicht in endlich vielen Schritten zu einem Ergebnis kommen müssen. Diese Algorithmen sind daher in erster Linie als hinreichende Bedingungen für Flachheit zu verstehen, siehe z.B. [Fra14, Abschnitt 4.4]. Mit ihnen kann man jeweils für bestimmte Beispielsysteme einen flachen Ausgang finden und somit Flachheit nachweisen.

Wünschenswert wäre natürlich ein *Kriterium*, d.h. eine zugleich notwendige und hinreichende Flachheitsbedingung, welches für ein gegebenes System mit möglichst geringem, in jedem Fall aber endlichem Aufwand abgeprüft werden kann. Anders als der Titel des Beitrags [Lé11] „*On necessary and sufficient conditions for differential flatness*“ vermuten lässt, ist ein solches Kriterium bisher nicht bekannt. Für den dort vorgestellten Algorithmus ist nicht sichergestellt, dass in endlich vielen Schritten eine Aussage getroffen werden kann: „*Nevertheless [...] this algorithm remains in theory doubly infinite. It is therefore much simpler to check flatness than to prove non flatness.*“, siehe [Lé11, S. 72]. Die Quelle [Sch14, S. 43] äußert sich ähnlich: „*the severe problem of how to check a system for the flatness property and to compute the flat outputs y algorithmically has not been fully understood, so far.*“

Diese Situation hat zur Folge, dass es viele Systeme gibt, für die bezüglich der Systemeigenschaft Flachheit Unklarheit herrscht. Weder ist die Existenz eines flachen Ausgangs gezeigt, noch ist nachgewiesen, dass ein solcher nicht existieren kann, siehe Abbildung 4.2.

Vor diesem Hintergrund widmen sich die folgenden Abschnitte verschiedenen notwendigen bzw. hinreichenden Existenzbedingungen für flache Ausgänge insbesondere in Bezug auf unteraktuierte mechanische Systeme der Form (2.8). Für diese Systeme wird in Abschnitt 4.8 dann die strengere Eigenschaft der Konfigurationsflachheit und ihr Zusammenhang zur „allgemeinen Flachheit“ untersucht.

Da ein Teil der folgenden Überlegungen jedoch unabhängig davon ist, ob das untersuchte System eine mechanische Struktur hat oder nicht, bilden zunächst allgemeine nichtlineare Mehrgrößensysteme den Ausgangspunkt. Für solche Systeme existieren, je nach Anwendungsfall verschiedene Darstellungsformen. Am weitesten verbreitet ist die eingangsaffine Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i \tau_i}_{\mathbf{G}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}} \quad (4.1)$$

mit $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ und $\boldsymbol{\tau}(t) \in \mathbb{R}^m$,

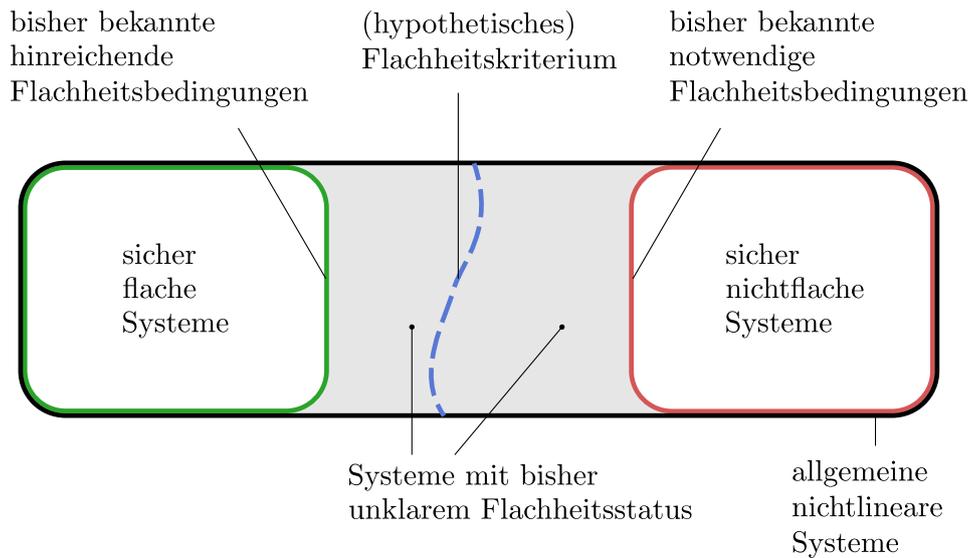


Abbildung 4.2: Veranschaulichung der „Lücke“ zwischen hinreichenden und notwendigen Flachheitsbedingungen. Die gestrichelte Linie markiert die Grenze zwischen flachen und nichtflachen Systemen, aber nur für Systeme innerhalb der grünen Umrandung kann die Flachheit nachgewiesen bzw. innerhalb der roten Umrandung ausgeschlossen werden.

wobei \mathcal{X} als offene und konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^{n_x} vorausgesetzt wird. Weithin wird angenommen, dass die Matrix $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ vollen Spaltenrang besitzt. Andernfalls gäbe es eine Redundanz unter den Eingangsgrößen, und das Systemmodell wäre regelungstechnisch nicht sinnvoll.

Um bestimmte Methoden aus der Literatur (insbesondere aus [Lé11, Rud15, Fra14]) anwenden zu können, ist die gegenüber der Zustandsraumbeschreibung (4.1) allgemeinere Darstellung als implizites unterbestimmtes Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

mit $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dots, \mathbf{x}(t)^{(\gamma)}) \in \mathbb{R}^{n_F}$ und $m = n_x - n_F$

zweckmäßiger¹, wobei \mathcal{X} wie oben als offene und konvexe Teilmenge vorausgesetzt wird. Dabei stellen die Komponenten (x_1, \dots, x_{n_x}) von nun statt Zustandskomponenten \mathbf{x} allgemeine Systemvariablen bzw. -größen dar. Die natürliche Zahl m gibt die Unterbestimmtheit des DGL-Systems an, das heißt, die Differenz zwischen der Anzahl der Systemgrößen und der Anzahl der Gleichungen. Sie entspricht also gerade der Anzahl an frei wählbaren Systemgrößen.

Für mechanische Systeme der Form (2.8) sind die beiden Varianten bereits in Kapitel 2 festgehalten. Die Gleichungen (2.16) entsprechen mit $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ der Darstellung (4.1). Andererseits ist die durch die obere Hyperzeile von (2.12) gegebene Systemdynamik der

¹Den Übergang von der Darstellung (4.1) erreicht man z.B. durch Elimination der Eingangsgrößen.

nichtaktuierten Koordinaten, also

$$(\mathbf{M}_{11}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}))\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

mit $\gamma = 2$ und $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta} = \text{col}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ äquivalent zur Darstellung (4.2). Die untere Hyperzeile kann aus dieser Perspektive als Definitionsgleichung der Eingangsgrößen $\boldsymbol{\tau}$ aufgefasst werden und es gilt $n_{\mathbf{F}} = n_{\mathbf{p}}$.

In beiden Systemdarstellungen wird jede Lösung eindeutig durch einen Zeitverlauf $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ repräsentiert, welcher die jeweilige Systemgleichung, d.h. (4.1) bzw. (4.2), erfüllt.

Definition 4.1 (siehe z.B. [RRZ96], [Rud15, Abschnitt 2.1]). Ein System der Form (4.1) bzw. (4.2) heißt **(differenziell) flach**, wenn es ein m -Tupel $(y_1, \dots, y_m) =: \mathbf{y}$ gibt, welches folgende Bedingungen erfüllt:

- 1) Jede Trajektorie des Systems $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ legt den Verlauf von \mathbf{y} über eine Abbildung $\mathbf{y} = \mathbf{h}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\kappa_{\mathbf{y}})})$ eindeutig fest². Dabei ist die Ordnung $\kappa_{\mathbf{y}}$ der in $\mathbf{h}_{\mathbf{y}}$ auftretenden Zeitableitungen von \mathbf{x} begrenzt.
- 2) Jeder Trajektorie des flachen Ausgangs $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ ist eindeutig eine Trajektorie $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ von (4.1) bzw. (4.2) mittels einer Abbildung der Form $\mathbf{x} = \mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\kappa_{\mathbf{x}})})$ mit $\kappa_{\mathbf{x}} < \infty$ zugeordnet.
- 3) Die Komponenten von \mathbf{y} sind bis auf Differenzierbarkeitsanforderungen frei wählbare Zeitfunktionen, d.h. aus den Systemgleichungen (4.1) lassen sich keine Bedingungen in Form von Differentialgleichungen allein in den y_i herleiten.

Das m -Tupel \mathbf{y} heißt dann **flacher Ausgang**. ◁

Bemerkung 4.2. Wie viele andere Fachtermini ist auch die Bezeichnung „flach“ nicht eindeutig. In [OS01, Abschnitt 2.5] werden mechanische Systeme mit konstanter Massenmatrix als flache mechanische Systeme eingeführt. ◁

Aus Bedingung 2) der Flachheitsdefinition folgt unmittelbar, dass durch eine Trajektorie $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ auch der Verlauf des Eingangs eindeutig festgelegt ist. Die entsprechende Abbildung

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{h}_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{y}^{(\kappa_{\boldsymbol{\tau}})}) \quad (4.4)$$

erhält man, in dem man (4.1) nach dem Eingang $\boldsymbol{\tau}$ auflöst und für \mathbf{x} und $\dot{\mathbf{x}}$ die Parametrierung mittels $\mathbf{h}_{\mathbf{x}}$ und $\frac{d}{dt}\mathbf{h}_{\mathbf{x}}$ einsetzt. Aus dieser Überlegung ergibt sich somit

$$\kappa_{\boldsymbol{\tau}} = \kappa_{\mathbf{x}} + 1. \quad (4.5)$$

²Alternativ wären in $\mathbf{h}_{\mathbf{y}}(\cdot)$ auch Eingangsableitungen (inkl. Ordnung 0) als Argumente zulässig. Diese können aber auch durch $\dot{\mathbf{x}}$ und höhere Ableitungen ausgedrückt werden.

4.2 Eingangs-Zustands-Linearisierung durch statische Rückführung

Wie aus Abbildung 4.1 hervorgeht, bilden die statisch linearisierbaren Systeme eine Unterklasse der flachen Systeme. Man kann also diese Eigenschaft als hinreichende Bedingung für Flachheit auffassen. Andererseits ist das Konzept der exakten Linearisierung durch statische Rückführung auch ohne expliziten Bezug zur Flachheit relevant. Letztlich ermöglichen beide Perspektiven die Wahl geeigneter Koordinaten, in denen die Analyse- und Entwurfsaufgaben einfacher lösbar sind.

Ähnlich wie bei der Flachheit ist die statische Linearisierbarkeit eines Systems äquivalent zur Existenz eines geeigneten („linearisierenden“) Ausgangs. Mit Hilfe der in Abschnitt A.9 erläuterten Lie-Ableitung kann einem Systemausgang die folgende Eigenschaft zugewiesen werden:

Definition 4.3 ([Isi95, Abschnitt 5.1]). Ein Ausgang

$$\mathbf{y} = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x}))^T \quad (4.6)$$

eines Systems der Form (4.1) hat an der Stelle \mathbf{x}° den (**vektoriellen**) **relativen Grad** $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T \in \mathbb{N}_+^m$ wenn gilt:

1) Für alle \mathbf{x} aus einer Umgebung von \mathbf{x}° ist

$$\mathcal{L}_{\mathbf{g}_j} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.7)$$

mit $1 \leq i, j \leq m$ und $0 \leq k \leq r_i - 2$ erfüllt.

2) Die sogenannte Entkopplungsmatrix

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}} := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_1} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}^\circ) & \dots & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_m} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}^\circ) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_1} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}^\circ) & \dots & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_m} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}^\circ) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ist regulär. ◁

Anschaulich entspricht r_i der minimalen Anzahl an formalen Zeitableitungen, ausgedrückt mit Hilfe der Lie-Ableitungen (siehe A.9) entlang der Vektorfelder \mathbf{f} und \mathbf{g}_j , des Ausgangs $y_i = h_i(\mathbf{x})$, sodass $y_i^{(r_i)}$ von mindestens einer Komponente des Eingangs $\boldsymbol{\tau}$ abhängt und gleichzeitig der Ausdruck $\text{col}(y_1^{(r_1)}, \dots, y_m^{(r_m)})$ nach den Eingängen aufgelöst werden kann. Dann kann man einen neuen Eingang $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ einführen, sodass jede Eingangskomponente $\tilde{\tau}_i$ mit genau einer Ausgangskomponente y_i über eine Integratorkette der Länge r_i verknüpft ist. Daher rührt die Bezeichnung Entkopplungsmatrix, siehe z.B. [VN97, S. 116]. Um auch Situationen zu erfassen, in den $\mathbf{R}_{\mathbf{r}}$ nicht regulär und somit der relative Grad nicht wohldefiniert ist, kann man auf den folgenden schwächeren Begriff zurückgreifen.

Definition 4.4 ([DMGM00, Definition 2.5]). Der Vektor $\hat{\mathbf{r}} := \text{col}(\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m) \in \mathbb{N}_+^m$ heißt (**vektorieller**) **relativer Beobachtungsgrad** (engl. „vector observation relative degree“), wenn er die Bedingung 1) aus Definition 4.3 erfüllt und zudem die Matrix $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}}$ keine Nullzeile besitzt. \triangleleft

Im Unterschied zum relativen Grad ist der relative Beobachtungsgrad somit immer wohldefiniert. Ist Entkopplungsmatrix $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}}$ regulär, dann gilt $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}$.

Definition 4.5. Der vektorielle relative Grad \mathbf{r} heißt **vollständig**, wenn $\sum_{i=0}^m r_i = n_{\mathbf{x}}$ gilt. \triangleleft

Mit diesen Begriffen kann nun die statische Linearisierbarkeit näher untersucht werden.

Definition 4.6 (Siehe z.B. [Isi95, Abschnitt 5.2]). Ein durch (4.1) gegebenes System heißt genau dann **statisch³ eingangs-zustands-linearisierbar**, wenn es durch eine diffeomorphe Zustandstransformation $\mathbf{x} = \Phi(\tilde{\mathbf{x}})$ und eine (zustandsabhängige) Eingangstransformation $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\alpha}(\tilde{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\beta}(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ in ein steuerbares lineares System mit dem Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ und dem Eingang $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ überführt werden kann. \triangleleft

Die Existenz einer solchen Zustandstransformation ist äquivalent zur Existenz eines Ausgangs (4.6) mit vollständigem relativen Grad, siehe [Isi95, Lemma 5.2.1]. Man erhält eine mögliche Wahl für die Transformation $\Phi^{-1}(\mathbf{x})$ durch die Funktionen $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^j h_i(\mathbf{x})$ für $0 \leq j \leq r_i - 1$, d.h. durch die Komponenten des Ausgangs und entsprechender Zeitableitungen.

Satz 4.7. *Jeder Ausgang $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ des Systems (4.1) mit vollständigem relativem Grad ist ein flacher Ausgang.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass sich alle Komponenten des Zustands \mathbf{x} (und damit auch alle sonstigen Systemgrößen) durch \mathbf{y} und seine Zeitableitungen ausdrücken lassen. Dazu wird der sogenannte Brunovský-Zustand \mathbf{z} eingeführt⁴, dessen Komponenten sich über die Ausgangsabbildung und deren Lie-Ableitungen definieren:

$$z_{i,k} = \Phi_{i,k}(\mathbf{x}) := \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) \quad \text{mit } i = 1, \dots, m \quad \text{und} \quad k = 0, \dots, r_i - 1. \quad (4.9)$$

Wegen $\sum_{i=1}^m r_i = n_{\mathbf{x}}$ stimmt die Anzahl der Komponenten von \mathbf{z} mit der von \mathbf{x} überein. Zudem ist die Transformation $\Phi(\mathbf{x}) = \text{col}(\Phi_{1,0}(\mathbf{x}), \dots, \Phi_{m,r_m-1}(\mathbf{x}))$ invertierbar [Isi95, S. 231], sodass die gesuchte Parametrierung durch $\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z})$ mit $\mathbf{z} = \text{col}(y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(r_m-1)})$ gegeben ist. \square

Typischerweise ist die Existenz eines Ausgangs mit vollständigem relativem Grad a priori unklar. Mit Hilfe der über die Summe von Vektorräumen rekursiv definierten Distributionen

$$\Delta_0 := \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\} \quad (4.10a)$$

$$\Delta_k := \Delta_{k-1} + [\mathbf{f}, \Delta_{k-1}], \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1 \quad (4.10b)$$

³In der Literatur wird in diesem Zusammenhang das Attribut „statisch“ üblicherweise weggelassen, weil es aus dem Zusammenhang hervorgeht. In der vorliegenden Arbeit erscheint seine explizite Angabe zur besseren Abgrenzung von dynamischer Zustandslinearisierung jedoch ratsam.

⁴Siehe z.B. [Rud03, Abschnitt 2.9].

lässt sich jedoch ein abprüfbares Kriterium für statische Eingangs-Zustands-Linearisierbarkeit angeben, wobei der Rang und die Involutivität bestimmter Distributionen Δ_k ausschlaggebend sind. Die dafür erforderlichen mathematischen Konzepte (Lie-Klammer, Involutivität, etc.) sind in Abschnitt A.11 im Anhang erläutert.

Satz 4.8 (Siehe z.B. [Isi95, Theorem 5.2.3]). *Gelte $\dim \mathbf{G}(\mathbf{x}^\circ) = m$. Dann ist das System (4.1) in einer Umgebung von \mathbf{x}° genau dann statisch eingangs-zustands-linearisierbar, wenn in dieser Umgebung gilt:*

- 1) Die Distributionen $\Delta_0, \dots, \Delta_{n-1}$ haben eine konstante Dimension.
- 2) Es gilt $\dim \Delta_{n-1} = n$.
- 3) Die Distributionen $\Delta_0, \dots, \Delta_{n-2}$ sind involutiv.

Bemerkung 4.9. Wie in Bemerkung 2.9 bereits festgestellt, ist $\Delta_0(\mathbf{x}^\circ)$ für mechanische Systeme aus strukturellen Gründen immer involutiv. Darüber hinaus ist Bedingung 2) äquivalent zur starken lokalen Zugänglichkeit des Systems, siehe Satz 4.30. \triangleleft

Beispiel 4.10 (Wagen-Pendel-System; Implementierung: [3]). Betrachtet wird das in Abbildung 4.3 dargestellte System, bestehend aus einem horizontal verschieblichen Wagen und einem über ein passives Drehgelenk daran angehängten Pendel. Zur Vereinfachung wird in diesem, wie in den folgenden Beispielen ein Pendel ohne Beschränkung der Allgemeinheit als mathematisches Pendel modelliert, d.h. seine Trägheitseigenschaften seien durch seine Masse und den Abstand zwischen Gelenk und Schwerpunkt festgelegt. Das Trägheitsmoment eines physikalischen Pendels kann über die sogenannte äquivalente Pendellänge erfasst werden, siehe z.B. [Lin09, Abschnitt B1]. Weiterhin werden die in der Abbildung dargestellten Räder des Wagens ignoriert.

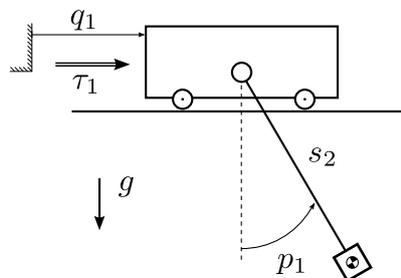


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung des Wagen-Pendel-Systems, bestehend aus einem horizontal verschieblichen Wagen und einem über ein passives Drehgelenk daran angehängten Pendel.

Die Modellbildung entsprechend der Abschnitte 2.2, 2.3 führt auf die Systemgleichungen

in kolliert partiell linearisierter Form (2.18):

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ -\frac{g}{s_2} \sin p_1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{s_2} \cos p_1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}_1(\mathbf{x})} a_1, \quad (4.11)$$

wobei der Zustandsvektor durch $\mathbf{x} = (p_1 \ q_1 \ u_1 \ v_1)^T$ gegeben ist und a_1 die Wagenbeschleunigung und damit den (neuen) Eingang bezeichnet. Die zur Auswertung von Satz 4.8 zu untersuchenden Distributionen lauten

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \text{span} \{ \mathbf{g}_1 \}, \quad \Delta_1 = \text{span} \{ \mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] \}, \quad \Delta_2 = \text{span} \{ \mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1], \text{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}_1 \} \\ \text{und } \Delta_3 &= \text{span} \{ \mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1], \text{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}_1, \text{ad}_{\mathbf{f}}^3 \mathbf{g}_1 \}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nun lässt sich leicht überprüfen, dass

$$[\mathbf{g}_1, \text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{s_2} \sin p_1 \cos p_1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \Delta_1 = \text{span} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s_2} \cos p_1 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{s_2} \cos p_1 & \frac{u_1}{s_2} \sin p_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

gilt und demnach die Involutivitätsbedingung verletzt ist. Das Wagen-Pendel-System ist also nicht statisch eingangs-zustands-linearisierbar. Wegen $n_{\mathbf{q}} = 1$, ist damit die Flachheit des Systems ebenfalls ausgeschlossen. \triangleleft

Beispiel 4.11 (Elastisch gekoppelte Körper mit aktuiertem Pendel; [4]). Untersucht wird nun das in Abbildung 4.4 dargestellte mechanische System mit drei Freiheitsgraden.

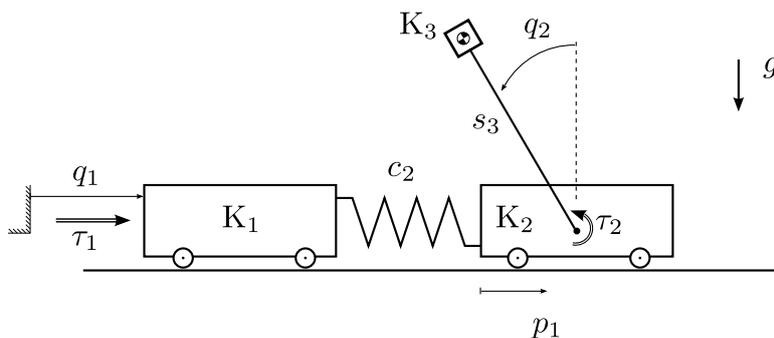


Abbildung 4.4: Zwei horizontal bewegliche elastisch gekoppelte Körper (K_1 , K_2) mit einem Pendel (K_3). Auf K_1 wirkt die Kraft τ_1 (aktuiertes Schubgelenk). Das als Punktmasse modellierte Pendel ist mit K_2 über ein aktuiertes Drehgelenk (Drehmoment τ_2) verbunden. Der Körper K_i hat jeweils die Masse m_i .

Die Bewegungsgleichungen entsprechend (2.12) lauten

$$\begin{pmatrix} c_2 p_1 + m_2 (\ddot{p}_1 + \ddot{q}_1) + m_3 (\ddot{p}_1 + \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 s_3 \cos q_2 + \dot{q}_2^2 s_3 \sin q_2) \\ m_1 \ddot{q}_1 + m_2 (\ddot{p}_1 + \ddot{q}_1) + m_3 (\ddot{p}_1 + \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 s_3 \cos q_2 + \dot{q}_2^2 s_3 \sin q_2) \\ -g m_3 s_3 \sin q_2 - m_3 \ddot{p}_1 s_3 \cos q_2 - m_3 \dot{q}_1 s_3 \cos q_2 + m_3 \dot{q}_2 s_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

und bzw. in partiell linearisierter Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ -\frac{(c_2 p_1 + m_3 s_3 v_2^2 \sin q_2)}{m_2 + m_3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & \frac{m_3 s_3 \cos q_2}{m_2 + m_3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Die Distributionen Δ_k für $k = 0, \dots, 5$ lassen sich automatisiert aufstellen und haben an einem generischen Punkt \mathbf{x}° die Dimensionen:

$$\begin{pmatrix} \dim \Delta_0(\mathbf{x}^\circ) & \dim \Delta_1(\mathbf{x}^\circ) & \dim \Delta_2(\mathbf{x}^\circ) & \dim \Delta_3(\mathbf{x}^\circ) & \dim \Delta_4(\mathbf{x}^\circ) & \dim \Delta_5(\mathbf{x}^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Es muss folglich nur die Involutivität von Δ_1 und Δ_2 überprüft werden, die sich durch direkte Berechnung der entsprechenden Lie-Klammern verbunden mit einer Rangprüfung⁵ bestätigen lässt. Somit ist das System eingangs-zustands-linearisierbar und damit auch flach. Einen „intuitiven“ flachen Ausgang stellen die Absolutkoordinaten des Pedelschwerpunkts

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{(p_1 + q_1 - s_3 \sin q_2)}_{=: h_1(\mathbf{x})} \underbrace{s_3 \cos q_2}_{=: h_2(\mathbf{x})}^T \quad (4.17)$$

dar, denn die Parametrierung aller Systemgrößen durch \mathbf{y} und seine Zeitableitungen lässt sich folgendermaßen bestimmen⁶: Der Winkel ergibt sich direkt aus $q_2 = \arccos \frac{y_2}{s_3}$. Damit kann man die Definitionsgleichung für y_1 nach der Summe $p_1 + q_1$ auflösen. Aus der ersten Zeile der Systemgleichung (4.14) lässt sich mit diesen Ausdrücken (und ihren Ableitungen) p_1 mit Hilfe der bekannten Federsteifigkeit c_2 gewinnen.

Hervorzuheben ist nun, dass dieser Ausgang $\mathbf{y} = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}))^T$ keinen wohldefinierten vektoriiellen relativen Grad aufweist: Einerseits gilt $\mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_1(\mathbf{x}) = -m_2 s_3 \frac{\cos q_2}{(m_2 + m_3)} \neq 0$ und $\mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_2(\mathbf{x}) = -s_3 \sin q_2 \neq 0$, d.h. man erhält entsprechend den Definitionen 4.3 und 4.4 einen „Kandidaten“ $\hat{\mathbf{r}} = (2, 2)^T$ für den vektoriiellen relativen Grad. Andererseits

⁵Zur Umsetzung der Rangprüfung siehe Abschnitt B.4.

⁶Für die detaillierten Rechnungen siehe [(4)].

taucht die erste Eingangskomponente in $\dot{\mathbf{y}}$ nicht auf, man erhält also die singuläre Entkopplungsmatrix (siehe (4.8))

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_1} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_1 & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_1 \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_1} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_2 & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -m_2 s_3 \frac{\cos q_2}{(m_2 + m_3)} \\ 0 & -s_3 \sin q_2 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Mit anderen Worten: Im Mehrgrößenfall hat auch für ein statisch linearisierbares System ein flacher Ausgang nicht „automatisch“ vollständigen relativen Grad. Die synonyme Verwendung der Bezeichnungen „linearisierender Ausgang“ und „flacher Ausgang“, siehe z.B. [FLMR95, Abschnitt 3.2], ist also im allgemeineren Kontext einer Linearisierung durch dynamische Rückführung zu verstehen, was durch die weitere Betrachtung dieses Systems in Beispiel 4.13 verdeutlicht wird. Weitere Möglichkeiten zu zeigen, dass (4.17) einen flachen Ausgang darstellt, bestehen im Aufstellen der Parametrierung (siehe Beispiel 5.4) oder in der in Abschnitt 4.4 erläuterten Analyse des Variationssystems (siehe Beispiel 4.20).

Natürlich muss aber für das System (4.15) notwendigerweise ein Ausgang $\bar{\mathbf{y}}$ mit $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 = 6$ existieren, denn die Bedingungen aus Satz 4.8 sind – wie oben gezeigt – erfüllt. Die Konstruktionsregel aus dem zugehörigen Beweis in [Isi95, Abschnitt 5.2] liefert für das System (4.14) die Funktion $\bar{y}_1 = \bar{h}_1(\mathbf{x}) = m_3 s_3 \sin q_2 - (p_1 + q_1)(m_2 + m_3)$ mit dem zugehörigen skalaren relativen Grad $\bar{r}_1 = 4$ (siehe [4]). Als zweite Komponente kann dann beispielsweise $\bar{y}_2 = \bar{h}_2(\mathbf{x}) = q_2$ mit $\bar{r}_2 = 2$ gewählt werden. Für die zugehörige Entkopplungsmatrix aus (4.8) erhält man

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_1} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^3 \bar{h}_1 & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^3 \bar{h}_1 \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_1} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} \bar{h}_2 & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} \bar{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 & \frac{cm_3 s_3}{m_2 + m_3} \cos q_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

welche für $c_2 \neq 0$ immer regulär ist. ◁

4.3 Eingangs-Zustands-Linearisierung durch dynamische Rückführung

Eine Verallgemeinerung des Vorgehens aus dem letzten Abschnitt besteht darin, für das Regelungssystem (4.1) den neuen Eingang $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ statt über eine statische Zustandsrückführung wie in Definition 4.6 mittels einer dynamische Zustandsrückführung

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \quad (4.20a)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \quad \text{mit } \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{n_z} \quad (4.20b)$$

einzuführen. Die Erweiterung des Systems um n_z Zustandskomponenten stellt dabei einen erheblichen Entwurfsfreiheitsgrad dar, der dazu genutzt werden kann, um das System in eine lineare Darstellung zu transformieren.

Definition 4.12. Das System (4.1) heißt **dynamisch eingangs-zustands-linearisierbar**, wenn es eine dynamische Rückführung der Form (4.20) gibt, sodass das resultierende

System mit dem Zustand $\tilde{\mathbf{x}} := \text{col}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ und dem Eingang $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ statisch eingangs-zustands-linearisierbar im Sinne von Definition 4.6 ist. Die entsprechende Rückführung heißt dann **linearisierende dynamische Zustandsrückführung** (kurz: linearisierende Rückführung). \triangleleft

Wie bei der differentiellen Flachheit und im Unterschied zur exakten Linearisierung durch statische Rückführung, ist bisher kein allgemeines Kriterium bekannt, um für ein beliebiges System zu entscheiden, ob es dynamisch eingangs-zustands-linearisierbar ist oder nicht.

Tatsächlich stimmt nach [Lev07] die Menge der dynamisch eingangs-zustands-linearisierbaren mit der Menge der flachen Systeme überein. Der Flachheitsbegriff ist aber durch das Konzept der freien Parametrierbarkeit aller Systemgrößen und durch die Unabhängigkeit von einer Zustandsraumdarstellung für viele Fragestellungen zweckmäßiger und wird, nach Einschätzung des Autors, in der jüngeren Literatur bevorzugt.

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge wird im Folgenden skizziert, wie sich für ein flaches System zu einem gegebenen flachen Ausgang \mathbf{y} eine linearisierende Rückführung bestimmen lässt. Dieses Vorgehen wird meist als **dynamische Erweiterung** bezeichnet und u.a. in [KB00, Abschnitt 6.8] auf algorithmischer Ebene näher beschrieben.

Betrachtet man den relativen Beobachtungsgrad $\hat{\mathbf{r}}$ (siehe Definition 4.4) des flachen Ausgangs \mathbf{y} , so können prinzipiell drei möglichen Situationen auftreten: „ $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}} \notin \text{GL}(m)$ “ (d.h. \mathbf{r} ist nicht wohldefiniert), „ $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}} \in \text{GL}(m)$ und \mathbf{r} vollständig“ sowie „ $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}} \in \text{GL}(m)$ und \mathbf{r} nicht vollständig“. Den letzten Fall kann man jedoch unmittelbar ausschließen: Wäre der relative Grad nämlich wohldefiniert aber nicht vollständig, dann wäre dies gleichbedeutend mit der Existenz eines durch \mathbf{y} nicht beobachtbaren Teilsystems (der sogenannten internen Dynamik, siehe [Isi95, Abschnitt 5.3]) und stünde damit im Widerspruch zur Parametrierbarkeit aller Systemgrößen durch den flachen Ausgang \mathbf{y} . Der Fall eines vollständigen relativen Grades korrespondiert wiederum mit einem statisch eingangs-zustands-linearisierbaren System, siehe Abschnitt 4.2. Erfüllt das untersuchte System diese Eigenschaft nicht, bleibt nur die Möglichkeit eines nicht wohldefinierten relativen Grades, es gilt also $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}} \notin \text{GL}(m)$. Man kann dann durch eine Eingangstransformation einen neuen Eingang $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_{[0]}$ so einführen, dass dadurch gerade die ersten m_1 Spalten von $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{r}}}$ linear unabhängig sind und alle nachfolgenden Spalten identisch verschwinden. Die zugehörigen Komponenten $\tilde{\tau}_{1,[0]}, \dots, \tilde{\tau}_{m_1,[0]}$ des transformierten Eingangs werden nun als Zustandskomponenten aufgefasst

$$z_{i,[1]} := \tilde{\tau}_{i,[0]} \quad \text{mit } i = 1, \dots, m_1 \quad (4.21)$$

und ihre Zeitableitungen als neue Eingangsgrößen interpretiert

$$\dot{z}_{i,[1]} =: \tau_{i,[1]} \quad \text{mit } i = 1, \dots, m_1. \quad (4.22)$$

Dieser Prozess wird **Prolongation** [NR13] genannt. Man erhält somit ein erweitertes System, für welches \mathbf{y} aber immer noch ein flacher Ausgang ist. Durch dieses Anfügen von Integratoren an den zu den m_1 linear unabhängigen Spalten gehörenden Eingangskomponenten wird erreicht, dass alle Komponenten des relativen Beobachtungsgrades $\hat{\mathbf{r}}$ für das

erweiterte System größer sind als für das ursprünglich betrachtete. Es können dann wieder die beiden Fälle „relativer Grad nicht wohldefiniert“ und „vollständiger relativer Grad“ auftreten, wobei man im ersten Fall (ggf. nach einer erneuten Eingangstransformation) jeweils wieder einen Integrator vor die entsprechenden Eingangskomponenten schaltet.

Dieses Vorgehen kann solange fortgesetzt werden, bis ein wohldefinierter und damit wegen der vorausgesetzten Flachheit vollständiger relativer Grad erreicht ist. Dabei werden schrittweise die Funktionen α und φ aus (4.20) erzeugt.

Beispiel 4.13 (Fortsetzung von Beispiel 4.11; Implementierung: $\{4\}$). Wie in (4.18) festgestellt, ist die zu dem in (4.17) definierten Ausgang $\mathbf{y} = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}))^T = (p_1 + q_1 - s_3 \sin q_2, s_3 \cos q_2)^T$ gehörende Matrix $\mathbf{R}_{(2,2)}$ strukturell singular und folglich der relative Grad nicht wohldefiniert. Die notwendige Eingangstransformation besteht hier in der Vertauschung der beiden Komponenten des Eingangs $\tilde{\tau}_{[0]} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ bzw. der Eingangsvektorfelder $(\tilde{\mathbf{g}}_2(\mathbf{x}) \ \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{x})) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}))$, wodurch sich

$$\mathbf{R}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{g}}_1} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_1 & \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{g}}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_1 \\ \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{g}}_1} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_2 & \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{g}}_2} \mathcal{L}_{\mathbf{f}} h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_2 s_3 \frac{\cos q_2}{m_2 + m_3} & 0 \\ -s_3 \sin q_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

und damit $m_1 = 1$ ergibt. Nun wählt⁷ man $z_{1,[1]} := \tilde{\tau}_1$ und führt mit

$$\dot{z}_{1,[1]} = \tau_{1,[1]} \quad (4.24)$$

einen neuen Eingang entsprechend (4.22) ein. Daraus ergibt sich das erweiterte System mit dem Zustandsvektor $(p_1 \ q_1 \ q_2 \ \dot{p}_1 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ z_{1,[1]})^T$ und den Drift- bzw. Eingangsvektorfeldern

$$\mathbf{f}_{[1]} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \frac{m_3 s_3 \cos q_2}{m_2 + m_3} z_{1,[1]} - \frac{c_2 p_1 + m_3 \dot{q}_2^2 s_3 \sin q_2}{m_2 + m_3} \\ 0 \\ z_{1,[1]} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{g}_{1,[1]}, \mathbf{g}_{2,[1]}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Da sich durch

$$\mathbf{R}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_{1,[1]}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}_{[1]}}^2 h_1 & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_{2,[1]}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}_{[1]}}^2 h_1 \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_{1,[1]}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}_{[1]}}^2 h_2 & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_{2,[1]}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}_{[1]}}^2 h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_2 s_3 \frac{\cos q_2}{m_2 + m_3} & 0 \\ -s_3 \sin q_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

die gleiche Situation wie in (4.23) ergibt, muss ein weiterer Prolongationsschritt durchgeführt werden:

$$z_{1,[2]} := \tau_{1,[1]} \quad (4.27a)$$

$$\dot{z}_{1,[2]} =: \tau_{1,[2]}. \quad (4.27b)$$

⁷Die im i -ten Schritt neu eingeführten Zustands- und Eingangskomponenten sowie die sich dadurch ergebenden neuen Vektorfelder werden jeweils durch den (zusätzlichen) Index $[i]$ gekennzeichnet. Außerdem ist zu beachten, dass der Eingang des Systems (4.15) mit $(a_1 \ a_2)^T = \mathbf{a}$ bezeichnet wurde, weil es sich um die partiell linearisierte Darstellung handelt. Daher gilt nach der Eingangstransformation $(\tilde{\tau}_{1,[0]} \ \tilde{\tau}_{2,[0]})^T := (a_2 \ a_1)^T$.

Als achtdimensionalen Zustandsvektor erhält man nun folglich $(p_1 \ \dots \ \dot{q}_2 \ z_{1,[1]} \ z_{1,[2]})^T$ und als neue Vektorfelder

$$\mathbf{f}_{[2]} = \begin{pmatrix} \vdots \\ z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{g}_{1,[2]}, \mathbf{g}_{2,[2]}) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

wobei die fünf ausgelassenen Komponenten aus (4.25) hervorgehen. Für dieses System ergibt sich die Matrix

$$\mathbf{R}_{(4,4)} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathbf{g}_{1,[2]}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}_{[1]}}^2 h_1 & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_{2,[2]}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}_{[2]}}^2 h_1 \\ \mathcal{L}_{\mathbf{g}_{1,[2]}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}_{[1]}}^2 h_2 & \mathcal{L}_{\mathbf{g}_{2,[2]}} \mathcal{L}_{\mathbf{f}_{[1]}}^2 h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m_2 s_3 \cos q_2}{m_2 + m_3} & \frac{c_2}{m_2 + m_3} \\ -s_3 \sin q_2 & \frac{c_2}{m_2 + m_3} \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

bis auf eine Singularität bei

$$q_{2,\text{singulär}} = -2 \operatorname{atan} \left(\frac{1}{m_2} \left(m_2 + m_3 \pm \sqrt{2m_2^2 + 2m_2 m_3 + m_3^2} \right) \right) \quad (4.30)$$

regulär ist.

Damit ergibt sich für die dynamische Rückführung entsprechend (4.20) mit $n_{\mathbf{z}} = 2$, $\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\tau_{1,[2]}, a_1)^T$ und $\mathbf{z} = (z_{1,[1]}, z_{1,[2]})^T$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \bar{\boldsymbol{\tau}}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ z_{1,[1]} \end{pmatrix} \quad (4.31a)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_{1,[1]} \\ \dot{z}_{1,[2]} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \bar{\boldsymbol{\tau}}) = \begin{pmatrix} z_{1,[2]} \\ \tau_{1,[2]} \end{pmatrix}. \quad (4.31b)$$

Die erste Eingangskomponente des partiell linearisierten Systems (4.15) (d.h. die Beschleunigung des Körpers K_1) bleibt also unverändert, während die zweite Ableitung der Winkelbeschleunigung a_2 , d.h. also $q_2^{(4)}$, als neue (virtuelle) Eingangskomponente $\tau_{1,[1]}$ gewählt wird. \triangleleft

4.4 Flachheitsanalyse auf Basis des Variationssystems

Ausgangspunkt für die folgenden, hauptsächlich auf [Lé11, Fra14] basierenden Überlegungen ist die implizite eingangsfreie Systemdarstellung (vergl. (4.2))

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) = \mathbf{0}, \quad (4.32)$$

in der γ die höchste auftretenden Ableitungsordnung bezeichnet. Zusätzlich wird die „milde Annahme“ [Lé11] getroffen, dass die Komponenten $F_1, \dots, F_{n_{\mathbf{F}}}$ von \mathbf{F} meromorphe Funktionen (siehe Abschnitt A.12) sind, die von der Mannigfaltigkeit

$$\underline{\mathbb{X}}_{\gamma} := \mathcal{X} \times \underbrace{\mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}}}_{\gamma \text{ mal}} \quad (4.33)$$

in die reellen Zahlen abbilden. Die **verallgemeinerte Lösungsmenge** der vektoriellen Systemgleichung (4.32) wird mit \mathcal{F} bezeichnet, siehe Definition A.12. Diese enthält alle Punkte $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots) \in \mathbb{X}_\infty$, die mit (4.32), sowie mit beliebig hohen Zeitableitungen, d.h. $\mathbf{F}^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma+\kappa)})$ für alle $\kappa \in \mathbb{N}_0$ kompatibel sind.

Als mathematische Werkzeuge werden im weiteren Verlauf Differentialformen und Matrizen mit sogenannten Schiefpolynomen im Zeitableitungsoperator $\frac{d}{dt}$ als Einträge sowie zugehörige Rechenoperationen wie äußere Ableitungen und Keilprodukte verwendet. Diese Konzepte sind im Anhang in den Abschnitten A.13, A.16 und A.17 mit Verweisen auf die entsprechende Literatur zusammengefasst.

Durch Anwendung der äußeren Ableitung auf \mathbf{F} erhält man die aus $n_{\mathbf{F}}$ Komponenten bestehende Vektor-1-Form

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) = \begin{pmatrix} dF_1 \\ \vdots \\ dF_{n_{\mathbf{F}}} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}}_{\mathbf{P}_0} d\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{P}_1} d\dot{\mathbf{x}} + \dots + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}^{(\gamma)}}}_{\mathbf{P}_\gamma} d\mathbf{x}^{(\gamma)}, \quad (4.34)$$

welche sich auch mit einer Polynommatrix im Zeitableitungsoperator $\frac{d}{dt}$ als Koeffizientenmatrix schreiben lässt,

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) = \left(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \cdot \frac{d}{dt} + \dots + \mathbf{P}_\gamma \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)^\gamma \right) d\mathbf{x} =: \mathbf{P}_{\mathbf{F}} \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{x}, \quad (4.35)$$

wobei die Vertauschbarkeit der Operatoren $\frac{d}{dt}$ und d ausgenutzt wurde.

Dieses System von 1-Formen wird als „Variationssystem“ (engl. variational system) bezeichnet⁸ [Lé11, VA13]. Im Allgemeinen hängen die Einträge der Matrizen $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_\gamma$ noch von $\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}$ ab, aus Gründen der übersichtlicheren Darstellung wird, wie in den zitierten Quellen auch, diese Abhängigkeit jedoch meist nicht explizit notiert. Unter bestimmten Umständen ist ein Kenntlichmachen der Koordinatenabhängigkeit aber sinnvoll. Dazu dient die Notation $\mathbf{P}_{\mathbf{F}(\mathbf{x})}$. Als zusätzliche Voraussetzung an das System wird noch gefordert dass \mathbf{P}_γ für einen generischen Punkt aus \mathbb{X}_γ vollen Zeilenrang haben muss. Das entspricht der lokalen Auflösbarkeit von \mathbf{F} nach den höchsten Ableitungen, also nach $\mathbf{x}^{(\gamma)}$.

Bemerkung 4.14. Für mechanische Systeme der Form (2.8) ist diese Forderung stets erfüllt, denn mit $\mathbf{x} := \boldsymbol{\theta}$ gilt $\gamma = 2$ und aus der Gleichung für den nichtaktuierten Teil (4.3) folgt

$$\mathbf{P}_2 = (\mathbf{M}_{11}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{M}_{12}(\mathbf{x})). \quad (4.36)$$

Alternativ könnte man auch z.B. mit $\mathbf{x} := \text{col}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ eine implizite Darstellung 1. Ordnung wählen, allerdings würde aufgrund der zu berücksichtigenden definitiven Gleichungen dann $n_{\mathbf{F}} := 2n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{q}}$ statt $n_{\mathbf{F}} := n_{\mathbf{p}}$ gelten. \triangleleft

⁸In [Fra14] werden die 1-Formen $d\mathbf{F}$ noch (formal) auf Vektorfelder angewendet. Deswegen wird dort die Bezeichnung „Tangentialsystem“ benutzt.

Die Polynommatrix $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ kann in einem gewissen Sinne als eine „verallgemeinerte Jacobimatrix“ bezüglich der Komponenten von \mathbf{x} aufgefasst werden. Diese Bezeichnung wird im Folgenden beibehalten.

Die Flachheitsanalyse in [Lé11, Fra14] beruht nun auf der Untersuchung der Polynommatrix $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$, wobei die in Abschnitt A.17 erklärten Begriffe **Hyperregularität**, **Unimodularität** und **\mathcal{F} -Unimodularität** eine zentrale Rolle spielen. In folgendem Satz sind verschiedene relevante Ergebnisse und Folgerungen aus den genannten Quellen zusammengefasst.

Satz 4.15. (1) Für jedes lokal zugängliche System (4.32) (siehe Definition 4.27) ist $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ hyperregulär.

(2) Für jede hyperreguläre Matrix $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right) \in \underline{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dt}\right]^{n_{\mathbf{F}} \times n_{\mathbf{x}}}$ gibt es eine „unimodulare Vervollständigung“ (siehe Definition A.15) $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right) \in \underline{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dt}\right]^{m \times n_{\mathbf{x}}}$.

(3) Ist das System (4.32) flach und $\mathbf{y} = \mathbf{h}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \dots)$ ein beliebiger flacher Ausgang, dann bildet die Koeffizientenmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ der äußeren Ableitung der Ausgangsabbildung $d\mathbf{h}_{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{Q}}\left(\frac{d}{dt}\right) d\mathbf{x}$ (d.h. die verallgemeinerte Jacobimatrix von $\mathbf{h}_{\mathbf{y}}$) eine \mathcal{F} -unimodulare Vervollständigung zu $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$.

Beweis: Aussage (1) geht für die Systemordnung $\gamma = 1$ direkt aus [Lé11, Proposition 3] hervor, siehe auch [Rud03, Abschnitt 2.3] und [Fra14, Abschnitt 4.3]. Den Fall $\gamma > 1$ kann man durch die Einführung neuer Systemgrößen über definitonische Gleichungen auf den Fall erster Ordnung zurückführen. Der Grad der Unterbestimmtheit m , d.h. die Differenz zwischen der Anzahl an Systemgrößen $n_{\mathbf{x}}$ und der Anzahl an Gleichungen $n_{\mathbf{F}}$ ändert sich dadurch nicht.

Aussage (2) lässt sich über die Hermite-Form (siehe Abschnitt A.17) begründen: Per definitionem existiert für jede hyperreguläre Matrix $\mathbf{P}\left(\frac{d}{dt}\right) \in \underline{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dt}\right]^{n_1 \times n_2}$ mit $n_1 \leq n_2$ eine unimodulare Matrix $\mathbf{U}_{\mathbf{R}} \in \mathcal{U}\left[\frac{d}{dt}\right]^{n_2 \times n_2}$ sodass

$$\mathbf{P}\left(\frac{d}{dt}\right) \mathbf{U}_{\mathbf{R}}\left(\frac{d}{dt}\right) = (\mathbf{I}_{n_1}, \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2 - n_1)}) \quad (4.37)$$

gilt. Daraus kann man eine mögliche unimodulare Vervollständigung direkt ablesen. Diese ergibt sich aus den $n_2 - n_1$ unteren Zeilen von $\mathbf{U}_{\mathbf{R}}^{-1}$:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{0}_{(n_2 - n_1) \times n_1}, \mathbf{I}_{n_2 - n_1}) \mathbf{U}_{\mathbf{R}}^{-1}, \quad (4.38)$$

denn dann gilt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} \mathbf{U}_{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_{n_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{\mathbf{R}}^{-1} \in \mathcal{U}\left[\frac{d}{dt}\right]^{n_2 \times n_2}. \quad (4.39)$$

Eine mathematisch strenge Begründung von Aussage (3) lässt sich zum Beispiel mit den differentialgeometrischen Methoden aus [Fra14] formulieren. An dieser Stelle wird

die Argumentation nur skizziert. Ausgangspunkt sind zwei aus der Flachheitsdefinition 4.1 resultierende Beobachtungen: Erstens erhält man für jeden beliebigen Zeitverlauf $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ mittels der Parametrierung $\mathbf{x} = \mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)$ eine Trajektorie der Systemgrößen $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, welche die Systemgleichungen (4.32) löst. Es gilt also stets $\mathbf{F} \circ \mathbf{h}_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Sei nun die verallgemeinerte Jacobimatrix von $\mathbf{h}_{\mathbf{x}}$ mit $\mathbf{G}_{\langle \mathbf{y} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right)$ bezeichnet, d.h. es gilt

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{h}_{\mathbf{x}} = \mathbf{G}_{\langle \mathbf{y} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{y}. \quad (4.40)$$

Da die Abbildung $\mathbf{h}_{\mathbf{x}}$ von $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ usw. abhängt, hängt die Matrix $\mathbf{G}_{\langle \mathbf{y} \rangle}$ naturgemäß von den \mathbf{y} -Koordinaten ab. Auf Grund der Kettenregel der Differentialrechnung und der Tatsache, dass $\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ usw. beliebig wählbar sind, folgt dann aus $\mathbf{F} \circ \mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots) = \mathbf{0}$ unmittelbar

$$\mathbf{P}_{\mathbf{F}(\mathbf{x})} \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)} \cdot \mathbf{G}_{\langle \mathbf{y} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) = \mathbf{0}_{n_{\mathbf{F}} \times m}. \quad (4.41)$$

Um bei dem Produkt der Jacobimatrizen eine Darstellung in gemischten Koordinaten zu vermeiden wurde in $\mathbf{P}_{\mathbf{F}(\mathbf{x})}$ die Parametrierung $\mathbf{x} = \mathbf{h}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)$ eingesetzt. Umgekehrt kann man aber auch \mathbf{y} mit Hilfe der Ausgangsabbildung $\mathbf{h}_{\mathbf{y}}$ durch $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ usw. ausdrücken. Damit erhält man $\tilde{\mathbf{G}}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) := \mathbf{G}_{\langle \mathbf{y} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{h}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots)}$. Da aber nicht jeder Punkt in $\underline{\mathbb{X}}_{\gamma}$ zu einer Lösung des Systems (4.32) gehört, muss man, um eine zu (4.41) äquivalente Gleichung zu erhalten, die Punkte $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots)$ auf die verallgemeinerte Lösungsmenge \mathcal{F} von (4.32) (siehe (A.35)) einschränken:

$$\left(\mathbf{P}_{\mathbf{F}(\mathbf{x})} \left(\frac{d}{dt} \right) \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \Big|_{\mathcal{F}} = \mathbf{0}_{n_{\mathbf{F}} \times m}. \quad (4.42)$$

Die Spalten von $\tilde{\mathbf{G}} \left(\frac{d}{dt} \right)$ spannen also unter der Bedingung $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots) \in \mathcal{F}$ den Rechtsnullraum von $\mathbf{P}_{\mathbf{F}(\mathbf{x})} \left(\frac{d}{dt} \right)$ vollständig auf, siehe [Fra14, Abschnitt 4.3.1].

Als zweite Beobachtung stellt man fest, dass sich aus der Anwendung von $\mathbf{h}_{\mathbf{y}}$ auf obige Trajektorie $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ wiederum die ursprüngliche Trajektorie für den flachen Ausgang $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ ergibt. Mit anderen Worten gilt:

$$\mathbf{h}_{\mathbf{y}} \circ \mathbf{h}_{\mathbf{x}} = \text{id}_m, \quad (4.43)$$

wobei zu beachten ist, dass \mathbf{x} und \mathbf{y} im Allgemeinen unterschiedliche Dimensionen aufweisen. Die Invertierbarkeit erfordert die Einbeziehung entsprechender Zeitableitungen. Betrachtet man wiederum die Differentiale der involvierten Abbildungen erhält man mit $\mathbf{y} = \mathbf{h}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots)$, $d\mathbf{y} = d\mathbf{h}_{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{Q}}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{x}$ und (4.40) die Beziehung

$$\left(\tilde{\mathbf{Q}}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) \tilde{\mathbf{G}}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \Big|_{\mathcal{F}} = \mathbf{I}_m, \quad (4.44)$$

d.h. unter Einschränkung der Koordinaten auf die Lösungsmenge des Systems ist $\tilde{\mathbf{Q}}$ die Linkspseudoinverse des Rechtsorthokomplements von $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}$. Die Behauptung (3) folgt nun aus dem auf der Hermite-Normalform beruhenden Satz A.17 auf S. 155. \square

Beispiel 4.16 (Akademisches Beispiel zum Unterschied zwischen unimodularer und \mathcal{F} -unimodularer Vervollständigung; Implementierung: [[5](#)]). Die Tatsache, dass die zu einem bestimmten flachen Ausgang $\mathbf{y} = \mathbf{h}_y(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots)$ gehörende verallgemeinerte Jacobimatrix $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$ nicht unbedingt eine („global“) unimodulare Vervollständigung, sondern ggf. nur eine \mathcal{F} -unimodulare Vervollständigung von \mathbf{P}_F darstellt, soll durch ein akademisches Beispiel illustriert werden. Gegeben sei das implizite nichtlineare System

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ F_2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 - x_3 + \dot{x}_3 \cdot (x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

mit den Systemgrößen $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$. Wie man leicht erkennt, erhält man mit $\tilde{F}_2 := F_2 - \dot{x}_3 \cdot F_1 = \dot{x}_2 - x_3$ das lineare implizite System $\begin{pmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$, welches eine Integrator-kette bildet und für das $\mathbf{y} = \mathbf{h}_y(\mathbf{x}) = x_1$ einen flachen Ausgang darstellt. Als verallgemeinerte Jacobimatrix der Ausgangsabbildung \mathbf{h}_y ergibt sich $\mathbf{Q} = (1 \ 0 \ 0)$. Betrachtet man das System wieder in der gegebenen Form (4.45), gilt für die verallgemeinerte Jacobimatrix von \mathbf{F}

$$\mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ \dot{x}_3 \frac{d}{dt} & \frac{d}{dt} - \dot{x}_3 & F_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \frac{d}{dt} - 1 \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

und somit für die vervollständigte Gesamtmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right) \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ \dot{x}_3 \frac{d}{dt} & \frac{d}{dt} - \dot{x}_3 & F_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \frac{d}{dt} - 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Aufgrund der Blockstruktur $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ hat diese Matrix genau dann eine polynomiale Inverse, wenn der Block \mathbf{B} eine polynomiale Inverse hat. Da es sich bei diesem um eine Dreiecksmatrix handelt und ein Diagonaleintrag $F_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \frac{d}{dt} + 1$ lautet, ist sofort klar, dass \mathbf{Q} nur eine \mathcal{F} -unimodulare Vervollständigung von \mathbf{P}_F ist. Es sei allerdings explizit darauf hingewiesen, dass $\mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right)$ trotzdem hyperregulär ist und dementsprechend auch „global“ unimodulare Vervollständigungen besitzt, siehe [[5](#)]. \triangleleft

Entscheidend für die Flachheitscharakterisierung des Systems ist nun, der folgende Satz, der in einem gewissen Sinne die Umkehrung von Aussage (3) aus Satz 4.15 beinhaltet.

Satz 4.17. *Das System (4.32) ist genau dann flach, wenn es eine unimodulare Vervollständigung $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$ von $\mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right)$ gibt, für die*

$$\boldsymbol{\omega} := \left(\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right) \right) \Big|_{\mathcal{F}} d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad (4.48a)$$

$$d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (4.48b)$$

gilt. Ein zugehöriger flacher Ausgang $\mathbf{y} = \mathbf{h}_y(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots)$ des Systems mit $d\mathbf{h}_y = \boldsymbol{\omega}$ ist dann durch die Integration der 1-Formen $\boldsymbol{\omega}$ gegeben.

Beweis: Mit der durch Satz A.20 festgestellten Äquivalenz der Smith-Form-Perspektive und der unimodularen Vervollständigung folgt die Behauptung aus [Lé11, Theorem 3] (worauf sich auch [Fra14, Satz 4.1] bezieht). \square

Bemerkung 4.18. Ein wesentlicher Aspekt des Beweises ist, dass das Verschwinden der äußeren Ableitung die Integrierbarkeit der m 1-Formen in ω impliziert. Dies ist eine Folge des Lemmas von Poincaré (siehe Satz A.3). \triangleleft

Bemerkung 4.19. Die Einschränkung der Vektor-1-Form ω auf die Lösungsmenge \mathcal{F} (siehe (A.35)) heißt, dass die Integrabilitätsbedingung (4.48) nur unter der Berücksichtigung der Systemgleichungen gelten muss, siehe [Lé11, S. 63]. Erhält man beispielsweise die 1-Form $\omega_1 = e^{F_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})} dx_1$, so ist deren äußere Ableitung $d\omega_1 = e^{F_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})} dF_1 \wedge dx_1$ zwar im Allgemeinen verschieden von Null, jedoch gilt $d(\omega_1|_{\mathcal{F}}) = dd x_1 = 0$.

Zur praktischen Überprüfung dieser Bedingung löst man \mathbf{F} (und ggf. dessen Zeitableitungen) geeignet auf und setzt die so erhaltenen Ausdrücke in $\mathbf{Q}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right)$ ein. Wegen der Voraussetzung des vollen Zeilenrangs von \mathbf{P}_γ lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit \mathbf{F} lokal nach $x_1^{(\gamma)}, \dots, x_{n_{\mathbf{F}}}^{(\gamma)}$ auflösen. Aus der Kettenregel folgt die lokale Auflösbarkeit von $\mathbf{F}^{(\kappa)}$ nach $x_1^{(\gamma+\kappa)}, \dots, x_{n_{\mathbf{F}}}^{(\gamma+\kappa)}$. Man wählt also $\kappa \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\gamma + \kappa$ mindestens so groß ist, wie die höchste in $\mathbf{Q}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right)$ auftretende Ableitungsordnung von \mathbf{x} . Damit gilt in jedem Fall $\kappa < \infty$. Dann setzt man sukzessive die durch das Auflösen gewonnenen Ausdrücke in $\mathbf{Q}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right)$ ein, beginnend mit der höchsten Ableitungsordnung. Tritt in $\mathbf{Q}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right)$ eine bestimmte Variable $x_i^{(k)}$ mit $1 \leq i \leq n_{\mathbf{F}}$ und $k \leq \gamma + \kappa$ nicht auf, dann spielt die entsprechend aufgelöste skalare Systemgleichung für die Einschränkung auf \mathcal{F} keine Rolle. Von der auf diese Weise gemäß (4.48a) bestimmten Vektor-1-Form ω bildet man schließlich die äußere Ableitung (4.48b). \triangleleft

Beispiel 4.20 (Fortsetzung von Beispiel 4.13; Implementierung: [$\{4\}$]). Es wird erneut das in Abbildung 4.4 dargestellte System mit $\boldsymbol{\theta} = (p_1 \ q_1 \ q_2)^T =: \mathbf{x}$ betrachtet. Als implizite Systemdarstellung der Form $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}$ ergibt sich

$$(m_2 + m_3) (\ddot{p}_1 + \ddot{q}_1) + m_3 s_3 \ddot{q}_2 \cos q_2 - m_3 s_3 \dot{q}_2^2 \sin q_2 + c p_1 = 0. \quad (4.49)$$

Durch Bilden der Jacobimatrizen bezüglich $\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}$ erhält man die (1×3) -Polynommatrix

$$\mathbf{P}_{\mathbf{F}} \left(\frac{d}{dt} \right) = \left(c + (m_2 + m_3) \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \quad (m_2 + m_3) \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \quad -(\tilde{s}\dot{q}_2 + \tilde{c}\dot{q}_2^2) - 2\tilde{s}\dot{q}_2 \cdot \frac{d}{dt} + \tilde{c} \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \right) \quad (4.50)$$

mit den Abkürzungen $\tilde{s} := m_3 s_3 \sin q_2$ und $\tilde{c} := m_3 s_3 \cos q_2$.

Aus Beispiel 4.11 ist bekannt, dass die Position des Pendelschwerpunkts im Inertialkoordinatensystem

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 - s_3 \sin q_2 \\ s_3 \cos q_2 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

einen flachen Ausgang darstellt. Durch Bilden der verallgemeinerten Jacobimatrix erhält man die (2×3) -Matrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -s_3 \cos q_2 \\ 0 & 0 & -s_3 \sin q_2 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

welche in diesem Fall nur Polynome nullten Grades in $\frac{d}{dt}$ als Einträge besitzt. Diese stellt eine unimodulare Vervollständigung zu $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ dar, denn es existiert eine polynomiale Inverse zu $\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{F}} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ (siehe auch Abschnitt A.17.2 und [4]) für die Detailrechnung):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{F}} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{c_2} \begin{pmatrix} 1 & -(m_2+m_3) \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & m_3 \ddot{q}_2 + \frac{m_3 \dot{q}_2^2}{\tan q_2} + 2m_3 \dot{q}_2 \cdot \frac{d}{dt} + \frac{m_2}{\tan q_2} \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ -1 & c_2 + (m_2+m_3) \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^2 & -m_3 \ddot{q}_2 - \frac{c_2 + m_3 \dot{q}_2^2}{\tan q_2} - 2m_3 \dot{q}_2 \cdot \frac{d}{dt} - \frac{m_2}{\tan q_2} \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \\ 0 & 0 & -\frac{c_2}{s_3 \sin q_2} \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Aus \mathbf{Q} ergeben sich unmittelbar die beiden 1-Formen, die den flachen Ausgang des Tangentialsystems bilden:

$$\omega_1 = dp_1 + dq_1 - s_3 \cos q_2 dq_2, \quad (4.54a)$$

$$\omega_2 = -s_3 \sin q_2 dq_2. \quad (4.54b)$$

Wegen $d\omega_1 = 0$ und $d\omega_2 = 0$ sind beide Formen auch ohne Einsetzen der Systemgleichung direkt integrierbar (siehe Abschnitt A.14) und man erhält mit

$$y_1 = p_1 + q_1 - s_3 \sin q_2, \quad (4.55a)$$

$$y_2 = s_3 \cos q_2 \quad (4.55b)$$

einen flachen Ausgang des Systems. Dieser entspricht aufgrund des Ansatzes für \mathbf{Q} selbstverständlich wieder den Koordinaten des Pendelschwerpunkts im Inertialsystem.

Andere integrable unimodulare Vervollständigungen existieren natürlich auch, allerdings hat die hier verwendete den Vorzug, dass sich mit (4.53) noch vergleichsweise übersichtliche Inverse der vervollständigten Gesamtmatrix angeben lässt. \triangleleft

Sowohl in [Lé11] als auch in dem darauf basierenden Aufsatz [VA13] wird die Matrix $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$, anstatt sie als unimodulare Vervollständigung der Systemmatrix $\mathbf{P}\left(\frac{d}{dt}\right)$ aufzufassen, über eine zweimalige Smith-Zerlegung definiert. Es lässt sich leicht zeigen, dass beide Formulierungen gleichwertig sind, siehe dazu Satz A.20 im Anhang. Allerdings erscheint dem Autor die Charakterisierung von \mathbf{Q} als unimodulare Vervollständigung zweckmäßiger, insbesondere vor dem Hintergrund des folgenden Satzes.

Satz 4.21. Sei $\mathbf{P}\left(\frac{d}{dt}\right) \in \underline{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dt}\right]^{n_1 \times n_2}$ mit $n_1 < n_2$ hyperregulär und $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$ eine unimodulare Vervollständigung zu $\mathbf{P}\left(\frac{d}{dt}\right)$, dann lässt sich jede andere unimodulare Vervollständigung $\tilde{\mathbf{Q}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ durch

$$\tilde{\mathbf{Q}}\left(\frac{d}{dt}\right) = \mathbf{L}_1\left(\frac{d}{dt}\right) \mathbf{P}\left(\frac{d}{dt}\right) + \mathbf{L}_2\left(\frac{d}{dt}\right) \mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right) \quad \text{mit} \quad (4.56a)$$

$$\mathbf{L}_1 \in \underline{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dt}\right]^{(n_2-n_1) \times n_1} \quad \text{und} \quad \mathbf{L}_2 \in \mathcal{U}\left[\frac{d}{dt}\right]^{(n_2-n_1) \times (n_2-n_1)} \quad (4.56b)$$

ausdrücken.

Beweis: Wegen der Voraussetzung $\mathbf{L}_2 \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(n_2-n_1) \times (n_2-n_1)}$ gilt $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_2}$, denn man kann mit $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2^{-1} \end{pmatrix}$ direkt eine polynomiale Inverse angeben. Weil das Produkt zweier unimodularer Matrizen per definitionem ebenfalls unimodular ist, erhält man also

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_1 \left(\frac{d}{dt} \right) & \mathbf{L}_2 \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix}}_{\text{nach Voraussetzung: } \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ \tilde{\mathbf{Q}} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_2}, \quad (4.57)$$

d.h. Gleichung (4.56) liefert in jedem Fall eine unimodulare Vervollständigung.

Sei nun umgekehrt $\hat{\mathbf{Q}} \left(\frac{d}{dt} \right)$ eine beliebige unimodulare Vervollständigung zu $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$, dann muss wegen der geforderten Unimodularität von $\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \hat{\mathbf{Q}} \end{pmatrix}$ eine Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n_2 \times n_2}$ existieren, die der Beziehung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ \hat{\mathbf{Q}} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} \left(\frac{d}{dt} \right) & \mathbf{V}_{12} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ \mathbf{V}_{21} \left(\frac{d}{dt} \right) & \mathbf{V}_{22} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

genügt. Wählt man die Blockgröße derart, dass die Diagonalblöcke \mathbf{V}_{11} , \mathbf{V}_{22} quadratisch mit n_1 bzw. $(n_2 - n_1)$ Zeilen sind, kann man sofort $\mathbf{V}_{11} = \mathbf{I}_{n_1}$ und $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2 - n_1)}$ ablesen. Als Hyperspalte einer unimodularen Matrix muss $\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{22} \end{pmatrix}$ hyperregulär sein (siehe Lemma A.14 auf S. 154). Daraus folgt direkt die Unimodularität von \mathbf{V}_{22} . Für die Einträge der Matrix \mathbf{V}_{21} gibt es keine Einschränkung. Man kann nun in (4.56b) $\mathbf{L}_1 = \mathbf{V}_{21}$ und $\mathbf{L}_2 = \mathbf{V}_{22}$ setzen und damit den Beweis abschließen. Eine analoge Argumentation findet sich in [Rei14, Satz 7.2] für lineare zeitinvariante Systeme. \square

Aus den bisherigen Überlegungen dieses Abschnitts lässt sich nun die folgende Aussage ableiten:

Satz 4.22. *Gegeben sei ein System der Form (4.32) mit zugehöriger hyperregulärer Systemmatrix $\mathbf{P}_F \left(\frac{d}{dt} \right)$ des Variationssystems. Sei ferner $\tilde{\mathbf{Q}} \left(\frac{d}{dt} \right)$ eine beliebige unimodulare Vervollständigung zu $\mathbf{P}_F \left(\frac{d}{dt} \right)$. Dann ist das System genau dann flach, wenn $\mathbf{L}_1 \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{m \times n_F}$ und $\mathbf{L}_2 \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{m \times m}$ existieren, sodass*

$$d \left(\left(\mathbf{L}_1 \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{P}_F \left(\frac{d}{dt} \right) + \mathbf{L}_2 \left(\frac{d}{dt} \right) \tilde{\mathbf{Q}} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) dx \right) \Big|_{\mathcal{F}} = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

gilt.

Beweis: Mit der aus Satz 4.21 resultierenden Festlegung⁹ $\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) := \mathbf{L}_1 \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{P}_F \left(\frac{d}{dt} \right) + \mathbf{L}_2 \left(\frac{d}{dt} \right) \tilde{\mathbf{Q}} \left(\frac{d}{dt} \right)$ wird die Behauptung äquivalent zu Satz 4.17. \square

⁹Als Spezialfall von Bedingung (4.56b) gilt also $n_1 = n_F$, $n_2 = n_x$ und $n_2 - n_1 = m$.

Definition 4.23. Für jede unimodulare Vervollständigung $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$ von $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ sind die m 1-Formen $\boldsymbol{\omega} = \left(\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)\right)\Big|_{\mathcal{F}} d\mathbf{x}$ eindeutig festgelegt. Sie werden als ein **flacher Ausgang des Variationssystems** bezeichnet [Lé11, Abschnitt 4.3]. \triangleleft

Da als Konsequenz von Satz (4.22) für jedes lokal zugängliche System unendlich viele flache Ausgänge des zugehörigen Variationssystems existieren, ist also die entscheidende Frage, ob es unter diesen einen gibt, der „integrabel“ ist, d.h. dessen Koeffizientenmatrix Gleichung (4.48) erfüllt.

Bemerkung 4.24. Satz 4.22 ist äquivalent zu Theorem 3 in [Lé11]. Allerdings wird dort eine andere Darstellung verwendet: Statt ausgehend von einer beliebigen unimodularen Vervollständigung $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$ von $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ zur Parametrierung aller unimodularen Vervollständigungen die Gleichung (4.56) (mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{F}}$) anzusetzen, wird auf den Summanden $\mathbf{L}_1\left(\frac{d}{dt}\right)\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ verzichtet, vgl. [Lé11, Definition 7]. Dafür werden die 1-Formen $\boldsymbol{\omega} := \left(\mathbf{L}_2\left(\frac{d}{dt}\right)\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)\right)\Big|_{\mathcal{F}} d\mathbf{x}$ derart eingeschränkt, sodass nicht nur die (beliebig oft abgeleiteten) Systemgleichungen erfüllt sein müssen, was der Definition von \mathcal{F} gemäß (A.35) entspricht, sondern zusätzlich noch die Gleichungen $d\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $d\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$, \dots , $d\mathbf{F}^{(\kappa)} = \mathbf{0}$ für beliebige Ableitungsordnungen κ vorausgesetzt werden, siehe [Lé11, S. 63]. Mit anderen Worten: Die Integrabilitätsbedingung $d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ gilt „modulo“ $d\mathbf{F}$, $d\dot{\mathbf{F}}$ usw. Im Aufsatz [VA13], der explizit auf den Methoden aus [Lé11] aufbaut, wird bei der Angabe der hinreichenden und notwendigen Flachheitsbedingung (Gleichung (47) in der Quelle) nur die Einschränkung auf \mathcal{F} (Gleichung (20)) erwähnt, jedoch sind, nach Überzeugung des Autors, für den notwendigen Teil der Aussage die Vektor-1-Formen $d\mathbf{F}$, $d\dot{\mathbf{F}}$, \dots mit zu berücksichtigen. \triangleleft

Formal stellt Satz 4.22 eine notwendige und hinreichende Bedingung dar. Allerdings ist dem Autor kein Verfahren mit endlich vielen Operationen bekannt, mit dem man im allgemeinen Fall über die Existenz der Matrizen \mathbf{L}_1 und \mathbf{L}_2 entscheiden kann. Sowohl die beiden in [Lé11, Abschnitt 4.7] vorgeschlagenen Prozeduren als auch der Ansatz aus [Fra14, Abschnitt 4.4] läuft ggf. auf fortwährendes Probieren hinaus, wobei mit jedem Schritt entsprechende Ableitungsordnungen zu erhöhen sind, was jeweils eine erhebliche Steigerung des Rechenaufwandes mit sich bringt.

Wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt, lässt sich also Satz 4.22 (bzw. die analogen Aussagen in [Lé11, Fra14]) in erster Linie als hinreichende Bedingung nutzen. Damit ist es für zahlreiche Beispiel-Systeme systematisch möglich, die Flachheitseigenschaft nachzuweisen, u.a. auch mechanische Systeme wie z.B. das ebene Modell eines Senkrechtstarters („PVTOL“¹⁰, siehe [Fra14, Abschnitt 5.1.10] und Abbildung B.1 auf Seite 168), oder für das in Beispiel 4.20 betrachtete System aus zwei Wagen und einem Pendel. Andererseits lässt sich aus dem notwendigen Teil des Satzes eine – nach Kenntnis des Autors in der Literatur bisher nicht beschriebene – notwendige Flachheitsbedingung herleiten. Diese ist Gegenstand des Abschnitts 4.7. Zuvor werden jedoch einfachere notwendige Bedingungen

¹⁰Engl. Abkürzung für „planar vertical takeoff and landing aircraft“.

für differentielle Flachheit diskutiert und auf mechanische Systeme angewendet: Einerseits die lokale Steuerbarkeit (bzw. Zugänglichkeit) in Abschnitt 4.5 und andererseits die sogenannte „Regelflächen-Bedingung“ in Abschnitt 4.6.

4.5 Steuerbarkeit für nichtlineare (mechanische) Systeme

Wie oben erwähnt (vgl. auch Abbildung 4.1), sind die steuerbaren Systeme eine echte Obermenge der flachen Systeme [FLMR95, Proposition 4]. Dieser Einordnung liegt die folgende Begriffsfestlegung zugrunde.

Definition 4.25 (vgl. [NvdS90, Definition 3.2]). Ein System der Form (4.1) heißt **steuerbar** (engl. „controllable“), wenn für jedes Paar von Zuständen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ eine Eingangstrajektorie existiert, welche \mathbf{x}_1 in \mathbf{x}_2 überführt. \triangleleft

Bemerkung 4.26. Jedes implizite dynamische System der Form (4.2) mit der Systemordnung $\gamma > 1$ lässt sich durch die Einführung neuer Systemgrößen über definitivische Gleichungen eindeutig in ein implizites System erster Ordnung transformieren. Der Grad der Unterbestimmtheit, d.h. die Differenz zwischen der Anzahl an Systemgrößen und der Anzahl an Gleichungen ändert sich dadurch nicht. In einem zweiten Schritt können nun stets Eingangsgrößen eingeführt und das System (lokal) nach den abgeleiteten Variablen aufgelöst werden, sodass man eine explizite Darstellung der Form (4.1) erhält. Zwischen allen Trajektorien dieses transformierten Systems und denen des Ausgangssystems besteht eine eineindeutige Zuordnung. Man sagt auch, die Systeme sind Lie-Bäcklund-äquivalent bzw. äquivalent durch endogene Rückführung [FLMR99]. Mit Hilfe dieser Äquivalenzrelation kann man den Begriff der Steuerbarkeit sowie die im folgenden eingeführten Konzepte von dem transformierten System der Form (4.1) auf das ursprüngliche System (4.2) in impliziter Darstellung übertragen. \triangleleft

Für nichtlineare Systeme ist die Entscheidung über Steuerbarkeit naturgemäß komplizierter als für lineare. Einerseits können sich die entsprechenden Eigenschaften entlang einer Trajektorie ändern, man erhält also im Allgemeinen nur lokale Aussagen. Andererseits muss man zwischen den Begriffen Zugänglichkeit und Steuerbarkeit unterscheiden, die für lineare Systeme äquivalent sind. Grund hierfür ist, dass aufgrund (punktsymmetrischer) nichtlinearer Terme (wie z.B. „ x^2 “) Vektorfelder ihren Richtungssinn ggf. nicht ändern können. In diesem Abschnitt sollen die aus Sicht des Autors für die Betrachtung nichtlinearer mechanischer Systeme wichtigsten Ergebnisse zusammenfasst werden. Einen vergleichsweise umfassenden Überblick über die Theorie der Steuerbarkeit im Nichtlinearen unter besonderer Berücksichtigung mechanischer Systeme ist in [BL04, Abschnitt 7.0] zu finden. Diese Referenz dient (zusammen mit [NvdS90, Abschnitt 3.1]) zugleich als Bezug für die verwendete Terminologie.

Sei $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}$ und U eine Umgebung von \mathbf{x}_0 . Mit $\mathcal{R}^U(\mathbf{x}_0, T)$ wird die Menge aller Punkte bezeichnet, die ausgehend von einem Zustand \mathbf{x}_0 durch Trajektorien der Länge T , welche

U nicht verlassen, erreicht werden können. Die Vereinigungsmenge

$$\mathcal{R}_T^U(\mathbf{x}_0) := \bigcup_{\tilde{T} \leq T} \mathcal{R}^U(\mathbf{x}_0, \tilde{T}) \quad (4.60)$$

erlaubt nun die folgende Festlegung:

Definition 4.27 (vgl. [NvdS90, Definition 3.10]). Ein System der Form (4.1) heißt **lokal zugänglich** (engl.: „locally accessible“) von \mathbf{x}_0 , wenn $\mathcal{R}_T^U(\mathbf{x}_0)$, für alle $T > 0$ eine nichtleere offene Teilmenge des Zustandsraumes \mathcal{X} enthält. Das System heißt **lokal zugänglich**, wenn diese Eigenschaft für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ gilt, wobei \mathcal{M} eine offene nichtleere Teilmenge von \mathcal{X} ist. \triangleleft

Anschaulich gesprochen, lassen sich für ein solches System die durch \mathbf{x}_0 verlaufenden Trajektorien nicht auf eine Untermannigfaltigkeit des Zustandsraumes einschränken.

Um ein System auf lokale Zugänglichkeit zu überprüfen, definiert man zunächst die Distribution $\Delta_z := \text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$, wobei die Vektorfelder $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})$ die Spalten von $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ bezeichnen. Der involutive Abschluss $\Delta_z := \text{inv}(\Delta_z)$ wird **Zugänglichkeits-Distribution** (engl.: accessibility distribution) genannt¹¹. Dabei handelt es sich um die kleinste involutive Distribution, die Δ_z enthält [Isi95, Bemerkung 1.3.9].

Satz 4.28 („Zugänglichkeits-Rang-Bedingung“ (engl.: accessibility rank condition)). *Das System (4.1) ist lokal zugänglich, wenn $\dim \Delta_z(\mathbf{x}) = n$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ gilt.*

Beweis: siehe z.B. [NvdS90, Korollar 3.11]. \square

Bemerkung 4.29. Die Einschränkung auf eine nichtleere offene Teilmenge \mathcal{M} des Zustandsraumes \mathcal{X} erlaubt dabei den Umgang mit singulären Punkten. Diese sind zwar in \mathcal{X} aber, bei geeigneter Wahl nicht in \mathcal{M} enthalten, siehe auch Beispiel 4.33. \triangleleft

Neben der lokalen Zugänglichkeit existiert noch das Konzept der **starken lokalen Zugänglichkeit**, siehe [NvdS90, Definition 3.18]. Diese Verschärfung der Bedingung basiert darauf, dass man dabei die Menge $\mathcal{R}^U(\mathbf{x}_0, T)$ betrachtet, statt, wie oben, die Menge $\mathcal{R}_T^U(\mathbf{x}_0)$. Es wird dabei also gefordert, dass die entsprechenden Punkte exakt zum Zeitpunkt T erreicht werden, statt zu irgendeinem Zeitpunkt $\tilde{T} \leq T$.

Auch diese Eigenschaft lässt sich mittels einer spezieller Distributionen untersuchen. Zunächst wird $\Delta_0 := \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$ definiert. Diese erweitert man zu Δ_{sZ} , sodass gilt:

$$\text{a) } \Delta_0 \subset \Delta_{sZ}, \quad (4.61a)$$

$$\text{b) } [\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2] \in \Delta_{sZ}, \quad \forall \tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2 \in \Delta_{sZ}, \quad (4.61b)$$

$$\text{c) } [\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{g}}] \in \Delta_{sZ}, \quad \forall \tilde{\mathbf{g}} \in \Delta_{sZ}. \quad (4.61c)$$

Die Bedingungen a) und b) legen fest, dass Δ_{sZ} den involutiven Abschluss von Δ_0 umfasst, während c) ggf. die Hinzunahme weiterer Richtungen erfordert¹². Zu beachten ist, dass – im Unterschied zu $\Delta_z - \mathbf{f}$ kein Element von Δ_{sZ} sein muss.

Analog zu Satz 4.28 lässt sich nun folgendes Ergebnis zeigen:

¹¹Eine alternative Bezeichnung ist Zugänglichkeits-Lie-Algebra, siehe z.B. [HRK16] bzw. [NvdS90, Definition 3.7].

¹²Bedingung c) wird auch als \mathbf{f} -Invarianz von Δ_{sZ} bezeichnet, vgl. [Isi95, Abschnitt 1.6]

Satz 4.30. *Das System (4.1) ist lokal stark zugänglich, wenn $\dim \Delta_{sZ}(\mathbf{x}) = n$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ gilt.*

Beweis: siehe [NvdS90, Theorem 3.21]. □

Eine Möglichkeit, diese Bedingung für ein gegebenes System konkret zu überprüfen, ist die folgende: Man betrachtet den Rang der Matrix mit den $n \cdot m$ Spalten

$$\mathbf{Q}_S(\mathbf{x}) := \left(\mathbf{g}_1 \quad \dots \quad \mathbf{g}_m \quad \text{ad}_f \mathbf{g}_1 \quad \dots \quad \text{ad}_f^{n-1} \mathbf{g}_m \right). \quad (4.62)$$

Für lineare zeitinvariante Systeme stimmt diese Matrix (bis auf das Vorzeichen einiger Spalten) mit der Kalmanschen Steuerbarkeitsmatrix überein. Für nichtlineare Systeme gilt zumindest $\text{rank } \mathbf{Q}_S = n \Rightarrow \dim \Delta_{sZ} = n$ und damit ist das System (4.1) dann stark lokal erreichbar. Die Umkehrung gilt nicht, denn in (4.61b) sind noch (iterierte) Lie-Klammern der Vektorfelder \mathbf{g}_i , $i = 1, \dots, m$ untereinander zulässig, in (4.62) dagegen nicht.

Bemerkung 4.31. Für die Auswertung der Bedingung aus den Sätzen 4.28 und 4.30 ist offensichtlich die Bestimmung von Rängen von Matrizen notwendig, deren Einträge durch symbolische Ausdrücke gegeben sind. Auf die sich daraus ergebenden praktischen Herausforderungen wird in Abschnitt B.4 eingegangen sowie ein algorithmischer Ansatz vorgestellt, um den generischen Rang einer Matrix zu bestimmen. ◁

Bemerkung 4.32. In [Isi95, siehe S.86] und weiteren Quellen wird eine andere Terminologie verwendet. Die Eigenschaft „zugänglich“ wird dort mit „schwach steuerbar“ (engl.: weakly controllable) bezeichnet und Satz (4.28) trägt den Namen „Steuerbarkeits-Rang-Bedingung“ (engl.: controllability rank condition). ◁

Die obigen Definitionen von (starker) Zugänglichkeit schließen nicht aus, dass \mathbf{x}_0 auf dem Rand der Menge der erreichbaren Punkte liegt. Fordert man hingegen, dass die Menge aller Punkte, die mittels durch \mathbf{x}_0 verlaufender Trajektorien erreichbar sind, eine offene Umgebung um \mathbf{x}_0 bilden, so heißt das System (4.1) **lokal steuerbar** (engl. locally controllable).

Offensichtlich ist lokale Zugänglichkeit eine notwendige Bedingung für lokale Steuerbarkeit. Für driftfreie Systeme, d.h. $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, ist Satz (4.28) zugleich notwendig und hinreichend [NvdS90, Proposition 3.15]. Die in dieser Arbeit hauptsächlich betrachteten Lagrange’schen mechanische Systeme sind aber aufgrund der zur Konstruktion der Zustandsdarstellung benötigten definitorischen Gleichungen niemals driftfrei.

Nach Kenntnis des Autors existiert – trotz vieler weiterführender Detailergebnisse bislang kein universelles Steuerbarkeits-Kriterium für Systeme der Form (4.1), siehe z.B. [Son88].

Speziell für mechanische Systeme gibt es u.a. Ergebnisse basierend auf Riemannscher Geometrie, siehe [LM99] und [BL04, Abschnitt 7.3f]. Die dafür zugrunde gelegten mathematischen Konzepte gehen allerdings über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus. In [BL04, Abschnitt 7.4] werden drei Beispielsysteme untersucht. Die dort getroffenen Aussagen sind auch ohne die Kenntnis der verwendeten Methode wenig überraschend:

Der Modell eines Spring-Roboters während der Flugphase ist nicht steuerbar, weil für ihn Drehimpulserhaltung gelten muss. Das ebene Modell eines Luftkissen-Fahrzeugs und das (nichtholonome) Modell einer aktuierten rollenden Münze sind steuerbar, denn sie sind wie in [Fra14, Beispiele 5.1.10 und 5.1.11] nachgewiesen, sogar differentiell flach, siehe Abschnitt 4.1.

Im Folgenden werden die Bedingungen aus den Sätzen 4.28 und 4.30 auf zwei unteraktuierte Beispielsysteme angewendet.

Beispiel 4.33 (Zweigenkmanipulator (Fortsetzung von Beispiel 2.11); Implementierung: $\langle 1 \rangle$). Zunächst wird das System auf lokale Zugänglichkeit untersucht. Ausgangspunkt sind die zum Zustand $\mathbf{x} = (p_1 \ q_1 \ \dot{p}_1 \ \dot{q}_1)^T$ gehörenden Vektorfelder der partiell linearisierten Darstellung

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{q}_1 \\ -\kappa \dot{q}_1^2 \sin p_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\kappa \cos p_1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

welche zusammen die Distribution Δ_z aufspannen. Zur Überprüfung der lokalen Zugänglichkeit ist deren involutiver Abschluss zu bestimmen. Dazu werden sukzessive passende Lie-Klammern ergänzt. Da $\text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]\}$ noch nicht involutiv ist, bildet man beispielsweise

$$\text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}], [\mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]]\} = \text{span} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_1 & 0 & \kappa \cos p_1 + 1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & -1 & 0 \\ -\kappa \dot{q}_1^2 \sin p_1 & -\kappa \cos p_1 - 1 & \kappa \dot{p}_1 \sin p_1 + 2\kappa \dot{q}_1 \sin p_1 & -\kappa^2 \sin 2p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{D}_2(\mathbf{x})}. \quad (4.64)$$

Diese Matrix hat an einem generischen Punkt¹³ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ vollen Rang. Damit ist einerseits die Involutivität klar, d.h. es gilt (lokal) $\Delta_z = \text{inv}(\Delta_z) = \text{span } \mathbf{D}_2(\mathbf{x})$. Andererseits ist wegen $\dim \Delta_z = n$ das System auf der Menge $\mathcal{M}_z := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \det \mathbf{D}_2(\mathbf{x}) \neq 0\}$ lokal zugänglich. Dabei ist zu beachten, dass wegen $\det \mathbf{D}_2(\mathbf{x}) = \kappa^3 \dot{q}_1 \sin 2p_1 \cos p_1 + \kappa^2 \dot{p}_1 \sin 2p_1 + \kappa^2 \dot{q}_1 \sin 2p_1$ neben anderen Zuständen alle Ruhelagen des Systems nicht Teil von \mathcal{M}_z sind. Da Satz 4.28 nur eine hinreichende Bedingung darstellt, kann damit über Zustände außerhalb von \mathcal{M}_z keine Aussage getroffen werden.

Zur Untersuchung der starken lokalen Zugänglichkeit werden ausgehend von $\Delta_0 = \text{span}\{\mathbf{g}\}$ sukzessive Lie-Klammern der Form $[\mathbf{f}, \cdot]$ ergänzt bis die Bedingungen (4.61) erfüllt sind. Man erhält dann die Matrix $\mathbf{D}_3(\mathbf{x}) = (\mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}], [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]], [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]]])$, deren Einträge recht umfangreiche Ausdrücke sind (siehe $\langle 1 \rangle$). Auch diese Matrix besitzt den generischen Rang 4, d.h. das System ist auf der Menge $\mathcal{M}_{sz} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \det \mathbf{D}_3(\mathbf{x}) \neq 0\}$ stark lokal zugänglich. \triangleleft

Beispiel 4.34 (Acrobot; Implementierung: $\langle 6 \rangle$). Betrachtet wird das in Abbildung 4.5 dargestellte sogenannte „Acrobot“-System, siehe z.B. [HM90, BS92, Spo95].

¹³D.h. fast überall, bis auf Singularitäten. Siehe auch Abschnitt B.4.

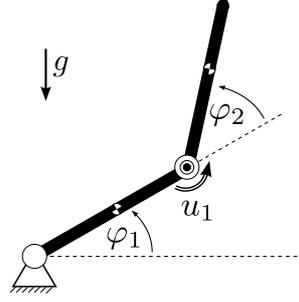


Abbildung 4.5: Das Acrobot-System. Wie der unteraktuierte Zweigelenkmanipulator (siehe Abbildung 2.1) besteht das System aus zwei Körpern, die untereinander bzw. mit der Umgebung über je ein Drehgelenk verbunden sind. Die beiden Drehachsen sind parallel zueinander und stehen senkrecht zur Gravitationsrichtung.

Die Modellbildung erfolgt nach der in Kapitel 2 beschriebenen Methodik. Mit den Abkürzungen

$$\kappa_1 := l_1 s_2 m_2, \quad \kappa_2 := J_2 + s_2^2 m_2, \quad \kappa_3 := J_1 + l_1^2 m_2 + s_1^2 m_1, \quad \kappa_4 := (s_1 + l_1) m_2, \quad \kappa_5 := s_2 m_2 \quad (4.65)$$

lauten die Vektorfelder der partiell linearisierten Systemdarstellung

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \frac{(-g(\cos p_1 \kappa_4 - \kappa_5 \cos(p_1 + q_1)) + \kappa_1 \dot{q}_1 \sin q_1 (2\dot{p}_1 + \dot{q}_1))}{2\kappa_1 \cos q_1 + \kappa_2 + \kappa_3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-\kappa_1 \cos q_1 - \kappa_2}{2\kappa_1 \cos q_1 + \kappa_2 + \kappa_3} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Zur Untersuchung der lokalen Zugänglichkeit wird wieder der involutive Abschluss von $\Delta_z = \text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ gebildet. Es lässt sich leicht überprüfen, dass einerseits $\text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]\}$ nicht involutiv ist, und andererseits $\text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}], [\mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]]\}$ vollen generischen Rang hat. D.h. das System ist lokal zugänglich.

Analog zu diesem Vorgehen lässt sich auch überprüfen, dass die Spalten der Matrix $(\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^3 \mathbf{g})$ linear unabhängig sind, d.h. auch die Bedingung für starke lokale Erreichbarkeit ist erfüllt. Auf die Angabe der Resultate wird aus Platzgründen verzichtet und stattdessen auf [(6)] verwiesen.

Interessant ist noch die Frage, was sich ändert, wenn man den Acrobot, z.B. durch horizontale Anordnung, mit $g = 0$ betrachtet. Dann ist bereits $\text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]\}$ involutiv und aus Satz 4.28 lässt sich die lokale Zugänglichkeit nicht mehr folgern. Tatsächlich kann man für den zu dieser Distribution gehörenden Annihilator

$$(\text{span}\{\mathbf{f}, \mathbf{g}, [\mathbf{f}, \mathbf{g}]\})^\perp = \text{span}\{\omega_1\} \quad (4.67)$$

leicht eine Basis

$$\omega_1 = -\kappa_1 (2\dot{p}_1 + \dot{q}_1) \sin q_1 dq_1 + (2\kappa_1 \cos q_1 + \kappa_2 + \kappa_3) d\dot{p}_1 + (\kappa_1 \cos q_1 + \kappa_2) d\dot{q}_1 \quad (4.68)$$

bestimmen, die $d\omega_1 = 0$ erfüllt und demnach das Differential der Erhaltungsgröße

$$\int \omega_1 = E(\mathbf{x}) = \kappa_1 (2\dot{p}_1 + \dot{q}_1) \cos q_1 + \dot{p}_1 (2\kappa_1 \cos q_1 + \kappa_2 + \kappa_3) + \dot{q}_1 (\kappa_1 \cos q_1 + \kappa_2) \quad (4.69)$$

darstellt. Aus physikalischen Sicht handelt es sich bei der Größe $E(\mathbf{x})$ um den Gesamtdrehimpuls des Systems, denn der Acrobot ist nur über das passive Gelenk mit der Umgebung verbunden. Dadurch kann für $g = 0$ kein Drehmoment von außen auf das System wirken und es kann kein Drehimpulsaustausch erfolgen. Der Drehimpuls hängt dann nur von den Anfangswerten ab, wodurch nur ganz bestimmte Bereiche des Zustandsraumes¹⁴ erreichbar sind. Der Rest des Zustandsraumes ist für das System nicht erreichbar. \triangleleft

4.6 Die Regelflächen-Bedingung für mechanischer Systeme

Als zweite notwendige Flachheitsbedingung neben der Steuerbarkeit wird in diesem Abschnitt die sogenannte Regelflächen-Bedingung¹⁵ zunächst allgemein und dann speziell für mechanische Systeme betrachtet. Dabei stellt sich einerseits heraus, dass die Bedingung bei Anwendung auf die vollständigen Systemgleichungen stets erfüllt ist. Andererseits wird gezeigt, dass die Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform eine Möglichkeit bietet, um Systemgrößen und -gleichungen so zu eliminieren, dass unter bestimmten Umständen die Nichtflachheit nachgewiesen werden kann.

4.6.1 Direkte Anwendung

Ausgangspunkt zur Formulierung der Bedingung sind allgemeine dynamische Systeme in impliziter Darstellung erster Ordnung, welche aus der Systembeschreibung (4.2) stets mit Hilfe von definitorischen Gleichungen gewonnen werden können.

Satz 4.35. *Sei das durch*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (4.70)$$

gegebene System flach und gelte ferner für feste Werte $\mathbf{x}^, \mathbf{r}^* \in \mathbb{R}^{n_x}$*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{r}^*) = \mathbf{0}. \quad (4.71)$$

Dann existiert $\mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_x}$, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{r}^* + \lambda \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad (4.72)$$

gilt.

¹⁴Nämlich die mit den Anfangswerten verträgliche durch $E(\mathbf{x}) = \text{konst}$ gegebene Niveaumenge.

¹⁵Engl: „ruled surface“ oder „ruled manifold condition“. Im Zusammenhang mit der *Regelungstheorie* lohnt es sich darauf hinzuweisen, dass die Bezeichnung vom lateinischen Wort „regula“ herrührt, welches in diesem Zusammenhang die Bedeutung „Lineal“ trägt [Tas15, S.116]. Alternativ existiert auch die Bezeichnung „geradlinige Fläche“, siehe z.B. [Kü13, Definition 3.20].

Beweis: Siehe z.B. [Rou94, Rud15].

Bemerkung 4.36. Die in den Quellen benutzte Beweisidee geht laut [MMR03, Abschnitt 4.2.7] auf David Hilbert zurück und besteht im Wesentlichen darin, dass die Systemgrößen \mathbf{x} durch den flachen Ausgang und seine Zeitableitungen parametrisiert werden können. Folglich muss das auch für $\dot{\mathbf{x}}$ gelten, wobei auf Grund der Kettenregel die höchste Ableitung des flachen Ausgangs dann nur affin auftreten kann. \triangleleft

Satz 4.37. *Das Ergebnis der in Satz 4.35 festgelegten Bedingung wird durch die Anwendung einer durch einen Diffeomorphismus gegebenen Koordinatentransformation $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $\Phi(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ nicht verändert.*

Beweis:¹⁶ Seien die Gleichungen (4.70)-(4.72) erfüllt und somit \mathbf{x}^* , \mathbf{r}^* und \mathbf{b} festgelegt. Wenn die Systemgleichungen (4.70) mit Hilfe der Jacobimatrix $\Phi'(\mathbf{z})$ in neuen Koordinaten ausgedrückt werden,

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\Phi(\mathbf{z}), \Phi'(\mathbf{z})\dot{\mathbf{z}}) =: \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}), \quad (4.73)$$

erhält man aus den Beziehungen

$$\mathbf{z}^* := \Phi^{-1}(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{r}_z^* := (\Phi'(\mathbf{z}^*))^{-1}\mathbf{r}^* \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_z := (\Phi'(\mathbf{z}^*))^{-1}\mathbf{b} \quad (4.74)$$

wobei Φ^{-1} die Umkehrtransformation und $(\Phi'(\mathbf{z}^*))^{-1}$ die inverse Jacobimatrix bei \mathbf{z}^* bezeichnen, unmittelbar wieder eine affin-lineare Parametrierung¹⁷:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}^*, \mathbf{r}_z^* + \lambda \mathbf{b}_z) = \mathbf{0} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.75)$$

Somit gilt: Wenn die Bedingung in einer Koordinatendarstellung erfüllt ist, dann auch in allen anderen dazu diffeomorphen Koordinatendarstellungen. \square

Eine direkte Anwendung der Regelflächen-Bedingung auf mechanische Systeme führt zu folgendem (unbefriedigenden) Resultat:

Satz 4.38. *Die in Satz 4.35 festgelegte notwendige Bedingung ist für alle mechanischen Systeme der Form (2.8) erfüllt.*

Beweis: Wegen Satz 4.37 kann alternativ zur Systemdarstellung (2.8) auch die partiell linearisierte Zustandsdarstellung betrachtet werden. Während erstere „typischer“ für die Darstellung mechanischer Systeme ist, erleichtert letztere die Argumentation. Zunächst wird die partiell linearisierte Bewegungsgleichung (2.18) in die implizite Form (4.70) überführt,

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{u} \quad (4.76a)$$

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v} \quad (4.76b)$$

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{v}}, \quad (4.76c)$$

¹⁶Diese Überlegung entstammt einem persönlichen Gespräch des Autors mit Prof. J. Rudolph und B. Kolar im März 2015.

¹⁷Im Englischen wird diese auch „Ruling“ genannt.

wobei konsistent zu (2.15) $\mathbf{x} = \text{col}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ gilt. Die konkreten Ausdrücke in $\mathbf{f}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{f}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x})$ lassen sich direkt aus (2.18c) ablesen, spielen aber im Weiteren keine Rolle. Wichtig ist allein, dass (4.76) affin in $\dot{\mathbf{v}}$ und damit in $\dot{\mathbf{x}}$ ist. Es werden nun $\mathbf{x}^* = \text{col}(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$ und $\mathbf{r}^* = \text{col}(\mathbf{r}_p^*, \mathbf{r}_q^*, \mathbf{r}_u^*, \mathbf{r}_v^*)$ so gewählt, dass (4.71) im konkreten Fall erfüllt ist:

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_p^* - \mathbf{u}^* \quad (4.77a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_q^* - \mathbf{v}^* \quad (4.77b)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_u^* - \mathbf{f}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{f}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}^*)\mathbf{r}_v^*. \quad (4.77c)$$

Nun wird in dieser Gleichung die Substitution

$$\mathbf{r}^* := \mathbf{r}^* + \lambda \mathbf{b} \quad (4.78)$$

durchgeführt. Es resultieren Gleichungen, die von $\mathbf{b} := \text{col}(\mathbf{b}_p, \mathbf{b}_q, \mathbf{b}_u, \mathbf{b}_v) \in \mathbb{R}^{2n}$ erfüllt werden müssen. Aufgrund der Affinität von Gleichung (4.77c) in \mathbf{r}_v^* erhält man

$$\mathbf{r}_u^* + \lambda \mathbf{b}_u = \mathbf{f}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{f}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{r}_v^* + \lambda \mathbf{b}_v) \stackrel{(4.77c)}{\Rightarrow} \mathbf{b}_u = \mathbf{f}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}^*)\mathbf{b}_v. \quad (4.79)$$

D.h. mit $\mathbf{b} = \text{col}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{f}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{b}_v, \mathbf{b}_v)$ ist die Regelflächen-Bedingung für beliebige $\mathbf{b}_v \in \mathbb{R}^{n_a}$ erfüllt. \square

Bemerkung 4.39. In Referenz [Rud15, Abschnitt 6.1] wird die Bedingung aus Satz 4.35 für Systeme formuliert, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung beschrieben werden. Mit einer analogen auf Affinität basierenden Argumentation kann dann die zu Satz 4.38 äquivalente Aussage bezogen auf die direkt aus den Lagrange-Gleichungen resultierende Darstellung (2.8) begründet werden. Als Vorbereitung für die nachfolgenden Erläuterungen ist jedoch der hier dargestellte Weg zweckmäßiger. \triangleleft

Beispiel 4.40 (Fortsetzung von Beispiel 4.10 (Wagen-Pendel-System); Implementierung: siehe [⟨3⟩]). Zur Illustration wird das Eingrößensystem aus Abbildung 4.3 betrachtet. Ausgehend vom Zustand $\mathbf{x} = (p_1 \ q_1 \ u_1 \ v_1)^T$ und den partiell linearisierten Systemgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ -\frac{g}{s_2} \sin p_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{s_2} \cos x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

erhält man zunächst die eingangsfreie implizite Darstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{u}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ -\frac{g}{s_2} \sin p_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{s_2} \cos p_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})} \dot{v}_1 = \mathbf{0} \quad (4.81)$$

(entspricht Gleichung (4.76)). Nun ersetzt man \mathbf{x} durch \mathbf{x}^* und $\dot{\mathbf{x}}$ durch \mathbf{r}^* und fordert dass die Systemgleichungen $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{r}^*) = \mathbf{0}$ für diese Werte gelten. Nach der Regelflächen-

Bedingung muss nun $\mathbf{b} = (b_{p_1} \ b_{q_1} \ b_{u_1} \ b_{v_1})^T \in \mathbb{R}^4$ existieren, sodass für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{r}^* + \lambda \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ erfüllt ist. Mit anderen Worten muss gelten:

$$\begin{pmatrix} r_{p_1} + \lambda b_{p_1} \\ r_{q_1} + \lambda b_{q_1} \\ r_{u_1} + \lambda b_{u_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ -\frac{g}{s_2} \sin p_1^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{s_2} \cos p_1^* \end{pmatrix} (r_{v_1} + \lambda b_{v_1}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (4.82)$$

Durch Berücksichtigung der Beziehung $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{r}^*) = \mathbf{0}$ ergibt sich

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{r}^* + \lambda \mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{r}^*) = \begin{pmatrix} \lambda b_{p_1} \\ \lambda b_{q_1} \\ \lambda b_{u_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{s_2} \cos p_1^* \end{pmatrix} (\lambda b_{v_1}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \quad (4.83)$$

was unmittelbar auf die allgemeine Lösung $\mathbf{b} = \left(0 \ 0 \ -\frac{\cos(p_1^*)}{s_2} b_{v_1} \ b_{v_1}\right)^T$ führt.

Das heißt, das nichtflache Eingrößensystem Wagen-Pendel (siehe Beispiel 4.10), erfüllt – wie alle mechanischen Systeme – die Regelflächen-Bedingung, wenn sie direkt auf die partiell linearisierten Systemgleichungen angewendet wird. \triangleleft

4.6.2 Elimination auf Basis der LBI-Normalform

Ein (vorschnelles) Fazit der Sätze 4.37 und 4.38 könnte lauten, dass diese Bedingung untauglich ist, um die Nichtflachheit mechanischer Systeme zu zeigen. Allerdings kann durch geeignete *Elimination* von Systemgrößen die Situation grundlegend verändert werden, weil dann die abgeleiteten Größen im allgemeinen nicht mehr nur affin in den Systemgleichungen auftreten¹⁸. Dieses Vorgehen wird bereits in [FLMR95, Abschnitt 5.3], [MMR03, Abschnitt 4.2.7] und [Rud15, Abschnitt 6.1.3] auf verschiedenen mechanische Beispielsysteme angewendet. Die folgenden Erläuterungen sollen diesen Prozess systematisieren. Gleichzeitig werden die Grenzen dieser Methode aufgezeigt.

Ausgangspunkt ist jetzt die Systemdarstellung in LBI-Normalform (siehe (2.31))

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{z_3}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{f}_{z_4}(\mathbf{z}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (4.84)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_{z_3}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{f}_{z_4}(\mathbf{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{12} \mathbf{v} \\ -\tilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1} (\tilde{\mathbf{C}}_1 + \tilde{\mathbf{K}}_1) + \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{M}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{12}) \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (4.85)$$

wobei zur Vereinfachung Quasi-Konservativität entsprechend Definition 2.3 vorausgesetzt wird. Dann hängt der Vektor \mathbf{K}_1 nur von den Konfigurationsvariablen $\boldsymbol{\theta}$, aber nicht von den Geschwindigkeiten \mathbf{u}, \mathbf{v} ab.

¹⁸In Hinblick auf Satz 4.37 sei angemerkt, dass sich durch die Elimination von Systemgrößen eine neue Systemdarstellung ergibt, die nicht diffeomorph zu Ausgangsdarstellung ist.

Analog zur Herleitung von (4.76) werden die Gleichungen $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$ als Definitionsgleichungen für den Eingang \mathbf{a} aufgefasst und demnach ignoriert, denn $\dot{\mathbf{a}}$ tritt nirgendwo auf. Daraus resultiert die implizite Darstellung

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{v} \quad (4.86a)$$

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{f}}_{z_3}(\mathbf{z}) \quad (4.86b)$$

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}_{z_4}(\mathbf{z}), \quad (4.86c)$$

in der aber nun, entsprechend der Konstruktion der LBI-Normalform und im Unterschied zu (4.76), $\dot{\mathbf{v}}$ nicht mehr vorkommt. Deshalb kann (4.86a) als (vektorielle) Definitionsgleichung für \mathbf{v} aufgefasst und mithin \mathbf{v} eliminiert, d.h. durch $\dot{\mathbf{q}}$ ersetzt werden.

Von den ursprünglich $2(n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{q}})$ skalaren Gleichungen sind dann noch $2n_{\mathbf{p}}$ geblieben:

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{f}}_{z_3}(\tilde{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{w} + \mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{q}} \quad (4.87a)$$

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}_{z_4}(\tilde{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{w}} - \mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left(\tilde{\mathbf{C}}_1(\tilde{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_1(\tilde{\mathbf{z}}) \right) - \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}) \right)}_{=:\mathbf{N}(\tilde{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.87b)$$

wobei $\tilde{\mathbf{z}} := \text{col}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{w})$ die $2n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{q}}$ verbleibenden Systemgrößen zusammenfasst, und die Tilde über den Funktionen jeweils die angepasste „Signatur“ bezüglich der Funktionsargumente symbolisiert.

Zur Auswertung der Regelflächen-Bedingung wird nun, wie oben, davon ausgegangen, dass

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_{\mathbf{p}}^* - \tilde{\mathbf{f}}_{z_3}(\tilde{\mathbf{z}}^*, \mathbf{r}_{\mathbf{q}}^*) \quad (4.88a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_{\mathbf{w}}^* - \tilde{\mathbf{f}}_{z_4}(\tilde{\mathbf{z}}^*, \mathbf{r}_{\mathbf{q}}^*) \quad (4.88b)$$

erfüllt ist. Notwendige Bedingung für die Flachheit des Systems ist dann die Existenz von $\mathbf{b} = \text{col}(\mathbf{b}_{\mathbf{p}}, \mathbf{b}_{\mathbf{q}}, \mathbf{b}_{\mathbf{w}}) \neq \mathbf{0}$, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_{\mathbf{p}}^* + \lambda \mathbf{b}_{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{f}}_{z_3}(\tilde{\mathbf{z}}^*, \mathbf{r}_{\mathbf{q}}^* + \lambda \mathbf{b}_{\mathbf{q}}) \quad (4.89a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{r}_{\mathbf{w}}^* + \lambda \mathbf{b}_{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}_{z_4}(\tilde{\mathbf{z}}^*, \mathbf{r}_{\mathbf{q}}^* + \lambda \mathbf{b}_{\mathbf{q}}). \quad (4.89b)$$

Da $\mathbf{b}_{\mathbf{p}}$ nur in Gleichung (4.89a) auftritt, kann man aus dieser Gleichung zusammen mit (4.88a) und (4.87a) den linearen Zusammenhang

$$\mathbf{b}_{\mathbf{p}} = -\mathbf{M}_{11}^{-1}(\boldsymbol{\theta}^*)\mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}^*)\mathbf{b}_{\mathbf{q}} \quad (4.90)$$

ablesen. Ausschlaggebend zur Auswertung der Flachheitsbedingung ist demnach allein die $n_{\mathbf{p}}$ -dimensionale Gleichung (4.89b), denn dort tritt λ linear *und* quadratisch auf. Grund dafür ist das lineare und quadratische Auftreten der Komponenten von $\dot{\mathbf{q}}$ in (4.87b).

Um die Bedingung (4.89b) zu erfüllen, müssen alle Koeffizienten bezüglich λ^1 und λ^2 verschwinden. Es ergeben sich also $2n_{\mathbf{p}}$ Gleichungen für die Koeffizienten, die einerseits von den festen Werten $\tilde{\mathbf{z}}^*$ und \mathbf{r}^* und andererseits von den $n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{q}}$ freien Parametern $\mathbf{b}_{\mathbf{w}}$ und $\mathbf{b}_{\mathbf{q}}$ abhängen. Offensichtlich treten die Parameter $\mathbf{b}_{\mathbf{w}}$ nur in den Gleichungen

für λ^1 auf und zwar mit der Jacobimatrix \mathbf{I}_{n_p} , siehe (4.89b). Diese Gleichungen sind also für eine beliebige Wahl von \mathbf{b}_q erfüllbar. Es verbleiben die n_p Gleichungen für die Koeffizienten von λ^2 . Weil alle λ^2 -Terme aus Termen der Form $\lambda \cdot b_{q_i} \cdot \lambda \cdot b_{q_j}$ resultieren, ist für jede der n_p skalaren Gleichungen von (4.89b) der Koeffizient von λ^2 seinerseits ein homogenes¹⁹ Polynom vom Grad zwei in den n_q Komponenten von \mathbf{b}_q . Aus der Forderung, dass in allen Gleichungen der λ^2 -Anteil verschwinden muss, erhält man also ein Gleichungssystem der Form

$$\sum_{i=1}^{n_q} \sum_{j=1}^{n_q} \sigma_{k,i,j} \cdot b_{q_i} \cdot b_{q_j} = 0, \quad \text{mit } k = 1, \dots, n_p, \quad (4.91)$$

bzw. in Matrix-Schreibweise

$$(b_{q_1}, \dots, b_{q_{n_q}}) \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{k,1,1} & \dots & \sigma_{k,1,n_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k,n_q,1} & \dots & \sigma_{k,n_q,n_q} \end{pmatrix}}_{=: \frac{1}{2} \mathbf{H}_k} \begin{pmatrix} b_{q_1} \\ \vdots \\ b_{q_{n_q}} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{mit } k = 1, \dots, n_p, \quad (4.92)$$

wobei sich die $\sigma_{k,i,j}$ z.B. durch Koeffizientenvergleich bezüglich der Einträge von \mathbf{b}_q aus (4.89b) ergeben. Da die Vektoren \mathbf{b}_w und \mathbf{b}_p durch lineare Abhängigkeit von \mathbf{b}_q eindeutig festgelegt sind, ist die Regelflächen-Bedingung für das reduzierte System genau dann erfüllt, wenn dieses Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung $\mathbf{b}_q \in \mathbb{R}^{n_q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ hat. Andernfalls ist gezeigt, dass das System nicht flach ist. Wegen der Homogenität, ist die Existenz einer nichttrivialen Lösung gleichbedeutend mit der Existenz unendlich vieler nichttrivialer Lösungen, da sich ein Skalierungsfaktor stets ausklammern lässt.

Beispiel 4.41 (Fortsetzung von Beispiel 4.40 (Wagen-Pendel-System); Implementierung: [$\langle 3 \rangle$]). Es gilt weiterhin $n_p = n_q = 1$. Für die LBI-Normalform-Darstellung des Systems wird der Zustand $\mathbf{z} = \text{col}(q_1, v_1, p_1, w_1)$ verwendet:

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ -\frac{v_1}{s_2} \cos p_1 + w_1 \\ -\frac{g}{s_2} \sin p_1 + \frac{v_1^2}{s_2^2} \sin p_1 \cos p_1 - \frac{v_1 w_1}{s_2} \sin p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a_1. \quad (4.93)$$

Im ersten Eliminationsschritt wird die Wangengeschwindigkeit v_1 als neue Eingangsgröße aufgefasst und dadurch die Gleichung $\dot{v}_1 = a_1$ überflüssig. Dies ist möglich, weil a_1 als Konsequenz der LBI-Normalform auf das nichtlineare Teilsystem keinen direkten Einfluss hat. Der neue Eingang v_1 kann im zweiten Schritt durch \dot{q}_1 ersetzt werden. Man erhält dann die eingangsfreie implizite Darstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{w}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{\dot{q}_1}{s_2} \cos p_1 + w_1 \\ -\frac{g}{s_2} \sin p_1 + \frac{\dot{q}_1^2}{s_2^2} \sin p_1 \cos p_1 - \frac{\dot{q}_1 w_1}{s_2} \sin p_1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{F}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.94)$$

¹⁹Ein Polynom heißt homogen, wenn alle Monome den gleichen Grad haben.

welche Gleichung (4.87) entspricht. Nun ist zu prüfen, ob unter der Annahme von $\mathbf{F}(\mathbf{z}^*, \mathbf{r}^*) = \mathbf{0}$ ein $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ existiert, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbf{F}(\mathbf{z}^*, \mathbf{r}^* + \lambda \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. Auf das Beispielsystem angewendet erhält man

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{p_1}^* + \lambda b_{p_1} \\ r_{w_1}^* + \lambda b_{w_1} \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{F}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})} - \begin{pmatrix} -\frac{r_1^* + \lambda b_{q_1}}{s_2} \cos p_1^* + w_1^* \\ -\frac{(r_1^* + \lambda b_{q_1})^2}{s_2^2} \sin p_1^* \cos p_1^* - \frac{(r_1^* + \lambda b_{q_1})w_1^*}{s_2} \sin p_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.95)$$

Durch Einsetzen der aus $\mathbf{F}(\mathbf{z}^*, \mathbf{r}^*) = \mathbf{0}$ resultierenden Beziehungen für $\text{col}(r_{p_1}^*, r_{w_1}^*)$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \lambda b_{p_1} \\ \lambda b_{w_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{\lambda b_{q_1}}{s_2} \cos p_1^* \\ \frac{2\lambda r_1^* b_{q_1} + \lambda^2 b_{q_1}^2}{s_2^2} \sin p_1^* \cos p_1^* - \frac{\lambda b_{q_1} w_1^*}{s_2} \sin p_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.96)$$

Ausschlaggebend für die Regelflächen-Bedingung sind λ^2 -Terme in der unteren Gleichung. Da im vorliegenden Beispiel $n_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{q}} = 1$ gilt, vereinfacht sich das Gleichungssystem (4.92) zu

$$\underbrace{\frac{1}{s_2} \sin p_1^* \cos p_1^* b_{q_1}^2}_{\sigma_{1,1,1}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.97)$$

Da \mathbf{z}^* und somit p_1^* beliebig gewählt sein darf, ist $b_{q_1} = 0$ die einzige Lösung von (4.97) und es folgt $b_{w_1} = 0$ und $b_{p_1} = 0$ unmittelbar aus dem Koeffizientenvergleich für λ^1 in Gleichung (4.96). Damit ist die (vorab bekannte) Nichtflachheit des Systems (vergleiche auch Beispiel 4.10) mit der Regelflächen-Bedingung gezeigt. \triangleleft

Die vorangegangenen Überlegungen dienen im wesentlichen der Herleitung des Systems von „Entscheidungsgleichungen“ (4.92). Da $\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{z}_4}$ nur von Termen bis maximal zweiter Ordnung von den Komponenten von $\dot{\mathbf{q}}$ abhängt (siehe (4.87b)), lassen sich die Koeffizienten $\sigma_{k,i,j}$ auch direkt, d.h. ohne die Substitution $\dot{\mathbf{q}} := \mathbf{r}_{\mathbf{q}} + \lambda \mathbf{b}_{\mathbf{q}}$, bestimmen:

$$\sigma_{k,i,j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\mathbf{z}_4,k}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}, \quad \text{mit } k = 1, \dots, n_{\mathbf{p}} \text{ und } i, j = 1, \dots, n_{\mathbf{q}}, \quad (4.98)$$

wobei $f_{\mathbf{z}_4,k}$ die k -te Komponente von $\mathbf{f}_{\mathbf{z}_4}$ bezeichnet. Die Matrix \mathbf{H}_k aus (4.92) ist somit die Hessematrix der skalaren Funktion $f_{\mathbf{z}_4,k}(\cdot, \cdot)$ bezüglich des zweiten Arguments:

$$\mathbf{H}_k =: \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_{\mathbf{z}_4,k}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_{\mathbf{z}_4,k}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_{n_{\mathbf{q}}} \partial \dot{q}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_{\mathbf{z}_4,k}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_{n_{\mathbf{q}}}} & \cdots & \frac{\partial^2 f_{\mathbf{z}_4,k}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_{n_{\mathbf{q}}}^2} \end{pmatrix}. \quad (4.99)$$

Es lässt sich nun der folgende Zusammenhang zwischen den Eigenwerten dieser Matrizen und der Flachheitseigenschaft herstellen.

Satz 4.42. *Ein mechanisches System ist nicht flach, wenn mindestens eine der aus der LBI-Normalform des Systems resultierenden Matrizen $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_{n_p}$ (siehe (4.99)) positiv oder negativ definit ist.*

Beweis: Ein mechanisches System erfüllt die Regelflächen-Bedingung genau dann, wenn für $k = 1, \dots, n_p$ die Gleichungen zweiter Ordnung $\mathbf{b}_q^T \mathbf{H}_k \mathbf{b}_q \stackrel{!}{=} 0$ eine gemeinsame nichttriviale Lösung $\mathbf{b}_q \in \mathbb{R}^{n_q}$ besitzen. Dafür muss notwendigerweise jede einzelne dieser Gleichungen eine Lösungsmenge als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n_q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ besitzen. Für positiv bzw. negativ definite Matrizen ist dies per definitionem dieser Eigenschaften ausgeschlossen. \square

Beispiel 4.43 (Fortsetzung von Beispiel 4.41 (Wagen-Pendel-System); Implementierung: [$\langle 3 \rangle$]). Die Anwendung der Regelflächen-Bedingung auf das Wagen-Pendel-System in LBI-Normalform verkürzt sich durch diese Sichtweise deutlich. Nach der Bestimmung des Vektorfeldes \mathbf{f}_z (siehe (4.93)) bestimmt man

$$\sigma_{1,1,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{z_{4,1}}(\mathbf{z}^*, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} = \frac{1}{s_2} \sin p_1^* \cos p_1^* \neq 0, \quad (4.100)$$

woraus sich wegen der Forderung (4.92) sofort die Nichtflachheit des Systems ergibt. Alternativ kann man auch $\sigma_{1,1,1}$ auch als (1×1) -Matrix $\frac{1}{2} \mathbf{H}_1$ auffassen und die Nichtflachheit aus Satz 4.42 folgern. \triangleleft

Für den Fall, dass keine der Matrizen $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_{n_p}$ positiv oder negativ definit ist, hat jede der Gleichungen $\mathbf{b}_q^T \mathbf{H}_k \mathbf{b}_q = 0$ eine nichttriviale reelle Lösung. Für die Regelflächen-Bedingung stellt sich die Frage, ob diese Lösungsmengen eine Schnittmenge haben, die nicht nur den Koordinatenursprung von \mathbb{R}^{n_q} enthält.

Um die einzelnen Lösungsmengen zu beschreiben, bietet sich eine Diagonalisierung der Matrizen \mathbf{H}_k an. Aufgrund ihrer Symmetrie ist das immer möglich [Ber09, Fact 5.9.15]. Bezeichne \mathbf{V}_k die $(n_q \times n_q)$ -Matrix deren Spalten von den normierten Eigenvektoren von \mathbf{H}_k gebildet werden, dann gilt einerseits $\mathbf{V}_k^T = \mathbf{V}_k^{-1}$ und andererseits

$$\mathbf{V}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{V}_k = \text{diag}(\tilde{\lambda}_{k,1}, \dots, \tilde{\lambda}_{k,n_q}) =: \mathbf{J}_k, \quad (4.101)$$

wobei die Einträge dieser Diagonalmatrix die Eigenwerte von \mathbf{H}_k sind. Nun kann man für jedes $k \in \{1, \dots, n_p\}$ mit $\tilde{\mathbf{b}}_k := \mathbf{V}_k^{-1} \mathbf{b}_q$ angepasste Koordinaten einführen und erhält dadurch jeweils eine Gleichung in der keine gemischten Terme zweiter Ordnung mehr auftreten:

$$0 \stackrel{(4.92)}{=} \mathbf{b}_q^T \mathbf{H}_k \mathbf{b}_q = \tilde{\mathbf{b}}_q^T \mathbf{V}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{V}_k \tilde{\mathbf{b}}_q \stackrel{(4.101)}{=} \tilde{\mathbf{b}}_k^T \mathbf{J}_k \tilde{\mathbf{b}}_k = \sum_{i=1}^{n_q} \tilde{\lambda}_{k,i} \tilde{b}_{k,i}^2. \quad (4.102)$$

Der Fall $\mathbf{J}_k = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{H}_k = \mathbf{0}$ soll im Folgenden ausgeschlossen werden, da dann die entsprechende Gleichung für alle \mathbf{b}_q erfüllt ist und demnach keine Einschränkung darstellt.

Bei der rechten Seite von Gleichungen (4.102) handelt es sich (egal in welcher Darstellung) um eine sogenannte quadratische Form. Deren Nullstellenmenge bildet eine

Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n_{\mathbf{q}}}$ der Dimension $n_{\mathbf{q}} - 1$. Eine mathematische Beschreibung dieser Untermannigfaltigkeiten ist für allgemeine $n_{\mathbf{q}} \in \mathbb{N}_+$ ein nichttriviales Problem der reellen algebraischen Geometrie (siehe z.B. [BPR03, Abschnitt 4.3]) und wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher betrachtet. Für $n_{\mathbf{q}} = 2$ lässt sich aber eine einfache geometrische Interpretation finden. Gleichung (4.102) stellt dann den Spezialfall einer Kegelschnittgleichung dar, siehe z.B. [WK77, Kapitel 21]. Als Lösungsmengen kommen hier wegen der vorausgesetzten Indefinitheit von \mathbf{H}_k nur Geraden in Frage. Zur Vereinfachung wird für $k = 1, 2$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{\lambda}_{k,1} > 0$ und $\tilde{\lambda}_{k,2} \leq 0$ angenommen. Dann lässt sich folgendes Ergebnis festhalten:

Satz 4.44. *Ein mechanisches System (2.8) mit $n_{\mathbf{q}} = 2$ ist nicht flach, wenn für alle 2-Tupel $(\alpha, \beta) \in \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$ gilt*

$$D_{\alpha,\beta} := \det \left(\mathbf{V}_1 \begin{pmatrix} \alpha \sqrt{-\tilde{\lambda}_{1,2}} \\ \sqrt{\tilde{\lambda}_{1,1}} \end{pmatrix}, \mathbf{V}_2 \begin{pmatrix} \beta \sqrt{-\tilde{\lambda}_{2,2}} \\ \sqrt{\tilde{\lambda}_{2,1}} \end{pmatrix} \right) \neq 0. \quad (4.103)$$

Beweis: Gleichung (4.102) lässt sich über den Zwischenschritt $\tilde{\lambda}_{k,1} \tilde{b}_{k,1}^2 = -\tilde{\lambda}_{k,2} \tilde{b}_{k,2}^2$ in die Beziehung

$$\tilde{b}_{k,1} = \pm \sqrt{\frac{-\tilde{\lambda}_{k,2}}{\tilde{\lambda}_{k,1}}} \tilde{b}_{k,2} \quad (4.104)$$

umformen. Das heißt, man erhält zwei Geradengleichungen, welche wegen $\mathbf{b}_{\mathbf{q}} = \mathbf{V}_k \tilde{\mathbf{b}}_k$ in den ursprünglichen Koordinaten durch

$$\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{q},k}^{\pm}(s) := \mathbf{V}_k \begin{pmatrix} \pm \sqrt{-\tilde{\lambda}_{k,2}} \\ \sqrt{\tilde{\lambda}_{k,1}} \end{pmatrix} s \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \quad (4.105)$$

gegeben sind. Das betrachtete System ist folglich nicht flach, wenn keine der beiden Geraden für $k = 1$ identisch zu einer der beiden Geraden für $k = 2$ ist. Dies wird algebraisch dadurch ausgedrückt, dass die Matrix in (4.103) jeweils vollen Rang haben muss. Die zugehörige Determinante (siehe (4.103)) darf also nicht verschwinden. \square

Bemerkung 4.45. Eine andere Möglichkeit, um für $n_{\mathbf{q}} = 2$ die Geradengleichungen zu erhalten, ist ein parametrischer Ansatz. Dafür bietet sich eine Normierung der Gleichungen (4.92), zum Beispiel auf den Koeffizienten des Monoms $b_{q_1}^2$ an:

$$0 = b_{q_1}^2 + \tilde{\sigma}_{k,1,2} b_{q_1} b_{1_2} + \tilde{\sigma}_{k,2,2} b_{q_2}^2 \stackrel{!}{=} (b_{q_1} + c_k b_{q_2})(b_{q_1} + d_k b_{q_2}). \quad (4.106)$$

Es verbleiben dann die zwei Parameter $\tilde{\sigma}_{k,1,2}$ und $\tilde{\sigma}_{k,2,2}$ pro Gleichung (d.h. für $k = 1, 2$), aus denen sich mittels Koeffizientenvergleich die Parameter c_k und d_k der beiden Geraden bestimmen lassen. Nach kurzer Zwischenrechnung erhält man

$$c_k = \frac{\tilde{\sigma}_{k,1,2}}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_{k,1,2}^2}{4} - \tilde{\sigma}_{k,2,2}} \quad (4.107a)$$

$$d_k = \tilde{\sigma}_{k,1,2} - c_k = \frac{\tilde{\sigma}_{k,1,2}}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_{k,1,2}^2}{4} - \tilde{\sigma}_{k,2,2}}. \quad (4.107b)$$

Das System ist nicht flach, wenn keine der Geraden identisch zu einer anderen ist. Dafür muss $\{c_1, d_1\} \cap \{c_2, d_2\} = \{\}$ gelten. \triangleleft

Beispiel 4.46 (Doppelpendel mit aktuiertem Aufhängepunkt; Implementierung: [(7)]). Betrachtet wird ein ebenes Doppelpendel mit passiven Gelenken ($n_p = 2$) dessen Aufhängepunkt translatorisch vollständig aktuiert ist ($n_q = 2$), siehe Abbildung 4.6. Von diesem System ist einerseits bekannt, dass es einen flachen Ausgang besitzt, wenn das zweite Pendelgelenk im Schwerpunkt des ersten Pendelgliedes platziert ist [MRS95]. Andererseits ist in [FLMR95, Abschnitt 5.3] auf Basis eines impliziten Modells basierend auf verallgemeinerten Impulsen gezeigt, dass für allgemeine Parameter die Regelflächen-Bedingung verletzt ist.

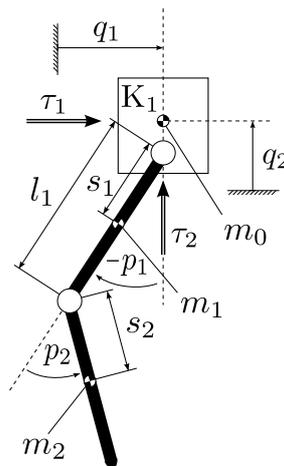


Abbildung 4.6: Doppelpendel mit in der Ebene translatorisch vollständig aktuiertem Aufhängepunkt (Körper K_1). Eine Verdrehung des Körpers K_1 ist nicht zugelassen.

Beide Ergebnisse können mit dem hier vorgestellten Ansatz bestätigt werden. Aus der Modellbildung und der Transformation in LBI-Normalform erhält man die (2×1) -Matrix \mathbf{f}_{z_4} und daraus die Hessematrizen \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 . Aufgrund der Komplexität der Ausdrücke in deren Einträgen werden für die Modellparameter m_1, m_2, l_1, s_1, s_2 und die noch auftretenden Zustandskomponenten p_1, p_2 zufällige Zahlenwerte eingesetzt:

Symbol	l_1	m_1	m_2	p_1	p_2	s_1	s_2
Wert (gerundet)	0.3063	0.7871	0.4593	0.9897	0.7869	0.6958	0.8025

(4.108)

Für die Determinanten aus (4.103) erhält man dann

$$D_{1,1} \approx 5.1176, \quad D_{-1,1} \approx -1.2538, \quad D_{1,-1} \approx 0.4070, \quad D_{-1,-1} \approx 5.6011. \quad (4.109)$$

Da keine der Determinanten verschwindet, ist die Regelflächen-Bedingung nicht erfüllt, das System ist also (für die generische Wahl der Modellparameter) nicht flach.

Wird vor dem Einsetzen der numerischen Werte aus (4.108) die Substitution $l_1 := s_1$ vorgenommen, ergibt sich stattdessen

$$D_{1,1} \approx 4.7517, \quad D_{-1,1} \approx -1.041, \quad D_{1,-1} = 0, \quad D_{-1,-1} \approx 5.2005. \quad (4.110)$$

Für diese spezielle Parameterwahl (das zweite Gelenk befindet sich dann im Schwerpunkt des ersten Gliedes) erfüllt das System demnach wegen $D_{1,-1} = 0$ erwartungsgemäß die Regelflächen-Bedingung. \triangleleft

Beispiel 4.47 (Mechanismus mit fünf Freiheitsgraden und drei Stellgrößen; Implementierung: $[\langle 8 \rangle]$). Betrachtet wird das in Abbildung 4.7 dargestellte ebene dynamische System, welches aus den vier Starrkörpern K_1, \dots, K_4 besteht. Der Körper K_1 ist translatorisch vollständig aktuiert. An diesen ist über ein passives Drehgelenk das Pendel K_3 gekoppelt und über ein aktuiertes Schubgelenk der Körper K_2 . Das Pendel K_4 ist wiederum über ein passives Drehgelenk an K_2 gekoppelt. Es gilt also $n_{\mathbf{q}} = 3$ und $n_{\mathbf{p}} = 2$.

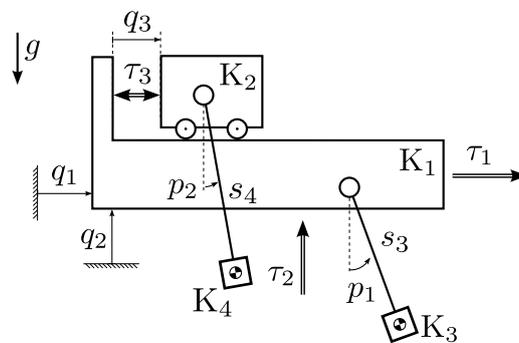


Abbildung 4.7: Mechanismus aus vier Körpern. Über die beiden gegenüber der Umwelt wirkenden Kräfte τ_1 und τ_2 ist der Körper K_1 translatorisch vollständig aktuiert. Eine Verdrehung ist nicht zulässig. Zwischen K_1 und K_2 wirkt die Stellkraft τ_3 . Mit jedem der beiden Körper ist jeweils über ein passives Drehgelenk ein Pendel (Körper K_3 und K_4) verbunden.

Aus der Modellbildung, Transformation in LBI-Normalform und Anwendung von (4.92) erhält man zwei Gleichungen zweiter Ordnung in drei Variablen mit den zugehörigen Hessematrizen:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{s_4^2} \begin{pmatrix} 2 \sin p_1 \cos p_1 & \sin^2 p_1 - \cos^2 p_1 & 0 \\ \sin^2 p_1 - \cos^2 p_1 & -2 \sin p_1 \cos p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.111a)$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{s_5^2} \begin{pmatrix} 2 \sin p_2 \cos p_2 & \sin^2 p_2 - \cos^2 p_2 & 2 \sin p_2 \cos p_2 \\ \sin^2 p_2 - \cos^2 p_2 & -2 \sin p_2 \cos p_2 & \sin^2 p_2 - \cos^2 p_2 \\ 2 \sin p_2 \cos p_2 & \sin^2 p_2 - \cos^2 p_2 & 2 \sin p_2 \cos p_2 \end{pmatrix}. \quad (4.111b)$$

Für die Eigenwerte dieser Matrizen erhält man

$$\text{spec}(\mathbf{H}_1) = \frac{1}{s_4^2} \{-1, 0, 1\}, \quad (4.112a)$$

$$\text{spec}(\mathbf{H}_2) = \frac{1}{2s_5^2} \left\{ -\sqrt{\sin^2(2p_2) + 8} + \sin(2p_2), 0, \sqrt{\sin^2(2p_2) + 8} + \sin(2p_2) \right\}, \quad (4.112b)$$

wobei gemeinsame Faktoren „ausgeklammert“ wurden. Beide Matrizen haben sowohl positive als auch negative Eigenwerte, sind also indefinit. Satz 4.42 macht demnach keine Aussage über die Flachheit des Systems und es ist zu erwarten, dass die Lösungsmengen der beiden Gleichungen zweiter Ordnung

$$\mathbf{b}_q^T \mathbf{H}_1 \mathbf{b}_q = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_q^T \mathbf{H}_2 \mathbf{b}_q = 0 \quad (4.113)$$

eine nichttriviale Schnittmenge besitzen. Um diese Vermutung zu bestätigen, ist es nicht notwendig, die anspruchsvolle algebraische Aufgabe zu lösen, diese Schnittmenge explizit zu bestimmen. Um zu zeigen, dass sie außer der trivialen Lösung weitere Elemente enthält, reicht es, für feste Werte von p_1, p_2 einen Vektor $\mathbf{b}_q \neq \mathbb{R}^3$ ungleich dem Nullvektor zu finden, der beide Gleichungen erfüllt. Dies ist (näherungsweise) durch die numerische Lösung des Minimierungsproblems

$$\left(\mathbf{b}_q^T s_4^2 \mathbf{H}_1 \mathbf{b}_q \right)^2 + \left(\mathbf{b}_q^T s_5^2 \mathbf{H}_2 \mathbf{b}_q \right)^2 + \exp(-\mathbf{b}_q^T \mathbf{b}_q) \rightarrow \min \quad (4.114)$$

möglich, wobei der dritte Summand einen „Strafterm“ bezüglich der trivialen Lösung $\mathbf{b}_q = \mathbf{0}$ darstellt. Für die zufällig gewählten Werte $\mathbf{p}^* \approx (0.5248 \ 0.0767)^T$ erhält man als eine mögliche Lösung $\mathbf{b}_q^* \approx (1.2270 \ 0.7105 \ 8.0132)^T$, siehe [8]. Aufgrund der homogenen Struktur der Gleichungen (4.92) ist jedes $\mathbf{b}_q^* \cdot \lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung. Mit anderen Worten: Das System erfüllt die Regelflächen-Bedingung. \triangleleft

Bemerkung 4.48. Ein alternativer Ansatz zur Überprüfung der Regelflächen-Bedingung besteht darin, ausgehend von der Darstellung zweiter Ordnung (2.12) in der Einführung neuer („Impuls-artiger“) Systemgrößen

$$\tilde{\mathbf{w}} := \mathbf{M}_{11} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_{12} \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.115)$$

Auch in den Gleichungen für $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}$ tritt der Eingang \mathbf{a} nicht auf, sodass die aktuierten Geschwindigkeiten \mathbf{v} aus den Bewegungsgleichungen eliminiert werden können. Dieser Weg wird in [Rud15, Abschnitt 6.1.3] für das Eingrößensystem „Acrobot“ und in [FLMR95, Abschnitt 5.3] ein Doppelpendel mit vollständig aktuiertem Aufhängepunkt (siehe Beispiel 4.46) besprochen. Eine systematische Untersuchung dieses Zugangs ist dem Autor allerdings nicht bekannt. \triangleleft

Fazit

Das für die Auswertung der Regelflächen-Bedingung ausschlaggebende Gleichungssystem ist durch (4.92) zusammen mit der Festlegung (4.98) gegeben. Dabei handelt es sich um

$n_{\mathbf{p}}$ Bilinearformen in den $n_{\mathbf{q}}$ freien Parametern $\mathbf{b}_{\mathbf{q}} = (b_{q_1} \dots b_{q_{n_{\mathbf{q}}}})^T$. Demnach kann man die Fälle $n_{\mathbf{q}} > n_{\mathbf{p}}$ und $n_{\mathbf{q}} \leq n_{\mathbf{p}}$ unterscheiden.

Für $n_{\mathbf{q}} > n_{\mathbf{p}}$ übersteigt die Anzahl der freien Parameter die Anzahl der Gleichungen, und es ist nach dem Gaußschen Fundamentalsatz der Algebra (siehe z.B. [HSZ03, Abschnitt 2.6.1]) zu erwarten, dass unendlich viele Lösungen der Gleichung existieren. Da allerdings nur reelle Lösungen für $\mathbf{b}_{\mathbf{q}}$ relevant sind, ist nicht ausgeschlossen, dass auch in diesem Fall eine Aussage getroffen werden kann. Eine Möglichkeit dazu stellt Satz 4.42 dar.

Für $n_{\mathbf{q}} \leq n_{\mathbf{p}}$ liegen mindestens genau so viele Gleichungen wie freie Parameter vor. Typischerweise hat das Gleichungssystem (4.92) dann nur die triviale Lösung, d.h. in diesen Fällen besteht eine bessere Aussicht darauf, Nichtflachheit mittels der Regelflächen-Bedingung tatsächlich nachweisen zu können. Voraussetzung dafür ist, dass in (4.87b), also nach Einsetzen der aus (4.87a) resultierenden Substitution $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{w} - \mathbf{M}_{11}^{-1}\mathbf{M}_{12}\dot{\mathbf{q}}$, tatsächlich Terme zweiter Ordnung bezüglich $\dot{\mathbf{q}}$ auftreten. Das ist insbesondere dann nicht der Fall, wenn die kinetische Energie (und damit die Massenmatrix) nicht von den Konfigurationskoordinaten $\boldsymbol{\theta}$ abhängt, siehe Abschnitt 2.2.

Damit lässt sich zusammenfassend festhalten, dass die Transformation in LBI-NF zusammen mit der Elimination der Systemgrößen \mathbf{v} für bestimmte aber bei weitem nicht für alle mechanischen Systeme eine Aussage bezüglich ihrer Nichtflachheit ermöglicht. Hinzu kommt, dass für die relevanten Systeme mit²⁰ $n_{\mathbf{p}} \geq n_{\mathbf{q}} \geq 2$ sowie einer ausreichend nichtlinearen Verkopplungsstruktur die Modellgleichungen bereits einen erheblichen Umfang annehmen, der ohne Computer-Algebra-System kaum zu bewältigen ist und auch bei Nutzung eines solchen ggf. an praktische Grenzen in Form von Rechenzeit stößt.

4.7 Eine notwendige Integrabilitätsbedingung

4.7.1 Allgemeine Systeme

Ergänzend zu den bereits aus [FLMR95] bekannten und in den beiden vorherigen Abschnitten betrachteten notwendigen Flacheitsbedingungen, wird in diesem Abschnitt eine weitere hergeleitet, welche nach Kenntnis des Autors bisher in der Literatur nicht zu finden ist. Diese beruht auf der in Satz 4.22 festgehaltenen Tatsache, dass die Existenz eines flachen Ausgangs (eines nichtlinearen Systems) die Existenz eines „integrablen“ flachen Ausgangs des zugehörigen Variationssystems impliziert. Es soll jedoch vorweggenommen werden, dass diese „neue“ Bedingung in ihrer vorliegenden Formulierung keine Ergebnisse liefert, die nicht auch mit den bisher bekannten notwendigen Bedingungen erhalten werden können. Auf mögliche Ansätze, die Bedingung weiterzuentwickeln wird in Abschnitt 7.2 eingegangen.

Der für die Herleitung (zusätzlich) notwendige mathematische Hintergrund ist wiederum im Anhang zusammengefasst, insbesondere in den Abschnitten A.18 (zu Polynom-

²⁰Für den Fall $n_{\mathbf{q}} = 1$ steht mit der Überprüfung auf statische Eingangs-Zustands-Linearisierbarkeit (siehe Abschnitt 4.2) bereits ein Kriterium zur Verfügung, wodurch die Regelflächen-Bedingung für diese Systeme prinzipiell überflüssig wird. Allerdings ist sie ggf. leichter auszuwerten.

Matrizen mit 1-Form-wertigen Einträgen) und A.15 (zu Differentialformen auf sogenannte Jet-Bündeln).

Ausgangspunkt ist der Satz 4.22 aus Abschnitt 4.4: Betrachtet man einen beliebigen flachen Ausgang des Variationsystems, d.h. die m 1-Formen²¹ $\boldsymbol{\omega} := \left(\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{x} \right) \Big|_{\mathcal{F}}$, dann lautet eine andere Formulierung für die Integrabilitätsbedingung (4.59)

$$d \left(\left(\mathbf{L}_1 \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{F} + \mathbf{L}_2 \left(\frac{d}{dt} \right) \boldsymbol{\omega} \right) \Big|_{\mathcal{F}} \right) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{L}_2 \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{m \times m}. \quad (4.116)$$

Da die maximale Polynomordnung bezüglich $\frac{d}{dt}$ in \mathbf{L}_1 und \mathbf{L}_2 a priori nicht bekannt ist, werden die Vektor-1-Formen $d\mathbf{F}$ und $\boldsymbol{\omega}$ über der in Abschnitt A.15 eingeführten unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\mathbb{X}_{\infty} := \mathcal{X} \times \underbrace{\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \dots}_{\text{abzählbar } \infty \text{ oft}} \quad (4.117)$$

definiert, was die Berücksichtigung von Zeitableitungen beliebiger (endlicher) Ordnung erlaubt.

Entsprechend (4.116) ist die zu untersuchende Vektor-1-Form *vor* der Integrabilitätsprüfung mittels äußerer Ableitung auf die Lösungsmenge \mathcal{F} einzuschränken. Für die nachfolgenden Untersuchungen erweist es sich jedoch als zweckmäßig, wenn die Einschränkung *nach* der äußeren Ableitung vollzogen wird. Dazu lässt sich folgendes festhalten:

Lemma 4.49. *Sei $N \in \mathbb{N}_+$ und $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{z})$ eine skalare meromorphe Funktion. Dann gilt für jede 1-Form $\eta \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$:*

$$d \left(\eta \Big|_{F(\mathbf{z})=0} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (d\eta \wedge dF) \Big|_{F(\mathbf{z})=0} = 0. \quad (4.118)$$

Beweis: Sei $\bar{\eta} := \eta \Big|_{F(\mathbf{z})=0}$ geschlossen²². Offensichtlich muss die Differenz von η und $\bar{\eta}$ bei der Einschränkung auf die Lösungsmenge $F(\mathbf{z}) = 0$ verschwinden, d.h. es gibt eine Funktion $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n_x}$ mit

$$\eta = \bar{\eta} + \boldsymbol{\alpha}(F(\mathbf{z}), \mathbf{z})d\mathbf{z} \quad \text{und} \quad (4.119)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(0, \mathbf{z}) = \mathbf{0}^T \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N. \quad (4.120)$$

Durch Anwendung der äußeren Ableitung auf η erhält man

$$d\eta = \underbrace{d\bar{\eta}}_{=0} + d\boldsymbol{\alpha} \wedge d\mathbf{z} = \underbrace{\left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial F} dF + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \right)}_{d\boldsymbol{\alpha}} \wedge d\mathbf{z} \quad (4.121)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} := \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{z}} d\mathbf{z} \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mathbf{z}} d\mathbf{z} \quad \dots \quad \frac{\partial \alpha_{n_x}}{\partial \mathbf{z}} d\mathbf{z} \right), \quad (4.122)$$

²¹Man beachte, dass im Sinne einer möglichst einfachen Notation die Symbole $\boldsymbol{\omega}$ und $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ bzw. \mathbf{Q} und $\tilde{\mathbf{Q}}$ in diesem Abschnitt gegenüber Abschnitt 4.4 ihre Rollen getauscht haben.

²²D.h., es gilt $d\bar{\eta} = 0$, siehe Definition A.2.

d.h. die 2-Form $d\eta$ ergibt sich aus dem (Keil-)Produkt der 1-Form-wertigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren $d\boldsymbol{\alpha}$ und $d\mathbf{z}$. Weil (4.120) für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ gilt, müssen unter der Einschränkung auf $F(\mathbf{z}) = 0$ alle partiellen Ableitungen nach x_1, \dots, x_{n_x} verschwinden. Mit anderen Worten gilt:

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}|_{F(\mathbf{z})=0} = \mathbf{0} \in \left(\Lambda^1(\mathbb{R}^N)\right)^{1 \times n_x}. \quad (4.123)$$

Bildet man das Keilprodukt auf der rechten Seite der Implikation (4.118), erhält man also

$$(d\eta \wedge dF)|_{F(\mathbf{z})=0} = \underbrace{(\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \wedge d\mathbf{z} \wedge dF)|_{F(\mathbf{z})=0}}_{\stackrel{(4.123)}{=} \mathbf{0}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial F} dF \wedge d\mathbf{z} \wedge dF\right)\bigg|_{F(\mathbf{z})=0} = 0, \quad (4.124)$$

denn im zweiten Summand tritt der Faktor $dF \wedge dF = 0$ auf. \square

Weil die Polynommatrizen $\mathbf{L}_1\left(\frac{d}{dt}\right)$ und $\mathbf{L}_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ in (4.116) a priori nicht bekannt sind, bzw. unklar ist, ob sie überhaupt existieren, eignet sich die bisherige Formulierung nicht um den notwendigen Teil von Satz 4.22 auszuwerten. Mit Hilfe von Lemma 4.49 ist nun aber die Herleitung einer notwendigen Bedingung möglich, in der nur bekannte bzw. berechenbare Größen auftreten. Zur Erleichterung der Notation dienen dabei die folgenden Hilfsgrößen:

$$\omega_i^{(k)} := \frac{d}{dt} \omega_i^{(k-1)}, \quad \text{mit } \omega_i^{(0)} := \omega_i \quad \text{und } i = 1, \dots, m \quad (4.125a)$$

$$\Omega_k := \omega_1^{(k)} \wedge \dots \wedge \omega_m^{(k)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \quad (4.125b)$$

$$dF_j^{(k)} := \frac{d}{dt} dF_j^{(k-1)}, \quad \text{mit } dF_j^{(0)} := dF_j \quad \text{und } j = 1, \dots, n_{\mathbf{F}} \quad (4.125c)$$

$$\Phi_k := dF_1^{(k)} \wedge \dots \wedge dF_{(n_x - m)}^{(k)} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \quad (4.125d)$$

$$\Omega_k := 1 =: \Phi_k \quad \text{für } k < 0. \quad (4.125e)$$

Satz 4.50. *Gegeben sei das System (4.32) mit zugehöriger verallgemeinerter Jacobimatrix $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ und einer beliebigen unimodularen Vervollständigung $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$. Dieses System kann nur dann flach sein, wenn für die Vektor-1-Form $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right) d\mathbf{x}$ zwei Zahlen $\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{N}$ existieren, sodass für alle $i = 1, \dots, m$ gilt*

$$(d\omega_i \wedge \Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_{\bar{k}} \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{\bar{l}})|_{\mathcal{F}} = 0. \quad (4.126)$$

Beweis: Für ein flaches System gilt Gleichung (4.116). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Existenz einer natürlichen Zahl r voraussetzen, sodass die Einschränkung auf \mathcal{F} (siehe (A.35)) der Berücksichtigung der Gleichungen $\mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma+i)})$ für $i = 0, \dots, r$ entspricht. Mit anderen Worten, Zeitableitungen der Systemgleichungen, welche die Ordnung r übersteigen, spielen für die Frage nach der Integrabilität keine Rolle. Wegen Lemma (4.49) kann man aus Gleichung (4.116) also die Beziehung

$$\left(d\left(\mathbf{L}_1\left(\frac{d}{dt}\right) d\mathbf{F} + \mathbf{L}_2\left(\frac{d}{dt}\right) \boldsymbol{\omega}\right) \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_r\right)\bigg|_{\mathcal{F}} = \mathbf{0} \quad (4.127)$$

folgern²³. Die Anwendung der äußeren Ableitung auf die Produkte innerhalb der Klammer nach den in Abschnitt A.18 festgelegten Regeln liefert unter Berücksichtigung von $d(d\mathbf{F}) = \mathbf{0}$

$$\left(\left(d\mathbf{L}_1 \left(\frac{d}{dt} \right) \wedge d\mathbf{F} + d\mathbf{L}_2 \left(\frac{d}{dt} \right) \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{L}_2 \left(\frac{d}{dt} \right) d\boldsymbol{\omega} \right) \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_r \right) \Big|_{\mathcal{F}} = \mathbf{0}. \quad (4.128)$$

Nun kann man den Summand mit $d\boldsymbol{\omega}$ auf die andere Seite bringen und mit $-\mathbf{L}_2^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right)$ von links durchmultiplizieren:

$$\begin{aligned} & (d\boldsymbol{\omega} \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_r) \Big|_{\mathcal{F}} = \\ & - \left(\overbrace{\left(\underbrace{\mathbf{L}_2^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{L}_1 \left(\frac{d}{dt} \right)}_{=: \hat{\mathbf{L}}_1 \left(\frac{d}{dt} \right)} \wedge d\mathbf{F} + \underbrace{\mathbf{L}_2^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{L}_2 \left(\frac{d}{dt} \right)}_{=: \hat{\mathbf{L}}_2^{-1} \left(\frac{d}{dt} \right)} \wedge \boldsymbol{\omega} \right)}^{=: \tilde{\boldsymbol{\eta}}} \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_r \right) \Big|_{\mathcal{F}}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Die mit $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ bezeichnete Vektor-2-Form stellt dabei offensichtlich eine Linearkombination der 1-Formen in $d\mathbf{F}$ und $\boldsymbol{\omega}$ dar. Die Koeffizienten dieser Linearkombination werden dabei von den Einträgen der Matrizen $\hat{\mathbf{L}}_1 \left(\frac{d}{dt} \right)$ und $\hat{\mathbf{L}}_2 \left(\frac{d}{dt} \right)$ gebildet, d.h. von 1-Form-wertigen Polynomen im Zeitableitungsoperator $\frac{d}{dt}$. Sei nun l_1 der höchste in $\hat{\mathbf{L}}_1 \left(\frac{d}{dt} \right)$ auftretende Polynomgrad und sei $\bar{l} := \max(l_1, r)$, dann gilt

$$\hat{\mathbf{L}}_1 \left(\frac{d}{dt} \right) \wedge d\mathbf{F} \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{\bar{l}} = \mathbf{0}, \quad (4.130)$$

denn in jeder Zeile dieser Vektor-Differentialform tritt mindestens ein Faktor des Typs $dF_i^{(j)}$ mehrfach auf. Aus (4.129) folgt also

$$(d\boldsymbol{\omega} \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{\bar{l}}) \Big|_{\mathcal{F}} = - \left(\hat{\mathbf{L}}_2 \left(\frac{d}{dt} \right) \wedge \boldsymbol{\omega} \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{\bar{l}} \right) \Big|_{\mathcal{F}}. \quad (4.131)$$

Ganz analog sei nun \bar{k} der höchste in $\hat{\mathbf{L}}_2 \left(\frac{d}{dt} \right)$ auftretende Polynomgrad. Dann gilt

$$\hat{\mathbf{L}}_2 \left(\frac{d}{dt} \right) \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_{\bar{k}} = \mathbf{0}. \quad (4.132)$$

Da das Vorzeichen für eine verschwindende Differentialform egal ist, kann man die Keilproduktfaktoren beliebig tauschen und erhält dann insgesamt

$$(d\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_{\bar{k}} \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{\bar{l}}) \Big|_{\mathcal{F}} = \mathbf{0}, \quad (4.133)$$

was der Behauptung entspricht. \square

Im Eingrößenfall (d.h. es gilt $m = 1$) vereinfacht sich die Situation erheblich:

²³Genau genommen wendet man Lemma 4.49 für jede der $n_{\mathbf{F}} \cdot (r + 1)$ skalaren Gleichungen einzeln an und wählt N und \mathbf{z} passend.

Korollar 4.51. Sei $m = 1$. Das System (4.32) kann nur dann flach sein, wenn für jeden flachen Ausgang des Variationssystems ω_1 eine Zahl $\bar{l} \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt

$$(d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_{\bar{l}})|_{\mathcal{F}} = 0. \quad (4.134)$$

Beweis: Die Aussage folgt als Spezialfall direkt aus dem Beweis von Satz 4.50. Die den flachen Ausgang des Variationssystems definierende Vektor-1-Form ω besteht nun aus genau einer (skalaren) 1-Form ω_1 , die zugehörige Matrix $\mathbf{Q}(\frac{d}{dt})$ hat die Dimension $1 \times n_x$ und die Matrix $\mathbf{L}_2 \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{1 \times 1}$ ist ein Skalar. Damit die Unimodularität gewährleistet bleibt, muss \mathbf{L}_2 bezüglich $\frac{d}{dt}$ den Polynomgrad 0 haben und darf nicht identisch verschwinden. Es gilt also $\bar{k} = 0$ und somit $\Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_{\bar{k}} = \omega_1$. \square

Bemerkung 4.52. Bei der Herleitung von Gleichung (4.126) aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung (4.116) wurden an mehreren Stellen Umformungsschritte vorgenommen, die im Allgemeinen nicht umkehrbar sind. Das betrifft einerseits die Anwendung von Lemma 4.49 und andererseits den Einbezug weiterer Faktoren in das Keilprodukt, wodurch sich jeweils die „Wahrscheinlichkeit erhöht“, dass das Ergebnis 0 lautet. Insbesondere wird dabei für $m > 1$ die auf der Unimodularität von $\mathbf{L}_2 \left(\frac{d}{dt} \right)$ basierende spezielle Struktur von $\hat{\mathbf{L}}_2 \left(\frac{d}{dt} \right)$ (siehe (4.129)) ignoriert. Folglich ist (4.126) nur eine notwendige Bedingung. Ist sie erfüllt, ist der Flachheitsstatus des Systems weiterhin unklar.

Um mittels Satz 4.50 die Nichtflachheit eines Systems nachzuweisen, muss man zeigen, dass Gleichung (4.126) für alle $\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{N}_0$ verletzt ist. Für ein gewähltes Tupel (\bar{k}, \bar{l}) rechnet man dazu zunächst das entsprechende Keilprodukt aus und prüft dann für alle nicht verschwindenden Koeffizienten, ob sich durch Einsetzen der geeignet aufgelösten Systemgleichungen bzw. deren Ableitungen Null ergibt. Ist das nicht der Fall, erhöht man die Ableitungsordnungen und prüft erneut. Weil für den Eingrößenfall immer $\bar{k} = 0$ gelten muss, lässt sich ggf. ablesen, dass eine Erhöhung von \bar{l} nicht zu einem Verschwinden des Keilprodukts führen kann, wie die beiden folgenden Beispiele belegen. Da mit dem Kriterium für statische Eingangs-Zustands-Linearisierbarkeit (siehe Satz 4.8) für Eingrößensysteme mit einfacheren Methoden über die (Nicht-)Flachheit entschieden werden kann, ist die Untersuchung dieser Klasse hauptsächlich von theoretischem Interesse, bzw. dient zur Illustration der Methode.

Für den Mehrgrößenfall (d.h. $m > 1$) ist die Situation komplizierter. Dieser wird in Abschnitt 4.7.2 näher untersucht. Durch die Einschränkung auf die Klasse der mechanischen Systeme können dabei weitere Annahmen getroffen werden, was die Untersuchung erleichtert. \triangleleft

Beispiel 4.53. (Akademisches Eingrößensystem, entnommen aus [Lé11, Abschnitt 5.4]; Implementierung: [9]) Betrachtet wird das Eingrößensystem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = F_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \dot{x}_2 - \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 = 0. \quad (4.135)$$

Durch Bilden des totalen Differentials $d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}_{\mathbf{F}} \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{x}$ erhält man die verallgemeinerte Jacobimatrix

$$\mathbf{P}_{\mathbf{F}} \left(\frac{d}{dt} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dot{x}_1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{x}_1 & 1 \\ \dot{x}_1 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}. \quad (4.136)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die mit der Zeile $(\dot{x}_1 - 1)$ ergänzte Systemmatrix unimodular ist, denn das Produkt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{dt} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}[\frac{d}{dt}]^{2 \times 2}} \begin{pmatrix} -\dot{x}_1 \frac{d}{dt} & \frac{d}{dt} \\ \dot{x}_1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 & 0 \\ \dot{x}_1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.137)$$

ist unabhängig von $\frac{d}{dt}$ sowie regulär und deshalb unimodular. Alternativ kann man ohne Weiteres auch direkt eine Inverse der ergänzten Systemmatrix angeben (siehe [(9)]). Als flachen Ausgang des Variationssystems erhält man also

$$\bar{\omega}_1 = \underbrace{(\dot{x}_1 dx_1 - dx_2)}_{=: \omega_1} \Big|_{\mathcal{F}}. \quad (4.138)$$

Um die notwendige Bedingung aus Korollar 4.51 zu überprüfen, wird zunächst

$$\begin{aligned} d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \underbrace{\Phi_0}_{dF_1} &= (d\dot{x}_1 \wedge dx_1) \wedge (\dot{x}_1 dx_1 - dx_2) \wedge (-\dot{x}_1 d\dot{x}_1 + d\ddot{x}_2) \\ &= -d\dot{x}_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\dot{x}_2. \end{aligned} \quad (4.139)$$

gebildet. Offensichtlich ändert das nach Gleichung (4.134) formal notwendige Einsetzen der Systemgleichungen (d.h. die Einschränkung auf \mathcal{F}) nichts, weil im einzigen auftretenden Koeffizienten (-1) gar keine Variablen vorkommen. Im nächsten Schritt ist $d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge dF_1 \wedge d\dot{F}_1$ zu prüfen. Wegen

$$d\dot{F}_1 = -\ddot{x}_1 dx_1 - \dot{x}_1 d\dot{x}_1 + d\ddot{x}_2 \quad (4.140)$$

ist sofort klar, dass

$$d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \underbrace{dF_1}_{\Phi_0} \wedge \underbrace{d\dot{F}_1}_{\Phi_1} = -d\dot{x}_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge d\dot{x}_2 \wedge d\ddot{x}_2 \neq 0 \quad (4.141)$$

gilt. Auf Grund von $dF^{(i)} = dx_2^{(i+1)} + \dots$ lässt sich diese Argumentation direkt auf beliebig hohe Ableitungsordnungen übertragen. Mit anderen Worten, die entsprechenden Keilprodukte können nie verschwinden und das System ist somit nicht flach.

In [Lé11, Abschnitt 5.4] wird das gleiche Beispiel untersucht, ebenfalls mit ω_1 entsprechend (4.138). Die Bestimmung des flachen Ausgangs des Variationssystems erfolgt dabei mit Hilfe der Smith-Normalform, statt wie hier durch „direktes Ablesen“ der unimodularen Vervollständigung²⁴. Danach werden mit relativ aufwendigen Rechenschritten

²⁴Alternativ wäre auch die Nutzung des in [Fra14] vorgeschlagenen Algorithmus möglich.

([Lé11, S.82-85]), welche die Konstruktion und Lösung einer partiellen Differentialgleichung einschließen, Bedingungen für $\mathbf{L}_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ hergeleitet²⁵, die mit der Unimodularität von $\mathbf{L}_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ unvereinbar sind. Das Ergebnis ist also erwartungsgemäß das gleiche, allerdings ist nach Auffassung des Autors der hier vorgestellte Ansatz deutlich einfacher. \triangleleft

Beispiel 4.54 (Wagen-Pendel-System; Implementierung: [⟨3⟩]). Als mechanisches Beispiel wird das in Abbildung 4.3 dargestellte System untersucht. Die implizite Systembeschreibung zweiter Ordnung entsprechend (4.3) lautet mit den Systemgrößen $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta} = (p_1, q_1)^T$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) = m_2 s_2 (g \sin p_1 + \ddot{p}_1 s_2 + \ddot{q}_1 \cos p_1) = 0, \quad (4.142)$$

woraus sich durch Anwenden der äußeren Ableitung die Systemmatrix

$$\mathbf{P}\left(\frac{d}{dt}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} m_2 s_2 (g \cos p_1 - \dot{q}_1 \sin p_1) & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} m_2 s_2^2 & m_2 s_2 \cos p_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}_2} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \quad (4.143)$$

ergibt. Eine unimodulare Vervollständigung dazu lässt sich mittels des in [Fri15] implementierten Algorithmus aus [Fra14] bestimmen. Dieser liefert die 1×2 Matrix

$$\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} -g s_2 \cos^3 p_1 - \dot{p}_1 s_2^2 \sin p_1 \cos p_1 - \dot{p}_1^2 s_2^2 \cos^2 p_1 + \dot{q}_1 s_2 \sin p_1 \cos^2 p_1 \\ -g \cos^4 p_1 - \dot{p}_1 s_2 \sin p_1 \cos^2 p_1 - 2\dot{p}_1^2 s_2 \sin^2 p_1 \cos p_1 - \dot{p}_1^2 s_2 \cos^3 p_1 + \dot{q}_1 \sin p_1 \cos^3 p_1 \end{pmatrix}^T \\ + \begin{pmatrix} -2\dot{p}_1 s_2^2 \sin p_1 \cos p_1 \\ -2\dot{p}_1 s_2 \sin p_1 \cos^2 p_1 \end{pmatrix}^T \frac{d}{dt}, \quad (4.144)$$

wobei sich die Unimodularität der Gesamtmatrix $\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ sich durch die explizite Berechnung der Inverse bestätigen lässt, siehe [⟨3⟩]. Mit $\omega_1 = \mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right) d\mathbf{x}$ erhält man die zugehörige 1-Form. Zur Überprüfung von (4.134) bildet man die 4-Form

$$\tilde{\Xi} := d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge dF_1 = 4m_2^9 \dot{p}_1 s_2^{11} \sin^2 p_1 \cos^5 p_1 dq_1 \wedge d\dot{q}_1 \wedge d\dot{p}_1 \wedge d\dot{q}_1 + \dots \neq 0 \quad (4.145)$$

über den sechs Basis-1-Formen dp_1, \dots, dq_1 . Die meisten der $\binom{6}{4} = 15$ Koeffizienten sind sehr umfangreiche Ausdrücke, weswegen nur einer der einfachsten Koeffizienten angegeben wurde. Im Unterschied zum vorherigen Beispiel ist dieser Koeffizient nun von den Systemgrößen abhängig. Allerdings verschwindet auch er unter Einschränkung auf \mathcal{F} nicht identisch, denn er hängt einerseits nicht von \dot{p}_1 oder höheren Zeitableitungen von p_1 ab, aber andererseits lässt sich $F_1^{(i)}$ für alle $i \geq 0$ nach $p_1^{(i+1)}$ auflösen.

Es gilt also in jedem Falle $\tilde{\Xi}|_{\mathcal{F}} \neq 0$. Analog zu Beispiel 4.53 stellt man nun

$$dF_1^{(i)} = m_2 s_2^2 dp_1^{(i+2)} + \dots \quad (4.146)$$

fest. Damit ist ohne weitere Rechnung klar, dass die Folge von Keilprodukten (4.134) niemals verschwinden kann, denn jeder neue Faktor $\Phi_i = dF_1^{(i)}$ enthält mit $dp_1^{(i+2)}$ eine Basis-1-Form als Summand, die bis dahin noch nicht auftrat. Das System ist also – wie bereits in Beispiel 4.41 gezeigt – nicht flach. \triangleleft

²⁵In [Lé11] heißt die entsprechende Matrix M , siehe S. 85 ebd.

4.7.2 Anwendung auf mechanische Systeme

Motiviert durch die beiden vorangegangenen Beispiele wird in diesem Abschnitt auch für den Mehrgrößenfall aus Satz 4.50 eine mit endlich vielen Schritten überprüfbare notwendige Flachheitsbedingung hergeleitet. Ausgehend von einem nichtverschwindenden Keilprodukt „vom Typ (4.126)“ ist dabei zu zeigen, dass auch durch die Hinzunahme beliebiger weiterer Faktoren Ω_k und Φ_l das Keilprodukt niemals verschwindet. Dabei darf natürlich im Gesamt-Keilprodukt jeder Index für $\Omega_{(\cdot)}$ und $\Phi_{(\cdot)}$ nur jeweils einmal auftreten.

Zur Vereinfachung wird diese Herleitung auf mechanische Systeme der Form (2.8) eingeschränkt. Dann gilt (vgl. auch Bemerkung 4.14 und Beispiel 4.54): $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$, $n_{\mathbf{x}} = n$, $m = n_{\mathbf{q}}$, $n_{\mathbf{F}} = n_{\mathbf{p}}$, $\gamma = 2$ und $\mathbf{P}_2 = (\mathbf{M}_{11}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{M}_{12}(\mathbf{x}))$.

Für die Untersuchung der Struktur der Keilprodukte wird die folgende Notation vereinbart. Sei $\mu \in \Lambda^r(\underline{\mathbb{X}}_{\infty})$, dann bezeichnet $\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(\mu)$ die höchste bezüglich der Basisformen $d\boldsymbol{\theta}$ auftretende Ableitungsordnung. Beispielsweise gilt $\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(3d\theta_1 - 5d\ddot{\theta}_4) = 2$ und $\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(d\theta_3 \wedge d\ddot{\theta}_1 \wedge d\theta_2^{(5)}) = 5$. Mit dieser Notation lassen sich aus den Festlegungen (4.125) die folgenden Beziehungen direkt ablesen:

$$\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(dF_i) = \text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(\Phi_0) = \gamma = 2 \quad \text{für } i = 1, \dots, n_{\mathbf{F}} \quad (4.147a)$$

$$\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(\Phi_k) = 2 + k \quad (4.147b)$$

$$\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(\Omega_k) = \text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(\Omega_0) + k. \quad (4.147c)$$

Für die Untersuchung von Gleichung (4.126) ist die Reihenfolge der Faktoren im Keilprodukt irrelevant, weil durch ihre Vertauschung ggf. hervorgerufene Vorzeichenwechsel nichts an der Aussage gleich/ungleich 0 ändern. Es bietet sich deshalb eine Umsortierung der Faktoren an, sodass jeweils alle in Frage kommenden 1-Formen der gleichen Ordnung nebeneinander stehen. Mit der Festlegung

$$k_{\Omega_0} := \text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(\Omega_0) \stackrel{(4.125b)}{=} \text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n_{\mathbf{q}}}) \quad (4.148)$$

kann man weitere zweckmäßige Hilfsgrößen einführen:

$$\Gamma_k := \Omega_{k-k_{\Omega_0}} \wedge \Phi_{k-2} \quad (4.149a)$$

$$\Xi_{i,0} := d\omega_i \wedge \Gamma_0 \quad (4.149b)$$

$$\Xi_{i,k} := \Xi_{i,k-1} \wedge \Gamma_k \quad \text{für } k \geq 1. \quad (4.149c)$$

Dabei ist die Festlegung (4.125e) zu beachten, d.h. falls $k - k_{\Omega_0}$ und/oder $k - 2$ negativ ist, treten die entsprechenden Differentialformen im jeweiligen Keilprodukt nicht auf. Mit der Festlegung

$$k^* := \max(k_{\Omega_0}, 2) \quad (4.150)$$

gilt dann also:

$$\Gamma_k = 1 \quad \text{für } k < \min(k_{\Omega_0}, 2) \quad (4.151a)$$

$$\Gamma_k \in \Lambda^{n_{\mathbf{q}}}(\underline{\mathbb{X}}_{\infty}) \quad \text{für } k_{\Omega_0} \leq k < 2 \quad (4.151b)$$

$$\Gamma_k \in \Lambda^{n_{\mathbf{p}}}(\underline{\mathbb{X}}_{\infty}) \quad \text{für } 2 \leq k < k_{\Omega_0} \quad (4.151c)$$

$$\Gamma_k \in \Lambda^n(\underline{\mathbb{X}}_{\infty}) \quad \text{für } k \geq k^* \quad (4.151d)$$

$$\text{ord}_{d\theta}(\Gamma_k) = k \quad \text{für } k \geq k^*. \quad (4.151e)$$

Ab Γ_{k^*} handelt es sich also in jedem Fall um eine n -Form, während für kleinere k der Grad von Γ_k niedriger ist. Die Differentialform $\Xi_{i,k}$ ist nach (4.149) nun gerade das Produkt aus $d\omega_i$ und allen in Frage kommenden 1-Formen, deren Ableitungsordnung bezüglich der Basisformen den Wert k nicht übersteigt. Weil $\text{ord}_{d\theta}(d\omega_i)$ von der maximalen Ableitungsordnung in den Koeffizienten von ω_i abhängt, gilt

$$\begin{aligned} \text{ord}_{d\theta}(\Xi_{i,k}) &= \max(k, \text{ord}_{d\theta}(d\omega_i)), & \text{bzw.} \\ \text{ord}_{d\theta}(\Xi_{i,k}) &= k \quad \text{für } k \geq \text{ord}_{d\theta}(d\omega_i). \end{aligned} \quad (4.152)$$

Durch die eingeführte Notation kann man nun Satz 4.50 in die folgende hinreichende Bedingung für Nichtflachheit umformulieren:

Korollar 4.55. *Das betrachtete mechanische System ist nicht flach, wenn für alle $k \geq 0$ und mindestens ein $i \in \{1, \dots, n_{\mathbf{q}}\}$ gilt: $\Xi_{i,k}|_{\mathcal{F}} \neq 0$.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 4.50 unmittelbar durch Anwendung der Definitionen (4.125) und (4.149). \square

Aus der rekursiven Festlegung von $\Xi_{i,k}$ in (4.149) gilt für den Grad $\underline{r}(k)$ dieser Differentialform aus $\Lambda^{\underline{r}(k)}(\underline{\mathbb{X}}_{\infty})$ die Formel

$$\underline{r}(k) := 2 + \max(0, n_{\mathbf{q}} \cdot (k - k_{\Omega_0} + 1)) + \max(0, n_{\mathbf{p}} \cdot (k - 1)). \quad (4.153a)$$

Der erste Summand resultiert dabei aus der 2-Form $d\omega_i$, der zweite aus den (ab der Ordnung $k = k_{\Omega_0}$ als Faktoren auftretenden) $n_{\mathbf{q}}$ -Formen Ω_k und der dritte aus den (ab der Ordnung $k = 2$ auftretenden) $n_{\mathbf{p}}$ -Formen Φ_k .

Die Anzahl der in $\Xi_{i,k}$ als Faktoren auftretenden Basis-1-Formen $d\theta_1, \dots, d\theta_n, d\dot{\theta}_1, \dots, d\dot{\theta}_n^{(k)}$ lässt sich mit

$$\underline{s}(k) := n + n \cdot \max(\text{ord}_{d\theta}(d\omega_i), k) \quad (4.153b)$$

nach oben abschätzen²⁶. Offensichtlich ist für $k \geq k^*$ (siehe (4.150)) in den in (4.153) auftretenden max-Funktionen stets das zweite Argument ausschlaggebend.

Mit anderen Worten: $\Xi_{i,k}$ ist eine $\underline{r}(k)$ -Form in $\underline{s}(k)$ Variablen²⁷. Um zu entscheiden, ob diese $\underline{r}(k)$ -Form verschieden von $0 \in \Lambda^{\underline{r}(k)}(\underline{\mathbb{X}}_{\infty})$ ist, bietet es sich an, eine geeignete

²⁶Die tatsächliche Anzahl kann kleiner sein, wenn bestimmte Koeffizienten verschwinden.

²⁷Der zu ω_i gehörende Index i wird zur leichteren Lesbarkeit in den Größen $\underline{r}(k)$ und $\underline{s}(k)$ unterdrückt, da er für die Auswertung von Korollar 4.55 auf einen Wert fixiert ist.

Basisdarstellung einzuführen. Zweckmäßigerweise lassen sich dabei die einzelnen Basiselemente durch entsprechende Nummerierung möglichst einfach referenzieren, weswegen die folgenden Notationen vereinbart werden:

Seien $r \geq 2$ und $N \geq n$ natürliche Zahlen. Dann bezeichnet

$$\mathcal{I}_{r,N} := \{(i_1 < \dots < i_r) : i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, N\}\} \subset \{1, \dots, N\}^r \quad (4.154)$$

die Menge aller aufsteigend sortierten r -Tupel, welche im Folgenden auch **Indextupel** genannt werden, vgl. [AF01, S. 1].

Sei μ eine r -Form mit $\text{ord}_{d\theta}(\mu) =: \kappa$, d.h. es gilt $\mu \in \Lambda^r(\underline{\mathbb{X}}_\kappa)$. Für μ lässt sich dann die Basisdarstellung

$$\mu = \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{r,(\kappa+1)n}} c_\sigma \Psi_\sigma \quad (4.155)$$

angeben, wobei für alle σ aus $\mathcal{I}_{r,(\kappa+1)n}$ die $c_\sigma \in \underline{\mathcal{K}}$ die **Koeffizientenfunktionen** und $\Psi_\sigma \in \Lambda^r(\underline{\mathbb{X}}_\kappa)$ die **Basiselemente** darstellen. Letztere stehen mit den zu den Konfigurationskoordinaten θ gehörenden 1-Formen $d\theta$ folgendermaßen in Zusammenhang: Mittels

$$d\psi_i := d\theta_j^{(k)} \quad \text{mit } j = ((i-1) \bmod n) + 1 \quad \text{und } k = (i-j)/n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.156)$$

lässt sich die Standardbasis $d\theta_1, \dots, d\dot{\theta}_1, \dots, d\theta_n^{(\kappa)}$ von $\Lambda^1(\underline{\mathbb{X}}_\kappa)$ durchgehend nummerieren²⁸. Demnach gilt z.B.

$$d\psi_1 := d\theta_1, \quad d\psi_n := d\theta_n, \quad d\psi_{n+1} := d\dot{\theta}_1, \quad d\psi_{(\kappa+1)n} := d\theta_n^{(\kappa)}. \quad (4.157)$$

Für ein festes $\sigma \in \mathcal{I}_{r,(\kappa+1)n}$ gilt nun die Festlegung

$$\Psi_\sigma := d\psi_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge d\psi_{\sigma(r)}, \quad (4.158)$$

wobei $\sigma(j)$ das j -te Element des (r -elementigen) Indextupels σ bezeichnet. Mit Hilfe dieser dem Indextupel σ zugeordneten Basis- r -Form wird nun die Abbildung $\text{coeff}_{\Psi_\sigma} : \Lambda^r(\underline{\mathbb{X}}_\kappa) \rightarrow \underline{\mathcal{K}}$ derart eingeführt, dass sie für eine r -Form μ entsprechend (4.155) gerade den zu Ψ_σ gehörenden Koeffizienten

$$\text{coeff}_{\Psi_\sigma}(\mu) = c_\sigma \quad (4.159)$$

liefert²⁹. Beispielsweise gilt³⁰

$$\text{coeff}_{d\theta_3 \wedge d\dot{\theta}_1}(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 d\theta_1 \wedge d\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 d\theta_3 \wedge d\ddot{\theta}_1) = -\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2. \quad (4.160)$$

²⁸Der Vollständigkeit halber sei die Umkehrung dieser Nummerierung angegeben: $d\theta_j^{(k)} = d\psi_{n \cdot k + j}$.

²⁹In einem umfassenderen differentialgeometrischen Rahmen ließe sich diese Abbildung sukzessive durch sogenannte „verjüngende“ oder „kanonische“ Produkte von μ mit r geeigneten Basis-Vektorfeldern auffassen, siehe z.B. [Fra14, S. 15] oder [SS14a]

³⁰Hier wird $r = 2$, $\kappa \geq 2$ und $n \geq 3$ angenommen, wobei die genauen Werte für κ und n für das Beispiel nicht relevant sind.

Weiterhin werden für $r = n$, d.h. also für n -Formen, diejenigen Basiselemente, die aus dem geordneten Produkt aller 1-Formen mit der Ableitungsordnung k bestehen, gesondert mittels

$$\Theta_k := \Psi_{(n \cdot k+1, \dots, n \cdot k+n)} = d\theta_1^{(k)} \wedge \dots \wedge d\theta_n^{(k)} \quad (4.161)$$

bezeichnet.

Wegen (4.150) ist Γ_{k^*} ist aus der Folge $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots$ diejenige Differentialform mit dem kleinsten Index, die den Grad n besitzt. Von dieser n -Form wird der Koeffizient bezüglich des Basiselements mit den höchsten Ableitungsordnungen mit

$$c^* := \text{coeff}_{\Theta_{k^*}}(\Gamma_{k^*}) = \text{coeff}_{\theta_1^{(k^*)} \wedge \dots \wedge \theta_n^{(k^*)}}(\Gamma_{k^*}) \quad (4.162)$$

bezeichnet. Höhere Ableitungsordnungen der Basis-1-Formen können wegen $\text{ord}_{d\theta}(\Gamma_{k^*}) = k^*$ (siehe (4.151e)) nicht auftreten.

Bemerkung 4.56. Es ist zu beachten, dass $\Lambda^{r(k)}(\underline{\mathbb{X}}_\infty)$ für alle $r \geq 0$ ein unendlichdimensionaler Vektorraum ist (vgl. Abschnitt A.15), weil prinzipiell beliebig hohe Ableitungsordnungen der Basis-1-Formen $d\theta$ auftreten können. Allerdings ist jedes $\Xi_{i,k}$ für $k \geq 0$ ein Element des endlichdimensionalen Unterraums $\Lambda^{r(k)}(\underline{\mathbb{X}}_k) \subset \Lambda^{r(k)}(\underline{\mathbb{X}}_\infty)$. Für die Dimension von $\Lambda^{r(k)}(\underline{\mathbb{X}}_k)$ und damit gleichbedeutend für die Anzahl der Koeffizienten von $\Xi_{i,k}$ gilt dann entsprechend [AF01, Kap. 1, Satz 1]

$$\dim \Lambda^{r(k)}(\underline{\mathbb{X}}_k) = \binom{\underline{s}(k)}{\underline{r}(k)} = \frac{r(k)!}{r(k)!(\underline{s}(k) - \underline{r}(k))!}, \quad (4.163)$$

wobei (siehe (4.153)) $\underline{r}(k)$ den Grad der Differentialform $\Xi_{i,k}$ festlegt und $\underline{s}(k)$ die Anzahl (potentiell) beteiligten Basis-1-Formen bis maximal zur Ableitungsordnung k . Mit anderen Worten: Die $\underline{r}(k)$ -Form $\Xi_{i,k}$ hat im Allgemeinen $\binom{\underline{s}(k)}{\underline{r}(k)}$ Basiselemente und folglich ebenso viele zugehörige Koeffizienten. \triangleleft

Beispiel 4.57 (Ebenes einachsiges Fahrzeug; Implementierung: [$\langle 10 \rangle$]). Zur Illustration von Gleichung (4.163) und der bisher eingeführten Konzepte und Notation wird das in Abbildung 4.8 dargestellte ebene Modell eines einachsigen Fahrzeugs bzw. eines Einradfahrers unter dem Einfluss der Schwerkraft betrachtet, siehe auch [FRW09] und [Fra14, Abschnitt 5.1.9]. Eine alternative Motivation zur Systemmodellierung stellt ein „zweirädriges Schienenfahrzeugs zum Transport von Schüttgut“ dar, siehe [KR14a].

Ausgangspunkt ist wiederum die Modellbildung, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, sodass man mit Gleichung (4.3) dann eine implizite Systembeschreibung der Form $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{0}$ mit $n = 3$, $n_{\mathbf{p}} = n_{\mathbf{F}} = 1$ und $n_{\mathbf{q}} = 2$ vorliegt. Aus Konsistenzgründen zu [Fra14, Abschnitt 5.1.9] – und weil sich dadurch einfachere Ausdrücke ergeben – werden im Folgenden allerdings statt der für die Modellbildung günstigen Gelenkkoordinaten p_1, q_1, q_2 die Absolutwinkel $\varphi_0 := p_1$, $\varphi_1 := p_1 + q_1$ und $\varphi_2 := p_1 + q_1 + q_2$ verwendet. Um die Symbolik möglichst übersichtlich und konsistent zu den obigen Erläuterungen zu halten, wird dennoch

$$\boldsymbol{\theta} := \text{col}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) := \text{col}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \quad (4.164)$$

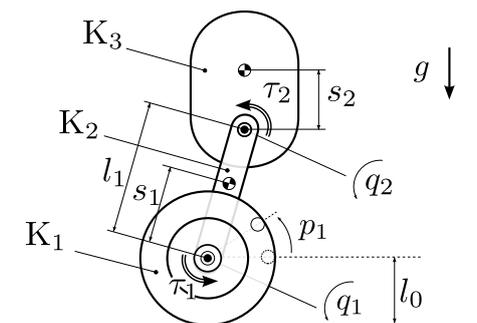


Abbildung 4.8: Schematische Darstellung eines ebenen einrädigen Fahrzeugs. Der Mechanismus besteht aus den drei über zwei aktuierte Drehgelenke verbundenen Starrkörpern K_1 , K_2 , K_3 . Die Bindung des Rades K_1 an die Umgebung erfolgt durch reines Rollen.

festgelegt.

In [Fra14, Abschnitt 5.1.9] ist für dieses System die Polynommatrixdarstellung

$$\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) d\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} a_2^2 & b_0 + b_1 \frac{d}{dt} + b_2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)^2 & c_0 + c_1 \frac{d}{dt} + c_2 \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \end{pmatrix} d\boldsymbol{\theta} \quad (4.165)$$

angegeben, wobei die Symbole $a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ umfangreichere Ausdrücke in den Systemgrößen und -parametern abkürzen. Darüber hinaus wird mit dem dort beschriebenen Algorithmus die Matrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ -a_2 c_1 - 2c_2 \dot{a}_2 & c_2 b_1 - 2c_2 \dot{b}_2 - b_2 c_1 & -2c_2 \dot{c}_2 \end{pmatrix} \quad (4.166)$$

als unimodulare Vervollständigung von $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ bestimmt³¹. Daraus resultiert direkt ein flacher Ausgang des Variationssystems $\boldsymbol{\omega}$ mit

$$\boldsymbol{\omega} := \mathbf{Q} \Big|_{\mathcal{F}} d\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 d\theta_1 + b_2 d\theta_2 + c_2 d\theta_3 \\ -a_2 c_1 - 2c_2 \dot{a}_2 d\theta_1 + c_2 b_1 - 2c_2 \dot{b}_2 - b_2 c_1 + d\theta_2 - 2c_2 \dot{c}_2 d\theta_3 \end{pmatrix}. \quad (4.167)$$

Es lässt sich leicht feststellen, dass die Einschränkung auf \mathcal{F} hier keine Auswirkungen hat: Einerseits lässt sich die (wegen $n_{\mathbf{p}} = 1$ skalare) Systemgleichung (4.3) nach $\dot{\varphi}_0$ auflösen, andererseits tritt in \mathbf{Q} die Größe $\dot{\varphi}_0$ aber gar nicht auf.

Weil zudem keine Ableitungen der Basis-1-Formen $d\theta_1, d\theta_2$ und $d\theta_3$ auftreten, gilt

$$k_{\Omega_0} = \text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}} \left(\underbrace{\omega_1 \wedge \omega_2}_{=\Omega_0} \right) = 0. \quad (4.168)$$

³¹Für die Herleitung des Modells, der Polynommatrixdarstellung und für eine Überprüfung der Unimodularität der Gesamtmatrix $\left(\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \right)$ siehe [(10)]. Anzumerken ist dass diese Matrix, im Gegensatz zum allgemeinen Fall, hier nur Polynome vom Grad null in $\frac{d}{dt}$ enthält.

Durch direkte Berechnung (vgl. [(10)]) erhält man

$$d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \quad (4.169)$$

d.h. die Auswertung der notwendigen Bedingung ist nur für $i = 2$ relevant. Zudem ergibt sich $\text{ord}_{d\theta}(d\omega_2) = 1$, denn die Ausdrücke $c_1, \dot{a}_2, \dot{b}_2, \dot{c}_2$ hängen von θ ab. Zusammen mit den Festlegungen für $\underline{s}(k)$ und $\underline{r}(k)$ in (4.153) und den aus der Systemstruktur resultierenden Werten $n_{\mathbf{p}} = 1$ und $n_{\mathbf{q}} = 2$ erhält man damit folgende Resultate für die Anzahl der der Koeffizienten von $\Xi_{2,k}$ nach Gleichung (4.163):

maximale Ableitungsordnung in Γ_k :	k	0	1	2	3	4	...
maximale Anzahl an Basis-1-Formen:	$\underline{s}(k)$	6	6	9	12	15	...
Grad der Differentialform $\Xi_{2,k}$:	$\underline{r}(k)$	4	6	9	12	15	...
Anzahl der Koeffizienten:	$\binom{\underline{s}(k)}{\underline{r}(k)}$	15	1	1	1	1	...

(4.170)

Offensichtlich gilt für dieses System für Ableitungsordnungen $k \geq 1$ die Beziehung $\underline{r}(k) = \underline{s}(k)$. Die Differentialformen $\Xi_{2,k}$ bilden dann also sogenannte *Pseudoskalare* [Hes99, GLD93], d.h. r -Formen in r Variablen. Diese werden jeweils durch einen einzigen Koeffizienten beschrieben. \triangleleft

Beispiel 4.58 (Planar verschiebliches Pendel mit elastisch angekoppelter Zusatzmasse; Implementierung siehe [(11)]). Betrachtet wird nun das in Abbildung 4.9 dargestellte System mit $n_{\mathbf{p}} = 2, n_{\mathbf{q}} = 2$, d.h. mit insgesamt vier Freiheitsgraden.

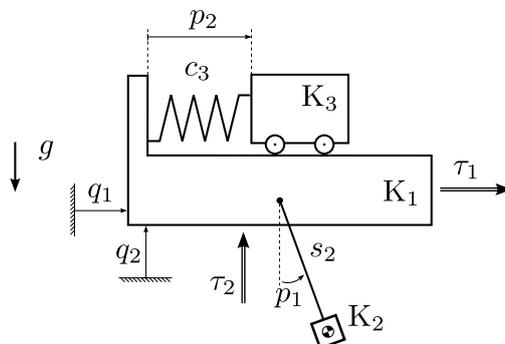


Abbildung 4.9: Mechanisches System mit vier Freiheitsgraden ($n_{\mathbf{p}} = 2, n_{\mathbf{q}} = 2$). Das System besteht aus den drei Starrkörpern K_1, K_2, K_3 , die sich wie folgt in der Ebene bewegen können: Der Körper K_1 hat zwei translatorische Freiheitsgrade q_1, q_2 , welche jeweils durch die Stellkräfte τ_1 bzw. τ_2 aktuiert sind. Der rotatorische Freiheitsgrad von K_1 ist gesperrt. Das Pendel (K_2) ist über ein passives Drehgelenk (Koordinate p_1) an K_1 gekoppelt. Der Körper K_3 ist über ein passives Schubgelenk (Koordinate p_2) mit K_1 verbunden, welches mit einer Elastizität ausgestattet ist.

Die Modellbildung erfolgt wie oben beschrieben, sodass man die implizite Systemdarstellung

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} m_2 s_2^2 \ddot{p}_1 + m_2 s_2 \cos p_1 \ddot{q}_1 + m_2 s_2 \sin p_1 \ddot{q}_2 + g m_2 s_2 \sin p_1 \\ m_3 \ddot{p}_2 + m_3 \ddot{q}_1 + c_3 p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.171)$$

erhält. Aus dieser ergibt sich die verallgemeinerte Jacobimatrix

$$\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) = \begin{pmatrix} m_2 s_2 (g \cos p_1 - \dot{q}_1 \sin p_1 + \ddot{q}_2 \cos p_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 s_2^2 & 0 & m_2 s_2 \cos p_1 & m_2 s_2 \sin p_1 \\ 0 & m_3 & m_3 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^2. \quad (4.172)$$

Mit Hilfe des Algorithmus' aus [Fra14], dessen Implementierung in [Fri15, FFKR16] beschrieben ist, lässt sich eine unimodulare Vervollständigung \mathbf{Q} und damit ein flacher Ausgang des Variationssystems

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}} d\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} dp_2 + dq_1 \\ * \end{pmatrix} \quad (4.173)$$

angeben³², wobei ω_2 durch einen umfangreicheren Ausdruck mit $\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(\omega_2) = 0$ gegeben ist (siehe [11]). Offensichtlich ist $\omega_1 = dp_2 + dq_1$ direkt integrierbar, weshalb wiederum der Fall $i = 2$ untersucht wird. Für dieses System gilt dann zusammengefasst $n_{\mathbf{q}} = n_{\mathbf{p}} = 2$, $k_{\Omega_0} \stackrel{(4.148)}{=} 0$ und $\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}(d\omega_2) = 2$, woraus sich zusammen mit den Definitionen (4.153) für $r(k)$ und $s(k)$ die folgenden Werte ergeben:

maximale Ableitungsordnung in Γ_k :	k	0	1	2	3	4	...
maximale Anzahl an Basis-1-Formen:	$s(k)$	12	12	12	16	20	...
Grad der Differentialform $\Xi_{2,k}$:	$r(k)$	4	6	10	14	18	...
Anzahl der Koeffizienten:	$\binom{s(k)}{r(k)}$	495	924	66	120	190	...

(4.174)

Im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel erhält man hier also eine sehr große Anzahl an Koeffizienten. ◁

Korollar 4.55 fordert nun, dass $\Xi_{i,k}|_{\mathcal{F}} \neq 0$ für alle $k \geq 1$ gelten muss. Um eine Bedingung zu erhalten, die sich durch eine endliche Anzahl an Rechenoperationen überprüfen lässt, muss man zeigen, dass es für alle $k \geq 1$ von den insgesamt $\binom{s(k)}{r(k)}$ Koeffizienten mindestens einen gibt, der nicht identisch verschwindet.

Koeffizient bezüglich der höchsten Ordnung

Definitionsgemäß gilt $\Xi_{i,k} \stackrel{(4.149c)}{=} \Xi_{i,k-1} \wedge \Gamma_k$, d.h. die $\binom{s(k)}{r(k)}$ Koeffizienten von $\Xi_{i,k}$ hängen im Allgemeinen von den Koeffizienten der vorhergehenden Folgenglieder $\Xi_{i,\check{k}}$ mit $\check{k} < k$

³²Die Unimodularität der Gesamtmatrix kann durch direkte Berechnung der Inversen bestätigt werden. Wie schon in Beispiel 4.57 hat auch hier die Einschränkung auf \mathcal{F} keinen Einfluss, denn die beiden skalaren Gleichungen in $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}})$ lassen sich nach $\ddot{\mathbf{p}}$ auflösen, aber in \mathbf{Q} tritt weder \ddot{p}_1 noch \ddot{p}_2 auf.

ab und sind demnach nur rekursiv zu ermitteln. Dadurch wird der Nachweis, dass es stets mindestens einen nichtverschwindenden Koeffizient gibt, erheblich erschwert. Eine Ausnahme stellen die Koeffizienten zur jeweils höchsten Ableitungsordnung dar. Mit der bisher etablierten Notation (siehe insbesondere die Definition von c^* in (4.162)) lässt sich dazu das folgende Ergebnis festhalten:

Lemma 4.59. *Für $k \geq k^*$ gilt $\text{coeff}_{\Theta_k}(\Gamma_k) = c^*$.*

Beweis: Für $k = k^*$ entspricht die Behauptung der Definition (4.162) von c^* . Für $k > k^*$ nutzt man die Produktregel der Differentiation. Zunächst werden die n Faktoren von Γ_k durchgehend nummeriert:

$$\Gamma_k \stackrel{(4.149a)}{=} \mu_{k,1} \wedge \dots \wedge \mu_{k,n}, \quad (4.175)$$

mit $\mu_{k,i} = \omega_i^{(k-k_{\Omega_0})}$ für $i = 1, \dots, n_{\mathbf{q}}$ und $\mu_{k,n_{\mathbf{q}}+i} = dF_i^{(k-2)}$ für $i = 1, \dots, n_{\mathbf{p}}$. Jede dieser 1-Formen hat die Struktur

$$\mu_{k,i} = \mathbf{a}_{k,i} d\boldsymbol{\theta}^{(k)} + \mathbf{b}_{k,i} d\boldsymbol{\theta}^{(k-1)} + \text{T.n.O.}, \quad (4.176)$$

wobei in T.n.O. alle Summanden niedrigerer³³ Ableitungsordnung bezüglich $d\boldsymbol{\theta}$ zusammengefasst sind. Die Zeilenvektoren $\mathbf{a}_{k,i}, \mathbf{b}_{k,i} \in \underline{\mathcal{K}}^{1 \times n}$ enthalten die entsprechenden Koeffizientenfunktionen. Die Anwendung der Zeitableitung ergibt

$$\frac{d}{dt} \mu_{k,i} = \dot{\mu}_{k,i} = \mu_{k+1,i} = \mathbf{a}_{k,i} d\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} + (\dot{\mathbf{a}}_{k,i} + \mathbf{b}_{k,i}) d\boldsymbol{\theta}^{(k)} + \text{T.n.O.} \quad (4.177)$$

und die wiederholte Anwendung liefert

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^l \mu_{k,i} = \mu_{k,i}^{(l)} = \mu_{k+l,i} = \mathbf{a}_{k,i} d\boldsymbol{\theta}^{(k+l)} + (l \cdot \dot{\mathbf{a}}_{k,i} + \mathbf{b}_{k,i}) d\boldsymbol{\theta}^{(k+l-1)} + \text{T.n.O.} \quad (4.178)$$

Fasst man (4.176) als Definitionsgleichung für die Koeffizientenvektoren $\mathbf{a}_{k,i}, \mathbf{b}_{k,i}$ bezüglich der Basis-1-Formen mit der höchsten bzw. zweithöchsten Ableitungsordnung auf, lässt sich aus Gleichung (4.178) für $k \geq k^*$ und $l \geq 0$ die Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{a}_{k+l,i} := \mathbf{a}_{k,i} \quad (4.179a)$$

$$\mathbf{b}_{k+l,i} := l \cdot \dot{\mathbf{a}}_{k,i} + \mathbf{b}_{k,i} \quad (4.179b)$$

ablesen. Bildet man nun die 2-Form $\mu_{k+l,i} \wedge \mu_{k+l,j}$ und betrachtet die Koeffizienten dieser Zweiform bezüglich der Basiselemente³⁴ $d\theta_r^{(k+l)} \wedge d\theta_s^{(k+l)}$ für beliebige $r, s \in \{1, \dots, n\}$, so ist klar, dass diese unabhängig von l sind und nur Terme aus $\mathbf{a}_{k,i}$ und $\mathbf{a}_{k,j}$ enthalten. Das gleiche gilt für Keilprodukte mit mehr als zwei Faktoren aus der Menge $\{\mu_{k+l,1}, \dots, \mu_{k+l,n}\}$ und folglich auch für die n -Form $\Gamma_{k+l} = \mu_{k+l,1} \wedge \dots \wedge \mu_{k+l,n}$. Diese hat unter ihren zahlreichen Basiselementen genau eines, dessen Faktoren alle aus der Menge

³³Genauer gesagt, mit niedrigeren Ableitungsordnungen als die explizit angeschriebenen Terme sie besitzen.

³⁴D.h. bezüglich derjenigen Basiselemente von $\Lambda^2(\underline{\mathbb{X}}_\infty)$, deren Faktoren jeweils beide die höchste mögliche Ableitungsordnung $(k+l)$ aufweisen.

$\{d\theta_1^{(k+l)}, \dots, d\theta_n^{(k+l)}\}$, stammen, d.h. aus der Menge der Basis-1-Formen mit der (höchstmöglichen) Ableitungsordnung $k+l$. Dieses Basiselement entspricht dann gerade der n -Form Θ_{k+l} , siehe (4.161). Mit anderen Worten: Der zum Basiselement Θ_{k+l} gehörende Koeffizient von Γ_{k+l} ist unabhängig von l . Es gilt also $\text{coeff}_{\Theta_{k+l}}(\Gamma_{k+l}) = \text{coeff}_{\Theta_k}(\Gamma_k)$ für $k \geq k^*$ und $l \geq 0$ und damit ist die Behauptung erfüllt. \square

Aus Lemma 4.59 kann man nun eine konkret überprüfbare hinreichende Bedingung für Nichtflachheit folgern:

Satz 4.60. *Das betrachtete mechanische System ist nicht flach, wenn für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n_{\mathbf{q}}\}$ gilt*

$$c^*|_{\mathcal{F}} \neq 0, \quad (4.180a)$$

$$\Xi_{i,k^*}|_{\mathcal{F}} = (d\omega_i \wedge \Gamma_0 \wedge \dots \wedge \Gamma_{k^*})|_{\mathcal{F}} \neq 0. \quad (4.180b)$$

Beweis: Aus Lemma 4.59 und Voraussetzung (4.180a) folgt

$$\Gamma_{k^*+1} = c^* \cdot \Theta_{k^*+1} + \check{\Gamma}_{k^*+1} \neq 0, \quad (4.181)$$

wobei $\check{\Gamma}_{k^*}$ hier alle Summanden mit Basis- n -Formen erfasst, die anders als Θ_{k^*+1} (siehe (4.161)) nicht ausschließlich aus dem Produkt von Basis-1-Formen mit der höchstmöglichen Ableitungsordnung k^*+1 bestehen. Da die Basis-1-Formen $d\theta_1^{(k^*+1)}, \dots, d\theta_n^{(k^*+1)}$ in Ξ_{i,k^*} nicht auftreten, gilt

$$\begin{aligned} \Xi_{i,k^*+1}|_{\mathcal{F}} &= (\Xi_{i,k^*} \wedge \Gamma_{k^*+1})|_{\mathcal{F}} \\ &= \underbrace{(c^* \cdot \Xi_{i,k^*} \wedge \Theta_{k^*+1})|_{\mathcal{F}}}_{\neq 0} + (\Xi_{i,k^*} \wedge \check{\Gamma}_{k^*})|_{\mathcal{F}} \neq 0. \end{aligned} \quad (4.182)$$

Diese Argumentation lässt sich, wiederum mit Hilfe von Lemma 4.59, induktiv fortsetzen, sodass $\Xi_{i,k^*+l}|_{\mathcal{F}} \neq 0$ für alle $l \geq 0$ gilt und mit Korollar (4.55) die Behauptung folgt. \square

Die Auswertung der in Satz 4.60 formulierten hinreichenden Bedingung für Nichtflachheit ist für eine gegebene unimodulare Vervollständigung $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$ vergleichsweise einfach. Sie läuft im wesentlichen darauf hinaus, die zu $\mathbf{Q}\left(\frac{d}{dt}\right)$ gehörenden 1-Formen ω zu bestimmen, mittels (4.148) und (4.150) die Konstanten k_{Ω_0} und k^* abzulesen und dann durch ggf. wiederholte Anwendung von $\frac{d}{dt}$ die n -Form

$$\Gamma_{k^*} = \omega_1^{(k^*-k_{\Omega_0})} \wedge \dots \wedge \omega_{n_{\mathbf{q}}}^{(k^*-k_{\Omega_0})} \wedge dF_1^{(k^*-2)} \wedge \dots \wedge dF_{n_{\mathbf{p}}}^{(k^*-2)} \quad (4.183)$$

auszurechnen. Von dieser interessiert für die Überprüfung von (4.180a) nur der zu $\Theta_{k^*} = d\theta_1^{(k^*)} \wedge \dots \wedge d\theta_n^{(k^*)}$ gehörende Koeffizient c^* bzw. dessen Einschränkung auf \mathcal{F} . Im nächsten Schritt ist dann noch das Keilprodukt (4.180b) zu evaluieren, wobei bis auf $d\omega_i$ alle notwendigen Größen bereits als Zwischenergebnis vorliegen.

Wie eingangs bereits angekündigt, ist der Nutzen der durch Satz 4.60 ausgedrückten notwendigen Flachheitsbedingung stark begrenzt. Wie in den beiden folgenden Beispielen

gilt auch für alle anderen im Rahmen der Arbeit untersuchten Systeme $c^* = 0$. Die Vermutung liegt nahe, dass es dafür systematische Ursachen gibt. Die sich daraus ergebenden offenen Fragen sind im Abschnitt 7.2 zusammengefasst.

Beispiel 4.61 (Fortsetzung von Beispiel 4.57 (einachsiges ebenes Fahrzeug); Implementierung: $[(10)]$). In (4.168) wurde bereits $k_{\Omega_0} = 0$ festgestellt, demnach gilt laut (4.150) $k^* = 2$. Der entscheidende Koeffizient c^* für dieses System ergibt sich also aus

$$c^* = \text{coeff}_{\Theta_2}(\Gamma_2) = \text{coeff}_{d\dot{\theta}_1 \wedge d\dot{\theta}_2 \wedge d\dot{\theta}_3}(\Gamma_2) \quad \text{mit} \quad \Gamma_2 = \ddot{\omega}_1 \wedge \ddot{\omega}_2 \wedge dF_1. \quad (4.184)$$

Die 3-Form Γ_2 lässt sich mit CAS-Unterstützung direkt berechnen. Die $\binom{9}{3} = 84$ Koeffizienten bestehen entweder aus umfangreichen Ausdrücken oder verschwinden identisch. Insbesondere gilt $c^* = 0$. Grund hierfür ist, dass bereits in der 2-Form $\ddot{\omega}_1 \wedge dF_1$ keine Basiselemente mit ausschließlich der höchsten Ableitungsordnungen auftreten.

Die hinreichende Bedingung für Nichtflachheit aus Satz 4.60 ist mithin nicht erfüllt und es bleibt weiter offen, ob für dieses System ein flacher Ausgang existiert oder nicht.

◁

Beispiel 4.62 (Fortsetzung von Beispiel 4.58 (Planar verschiebliches Pendel mit Zusatzmasse); Implementierung: $[(11)]$). Im Zusammenhang mit (4.174) wurde $k_{\Omega_0} = 1$ bestimmt, sodass ebenfalls $k^* = 2$ gilt. Analog zum vorhergehenden Beispiel, allerdings mit dem Unterschied $n_{\mathbf{p}} = 2$, ist die 4-Form Γ_2 ausschlaggebend für c^* . Es tritt auch hier das gleiche Problem auf, denn aus (4.172) und (4.173) lässt sich

$$\text{ord}_{d\theta}(\ddot{\omega}_1 \wedge dF_2) = \text{ord}_{d\theta}((d\ddot{p}_2 + d\ddot{q}_1 + \text{T.n.O.}) \wedge (d\ddot{p}_2 + d\ddot{q}_1 + c_3 dp_2)) < 2 \quad (4.185)$$

direkt ablesen³⁵. Es gilt also wieder $c^* = 0$ und folglich kann auch für dieses Beispiel die vom Autor vermutete Nichtflachheit nicht nachgewiesen werden.

◁

4.7.3 Resümee

Durch die Umformulierung der allgemeinen Integrabilitätsbedingung (4.59) aus Satz 4.22 zur Keilproduktbedingung (4.126) aus Satz (4.50) wurde einerseits eine leichter abprüf-bare Bedingung erhalten, andererseits jedoch die Unimodularitätsforderung für den (Polynommatrix-wertigen) integrierenden Faktoren nicht berücksichtigt. Folglich wurde aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung nur eine notwendige (siehe Bemerkung 4.52). Um aus den a priori unendlich vielen zu überprüfenden Gliedern der Folge $\Xi_{i,0}, \Xi_{i,1}, \dots$ (siehe (4.149) und Korollar 4.55) eine vergleichsweise einfache Bedingung zu erhalten, wurde die Betrachtung dann auf den höchsten Koeffizienten c^* eingeschränkt, weil dieser nach Lemma 4.59 unabhängig von der maximal berücksichtigten Ableitungsordnung k ist. Für die betrachteten Beispielsysteme erwies sich die so erhaltene notwendige Flachheitsbedingung (siehe Satz 4.60) allerdings als zu schwach. Insofern stellen die

³⁵Es sei angemerkt dass die beteiligten 1-Formen $\ddot{\omega}_1$ und dF_2 jeweils Basis-1-Formen bis zur Ableitungsordnung zwei aufweisen. D.h., a priori würde man eine entsprechende Ableitungsordnung auch für das Keilprodukt erwarten.

Resultate aus Abschnitt 4.7 im Wesentlichen ein negatives Ergebnis dar. Andererseits bietet der in Satz 4.50 formulierte prinzipielle Zugang immerhin für den Eingrößenfall eine erhebliche Vereinfachung gegenüber der in [Lé11] vorgeschlagenen Herangehensweise (siehe Beispiel 4.53). Darüber hinaus ergeben sich aus Sicht des Autors relevante Fragen für weitere Untersuchungen. Diese sind in Abschnitt 7.2.2 festgehalten.

4.8 Konfigurationsflachheit

4.8.1 Allgemeine mechanische Systeme

Bei mechanischen Systemen der Form (2.8) nehmen die Konfigurationskoordinaten $\boldsymbol{\theta}$ in der Menge aller möglicher (allgemeiner) Systemgrößen offensichtlich eine herausgehobene Stellung ein. Trajektorien für $\boldsymbol{\theta}(\cdot)$ enthalten mehr Information als Trajektorien für die zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{\theta}}(\cdot)$ oder andere aus Ableitungen entstehende Größen. Daher liegt die Vermutung nahe, dass dieser „höhere Informationsgehalt“ auch für die Flachheitsanalyse eine Rolle spielen kann.

In [RM96] (bzw. in der überarbeiteten Version [RM98]) wurde der Begriff der Konfigurationsflachheit eingeführt, wobei das Konzept in der etwas älteren Publikation [MRS95, S. 1] bereits benannt ist. Im vorliegenden Kontext ist folgende Definition zweckmäßig:

Definition 4.63. Gibt es für ein entsprechend der Definition 4.1 flaches mechanisches System³⁶ einen flachen Ausgang, der nicht von $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ oder höheren Ableitungen abhängt, gilt also $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}_y(\boldsymbol{\theta}(t))$, so heißen das System und der entsprechende Ausgang **konfigurationsflach**. \triangleleft

Bemerkung 4.64. Für den Mehrgrößenfall, d.h. $n_q \geq 2$, existieren für jedes konfigurationsflache System immer auch nicht konfigurationsflache Ausgänge. Sei z.B. (y_1, y_2) ein konfigurationsflacher Ausgang. Dann ist $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) = (y_1, y_2 + \dot{y}_1)$ ebenfalls ein flacher Ausgang, der aber offensichtlich nicht konfigurationsflach ist. Folglich kann allein mit der Existenz eines flachen Ausgangs der von $\boldsymbol{\theta}$ oder höheren Zeitableitungen abhängt, die Eigenschaft Konfigurationsflachheit keinesfalls ausgeschlossen werden. \triangleleft

Bemerkung 4.65. Für ein vollständig aktuiertes System gilt $n_q = n$ bzw. $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{q}$. In diesem Fall besteht die partiell linearisierte Darstellung (2.18) aus n Doppelintegratoren. Offensichtlich lassen sich dann die Trajektorien für alle Konfigurationskoordinaten $\boldsymbol{\theta}$ frei wählen und außerdem alle Systemgrößen inklusive der Eingänge direkt aus den Trajektorien für die Konfigurationskoordinaten berechnen. Damit gilt: Jedes vollständig aktuierte mechanische System ist konfigurationsflach und $\mathbf{y} = \boldsymbol{\theta} = \mathbf{q}$ ist ein konfigurationsflacher Ausgang. \triangleleft

Durch die Einschränkung auf $\mathbf{y} = \mathbf{h}_y(\boldsymbol{\theta})$ lässt sich die Existenzfrage bezüglich konfigurationsflacher Ausgänge leichter beantworten als im allgemeinen Fall, d.h. für einen beliebigen flachen Ausgang. In [RM98] wird ein endlich abprüfbares Kriterium, also eine

³⁶D.h. in der allgemeinen Systemdarstellung (4.2) gilt $\mathbf{x} = \boldsymbol{\theta}$ und $\gamma = 2$.

zugleich notwendige und hinreichende Bedingung, angeben, mit dem die Frage nach der Konfigurationsflachheit für konservative, holonome mechanische Systeme mit $n_{\mathbf{p}} = 1$ (d.h. n Freiheitsgraden und $n - 1$ Stellgrößen) beantwortet werden kann. In [SI12] wird dieses Kriterium auf Systeme mit $n_{\mathbf{p}} \geq 1$ verallgemeinert. In beiden Arbeiten wird ausgiebig auf Argumente und Methoden der Riemannschen Geometrie zurückgegriffen. Ist das Kriterium für Konfigurationsflachheit nicht erfüllt, kann – nach bisherigem Kenntnisstand – immer noch ein flacher Ausgang existieren, der dann aber notwendig von $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ oder höheren Ableitungen abhängt.

Gleichzeitig ist festzuhalten, dass alle (dem Autor bekannten) Beispiele für entsprechend Definition 2.3 (quasi)-konservative flache mechanische Systeme in der Literatur konfigurationsflach sind, siehe z.B. [MRS95, FRA13]. Aus diesen Überlegungen motiviert sich die folgende Vermutung.

Vermutung 4.66. Jedes flache quasi-konservative mechanische System ist konfigurationsflach. \triangleleft

Sollte sich diese Hypothese belegen lassen, würde mit dem oben erwähnten Kriterium für Konfigurationsflachheit für eine bedeutende Klasse von regelungstechnisch relevanten Systemen ein echtes Flachheitskriterium zur Verfügung stehen und damit könnte die Menge an Systemen mit unklarem Flachheitsstatus (siehe Abbildung 4.2) deutlich reduziert werden.

Bemerkung 4.67. Bis auf [RM96, RM98, SI12] und den eigenen Beiträgen [KR14c, KR15a] sind dem Autor keine Quellen in der wissenschaftlichen Literatur bekannt, die sich explizit mit Konfigurationsflachheit auseinandersetzen. Insbesondere die oben formulierte Hypothese scheint bisher kein signifikantes Forschungsinteresse geweckt zu haben. \triangleleft

4.8.2 Konfigurationsflachheit linearer Systeme

In diesem Abschnitt wird unter der Nutzung der Argumentation in [KR14c, KR15a] gezeigt, dass die Vermutung 4.66 zumindest für den linearen Fall zutrifft.

Die Einschränkung auf lineare mechanische Systeme der Form (siehe auch (3.6) und (4.3))

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \ddot{\boldsymbol{\theta}}) = (\overline{\mathbf{M}}_{1,1} \overline{\mathbf{M}}_{1,2})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \overline{\mathbf{R}}_1\dot{\boldsymbol{\theta}} + \overline{\mathbf{K}}_1\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (4.186)$$

ist ein naheliegender Ansatz, denn dadurch ergeben sich erhebliche Vereinfachungen: Wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt, ist für lineare Systeme Flachheit äquivalent mit Steuerbarkeit [FLMR95, Satz 2] und damit leicht überprüfbar. Außerdem lassen sich die in den Abschnitten (4.4) und (4.7) verwendeten Polynommatrix-Methoden deutlich unkomplizierter anwenden, weil die Koeffizienten der Polynome nun aus \mathbb{R} statt aus $\underline{\mathcal{K}}$ stammen, d.h. reelle Zahlen anstelle von meromorphen Funktionen der Systemgrößen sind. Dadurch kann z.B. zur Unimodularitätsprüfung einer Matrix ihre Determinante herangezogen werden, siehe auch Abschnitt A.17. Darüber hinaus ist die Integrabilitätsanforderung (4.48b) an den flachen Ausgang des Variationssystems trivial

erfüllt, denn jede 1-Form ω mit konstanten Koeffizienten erfüllt $d\omega = 0$ und ist folglich integrabel.

Da sich Vermutung 4.66 nur auf quasi-konservative Systeme bezieht, kann $\overline{\mathbf{R}}_1 \stackrel{(3.7)}{=} \mathbf{0}$ vorausgesetzt werden. Durch die Anwendung der äußeren Ableitung auf (4.186) erhält man dann

$$d\mathbf{F} = \underbrace{\left(\overbrace{(\overline{\mathbf{M}}_{1,1} \ \overline{\mathbf{M}}_{1,2})}^{\mathbf{P}_2} \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + \overbrace{\overline{\mathbf{K}}_1}^{\mathbf{P}_0} \right)}_{\mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right)} d\boldsymbol{\theta}, \quad (4.187)$$

und somit unmittelbar die Polynommatrix $\mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right) \in \mathbb{R}\left[\frac{d}{dt}\right]^{n_p \times n}$.

Zunächst wird nun Konfigurationflachheit als spezielle unimodulare Vervollständigung charakterisiert.

Lemma 4.68. *Das durch die Polynommatrix $\mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right)$ beschriebene lineare mechanische System (4.186) ist konfigurationsflach, wenn es eine rein reelle Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_q \times n}$ gibt, die $\mathbf{P}\left(\frac{d}{dt}\right)$ zu einer unimodularen Matrix vervollständigt. Mit anderen Worten:*

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right) \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \text{konst} \neq 0. \quad (4.188)$$

Ein konfigurationsflacher Ausgang ist dann durch $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}$ gegeben.

Beweis: Eine von $\frac{d}{dt}$ unabhängige unimodulare Vervollständigung $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_q \times n}$ stellt einen Spezialfall der in Satz 4.17 beschriebenen Situation dar. Sie ist gleichzeitig die verallgemeinerte und die klassische Jacobimatrix der linearen Abbildung $\mathbf{h}_y(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}$, die offensichtlich nicht von Zeitableitungen von $\boldsymbol{\theta}$ abhängt. Entsprechend der Definition 4.63 ist $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}$ ein konfigurationsflacher Ausgang. \square

Um zu zeigen, dass aus der Quasi-Konservativität von System (4.186) immer die Existenz einer rein reellen \mathbf{Q} -Matrix entsprechend Lemma 4.68 folgt, ist es zweckmäßig, die z.B. in [Wol74, Kai80, Rei14] etablierten Methoden wie etwa das Hautus-Kriterium direkt verwenden zu können. Diese Methoden beruhen auf einer Laplacetransformation der linearen Systemgleichungen (4.186). Ersetzt man den Zeitableitungsoperator $\frac{d}{dt}$ durch die Laplace-Variable s , dann liefern beide Zugänge die gleiche Polynommatrix

$$\mathbf{P}_F\left(\frac{d}{dt}\right) \doteq \mathbf{P}_F(s) \stackrel{(4.187)}{=} \mathbf{P}_2 s^2 + \mathbf{P}_0 \quad (4.189)$$

und für die linearen Systemgleichungen erhält man dann die auch als „Kerndarstellung“, siehe z.B. [Wil07], bezeichnete Form

$$\mathbf{P}_F(s)\hat{\boldsymbol{\theta}}(s) = \mathbf{0}, \quad (4.190)$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\theta}}(s)$ die laplacetransformierten Systemgrößen $\boldsymbol{\theta}(t)$ bezeichnet.

Dabei ist $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$ eine passend geformte Nullmatrix, die $\mathbf{L}_k(\tilde{s})$ -Blöcke haben die Struktur

$$\mathbf{L}_k(\tilde{s}) = \left. \left(\begin{array}{ccc} \overbrace{\quad\quad\quad}^{k+1} & & \\ 1 & \tilde{s} & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & & 1 & \tilde{s} \end{array} \right) \right\} k \quad (4.196)$$

und der Block $\bar{\mathbf{A}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1\tilde{s}$ ist eine reguläre Matrixschar.

Beweis: Siehe [Gan86, Kap. 12]. □

Für den Block \mathbf{O} sind insbesondere auch die Fälle $N_1, N_2 = 0$ zulässig. Der Fall $N_1 = 0$ bedeutet dann z.B., dass der $\mathbf{L}_{\varepsilon_1}$ -Block zwar in der ersten Zeile von $\mathbf{A}_{\text{Kron}}(\tilde{s})$ beginnt aber die ersten N_2 Spalten Nullspalten sind. Um zum Nachweis der Existenz einer rein reellen unimodularen Vervollständigung entsprechend (4.192) zu dienen, reicht es, die Normalform auf die speziellen Eigenschaften von $\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2\tilde{s}$ einzuschränken.

Lemma 4.71. *Sei $n_1 < n_2$. Wenn die Schar $\mathbf{A}(\tilde{s}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\tilde{s}$ linksteilerfrei (d.h. hyperregulär) ist und außerdem $\text{rank } \mathbf{A}_1 = n_1$ gilt, dann treten in der zugehörigen Normalform keine $\mathbf{L}^T(\tilde{s})$ -Blöcke und kein regulärer Block auf. Ferner gilt $N_1 = 0$ und $N_2 + \alpha = n_2 - n_1$.*

Beweis: Da \mathbf{U}, \mathbf{V} regulär sind, gilt

$$\text{rank } \mathbf{A}(\tilde{s}) = \text{rank } \mathbf{A}_{\text{Kron}}(\tilde{s}). \quad (4.197)$$

Aus Lemma 4.69 folgt nun, dass in $\mathbf{A}_{\text{Kron}}(\tilde{s})$ für alle $\tilde{s} \in \mathbb{C}$ vollen Zeilenrang aufweisen muss. Diese Bedingung ist nur für die \mathbf{L}_ε -Blöcke und die Nullmatrix mit $N_1 = 0$ erfüllt. Insbesondere kann der reguläre Block $\bar{\mathbf{A}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1\tilde{s}$ nicht auftreten, denn einerseits gäbe es für $\bar{\mathbf{A}}_1 \neq \mathbf{0}$ mindestens einen Eigenwert $\tilde{s}^* \in \mathbb{C}$, für den es zu einem Rangabfall kommt. Andererseits stünde $\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{0}$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\text{rank } \mathbf{A}_1 = n_1$. Da $\mathbf{A}_{\text{Kron}}(\tilde{s})$ also nur aus N_2 Nullspalten und α \mathbf{L}_ε -Blöcken mit jeweils einer „überschüssigen“ Spalte besteht (siehe (4.194) und (4.196)), ergibt sich insgesamt ein Spaltenüberschuss $n_2 - n_1$ von $N_2 + \alpha$. □

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich, wie angekündigt, die Vermutung 4.66 für den linearen Fall beweisen.

Satz 4.72. *Für quasi-konservative lineare mechanische Systeme der Form (4.186) sind Flachheit und Konfigurationsflachheit äquivalent.*

Beweis Ausgangspunkt ist die Kronecker-Normalform $\mathbf{P}_{\text{Kron}}(\tilde{s})$ der Matrix $\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2\tilde{s}$. An Stelle von (4.192) wird also

$$\det \left(\begin{array}{c} \mathbf{P}_{\text{Kron}}(\tilde{s}) \\ \mathbf{Q}_{\text{Kron}} \end{array} \right) \stackrel{!}{=} \text{konst} \neq 0. \quad (4.198)$$

Offensichtlich dient die ggf. aufwendig zu bestimmende Transformation in die Kronecker-Normalform nur zum Beweis, dass stets eine passende rein reelle Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{q}} \times n}$ existieren muss. Für die tatsächliche Berechnung eines konfigurationsflachen Ausgangs ist diese Transformation nicht erforderlich. Stattdessen kann die Matrix $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}(s)$ sukzessive durch geeignete Zeilen ergänzt werden, sodass die Hyperregularität erhalten bleibt, was sich mit dem Hautus-Kriterium (siehe Lemma 4.69) überprüfen lässt. In der letzten Zeile kann dann ein Ansatz mit n freien Parametern eingesetzt werden, um die Bedingung (4.192) zu erfüllen. Da die freien Parameter nur in einer Zeile auftreten, lassen sie sich dann aus einem linearen Gleichungssystem bestimmen. Dieses Vorgehen ist in den folgenden beiden Beispielen illustriert.

Beispiel 4.74 (Zwei visko-elastisch gekoppelte Wagen; Implementierung: $\llbracket(12)\rrbracket$). Betrachtet wird das in Abbildung 4.10 dargestellte Eingrößensystem aus zwei translatorisch beweglichen Körpern, die über eine lineare Feder elastisch gekoppelt sind. Auf den linken Körper wirkt die Stellgröße. Um den Einfluss von nichtkonservativen Termen zu verdeutlichen, sind im Modell zusätzlich zwei viskose Dämpfungselemente enthalten.

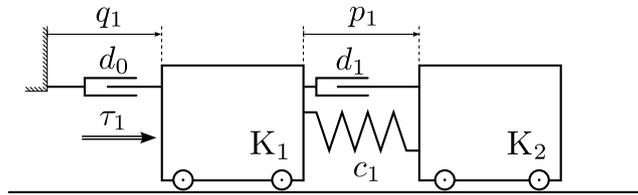


Abbildung 4.10: Lineares mechanisches System mit zwei translatorischen Freiheitsgraden und einer Eingangsgröße.

Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten in der Form (2.8) (bzw. für dieses System äquivalent (3.6))

$$\begin{pmatrix} m_2 \ddot{p}_1 + m_2 \ddot{q}_1 + d_1 \dot{p}_1 + c_1 p_1 \\ m_2 \ddot{p}_1 + (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + d_0 \dot{q}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_1 \end{pmatrix}. \quad (4.204)$$

Daraus erhält man durch Weglassen der unteren Zeile unmittelbar die implizite Darstellung (4.186) und durch Bilden der Jacobimatrizen bezüglich $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ und $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ die polynomiale Systemgleichung (siehe (4.190))

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 + d_1 s + m_2 s^2 & m_2 s^2 \\ m_2 s^2 & m_2 s^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}_{\mathbf{F}}(s)} \begin{pmatrix} \hat{p}_1(s) \\ \hat{q}_1(s) \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.205)$$

Das Hautus-Kriterium (Lemma 4.69) ist genau dann erfüllt, wenn $m_2, c_1 \neq 0$ gilt.

Als Ansatz für eine unimodulare Vervollständigung, die rein reell (also unabhängig von s) ist, wird

$$\mathbf{Q} = (a_{1,0} \ a_{2,0}) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad (4.206)$$

verwendet, woraus sich als Determinante der Gesamtmatrix

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{F}(s)} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 + d_1 s + m_2 s^2 & m_2 s^2 \\ a_{1,0} & a_{2,0} \end{pmatrix} = m_2 s^2 (a_{2,0} - a_{1,0}) + a_{20} d_1 s + a_{20} c_1. \quad (4.207)$$

ergibt. Die Bedingungen für die Existenz eines linearen konfigurationsflachen Ausgangs liest man direkt ab, da die Koeffizienten zu s^2 und s^1 verschwinden müssen.

$$a_{2,0} - a_{1,0} = 0, \quad (4.208a)$$

$$a_{2,0} d_1 = 0. \quad (4.208b)$$

Offensichtlich gibt es für $d_1 \neq 0$ nur die triviale Lösung $a_{1,0} = a_{2,0} = 0$. Damit wäre die Determinante gleich Null und \mathbf{Q} keine unimodulare Vervollständigung.

Betrachtet man nun aber den quasi-konservativen Fall $d_1 = 0$ ergeben sich unendlich viele Lösungen für das Gleichungssystem (4.208a). Einen physikalisch gut interpretierbaren flachen Ausgang erhält man mit $a_{1,0} = a_{2,0} = 1$:

$$y_1 = \mathbf{Q}\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = p_1 + q_1. \quad (4.209)$$

Dieser flache Ausgang entspricht offensichtlich gerade der Absolutposition des nicht aktuierten Körpers.

Natürlich kann auch für $d_1 \neq 0$ ein flacher Ausgang angegeben werden. Dieser hängt dann aber von den Geschwindigkeiten ab, siehe [12] für die Detailrechnung:

$$\tilde{y}_1 = q_1 + \left(1 - \frac{d_1^2}{c_1 m_2}\right) p_1 - \frac{d_1}{c_1} \dot{p}_1 - \frac{d_1}{c_1} \dot{q}_1. \quad (4.210)$$

◁

Beispiel 4.75 (Linearisiertes Modell des einachsigen Fahrzeugs aus Beispiel 4.57; Implementierung: [13]). Als Mehrgrößenbeispiel wird nun das in Abbildung 4.8 dargestellte ebene einachsige Fahrzeug mit drei Freiheitsgraden untersucht. Die Bewegungsgleichungen dieses Systems sind nichtlinear und durch Anwendung der in [RM98] vorgeschlagenen Methode lässt sich zeigen, dass es nicht konfigurationsflach ist.

Durch Linearisierung des Systems um die durch $\boldsymbol{\theta} \equiv (p_1^\circ \ 0 \ 0)^T$ festgelegte Ruhelage, erhält man die implizite Darstellung $\mathbf{P}_0 \boldsymbol{\theta} + \mathbf{P}_2 \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2 \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^2\right) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ mit

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} -gm_1 s_1 + gm_2 (-l_1 - s_2) & -gm_1 s_1 + gm_2 (-l_1 - s_2) & -gm_2 s_2 \end{pmatrix}, \text{ und} \quad (4.211a)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} J_{012} + l_0^2 m_0 + m_1 (l_0 + s_1)^2 + m_2 (l_0 + l_1 + s_2)^2 & J_{12} + m_1 s_1 (l_0 + s_1) + m_2 (l_1 + s_2) (l_0 + l_1 + s_2) & J_2 + m_2 s_2 (l_0 + l_1 + s_2) \end{pmatrix} \quad (4.211b)$$

wobei abkürzend $J_{012} = J_0 + J_1 + J_2$ bzw. $J_{12} := J_1 + J_2$ geschrieben wurde. Da die Einträge von $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2$ nicht von p_1° abhängen ist dieses linearisierte Modell auch für die Überführung zwischen verschiedenen Ruhelagen verwendbar, siehe [LR06, KR14a].

Zur Vereinfachung werden nun für die Systemparameter Zahlenwerte (konsistent zu [KR15a]) eingesetzt und der Übergang zum Laplacebereich vollzogen:

$$\mathbf{P}_F(s) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_2 s^2 = \begin{pmatrix} -40 + 21.3s^2 & -40 + 14.2s^2 & -10 + 4.1s^2 \end{pmatrix}. \quad (4.212)$$

Gesucht ist nun die Vervollständigungsmatrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, sodass $\begin{pmatrix} \mathbf{P}_F(s) \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}$ unimodular ist. Dazu kann man die erste Zeile von $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$ fast beliebig wählen. Lediglich muss die Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{P}_F(s) \\ \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix}$ linksteilerfrei (d.h. hyperregulär) sein. Da durch $y_1 = \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\theta}$ bereits eine Komponente des flachen Ausgangs festgelegt wird, kann man diesen Freiheitsgrad nutzen und y_1 entsprechend der zu lösenden Steuerungsaufgabe festlegen. Mit $\mathbf{Q}_1 = (1 \ -1 \ 1)$ erhält man $y_1 = p_1 - q_1 + q_2$ und damit gerade den Absolutwinkel des Körpers K_3 gegenüber der Gravitationsrichtung, siehe Abbildung 4.8. Die zweite Zeile bestimmt man dann durch den parametrischen Ansatz

$$\det \begin{pmatrix} -40 + 21.3s^2 & -40 + 14.2s^2 & -10 + 4.1s^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} d = \text{konst} \neq 0, \quad (4.213)$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich

$$a_1 = a_3 - \frac{86}{1555}d \quad \text{und} \quad a_2 = -a_3 - \frac{183}{3110}d \quad (4.214)$$

ergibt. Da der konkrete Wert der Determinante ohne Bedeutung ist, kann man die Parameter a_3 und d so wählen, dass man y_2 mithilfe einfacher Dezimalbrüche angeben kann. Beispielsweise liefern $a_3 = 0$ und $d = -31.1$

$$y_2 = 1.72p_1 + 1.83q_1. \quad (4.215)$$

Die Tatsache, dass eine Lösung für die Parameter a_1, a_2, a_3 gefunden wurde rechtfertigt nachträglich die Wahl für \mathbf{Q}_1 . Wäre $\begin{pmatrix} \mathbf{P}_F(s) \\ \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix}$ nicht linksteilerfrei, dann könnte $\begin{pmatrix} \mathbf{P}_F(s) \\ \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$ auch nicht unimodular sein, siehe Lemma A.14.

Selbstverständlich sind auch andere Festlegungen für \mathbf{Q}_1 möglich, siehe [KR14a, KR15a] bzw. [(13)]. ◁

Kapitel 5

Entwurf von Solltrajektorien

5.1 Motivation und Überblick

Um ein regelungstechnisches System von einem gegebenen Anfangszustand in einen gewünschten Endzustand zu überführen, gibt es im Wesentlichen zwei Ansätze.

Der erste besteht darin, den gewünschten Endzustand mittels einer geeigneten Rückführung in eine (lokal) asymptotisch stabile Ruhelage zu verwandeln und die Überführung dann der Eigendynamik des rückgeführten Systems zu überlassen. Dieses Vorgehen lässt sich als „Führungssprungantwort“ auffassen und ist für viele Systeme, vor allem für lineare, vergleichsweise einfach umzusetzen. Nachteil dieses Ansatzes ist, dass wichtige Eigenschaften der Überführungstrajektorie, wie die Amplitude der Stellsignale und die Dauer der Überführung nur indirekt über die Reglerparameter beeinflusst werden können bzw. unmittelbar von den im Entwurf unberücksichtigten Anfangswerten abhängen. Darüber hinaus ist zu beachten, dass im allgemeinen (nichtlinearen) Fall je nach Konstellation von Anfangs- und Endzustand eine stabilisierende Rückführung mit entsprechend großem Einzugsbereich ggf. nur schwer bestimmt werden kann bzw. gar nicht existieren muss.

Der zweite Ansatz ist, explizit eine Überführungstrajektorie für das System und die gegebene Konstellation aus Anfangs- und Endwerten zu planen und die so bestimmten zeitabhängige Stellsignale auf das System aufzuschalten. Im Allgemeinen erfordert dies die Lösung einer nichtlinearen dynamischen Randwertaufgabe (RWA¹) mit unendlichen vielen Freiheitsgraden, nämlich gerade dem Verlauf der Stellgrößen, sowie der Überführungszeit. Dieser Prozess wird als Trajektorienplanung oder auch als Steuerungsentwurf bezeichnet, siehe z.B. [LaV06, Kapitel 14] für eine allgemeine Einordnung.

Vorteile einer expliziten Trajektorienplanung sind potentiell bessere Ergebnisse z.B. in Form von kürzerer Überführungszeit und geringerem Überschwingen sowie eine größere Flexibilität z.B. durch Berücksichtigung von Beschränkungen und/oder Optimalitätsforderungen². Nachteilig ist der zusätzliche Aufwand für Entwurf und Implementierung.

Bemerkung 5.1. Auf Grund von externen Störungen sowie von Modell- und Anfangsfehlern treten bei der Anwendung einer reinen Steuerung im Allgemeinen Abweichungen zwischen den geplanten und tatsächlichen Verläufen der Systemgrößen auf. Um diesen Abweichungen entgegenzuwirken wird deshalb oft zusätzlich noch eine geeignete

¹Auch: Randwertproblem, engl. boundary value problem (bvp).

²Diese Aspekte werden in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht betrachtet. Stattdessen sei auf [Gra15] und die dort angegebenen Referenzen verwiesen.

Rückführung der Systemgrößen implementiert. Man spricht dann von einer *Trajektorienfolgeregelung* (engl. trajectory tracking control [RPK13]). Da bei diesem Ansatz Steuerung und Regelung und damit Führungs- und Störverhalten unabhängig voneinander ausgelegt werden können, ist auch von einer *Zwei-Freiheitsgrade-Regelung* (engl.: Two-Degree-of-Freedom-control) die Rede [Kre99]. \triangleleft

Zur Lösung der Randwertaufgabe existieren unterschiedliche Ansätze, von denen einige in den folgenden Abschnitten näher untersucht werden. Ausgangspunkt für die Problemformulierung ist die allgemeine eingangsaffine Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} & (5.1) \\ \text{mit } \mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_x \times m}, \quad \boldsymbol{\tau}(t) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Betrachtet werden die Trajektorien auf dem Zeitintervall $[0, T]$ mit den (gewünschten) Randwerten

$$\mathbf{x}_{\text{soll}}(0) =: \mathbf{x}_{\text{soll}}^* \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_{\text{soll}}(T) =: \mathbf{x}_{\text{soll}}^\dagger. \quad (5.2)$$

Konkret gesucht ist also eine Stellgrößentrajektorie $\boldsymbol{\tau} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, die das System aus dem Anfangs- in den Endzustand überführt. Die Herausforderung besteht darin, die System-DGLn zu lösen, ohne a priori den Verlauf des Eingangssignals zu kennen. Diese Problemstellung ist grundsätzlich von einer Anfangswertaufgabe (AWA) zu unterscheiden. Bei einer AWA ist der Verlauf des Stellsignals $\boldsymbol{\tau}(\cdot)$ gegeben, dafür liegen Randwerte nur zum Zeitpunkt $t = 0$ vor. Gesucht ist dann der Verlauf der Zustandskomponenten $\mathbf{x} : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$.

Für lineare Systeme kann man die Lösung der Anfangswertaufgabe in Abhängigkeit des Eingangsverlaufs explizit angeben. Diese Lösung lässt sich unter bestimmten Bedingungen direkt nach dem Eingangssignal oder nach darin enthaltenen freien Parametern auflösen und somit eine Lösung der Randwertaufgabe bestimmen, siehe Abschnitt 5.2.

Für differentiell flache Systeme kann auf Grund der Parametrierbarkeit aller Systemgrößen durch den flachen Ausgang die RWA auf ein Interpolationsproblem zurückgeführt werden. Dieser Zugang ist Gegenstand von Abschnitt 5.3.

Für allgemeine Systeme, die weder linear noch flach sind, sind im Kontext der Trajektorienplanung zwei Herangehensweisen relevant [AMR88b]: Einerseits das sogenannte Schießverfahren und andererseits das Kollokationsverfahren. Beide Ansätze beruhen auf einer Algebraisierung der Randwertaufgabe: Die Stellgrößentrajektorie $\boldsymbol{\tau}(\cdot)$ wird nicht in einem unendlichdimensionalen Funktionenraum gesucht, sondern es wird ein Ansatz mit endlich vielen freien Parametern verwendet. In Abschnitt 5.4 wird auf das Schießverfahren in knapper Form und ausführlicher auf das Kollokationsverfahren eingegangen. Darüber hinaus wird mit `PyTrajectory` eine Software-Umsetzung des Kollokationsverfahrens vorgestellt.

Unter bestimmten Umständen lässt sich die Randwertaufgabe auch durch den Einbezug einer geeigneten Rückführung lösen. Dazu wird in Abschnitt 5.5 eine Methode beschrieben, welche die bei (quasi-)konservativen mechanischen Systemen vorhandene Zeitumkehrsymmetrie zusammen mit der Stabilisierung einer Ruhelage ausnutzt, um eine Stellgrößentrajektorie zu berechnen.

5.2 Trajektorienplanung für lineare Systeme

In diesem Abschnitt wird zunächst auf den in vielen Lehrbüchern (siehe z.B. [Rei14, Abschnitt 8.2] und die dort zitierten Referenzen) vorgestellten Ansatz zur Trajektorienberechnung für steuerbare lineare Systeme eingegangen. Anschließend wird der Fall der Ruhelagenüberführung für nicht steuerbare Systeme betrachtet. An einem konkreten Beispiel wird ein parametrischer Ansatz als Alternative zur „Lehrbuchvariante“ diskutiert.

Für ein lineares Zustandssystem der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\boldsymbol{\tau}(t) \quad \text{mit } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}} \times n_{\mathbf{x}}} \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}} \times m} \quad (5.3)$$

mit Zustandsdimension $n_{\mathbf{x}}$ und Eingangsdimension m kann man die Zustandstrajektorie in Abhängigkeit des Anfangswertes \mathbf{x}^* und des Eingangsverlaufs $\boldsymbol{\tau}(\cdot)$ mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion darstellen als

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^* + \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tilde{t}))\mathbf{B}\boldsymbol{\tau}(\tilde{t})d\tilde{t}. \quad (5.4)$$

Ist das System steuerbar, kann für einen gegebenen Endzustand $\mathbf{x}(T) =: \mathbf{x}^\dagger$ mit Hilfe der als *Gramsche Matrix* bezeichneten konstanten $n_{\mathbf{x}} \times n_{\mathbf{x}}$ -Matrix

$$\mathbf{W}_T := \int_0^T \exp(\mathbf{A}(T-\tilde{t}))\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}(T-\tilde{t}))^T d\tilde{t} \quad (5.5)$$

eine Eingangstrajektorie konstruiert werden, die \mathbf{x}^* in \mathbf{x}^\dagger innerhalb der Zeit T überführt [Rei14, Abschnitt 8.2]:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}(t-\tilde{t}))^T \mathbf{W}_T^{-1} (\mathbf{x}^\dagger - \exp(\mathbf{A}T)\mathbf{x}^*). \quad (5.6)$$

Die Matrix \mathbf{W}_T besitzt genau dann eine Inverse \mathbf{W}_T^{-1} für $T \neq 0$, wenn das betrachtete System (wie vorausgesetzt) steuerbar ist [Lun97, Abschnitt 3.2.1].

Die durch (5.6) beschriebene Steuerung ist natürlich nur einer von unendlich vielen möglichen Verläufen der Stellgröße. Jede Eingangstrajektorie $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\cdot)$, die

$$\int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tilde{t}))\mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\tau}}(\tilde{t})d\tilde{t} = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

erfüllt, kann auf Grund der Linearität des Systems zu $\boldsymbol{\tau}(\cdot)$ addiert werden, ohne dass sich dadurch der erreichte Endzustand zum Zeitpunkt T ändert.

Ist das System (5.3) nicht steuerbar, so kann man es z.B. mit Hilfe der „Kalman-Zerlegung“ (siehe z.B. [Lud95a, Satz 5.28], [Kai80, Abschnitt 2.4.2]) in ein vollständig steuerbares und ein vollständig nicht-steuerbares, d.h. autonomes, Teilsystem aufspalten. Für ersteres lässt sich dann das beschriebene Verfahren zur Trajektorienplanung anwenden. Für ein nicht steuerbares System ist deshalb eine Überführung zwischen \mathbf{x}^* und \mathbf{x}^\dagger nur dann möglich, wenn der Endzustand \mathbf{x}^\dagger in der von \mathbf{x}^* aus erreichbaren Teilmenge des

Zustandsraumes liegt, siehe [Lud95a, Gl. (5.87)]. Zudem muss das nicht-steuerbare Teilsystem stabil³ sein, sonst divergiert das System für fast alle Anfangsbedingungen. Auch eine Rückführung kann dieses Problem nicht beheben.

Bei der Trajektorienplanung sind insbesondere Überführungen zwischen Ruhelagen relevant. Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, ob man das System (5.3) von jeder Ruhelage in jede andere überführen kann. Mit Hilfe der Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_s := (\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \quad (5.8)$$

lässt sich nun festhalten:

Satz 5.2. *Für das lineare dynamische System (5.3) sind alle Ruhelagen genau dann in einander überführbar, wenn gilt:*

$$\ker \mathbf{A} \subseteq \text{im } \mathbf{Q}_s. \quad (5.9)$$

Beweis: Hinreichender Teil: Aus $\mathbf{0} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\tau}$ ergibt sich die Menge aller Ruhelagen

$$\mathcal{X}_{\text{RL}} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n \times} : \mathbf{A}\mathbf{x} \in \text{im } \mathbf{B}\} = \ker \mathbf{A} + (\text{im } \mathbf{A} \cap \text{im } \mathbf{B}). \quad (5.10)$$

Weil $(\text{im } \mathbf{A} \cap \text{im } \mathbf{B}) \subseteq \text{im } \mathbf{B} \subseteq \text{im } \mathbf{Q}_s$ ohnehin per Konstruktion erfüllt ist, impliziert die Bedingung (5.9) unmittelbar $\mathcal{X}_{\text{RL}} \subseteq \text{im } \mathbf{Q}_s$, d.h. alle Ruhelagen befinden sich in dem vom Ursprung aus erreichbaren Teilraum des Systems (5.3) und lassen sich somit ineinander überführen.

Notwendigkeit: Wenn $\check{\mathbf{x}} \in \ker \mathbf{A}$ mit $\check{\mathbf{x}} \notin \text{im } \mathbf{Q}_s$ existiert, kann \mathbf{Q}_s keinen vollen Rang haben, das System ist also nicht steuerbar. Außerdem ist klar, dass dann $\dim(\ker \mathbf{A} \cap (\text{im } \mathbf{Q}_s)^\perp) > 0$ gelten muss, d.h. das nicht steuerbare Teilsystem besitzt dann Ruhelagen außerhalb des Koordinatenursprungs (bezogen auf die Koordinaten der Kalmanzerlegung). Dieser nichtsteuerbare Anteil einer Ruhelage kann also durch das Eingangssignal nicht beeinflusst und folglich auch nicht beliebig vorgegeben werden. \square

Beispiel 5.3 (Wagen mit rutschender Last; Implementierung: [(14)]). Betrachtet wird das in Abbildung 5.1 dargestellte System aus zwei translatorisch verschiebbaren Körpern K_1 und K_2 , siehe auch [SB94]. Auf K_1 wirkt die Stellkraft τ_1 , und zwischen beiden Körpern wird eine viskose Reibung angenommen. Potentialkräfte sind nicht vorhanden. Das System kann als einfaches Modell eines Wagens mit rutschender Last aufgefasst werden.

Als Bewegungsgleichungen erhält man

$$m_2\ddot{p}_1 + m_2\ddot{q}_1 + d_1\dot{p}_1 = 0 \quad (5.11a)$$

$$m_2\ddot{p}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 = \tau_1 \quad (5.11b)$$

³Das Gesamtsystem heißt dann *stabilisierbar* [Hau70].

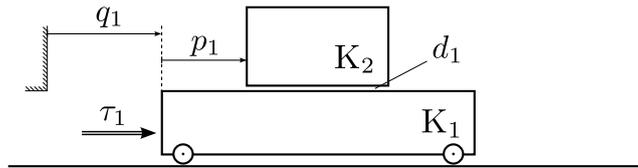


Abbildung 5.1: Zwei translational verschiebbare Körper, die über nur viskose Reibung gekoppelt sind.

bzw. in Zustandsdarstellung mit $\mathbf{x} = (p_1, q_1, \dot{p}_1, \dot{q}_1)^T$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{d_1(m_1+m_2)}{m_1 m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_1}{m_1} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_1} \end{pmatrix} \tau_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}} \tau_1, \quad (5.12)$$

wobei auf der rechten Seite die auf SI-Einheiten⁴ normierten Parameter $m_1 = m_2 = 1$ und $d_1 = \frac{1}{2}$ eingesetzt wurden, um im Folgenden übersichtlichere Ausdrücke zu erhalten. Dass dieses System nicht vollständig steuerbar ist, kann man mit Hilfe von Satz 3.5 direkt ablesen: Durch Nullsetzen der beiden Geschwindigkeiten und des Eingangs in (5.12) ergibt sich eine zweidimensionale Ruhelagen-Mannigfaltigkeit (p_1 und q_1 sind frei wählbar). Gleichzeitig gibt es aber nur eine Eingangskomponente.

Zur Überprüfung, ob alle Ruhelagen ineinander überführbar sind, werden entsprechend Satz 5.2 die Steuerbarkeitsmatrix und eine Basis für $\ker \mathbf{A}$ bestimmt:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \ker \mathbf{A} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Über eine Rangbestimmung lässt sich nun leicht feststellen, dass Bedingung (5.9) nicht erfüllt ist. Tatsächlich lässt sich die p_1 -Komponente bei der Überführung zwischen Ruhelagen nicht verändern. Beispielfhaft wird in [14] mit Hilfe der Kalman-Zerlegung der Eingangsverlauf $\tau_1(t) = -3.591t + 0.565e^t + 1.796$ bestimmt, welcher für $T = 3$ die Ruhelagen $\mathbf{x}^* = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ und $\mathbf{x}^\dagger = (0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0)^T$ in einander überführt, siehe Abbildung 5.2. \triangleleft

5.3 Trajektorienplanung für flache Systeme

Wie aus der Definition 4.1 hervorgeht, ist die zentrale Eigenschaft flacher Systeme, dass alle Lösungen durch die (bis auf Differenzierbarkeitsanforderungen) beliebig wählbaren Trajektorien des flachen Ausgangs parametrisiert werden können. Dadurch lässt sich

⁴Französisch für *Système international d'unités* (Internationales Einheitensystem).

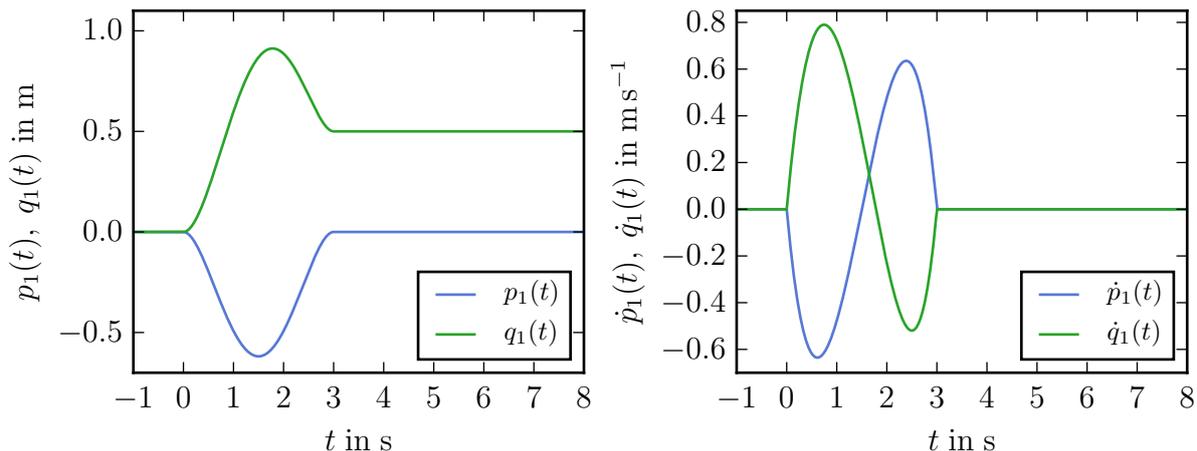


Abbildung 5.2: Verläufe der Zustandsgrößen während der Ruhelagenüberführung. Als Konsequenz der Verletzung von (5.9) gilt hier (und für jede andere Ruhelagenüberführung): $p_1(0) = p_1(T)$.

das Randwertproblem auf ein vergleichsweise einfaches Interpolationsproblem für die Komponenten des Ausgangs zurückführen. Gesucht ist also eine Trajektorie für den flachen Ausgang, welche einerseits die Randbedingungen (5.2) erfüllt, und andererseits hinreichend glatt ist, um daraus realisierbare Stellsignale zu generieren. Die Differenzierbarkeitsanforderungen hängen dabei vom betrachteten System, von der gewünschten Glattheit des Stellsignals und vom gewählten (bzw. gefundenen) flachen Ausgang ab. Ausschlaggebend ist dabei die höchste in der Abbildung \mathbf{h}_r (siehe (4.4)) auftretenden Ableitungsordnung des flachen Ausgangs \mathbf{y} .

Zur Beschreibung solcher Trajektorien setzt man typischerweise (siehe z.B. [Rud15, Abschnitt 3.2.1]) für jede Komponente des flachen Ausgangs ein Polynom

$$\varphi(t) := \sum_i c_i t^i \quad (5.14)$$

an und bestimmt die freien Parameter durch Einsetzen der Randbedingungen aus einem linearen algebraischen Gleichungssystem. Die dafür notwendigen Randwerte der Komponenten des flachen Ausgangs und seiner Ableitungen erhält man durch das Einsetzen der ursprünglich für $\boldsymbol{\theta}$ und $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ gegebenen Randbedingungen in die flache Ausgangsabbildung $\mathbf{y} = \mathbf{h}_y(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \dots)$ und ihre Zeitableitungen. Alternativ können die Randbedingungen auch gleich für den flachen Ausgang vorgegeben werden. Das bietet sich besonders dann an, wenn der flache Ausgang eine einfache physikalische Interpretation hat, also z.B. bei konfigurationsflachen mechanischen Systemen.

Zur Illustration des Vorgehens wird im Folgenden die Trajektorienplanung für ein flaches unteraktuiertes System exemplarisch durchgerechnet. Weitere Anwendungen dieses Zugangs explizit für mechanische Systeme sind beispielsweise in [KS13, KR14a] zu finden. Für eine ausführlichere Betrachtung der Trajektorienplanung für flache Systeme, auch unter Berücksichtigung von Beschränkungen, sei auf [Lé09, Kapitel 7] sowie auf [Rot97, Hag03] verwiesen.

Beispiel 5.4 (Fortsetzung von Beispiel 4.11; Implementierung: [4]). Betrachtet wird das in Abbildung 4.4 dargestellte System aus zwei elastisch gekoppelten Wagen mit aktuiertem Pendel. Als flacher Ausgang werden wieder die Absolutkoordinaten des Pendelschwerpunktes gewählt (siehe (4.17)):

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{h}_y(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} p_1 + q_1 - s_3 \sin q_2 \\ s_3 \cos q_2 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Zunächst sind die Parametrierungen des Zustands und des Eingangs durch den flachen Ausgang, $\mathbf{h}_x(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)$ bzw. $\mathbf{h}_\tau(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots)$ zu bestimmen. Aus der Definition von y_2 erhält man direkt $q_{2,y} = \arccos\left(\frac{y_2}{s_3}\right)$. Damit kann man aus der Definition von y_1 den Ausdruck

$$p_{1,y} + q_{1,y} = y_1 + \sqrt{s_3^2 - y_2^2} \quad (5.16)$$

gewinnen. Mit Hilfe dessen zweifacher Ableitung lässt sich dann aus der Systemgleichung

$$c_2 p_1 + m_2 (\ddot{p}_1 + \ddot{q}_1) + m_3 (\ddot{p}_1 + \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 s_3 \cos(q_2) + \dot{q}_2^2 s_3 \sin(q_2)) = 0 \quad (5.17)$$

(siehe (4.14)) der Ausdruck

$$p_{1,y} = \frac{1}{c_2} \left(-\frac{m_3 y_2}{q_{2,y}} \left(\ddot{y}_2 + \frac{y_2 \dot{y}_2^2}{q_{2,y}^2} \right) - \frac{m_3 \dot{y}_2^2}{q_{2,y}} + (-m_2 - m_3) \left(\ddot{y}_1 - \frac{y_2 \ddot{y}_2}{q_{2,y}} - \frac{\dot{y}_2^2}{q_{2,y}} - \frac{y_2^2 \dot{y}_2^2}{q_{2,y}^3} \right) \right) \quad (5.18)$$

zur Parametrierung von p_1 herleiten. Aus (5.16) folgt dann direkt $q_{1,y}$. Die vollständige Parametrierung des Zustandes $\mathbf{x} = (p_1 \ q_1 \ q_2 \ \dot{p}_1 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2)^T$ hängt dann wegen $\dot{p}_{1,y}$ und $\dot{q}_{1,y}$ offensichtlich bis zur Ableitungsordnung drei von \mathbf{y} ab. Die Eingangsparametrierung erhält man direkt aus den Bewegungsgleichungen (4.14). Dafür muss man (erwartungsgemäß) die Ableitungsordnung noch um eins erhöhen, d.h. die Ausdrücke $\ddot{p}_{1,y}$, $\ddot{q}_{1,y}$ und $\ddot{q}_{2,y}$ berechnen. Nun kann man aus dem gewünschten Verlauf $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ die Stellgrößen berechnen.

Handelt es sich wie hier um einen konfigurationsflachen Ausgang (d.h. \mathbf{h}_y hängt nicht von $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ oder höheren Ableitungen ab), so ist es oftmals zweckmäßig, zunächst eine „Pfadplanung“ durchzuführen, d.h. den Verlauf des flachen Ausgangs auf der Konfigurationsmannigfaltigkeit in Abhängigkeit eines Kurvenparameters $\lambda \in [0, 1]$ festzulegen und anschließend die Zeitskalierung durch den Verlauf $t \mapsto \lambda(t)$ zu bestimmen. Dieses Vorgehen wird z.B. in [Rud15, KRD16] zur Trajektorienplanung für (nichtholonome) Fahrzeugmodelle verwendet.

Für eine möglichst einfach nachvollziehbare Berechnungen wird als Wunschkpfad für den flachen Ausgang die Gerade

$$\mathbf{y}_\lambda(\lambda) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ s_3 \end{pmatrix} \cdot (1 - \lambda) + \begin{pmatrix} 2s_3 \\ -s_3 \end{pmatrix} \lambda \right) \cdot 0.8 \quad (5.19)$$

angesetzt. Der Skalierungsparameter 0.8 bewirkt dabei, dass die aus der Kinematik des Systems bei $q_2 = 0$ resultierenden Singularitäten vermieden werden. Der Verlauf $t \mapsto \lambda(t)$

wird als vier mal stetig differenzierbares stückweise definiertes „Transitionspolynom“ vorgegeben, welches innerhalb von 1s den monotonen Übergang von konstant 0 auf konstant 1 bewirkt:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0.5 \\ 70t^9 - 630t^8 + 2430t^7 - 5250t^6 + 6977.25t^5 - 5906.25t^4 + \\ \quad 3189.38t^3 - 1063.13t^2 + 199.34t - 16.09 & \text{für } 0.5 \leq t \leq 1.5 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.20)$$

Unter der Annahme der Parameterwerte $m_1 = m_2 = m_3 = 1\text{kg}$, $s_3 = 1\text{m}$ und $c_2 = 100\frac{\text{N}}{\text{m}}$ ergeben sich daraus durch Ableiten und Einsetzen schließlich die in Abbildung 5.3 (links) dargestellten Eingangsverläufe. Simuliert man das System (4.14) mit diesen Eingangsverläufen und dem zur Planung konsistenten Anfangszustand $\mathbf{x}_{\text{soll}}(0) = \mathbf{h}_y(\mathbf{y}_\lambda(0), \dot{\mathbf{y}}_\lambda(0), \ddot{\mathbf{y}}_\lambda(0), \mathbf{y}_\lambda^{(3)}(0))$ erhält man wie zu erwarten das vorgegebene Systemverhalten: eine Gerade in der x - y -Ebene des Anschauungsraumes. Weicht der Anfangszustand ab, so ergeben sich auf Grund des Fehlens einer Folgeregelung auch entsprechend stark abweichende Verläufe, siehe Abbildung 5.3 rechts.

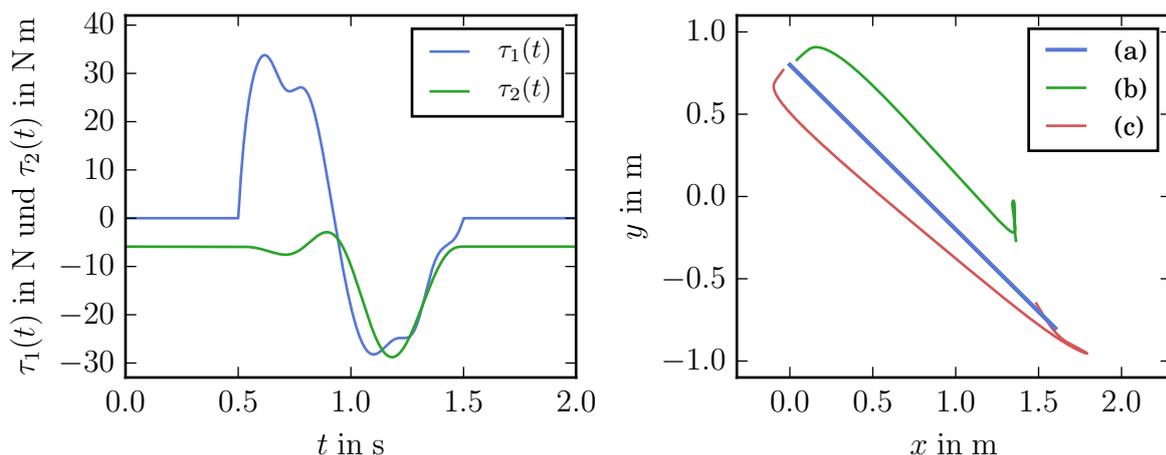


Abbildung 5.3: Links: Geplante Verläufe für die Eingangsgrößen τ_1, τ_2 . Auf Grund des gewählten Anfangs- und Endzustandes nimmt τ_2 vor und nach der Überführung den Wert $-m_3 s_3 g \cdot \sin(\arccos(\pm 0.8)) \approx -5.9\text{Nm}$ an. Rechts: Position des Pendelschwerpunktes in der x - y -Ebene. (a): Simulationsergebnis mit dem zur Trajektorienplanung konsistenten Anfangswert $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{\text{soll}}(0) = (0 \ 0.6 \ 36.9^\circ \ 0 \ 0 \ 0)^T$, (b): $q_2(0) = q_{2,\text{soll}}(0) - 3^\circ$, (c): $q_2(0) = q_{2,\text{soll}}(0) + 3^\circ$. Die Simulation umfasst jeweils 0.5s vor und nach der eigentlichen Überführung wodurch in den Fällen (b) und (c) die aus den Anfangsfehlern resultierenden Abweichungen erkennbar werden.

◁

5.4 Trajektorienplanung durch Bestimmung einer numerischen Näherungslösung der Randwertaufgabe

5.4.1 Schießverfahren

Das Prinzip des Schießverfahrens⁵ besteht darin, ausgehend von einem parametrischen Ansatz für die Stellgrößentrajektorie und einer Startschätzung für die freien Parameter, das Anfangswertproblem numerisch für das Intervall $[0, T]$ zu lösen und aus diesem Simulationsergebnis⁶ eine entsprechende Modifikation der Ansatz-Parameter und damit der Stellgrößentrajektorie abzuleiten. Dieser Prozess wird iterativ fortgesetzt, bis der Endzustand $\mathbf{x}(T)$ im Rahmen einer festzulegenden Toleranz mit $\mathbf{x}_{\text{soll}}^\dagger$ übereinstimmt [PTVF07, Abschnitt 18.1].

Bemerkung 5.5. Aus diesem Prinzip erklärt sich auch die Bezeichnung des Verfahrens: Ein „Schuss“ ist die Lösung eines Anfangswertproblems. Die „Schussrichtung“ (festgelegt durch die Ansatzparameter) wird iterativ korrigiert, bis das „Ziel“ (der gewünschte Endzustand) hinreichend gut getroffen ist.

In [SH01, WSH10] wird das Schießverfahren auf die Trajektorienplanung unteraktuierter Manipulatoren angewendet. Allerdings ist dieser Ansatz auf stückweise konstante Eingangssignale eingeschränkt. Darüber hinaus hat sich in eigenen Untersuchungen gezeigt, dass die Konvergenz stark von den Systemparametern (insbesondere Reibung) abhängt [Kno09, Abschnitt 3.3]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird das Schießverfahren deshalb nicht näher betrachtet.

5.4.2 Kollokationsmethode: Übersicht

Bei der Kollokationsmethode werden neben dem Eingangssignal $\boldsymbol{\tau}$ auch die Verläufe der Zustandskomponenten x_i mit einem Ansatz bezüglich der Zeit parametrisiert. Um die so eingeführten Parameter zu berechnen, werden die Systemgleichungen zu bestimmten Zeitpunkten im Intervall $[0, T]$, den sogenannten Kollokationspunkten, ausgewertet. Daraus resultiert ein im Allgemeinen nichtlineares *algebraisches* Gleichungssystem in den Parametern der Ansatzfunktionen für $\mathbf{x}(\cdot)$ und $\boldsymbol{\tau}(\cdot)$. Nach dessen Lösung kann man mit dem so bestimmten Verlauf $\boldsymbol{\tau}(\cdot)$ das Anfangswertproblem mittels Simulation lösen, um den zu dieser Eingangstrajektorie zugehörigen „tatsächlichen“ Verlauf $\mathbf{x}(\cdot)$ und insbesondere den Endzustand $\mathbf{x}(T)$ zu erhalten. Stimmt der so gefundene Endzustand mit dem Zielzustand $\mathbf{x}_{\text{soll}}^\dagger$ im Rahmen einer vorgegebenen Toleranz überein, so hat man eine Näherungslösung gefunden und das Verfahren ist beendet. Andernfalls wird iterativ die

⁵Engl. „Shooting Method“.

⁶Als Simulationsergebnis wird hier nicht nur der Endzustand $\mathbf{x}(T)$ aufgefasst. Neben den Systemgleichungen (5.1) können simultan weitere Differentialgleichungen gelöst werden, die den Einfluss der Parameter auf den Endzustand beschreiben. Die so bestimmte „Sensitivitätsmatrix“ ist wesentlicher Teil des Simulationsergebnisses [SH01].

Anzahl der Kollokationspunkte sowie der Freiheitsgrade im Ansatz für $\mathbf{x}(\cdot)$ erhöht und mit der bisherigen Lösung als Startschätzung für die freien Parameter weitergerechnet [AMR88b, Abschnitt 9.3].

Bei der sogenannten Methode der finiten Differenzen wird $\dot{\mathbf{x}}$ auf der rechten Seite von (5.1) nicht durch zeitliche Ableitung der parameterabhängigen Ansatzfunktion repräsentiert, sondern durch einen Differenzenquotienten angenähert, siehe [Gra06, Anhang B]. Laut [AMR88b, Satz 5.73] sind beide Zugänge unter bestimmten Umständen sogar äquivalent, weshalb sie in der Literatur oft nicht getrennt betrachtet werden, siehe z.B. [Kel76, AMR88b, MLD].

In [GHZ05, GZ06, Gra06, GTZ07] wurde dieser Ansatz zur Trajektorienplanung näher untersucht und erfolgreich auf verschiedene Beispiele angewendet. Auf Implementierungsebene wurde dabei die z.B. in [SKR00, KS01, MLD] beschriebene Funktion `bvp4c` des Softwarepakets `MATLAB` benutzt, um das Randwertproblem zu lösen und die freien Parameter für den Ansatz für $\boldsymbol{\tau}(\cdot)$ zu bestimmen.

5.4.3 Konstruktion eines Kollokationsverfahrens zur Trajektorienplanung für nichtlineare Systeme

Für das im letzten Abschnitt beschriebene Randwertproblem, d.h. die Bestimmung eines Stellgrößenverlaufs für das System (5.1) bei vorgegebenen Anfangs- und Endwerten, soll nun ein konkretes Kollokationsverfahren hergeleitet werden. Dieses stellt die mathematische Grundlage des Softwarepakets `PyTrajectory` [KSK15] dar. Anlass für dessen Entwicklung waren die technischen und lizenzrechtlichen Beschränkungen, die sich aus der Einbettung von `bvp4c` in das proprietäre Softwarepaket `MATLAB` ergeben.

Als Ansatzfunktionen für die Zeitverläufe der Zustandskomponenten x_i werden kubische Splines $t \mapsto S_i(t)$ auf dem Intervall $[0, T]$ verwendet, also stückweise definierte kubische Polynome, siehe z.B. [HSZ03, Abschnitt 7.3.1.6]. Legt man die Anzahl der Abschnitte auf $n_A \in \mathbb{N}_+$ fest, ergeben sich $n_A - 1$ Übergangsstellen. Die Übergangsbedingungen sind dabei per Konstruktion so gewählt, dass die gesamte Spline-Funktion überall zweimal stetig differenzierbar ist. Es müssen also in jeder Übergangsstelle drei Bedingungen erfüllt werden. Da ein kubisches Polynom vier Koeffizienten hat, verbleibt pro Spline-Abschnitt noch zunächst ein freier Parameter. Weitere Bedingungen resultieren aus den Vorgaben am Rand. Diese Beziehungen lassen sich in einem unterbestimmten linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{L} \mathbf{z} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2} \quad (5.21)$$

mit n_1 Gleichungen und $n_2 > n_1$ Unbekannten erfassen⁷, wobei \mathbf{z} alle Koeffizienten aller Abschnitte enthält.

Die Matrix \mathbf{L} kann als zeilenregulär vorausgesetzt werden, d.h. ggf. vorhandene redundante Gleichungen wurden bereits eliminiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man eine Sortierung von \mathbf{z} voraussetzen, sodass der durch die letzten n_1 Spalten von \mathbf{L}

⁷Die Konstanten $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ hängen natürlich von der Anzahl der Spline-Abschnitte und der Anzahl der Randbedingungen ab, sind aber für die folgenden prinzipiellen Erläuterungen nicht von Belang.

gebildete Block \mathbf{L}_2 regulär ist. Aus der passend gewählten Unterteilung von $\mathbf{z} = \text{col}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{w}})$ kann man (5.21) über

$$(\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \tilde{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \mathbf{r} \quad (5.22)$$

in

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{L}_2^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{L}_1 \mathbf{w}) \quad (5.23)$$

umformen. Die $n_1 - n_2$ Komponenten von \mathbf{w} sind nun frei wählbar und Gleichung (5.23) stellt sicher, dass die Rand- und Glattheitsbedingungen erfüllt sind.

Dieses Vorgehen kann ohne Weiteres auf die Spline-Funktionen aller Komponenten des Zustandes $x_i(\cdot) = S_i(\cdot)$ mit $i = 1, \dots, n_x$ und des Eingangs $\tau_j(\cdot) = S_{n_x+j}(\cdot)$ mit $j = 1, \dots, m$ ausgeweitet werden. Daraus resultieren dann die vektorwertigen Spline-Funktionen $\mathbf{S}_x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ für den Zustand und $\mathbf{S}_\tau : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ für den Eingang. Die insgesamt vorhandenen freien Parameter aller Komponenten-Splines werden im Vektor $\bar{\mathbf{w}}$ zusammengefasst. Setzt man diesen Ansatz in die Systemdifferentialgleichungen (5.1) ein, erhält man durch Auswertung für konkrete Zeitpunkte $t = t_i$ das im Allgemeinen nichtlineare algebraische Gleichungssystem

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{S}}_x(t_i, \bar{\mathbf{w}}) - \mathbf{f}(\mathbf{S}_x(t_i, \bar{\mathbf{w}})) - \mathbf{g}(\mathbf{S}_x(t_i, \bar{\mathbf{w}})) \mathbf{S}_\tau(t_i, \bar{\mathbf{w}}) \quad (5.24)$$

in den Ansatzparametern $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{n_3}$. Offensichtlich ist die Anzahl an skalaren Gleichungen, die man zur Bestimmung von $\bar{\mathbf{w}}$ heranziehen kann, proportional zur Anzahl von Auswertezeitpunkten, d.h. Kollokationsstellen. Diese müssen nicht mit den Grenzen der Spline-Abschnitte übereinstimmen, sondern können frei gewählt werden. Durch eine Wahl von $n_4 \in \mathbb{N}_+$ und die Festlegung von $t_i = \frac{i}{n_4} T$ mit $i = 0, \dots, n_4$ erhält man $n_x \cdot (n_4 + 1)$ skalare algebraische Gleichungen:

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \dim \mathbf{F} = n_x \cdot (n_4 + 1). \quad (5.25)$$

Für eine eindeutige Bestimmung von $\bar{\mathbf{w}}$ ist es notwendig, über mindestens so viele unabhängige Gleichungen wie freie Parameter zu verfügen. Falls mehr Gleichungen zu erfüllen sind, wird im Allgemeinen keine exakte Lösung existieren. Da der Spline-Ansatz die tatsächliche Lösung von (5.1) jedoch ohnehin nur approximieren kann, ist eine exakte Erfüllung der Kollokationsbedingungen auch nicht unbedingt notwendig. Alternativ zu (5.25) kann man daher n_4 so wählen, dass $(n_4 + 1) \cdot n_x > n_3$ gilt, und dann die freien Parameter $\bar{\mathbf{w}}_{\text{res}}$ aus dem nichtlinearen Quadratmittelproblem

$$\bar{\mathbf{w}}_{\text{res}} = \underset{\bar{\mathbf{w}}}{\text{argmin}} |\mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}})|^2 \quad (5.26)$$

bestimmen.

Eine verbreitete Lösungsmethode für diese Klasse von Problemen ist der sogenannte *Levenberg-Marquardt-Algorithmus* (LM-Algorithmus), siehe z.B. [Puj07]. Dieses iterative

Verfahren liefert im Verfahrensschritt $k + 1$ zu einem aktuellen Argument-Wert $\bar{\mathbf{w}}_k$ einen neuen Wert $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ sodass

$$|\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{w}}_k) \cdot (\bar{\mathbf{w}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_k) + \mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}_k)|^2 + \mu^2 \cdot |\bar{\mathbf{w}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_k|^2 \rightarrow \min \quad (5.27)$$

gilt, wobei \mathbf{F}' die Jacobimatrix von \mathbf{F} symbolisiert. Der Parameter μ wird als Regularisierungsparameter bezeichnet. Die Präsenz des Terms $\mu^2 \cdot |\bar{\mathbf{w}}_{k+1} - \bar{\mathbf{w}}_k|^2$ unterscheidet dieses Verfahren vom *Gauß-Newton*-Verfahren. Er sorgt, vereinfacht gesagt, für ein größeres Einzugsgebiet des Minimums, hat aber eine im Vergleich zu Gauß-Newton langsamere Konvergenz zur Folge. Den optimalen Wert für $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$ erhält man aus dem Ableiten von (5.27) nach $\bar{\mathbf{w}}_{k+1}$, anschließendem Nullsetzen und Umstellen:

$$\bar{\mathbf{w}}_{k+1} = \bar{\mathbf{w}}_k - \left(\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{w}}_k)^T \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{w}}_k) + \mu^2 \mathbf{I}_{n_3} \right)^{-1} \cdot \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{w}}_k)^T \mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}_k). \quad (5.28)$$

Das LM-Verfahren bricht im Schritt \bar{k} entweder ab, wenn der Gleichungsfehler $|\mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}_{\bar{k}})|$ kleiner als eine vorgegebene („absolute“) Toleranz ist, oder sich keine nennenswerte Änderung $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}_{\bar{k}}) - \mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}_{\bar{k}-1})$ ergibt, also eine „relative“ Toleranz unterschritten wird. Es gilt dann $\bar{\mathbf{w}}_{\text{res}} := \bar{\mathbf{w}}_{\bar{k}}$

Bemerkung 5.6. Der LM-Algorithmus liefert wie fast alle nichtlinearen Optimierungsverfahren nur ein lokales Minimum, siehe z.B. [NW06, Abschnitt 10.3]. Die gefundene Lösung hängt somit im Allgemeinen von der Startschätzung $\bar{\mathbf{w}}_0$ ab. \triangleleft

Bemerkung 5.7. In Gleichung (5.28) treten zwei rechenaufwendige Operationen auf: Die Matrixinversion (bzw. das Lösen des linearen Gleichungssystems) sowie die Auswertung der Funktion $\mathbf{F}(\cdot)$ und der Jacobimatrix $\mathbf{F}'(\cdot)$. Bei der Implementierung der Auswertung ist es vorteilhaft zweistufig vorzugehen: Zunächst werden aus dem aktuellen $\bar{\mathbf{w}}_k$ die Funktionswerte von $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$ durch Auswerten einer linearen Gleichung (siehe (5.23)) bestimmt und dann in die nichtlinearen Vektorfelder \mathbf{f} und \mathbf{g} eingesetzt. Ein analoges Vorgehen ist für die Auswertung von \mathbf{F}' möglich.

Der alternative Weg, die Komposition aus nichtlinearen Systemgleichungen und linearen Bestimmungsgleichungen für $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$ zu bilden, der durch die Notation $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{w}}_k)$ suggeriert wird, hat sich als langsamer und speicherintensiver herausgestellt. \triangleleft

Aus dem Ergebnis $\bar{\mathbf{w}}_{\text{res}}$ des LM-Algorithmus lässt sich der Eingangsverlauf $t \mapsto \boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{S}_{\boldsymbol{\tau}}(t, \bar{\mathbf{w}}_{\text{res}})$ bestimmen und mit diesem die zu den Randbedingungen kompatible Anfangswertaufgabe lösen. Wie in Abschnitt 5.4.2 beschrieben, wird der so erhaltene Endzustand $\mathbf{x}(T)$ mit $\mathbf{x}_{\text{soll}}^\dagger$ verglichen. Ist der Betrag der Abweichung kleiner als eine vorgegebene Toleranz, so ist das Verfahren beendet. Andernfalls wird n_A (die Anzahl der Spline-Abschnitte) um einen ganzzahligen Faktor (voreingestellter Wert: 2) erhöht und das LM-Verfahren erneut angewendet. Die Startwerte $\bar{\mathbf{w}}_0$ werden dabei aus der vorhergehenden LM-Lösung derart bestimmt, dass die neuen (höher aufgelösten) Splines für jeden Zeitpunkt aus $[0, T]$ mit den bisherigen übereinstimmen. Neben der inneren Iteration über k in Gleichung (5.28) wird also noch eine äußere Iteration für die Anzahl der Spline-Abschnitte durchgeführt.

Für die Implementierung in `PyTrajectory` wurde für den ersten Schritt dieser äußeren Iteration $n_A = 10$ und $\bar{\mathbf{w}}_0 = (0.1, \dots, 0.1)^T$ festgelegt. Optional kann man $\bar{\mathbf{w}}_0$ mit Pseudozufallszahlen initialisieren lassen und hierfür einen „Saat“-Wert (engl.: *seed*) übergeben.

Im Folgenden wird exemplarisch die Anwendung des beschriebenen Kollokationsverfahrens auf ein unteraktuiertes mechanisches System betrachtet. In der Dokumentation [KSK15] des Softwarepakets `PyTrajectory` wird auf eine Reihe weiterer mechanischer Beispielsysteme inklusive Implementierung und Ergebnissen eingegangen.

Beispiel 5.8 (Ebener Mechanismus mit fünf Freiheitsgraden mit drei Stellgrößen (siehe auch Beispiel 4.47); Implementierung: [15]). Betrachtet wird das in den Abbildungen 4.7 bzw. 5.4 (rechts unten) dargestellte System mit zwei nichtaktuierten rotatorischen und drei aktuierten translatorischen Freiheitsgraden. Ausgangspunkt sind die kollokiert partiell linearisierten Bewegungsgleichungen der Form (2.18). Der Eingang des Systems wird dann durch $\mathbf{a} = (\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \ddot{q}_2)^T$ gebildet, d.h. bezogen auf Gleichung (5.1) gilt $\boldsymbol{\tau} := \mathbf{a}$. Als Systemparameter werden die Pendellängen $s_3 = 0.25$ m und $s_4 = 0.5$ m, sowie $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gewählt und die Vorgabe für die Randbedingungen lauten $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}_{10 \times 1}$ und $\mathbf{x}_{\text{soll}}^\dagger = \text{col}(\pi, \pi, 3, 0, 0.4, \mathbf{0}_{5 \times 1})$. Durch die Anwendung des beschriebenen Kollokationsverfahrens erhält man für eine Überführungszeit $T = 2$ s nach drei äußeren Iterationen⁸ eine im Rahmen der voreingestellten Toleranzen hinreichend genaue Lösung, siehe Abbildung 5.4. \triangleleft

Bemerkung 5.9. Natürlich ist a priori nicht garantiert, dass für die konkrete Randwertaufgabe überhaupt eine Lösung existiert. Ist dies nicht der Fall, läuft die äußere Iteration des Algorithmus theoretisch immer weiter. Da die Anzahl der Spline-Abschnitte n_A jeweils um einen ganzzahligen Faktor erhöht wird, steigt die Anzahl der freien Parameter exponentiell, sodass der Algorithmus praktisch auf Grund von Speicherbeschränkungen abbricht. Dies erfolgte auf der verwendeten Hardware (ca. 4GB verfügbarer Arbeitsspeicher) typischerweise bei Werten von $1000 < n_A < 2000$.

Aus einem solchen Abbruch, des Algorithmus kann allerdings umgekehrt nicht gefolgert werden, dass tatsächlich keine Lösung existiert. Einerseits wäre ist es denkbar, dass mit anderen Startschätzungen und einer anderen Überführungszeit durchaus eine Lösung gefunden wird. Andererseits ist die zwingende Konvergenz des Verfahrens (unabhängig von der Speicherproblematik) nicht nachgewiesen. Die in [KSK15] dokumentierten Beispiele belegen jedoch die praktische Tauglichkeit des Zugangs. \triangleleft

5.4.4 Berücksichtigung von Integratorketten

In der bisher beschriebenen Form wird für jede Systemgröße (d.h. Zustands- oder Eingangskomponente) eine eigene Spline-Funktion $S_i(\cdot)$ angesetzt. Allerdings treten neben allgemeinen nichtlinearen verkoppelten Differentialgleichungen in den skalaren Komponenten von (5.1) oft Beziehungen der Form $\dot{x}_i = x_j$ bzw. $\dot{x}_i = \tau_j$ auf. Das ist insbesondere

⁸D.h. die Lösung wurde für einen Ansatz mit 40 Spline-Abschnitten pro Systemgröße gefunden. Mit $n_A = 10$ bzw. $n_A = 20$ wurden dagegen vom Algorithmus noch keine hinreichend genaue Lösung gefunden.

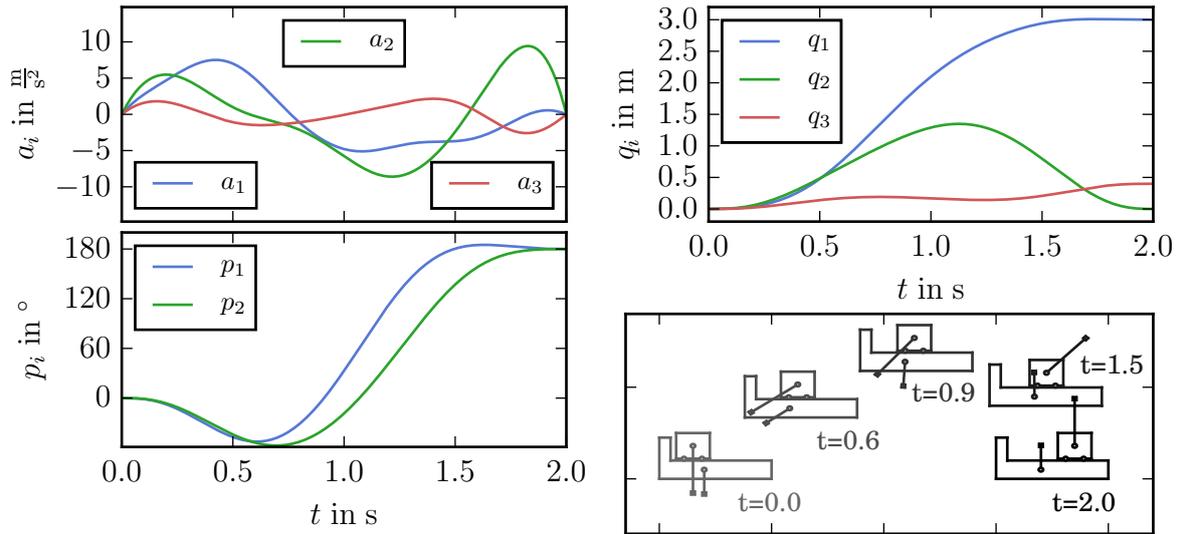


Abbildung 5.4: Trajektorienplanung durch Lösung einer RWA mit PyTrajectory. Dargestellt sind die Eingangsverläufe $\mathbf{a} = \mathbf{S}_\tau(t)$, die Verläufe der Koordinaten $\boldsymbol{\theta} = \text{col}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ die aus der Lösung des Anfangswertproblems unter Verwendung dieser Stellgröße resultieren, sowie die Konfiguration des Systems im Anschauungsraum für ausgewählte Zeitpunkte.

dann der Fall, wenn es sich um ein mechanisches System in der partiell linearisierte Form (2.18) handelt. Dann treten $n_{\mathbf{q}}$ Integratorketten der Länge zwei ($\ddot{q}_i = \dot{v}_i = a_i$) und $n_{\mathbf{p}}$ „Integratorketten“ der Länge eins ($\dot{p} = u_i$) auf. Es ist naheliegend, diese Integrator-Beziehungen bereits direkt im Spline-Ansatz zu berücksichtigen, d.h. für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen tatsächlich die entsprechende Ableitung des Splines in die Systemgleichungen einzusetzen. Die zu den Integratorketten gehörenden Komponenten der Systemgleichung sind dann per Konstruktion erfüllt. Außerdem reduziert sich die Anzahl der freien Parameter auf weniger als die Hälfte, da statt $2n_{\mathbf{p}} + 3n_{\mathbf{q}}$ Spline-Funktionen für alle Zustands- und Eingangskomponenten nun nur noch $n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{q}}$ Splines für die Konfigurationskoordinaten angesetzt werden müssen. Das für die Auswertung von (5.28) zu lösende Gleichungssystem ist damit deutlich kleiner und ein LM-Schritt somit deutlich schneller.

Nachteilig bei der expliziten Berücksichtigung von Integratorketten im Ansatz ist, neben dem zusätzlichen Implementierungsaufwand für die Erkennung der Ketten und die Behandlung der Randbedingungen für die Ableitungen, die verringerte Differenzierbarkeitsordnung für die Zeitverläufe der Geschwindigkeitskomponenten und des Eingangs. Die Ansatzfunktionen für die q_i sind zweifach stetig differenzierbare stückweise kubische Polynome. Folglich sind die Zeitverläufe der $a_i = \ddot{q}_i$ stückweise lineare Funktionen und somit nur noch stetig. Außerdem wurde in numerischen Experimenten festgestellt, dass zur Unterschreitung vorgegebener Fehlerschranken oft mehr Spline-Abschnitte benötigt werden, wenn die Berücksichtigung der Integratorketten aktiviert ist. Dadurch kann

die Ersparnis an Rechenzeit und Speicherbedarf reduziert bzw. auch überkompensiert werden. In anderen Fällen wiederum überwiegen die Vorteile.

Beispiel 5.10 (Fortsetzung von Beispiel 5.8; Implementierung: [[15](#)] und [[16](#)])). Wendet man die Elimination von Systemgrößen durch die explizite Berücksichtigung der Integrator Ketten auf das System mit fünf Freiheitsgraden und drei Stellgrößen aus Abbildung 4.7 an, lässt sich die Zahl der Splines von $2n_p + 3n_q = 13$ auf $n_p + n_q = 5$ reduzieren. Führt man mit diesem Ansatz das Kollokationsverfahren durch, ergibt sich eine qualitativ andere Lösung, was insbesondere beim Vergleich der Eingangssignale deutlich wird, siehe Abbildung 5.5.

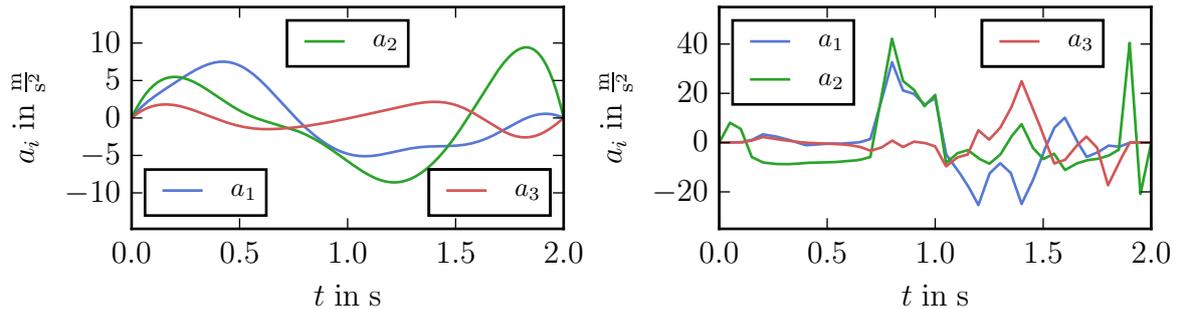


Abbildung 5.5: Trajektorienplanung durch Lösung einer RWA mit PyTrajectory. Dargestellt sind die Eingangsverläufe $\mathbf{a} = \mathbf{S}_\tau(t)$ für die in Beispiel 5.8 betrachtete Ruhelagenüberführung. Links: Separate Spline-Funktion für jede Zustands- bzw. Eingangskomponente (identischer Verlauf zu Abbildung 5.4). Rechts: Separate Spline-Funktionen nur für die Konfigurationskoordinaten. Die anderen Systemgrößen werden durch die Berücksichtigung der Integrator Ketten ausgedrückt. Für den Eingangsverlauf ergeben bei Verwendung kubischer Splines dann stückweise lineare Funktionen.

In Bezug auf die Rechenzeit bestätigt sich die Erwartung: Für jeden Iterationsschritt im Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich bei der Verwendung von 40 Spline-Abschnitten eine Verringerung der Rechenzeit⁹ von ca. 0.18s auf 0.06s, d.h. eine Reduktion auf rund ein Drittel.

Allerdings wird durch die Elimination der abgeleiteten Systemgrößen für dieses Beispiel die Konvergenz tendenziell verschlechtert. Das wird deutlich, wenn man die gleiche Randwertaufgabe wiederholt mit (z.B. 100 mal) unterschiedlichen Startschätzungen für $\bar{\mathbf{w}}_0$ lösen lässt. Während ohne Elimination eine hinreichend gute Lösung stets mit 40 Spline-Abschnitten gefunden wird, ist mit Berücksichtigung der Integrator Ketten oft eine Erhöhung von n_A auf 80 oder 160 notwendig und auch dann gibt es noch 19% der Fälle, in denen das Verfahren nicht (hinreichend schnell) konvergiert, siehe Abbildung 5.6 (oben).

Selbst in jenen 42% der Fälle, in denen $n_A = 40$ ausreicht, sind im Schnitt mehr LM-Schritte notwendig bis die Toleranz erreicht wird. Deshalb liegt, trotz des Geschwindig-

⁹Gemessen auf einem 2500 MHz-Prozessor-Kern.

keitsvorteils eines einzelnen LM-Schritts, auch dann die durchschnittliche Gesamtrechenzeit mit 7 s knapp über dem Vergleichswert von 6 s (ohne Elimination).

Anders stellt sich die Situation beim Acrobot-System aus Abbildung 4.5 dar. Für dieses bereits in Beispiel 4.34 untersuchte System wird die Ruhelagenüberführung von $\mathbf{x}_{\text{soll}}^* = (\frac{3}{2}\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$ nach $\mathbf{x}_{\text{soll}}^\dagger = (\frac{1}{2}\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$, d.h. von der nach unten ausgestreckten in die nach oben ausgestreckte Konfiguration, betrachtet und als Übergangszeit $T = 2$ s angesetzt.

Aus der Lösung des Randwertproblems mit und ohne Integratorkettenberücksichtigung für jeweils 100 zufällig gewählte Startschätzungen für $\bar{\mathbf{w}}_0$ ist zu erkennen, dass für dieses Problem die Berücksichtigung der Integratorketten erhebliche Vorteile in Bezug auf die Rechenzeit bringt. Zudem wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Verfahren nicht konvergiert, erheblich reduziert, siehe Abbildung 5.6 (unten).

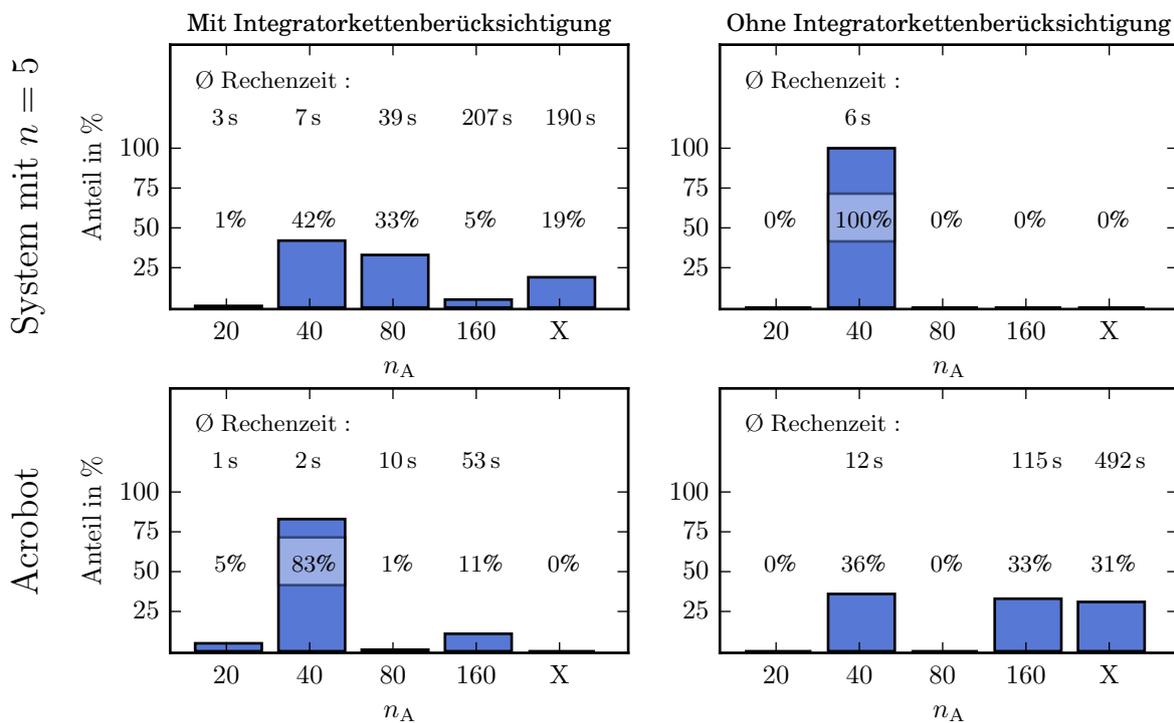


Abbildung 5.6: Vergleich der erforderlichen Spline-Abschnittszahl n_A und durchschnittlichen Rechenzeiten. Links mit und rechts ohne Berücksichtigung der Integratorketten. Oben für das in Beispiel 5.8 betrachtete System mit $n = 5$ und $n_q = 3$. Unten für das Acrobot-System. Das Symbol „X“ steht in den Diagrammen jeweils für die Anzahl der mit maximal 160 Spline-Abschnitten nicht konvergierten Lösungsversuche.

◁

Fazit

Es lässt sich mithin festhalten, dass mit dem vorgestellten Kollokationsverfahren das Problem der Trajektorienberechnung für nichtlineare mechanische Systeme prinzipiell gelöst werden kann. Die benötigte Rechenzeit zur Bestimmung eines Schritts im Optimierungsverfahren (5.28) lässt sich durch die Berücksichtigung von im Modell vorhandenen Integratorketten deutlich reduzieren. Allerdings beeinflusst diese Veränderung auch die Konvergenzeigenschaften des Gesamtverfahrens. Da diese Beeinflussung abhängig vom System und den Randbedingungen in positiver oder negativer Weise erfolgen kann, ist es für ein konkret zu lösendes Problem empfehlenswert, über die Zweckmäßigkeit der Integratorketten-Elimination jeweils empirisch zu entscheiden.

5.5 Trajektorienplanung mittels Zeitumkehrsymmetrie

In diesem Abschnitt wird eine weitere Möglichkeit zur Trajektorienbestimmung vorgestellt. Sie beruht auf der fundamentalen Eigenschaft konservativer mechanischer Systeme, dass ihr Verhalten in vorwärts und rückwärts laufender Zeit identisch ist. Für autonome mechanische Systeme ist diese sogenannte *Zeitumkehrsymmetrie* seit langem bekannt und wird z.B. in dem physikalisch orientierten Übersichtsaufsatz [LR98] behandelt.

Die Begriffswahl erklärt sich vor dem Hintergrund, dass im Kontext von dynamischen Systemen eine Abbildung, die Lösungen des Systems auf (andere) Lösungen des selben Systems abbildet, als *Symmetrie* bezeichnet wird [MR01, Col12]. Man unterscheidet dabei zwischen kontinuierliche und diskrete Symmetrien, wobei die Zeitumkehrsymmetrie zu den diskreten Symmetrien gehört.

Die Zeitumkehrsymmetrie lässt sich mit zwei Gedankenexperimenten veranschaulichen: Betrachtet man eine Film-Sequenz eines schwingenden ungedämpften Pendels, so ist es unmöglich zu entscheiden, ob die Sequenz vorwärts oder rückwärts abgespielt wird. Gleiches gilt für eine Filmsequenz, die einen Körper im freien Fall zeigt: Die gleiche Bildabfolge (das heißt die gleiche Trajektorie auf der Konfigurationsmannigfaltigkeit) würde man erhalten, wenn man den Körper mit passend nach oben wirkender Anfangsgeschwindigkeit beim Aufsteigen gefilmt hätte, und diese Aufnahme rückwärts abspielen würde.

Im regelungstechnischen Kontext liegt aufgrund der frei vorgebbaren Eingangsgrößen, eine andere Situation, als die in der Physik betrachtete vor. Für allgemeine dynamische Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau} \quad \text{mit } \mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x} \quad \text{und } \boldsymbol{\tau}(t) \in \mathbb{R}^m \quad (5.29)$$

(entspricht Gl. (4.1)) ist also zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sie Zeitumkehrsymmetrie aufweisen, und wie der Verlauf des Eingangssignals auf die neue Lösung zu übertragen ist. Nachdem in den beiden folgenden Abschnitten die Analyse im Vordergrund steht, geht Abschnitt 5.5.3 auf die Anwendung dieser Eigenschaft zur Trajektorienplanung ein.

5.5.1 Zeitumkehrsymmetrie für allgemeine nichtlineare MIMO-Systeme

Sei $T > 0$ eine reelle Konstante. Mit \mathbb{F}_T wird im folgenden die Menge der glatten, d.h. hinreichend oft differenzierbaren, Funktionen mit Definitionsbereich $[0, T]$ und Wertebereich $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^m$ bezeichnet. Diese Menge enthält die Menge der Lösungen des Systems (5.29) im entsprechenden Intervall als echte Teilmenge. Um nun die Umkehrung der Zeitrichtung für Trajektorien zu beschreiben, wird die Inversionsabbildung $\overset{\leftrightarrow}{I}_T$ im Intervall $[0, T]$ für ein beliebiges $\varphi \in \mathbb{F}_T$ durch die Beziehung

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_T: \mathbb{F}_T \rightarrow \mathbb{F}_T, \quad \left(\overset{\leftrightarrow}{I}_T \circ \varphi \right) (t) := \varphi(T - t) \quad (5.30)$$

eingeführt.

Definition 5.11. Eine Trajektorie $\varphi \in \mathbb{F}_T$ des Systems (5.29) mit $t \mapsto \varphi(t) = \text{col}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}(t))$ heißt **zeitumkehrbar**, falls es eine diffeomorphe¹⁰ Transformation Ψ des Zustands und des Eingangs mit

$$\Psi: \mathcal{X} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{X} \times \mathbb{R}^m, \quad (\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}) \mapsto \left(\underbrace{\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}_{=: \bar{\mathbf{x}}}, \underbrace{\Psi_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau})}_{=: \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right) \quad (5.31)$$

gibt, so dass die transformierte Trajektorie $\tilde{\varphi} = \Psi(\varphi)$ durch Anwendung der Inversionsabbildung $\overset{\leftrightarrow}{I}_T$ zu einer Lösung von (5.29) wird. \triangleleft

Mit anderen Worten: Gelte $\tilde{\varphi} := \Psi(\varphi)$, $\bar{\varphi} := \overset{\leftrightarrow}{I}_T \circ \tilde{\varphi}$ und somit $\bar{\varphi}(t) = \text{col}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\boldsymbol{\tau}}(t)) = \text{col}(\bar{\mathbf{x}}(T - t), \bar{\boldsymbol{\tau}}(T - t))$, dann ist φ genau dann eine zeitumkehrbare Trajektorie, wenn auch $\bar{\varphi}$ die Systemgleichungen löst, also die Gleichung

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}(t))\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) \quad (5.32)$$

für alle $t \in [0, T]$ erfüllt ist. Es sei darauf hingewiesen, dass die Abbildungen Ψ und $\overset{\leftrightarrow}{I}_T$ vertauschbar sind, denn erstere wirkt nur punktweise auf Funktionswerte der jeweiligen Trajektorie. Weiterhin sei angemerkt, dass jede Ruhelage eine zeitumkehrbare Trajektorie ist. Für Ψ kann man dann z.B. die identische Abbildung ansetzen. Interessanter sind natürlich Systeme, die noch weitere zeitumkehrbare Trajektorien besitzen.

Definition 5.12. Ein System der Form (5.29) **weist Zeitumkehrsymmetrie auf** bzw. heißt **zeitumkehrsymmetrisch**, wenn alle Lösungen mit der selben Eingangs-Zustands-Transformation Ψ zeitumkehrbar sind. \triangleleft

Satz 5.13.¹¹ *Das System (5.29) ist zeitumkehrsymmetrisch, wenn es eine Zustandstransformation $\Psi_{\mathbf{x}}$ gibt, sodass für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ gilt*

$$\mathbf{f}(\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) = -\Psi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.33a)$$

$$\mathbf{G}(\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) = -\Psi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}). \quad (5.33b)$$

Als zugehörige Eingangstransformation ergibt sich dann die identische Abbildung $\Psi_{\boldsymbol{\tau}} = \text{id}$.

¹⁰Genauer wird gefordert, dass $\Psi_{\mathbf{x}}$ und $\Psi_{\boldsymbol{\tau}}$ jeweils für sich diffeomorph sind, siehe auch Abschnitt A.7.

¹¹Diese Charakterisierung der Zeitumkehrsymmetrie wurde durch Prof. F. Woittennek im September 2011 angeregt.

Beweis: Sei $\varphi \in \mathbb{F}_T$ eine Lösung von (5.29) und gelte weiterhin $\bar{\varphi} = \Psi \circ \overset{\leftrightarrow}{I}_T \circ \varphi$ und somit

$$\bar{\mathbf{x}}(t) := \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(T-t)), \quad (5.34a)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) = \boldsymbol{\tau}(T-t). \quad (5.34b)$$

Dann erhält man durch passendes Einsetzen

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \frac{d}{dt} \Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(T-t)) = -\Psi'_{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}(T-t) \\ &\stackrel{(5.29)}{=} -\Psi'_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}(T-t)) + \mathbf{G}(\mathbf{x}(T-t)) \cdot \boldsymbol{\tau}(T-t)) \\ &\stackrel{(5.33)}{=} \mathbf{f}(\Psi(\mathbf{x}(T-t))) + \mathbf{G}(\Psi(\mathbf{x}(T-t))) \cdot \boldsymbol{\tau}(T-t) \\ &\stackrel{(5.34)}{=} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}(t). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Mit anderen Worten: Aus den Gleichungen (5.33) und (5.34) lässt sich Gleichung (5.32) herleiten. Die Trajektorie $\bar{\varphi}$ ist also tatsächlich eine Lösung des Systems (5.29). \square

Offensichtlich stellt Satz 5.13 nur eine hinreichende Bedingung dar. Systeme, die die Voraussetzungen dieses Satzes nicht erfüllen, können dennoch Zeitumkehrsymmetrie aufweisen, beispielsweise unter Einbezug einer anderen Eingangstransformation $\Psi_{\boldsymbol{\tau}}$. Ein einfaches Beispiel hierfür liefern Eingrößen-Systeme der Zustandsdimension $n_{\mathbf{x}}$ in Regelungsnormalform¹². Durch eine passende lineare Eingangstransformation lässt sich das System als reine Integrator-kette der Länge n auffassen. Für diese lässt sich mit dem Ansatz $\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \text{diag}(-1, 1, \dots, (-1)^{n_{\mathbf{x}}})\mathbf{x}$ und $\Psi_{\boldsymbol{\tau}} = (-1)^{n_{\mathbf{x}}} \cdot \text{id}$ und einer zu obigem Beweis analogen Argumentation Zeitumkehrsymmetrie konstruktiv nachweisen. Da ein Mehrgrößensystem in Regelungsnormalform (siehe z.B. [Lud95b, Abschnitt 8.2]) sich durch Eingangstransformationen leicht entkoppeln lässt, ist diese Überlegung ohne weiteres auch auf den Mehrgrößenfall übertragbar.

In den Abschnitten 4.2 und 4.3 wurden nichtlineare Systeme diskutiert, die im Sinne einer eindeutigen Abbildung zwischen den Trajektorien äquivalent zu linearen steuerbaren und damit zu Systemen in Regelungsnormalform sind. Folglich weisen alle statisch oder dynamisch exakt eingangs-zustands-linearisierbaren Systeme Zeitumkehrsymmetrie auf. Die Transformationen $\Psi_{\mathbf{x}}$ und $\Psi_{\boldsymbol{\tau}}$ sind dann im Allgemeinen nichtlinear.

Eine allgemeine Charakterisierung zeitumkehrsymmetrischer Regelungssysteme sowie ein damit verbundenes abprüfbares Kriterium bleibt im Rahmen dieser Arbeit offen, siehe Abschnitt 7.2.5. Im folgenden Abschnitt wird statt allgemeiner nichtlinearer Systeme der Form (5.29) eine spezielle Klasse von mechanischen Systemen betrachtet. Durch diese Einschränkung lassen sich stärkere Aussagen treffen.

5.5.2 Zeitumkehrsymmetrie für quasi-konservative mechanische Systeme

Im Kapitel 2 war der Ausgangspunkt für die Modellbildung die Lagrange-Funktion $L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - V(\boldsymbol{\theta})$ als Differenz von kinetischer und potentieller Energie. Um im

¹²Zur Definition der Regelungsnormalform siehe z.B. [Lud95a, Abschnitt 6.1.2].

Weiteren die in den Lagrange-Gleichungen auftretenden Ableitungen genauer spezifizieren zu können, wird der folgende (übliche) Sprachgebrauch vereinbart.

Definition 5.14. Für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+$ heißt eine Funktion $\boldsymbol{\mu} : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$, die für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1}$ die Beziehung $\boldsymbol{\mu}(-\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ bzw. $\boldsymbol{\mu}(-\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$ erfüllt, **gerade** bzw. **ungerade**.

Satz 5.15. Jedes konservative mechanische System der Form (2.8) ist zeitumkehrsymmetrisch. Als Transformation bezogen auf die Zustandsdefinition $\mathbf{x} = (\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ dient dafür

$$\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \Psi_{\tau} = \text{id}. \quad (5.36)$$

Beweis: Die Voraussetzung von Konservativität bedeutet, dass in den Bewegungsgleichungen eine Abhängigkeit von $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ nur über die Einträge von $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ auftritt. Aus physikalischen Gründen ist die kinetische Energie $T(\boldsymbol{\theta}, \cdot)$ für alle Konfigurationen bezüglich der Geschwindigkeiten eine gerade Funktion, siehe (2.3). Aus den Gleichungen (2.9b) und (2.13) folgt dann, dass auch $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \cdot)$ und damit $\mathbf{f}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}, \cdot)$ gerade Funktionen sind. Setzt man nun die Transformation (5.36), die sich auch als $\Psi_{\mathbf{x}} \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ -\dot{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix}$ schreiben lässt, in das Driftvektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{f}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix}$ aus der zusammengefassten Zustandsdarstellung (2.17) ein, erhält man

$$\mathbf{f}(\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} -\dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{f}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}, -\dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \mathbf{f}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}}_{-\Psi'_{\mathbf{x}}} \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5.37a)$$

Da die in $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ zusammengefassten Eingangsvektorfelder nicht von $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ abhängen, resultiert (wegen der Besetzungsstruktur von \mathbf{G}) analog

$$\mathbf{G}(\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}}_{-\Psi'_{\mathbf{x}}} \mathbf{G}(\mathbf{x}). \quad (5.37b)$$

Die Gleichungen (5.37) entsprechen nun gerade den Bedingungen (5.33) aus Satz 5.13. \square

Korollar 5.16. Die Transformation (5.36) liefert auch für quasi-konservative Systeme in der kollokierten partiell linearisierten Darstellung eine Zeitumkehrsymmetrie.

Beweis: Unter der Quasikonservativitäts-Voraussetzung (siehe Definition 2.3) ist \mathbf{K}_1 in (2.18) nicht von $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ abhängig, d.h. in dieser Gleichung tritt $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ nur in $\mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ auf und damit gilt eine zum Beweis von Satz 5.15 analoge Argumentation. \square

Bemerkung 5.17. Viele mechanische Systeme weisen noch eine weitere diskrete Symmetrie auf: Wenn $T(\cdot, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ und $V(\cdot)$ gerade Funktionen sind, gelten zusätzlich zur eben nachgewiesenen Beziehungen (5.37) noch die Beziehungen

$$\mathbf{f}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.38a)$$

$$\mathbf{G}(-\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}). \quad (5.38b)$$

Daraus resultiert eine weitere Abbildung zwischen Lösungen:

$$\hat{\Psi}(\varphi) = -\varphi \quad \text{bzw.} \quad \hat{\Psi} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{x}(t) \\ -\tau(t) \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Im Unterschied zur Abbildung Ψ aus (5.36) invertiert $\hat{\Psi}$ die Vorzeichen aller Zustandskomponenten und des Eingangs. Dass daraus ebenfalls wieder eine Lösung des Systems (5.29) entsteht, lässt sich durch Einsetzen und Differenzieren analog zu oben leicht zeigen. Konsequenterweise liefert nun die Verkettung beider Transformationen $\hat{\Psi} \circ \Psi := \check{\Psi}$ zusammen mit der Zeitrichtungsumkehr $\overset{\leftrightarrow}{I}_T$ aus Gleichung (5.30) ebenfalls wieder eine Abbildung zwischen Lösungen. Im Unterschied zu den Beziehungen aus Satz 5.13 erhält man dann die Berechnungsvorschrift

$$\check{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \mathbf{x}(T - t) \quad (5.40a)$$

$$\check{\tau}(t) = -\tau((T - t)). \quad (5.40b)$$

Dieser Ansatz für eine zeitumkehrsymmetrische Lösung wurde in [KR11] vorgestellt. Aufgrund der dafür zusätzlichen Symmetrie-Anforderungen an $L(\cdot, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ und $V(\cdot)$ ist er allerdings weniger allgemein als die Variante aus Satz 5.15. \triangleleft

5.5.3 Ruhelagenüberführung mittels Zeitumkehrsymmetrie und Rückführung

Betrachtet wird nun wieder das System (5.29) und es wird die Existenz einer Transformation Ψ angenommen, sodass Zeitumkehrsymmetrie entsprechend Definition 5.12 vorliegt. Das Verlassen einer gegebenen Ruhelage \mathbf{x}^\dagger des Systems ist im Allgemeinen deutlich leichter umzusetzen, als diese Ruhelage aus einem gegebenen Anfangszustand zu erreichen, denn unter allen möglichen Eingangssignalverläufen existiert nur einer, für welchen das System in der Ruhelage verbleibt. Die Zeitumkehrsymmetrie kann man sich nun zu Nutze machen, indem man simulativ die Zielruhelage verlässt und das System in einen einfacher zu erreichenden Zustand $\mathbf{x}^\#$ überführt. Im Anschluss kann dann die Eingangstrajektorie zeitlich invertiert werden, sodass bei entsprechender Wahl des Anfangszustandes die gewünschte Zielruhelage erreicht wird.

Der Zustand $\mathbf{x}^\#$ muss dabei im Allgemeinen keine Ruhelage sein. Bei dem in [KR15b] vorgestellten manöverbasierten Ansatz zur Bewegungsplanung des unteraktuierten Zweigelenkmanipulators (siehe Abbildung 2.1) wird die Zeitumkehrsymmetrie u.a. auch für die Auslegung des finalen Bremsmanövers ausgenutzt, sodass das System gerade dann seine kinetische Energie komplett verloren hat, wenn es sich in der gewünschten Konfiguration befindet. Der Zustand $\mathbf{x}^\#$ ist dabei Teil eines sogenannten „Parkregimes“, d.h. einer Trajektorie in der alle Zustandskomponenten bis auf eine konstant bleiben. Eine spezielle Konfiguration kann dabei durch Abwarten erreicht werden.

Im Folgenden wird nun aber der Spezialfall betrachtet, dass es sich bei $\mathbf{x}^\# = \mathbf{x}^*$ um eine Ruhelage handelt, und diese sich mittels einer Rückführung derart asymptotisch stabilisieren lässt, sodass ihr Attraktivitätsgebiet (siehe Abschnitt A.2) einen erheblichen Teil des Zustandsraumes umfasst. Die Trajektorienplanung besteht dann aus den folgenden Schritten:

- Algorithmus 5.18.**
1. Entwurf eines Reglers „R1“ zur asymptotischen Stabilisierung der Ruhelage \mathbf{x}^* für große Abweichungen.
 2. Entwurf eines Reglers „R2“ zur asymptotischen Stabilisierung der Ruhelage \mathbf{x}^\dagger .
 3. Simulation des mit R1 rückgeführten Systems mit dem Anfangswert¹³ $\mathbf{x}^\dagger + \Delta\mathbf{x}$ für das Zeitintervall $[0, T_{S3}]$ und Aufzeichnung des daraus resultierenden Stellgrößenverlaufs $t \mapsto \tau_{S3}(t)$.
 4. Bestimmung des neuen Stellgrößenverlaufs $\tau_{S5}(\cdot) := \Psi_\tau \circ \overset{\leftarrow}{I}_{T_{S3}} \circ \tau_{S3}(\cdot)$.
 5. Anwendung des Stellgrößenverlaufs $\tau_{S5}(\cdot)$ auf das Originalsystem mit dem Anfangswert \mathbf{x}^* im Intervall $[0, T_{S3}]$.
 6. Aktivierung des Reglers R2 („Einfangen“ des Systems).

Erläuterung: Bezeichne $t \mapsto \mathbf{x}_{S3}(t)$ bzw. $t \mapsto \mathbf{x}_{S5}(t)$ jeweils die aus Schritt 3 bzw. 5 resultierende Zustandstrajektorien. Wegen der vorausgesetzten Zeitumkehrsymmetrie überführt der Eingangsverlauf $\tau_{S5}(\cdot)$ das System bei der Wahl des Anfangszustandes $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{S3}(T_{S3})$ in den Zustand $\mathbf{x}(T_{S3}) = \mathbf{x}^\dagger + \Delta\mathbf{x}$ und damit in die Nähe der Zielruhelage. Weil R1 ein asymptotisch stabilisierender Regler ist, gilt außerdem $\mathbf{x}_{S3}(T_{S3}) \rightarrow \mathbf{x}^*$ für $T_{S3} \rightarrow \infty$. Auf Grund der stetigen Abhängigkeit der Lösung eines (hinreichend glatten) dynamischen Systems von den Anfangswerten (siehe z.B. [Kha02, Abschnitt 3.2]) folgt daraus, dass sich mit steigender Simulationsdauer T_{S3} auch $\mathbf{x}_{S5}(T_{S3})$, d.h. der Endzustand von Schritt 5, dem Zustand $\mathbf{x}^\dagger + \Delta\mathbf{x}$ annähert. Wenn im Schritt 3 $\Delta\mathbf{x}$ hinreichend klein gewählt wurde, dann liegt also $\mathbf{x}_{S5}(T_{S3})$ im Einzugsbereich der durch R2 stabilisierten Ruhelage.

Mit dem Entwurfsfreiheitsgrad $\Delta\mathbf{x}$ kann das Einschwingen im Schritt 3, beeinflusst werden, sodass die Konvergenz nach \mathbf{x}^* schneller bzw. überhaupt erreicht wird. Einen weiteren Entwurfsfreiheitsgrad stellt der Zeitpunkt der Aktivierung des Reglers R2 dar. Ggf. kann es sinnvoll sein, dafür $T_{S5} < T_{S3}$ zu wählen, um damit eine schnelleres Einschwingen zu erreichen.

Beispiel 5.19 (Wagen-Pendel-System, siehe auch 4.10; Implementierung: $\{ (17) \}$). Betrachtet wird das in Abbildung 4.3 dargestellte System aus einem Pendel mit horizontal verschieblichem Aufhängepunkt. Neben der Stabilisierung einer instabilen („oberen“) Ruhelage ist die Überführung von einer unteren in eine obere Ruhelage ein oft betrachtete Regelungsaufgabe, siehe z.B. [AF00] und die dort zitierten Referenzen. Im Folgenden wird der oben beschriebene, auf der Zeitumkehrsymmetrie des Systems beruhende Ansatz für diese Aufgabe angewendet.

Ausgangspunkt sind die Systemgleichungen (4.11) in kolloziert partiell linearisierter Form und der Zustandsvektor $\mathbf{x} = (p_1 \ q_1 \ u_1 \ v_1)^T$. Auf Grund von Satz 5.15 weist das System Zeitumkehrsymmetrie auf und es gilt $\Psi_\tau = \text{id}$.

¹³Der Vektor $\Delta\mathbf{x}$ sollte betragsmäßig klein sein und stellt einen Entwurfsfreiheitsgrad dar.

Neben der Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist der Achsabstand des Schwerpunktes $s_2 = 0.5 \text{ m}$ der einzige relevante Systemparameter. Durch Jacobi-Linearisierung um die Ruhelagen $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ und $\mathbf{x}^\dagger = (\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$ erhält man die Systemmatrizen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -19.62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Für diese lässt sich nun jeweils eine lineare statische Rückführung bestimmen, welche die Eigenwerte des geschlossenen Kreises entsprechend einer vorgegebene Konfiguration platziert.

Für den Regler R1 werden die Eigenwerte $(-1.5 \pm 1.2j, -1.3 \pm 3.4j)$ vorgegeben und als Abweichung $\Delta \mathbf{x}$ von der Zielruhelage \mathbf{x}^\dagger für Schritt 3 wird $-\frac{\pi}{10}$ verwendet. Diese Werte wurden empirisch derart gewählt, dass das System möglichst schnell zur Ruhe kommt und die Wagenposition dabei innerhalb einer angenommenen Positionsbegrenzung von 2 m bleibt. Zusätzlich muss $\mathbf{x}^\dagger + \Delta \mathbf{x}$ im Einzugsbereich der mittels R2 stabilisierten Ruhelage \mathbf{x}^\dagger liegen, was sich leicht per Simulation bestätigen lässt. Abbildung 5.7 stellt die Ergebnisse der Simulationen für Schritt 3 (links) und die Schritte 5 und 6 (rechts) grafisch dar.

Simulationsergebnisse zur Motivation der Wahl von $\Delta \mathbf{x}$ und T_{S5} können der Beispielrechnung [(17)] entnommen werden. \triangleleft

Bemerkung 5.20. Der in diesem Abschnitt vorgestellte Ansatz kann natürlich mit anderen Methoden zur Trajektorienplanung kombiniert werden. Z.B. muss man am Ende von Schritt 3 nicht unbedingt abwarten bis die asymptotische Konvergenz die Trajektorie hinreichend nahe an \mathbf{x}^* geführt hat, sondern kann, weil sich das System in der Nähe der Ruhelage näherungsweise linear verhält, auch den in Abschnitt 5.2 beschriebenen Ansatz verwenden, um den verbleibenden Abstand in endlicher Zeit zu überwinden. \triangleleft

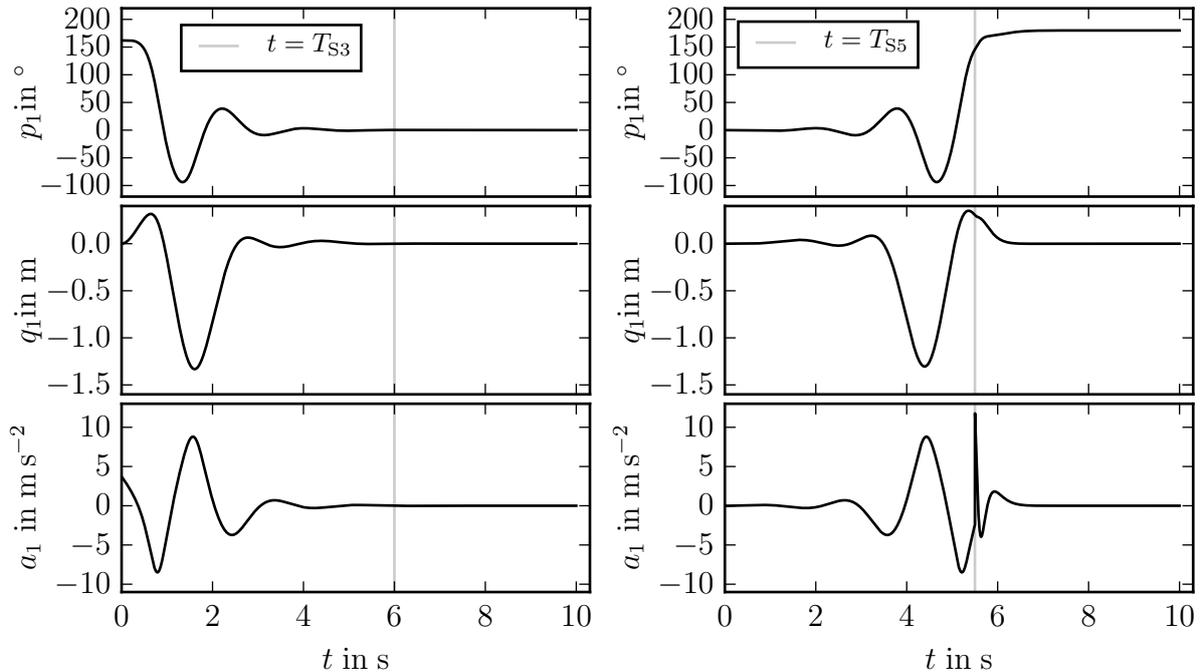


Abbildung 5.7: Trajektorienplanung mittels Zeitumkehrsymmetrie. Links: Schritt 3. Stabilisierung des Systems in der Ruhelage $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ ausgehend vom Anfangswert $\mathbf{x}^\dagger + \Delta\mathbf{x} = (\frac{9}{10}\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Nach $T_{S3} = 6$ s wird die verbleibende Abweichung von \mathbf{x}^* als hinreichend klein eingestuft. Rechts: Schritte 5 und 6. Reaktion des Systems mit dem Anfangszustand \mathbf{x}^* auf den Eingangsverlauf $\tau_{S5}(\cdot) = \overset{\leftarrow}{I}_{T_{S3}} \circ \tau_{S3}(\cdot)$ für das Intervall $[0, T_{S5}] = [0, T_{S3} - 0.5$ s]. Ab dem Zeitpunkt $t = 5.5$ s (graue Line) ist der Regler R2 aktiv (Schritt 6). Aus dem Umschalten resultiert ein moderater Sprung in der Stellgröße a_1 .

Kapitel 6

Erzeugung von Grenzyklen mit vorgegebbarer Frequenz und Amplitude durch Rückführung

6.1 Motivation und Überblick

Typischerweise wird in der Regelungstheorie die Stabilisierung von gewünschten Trajektorien – und als Spezialfall davon die Stabilisierung von Ruhelagen – betrachtet. Bei der praktischen Umsetzung solcher Regelungen kann es jedoch zu Schwierigkeiten kommen. Ein bei unteraktuierten mechanischen Systemen häufig auftretender Effekt ist das Auftreten von Dauerschwingungen aufgrund von Lose und/oder trockener Reibung [SL91, Abschnitt 5.2], [Fö93, Kapitel 4], [Ada14, Kapitel 2]. Systemtheoretisch lassen sich diese als stabile Grenzyklen auffassen. In den meisten technischen Systemen ist dieses Verhalten unerwünscht. Allerdings kann es unter Umständen sinnvoll sein, wenn die Dauerschwingung nicht zu verhindern ist, wenigstens ihre Frequenz und Amplitude geeignet vorzugeben.

Unter bestimmten Umständen können stabile Grenzyklen auch dem erwünschten Verhalten entsprechen, etwa zu Testzwecken für Identifikations-, Beobachter- oder Regelungseinrichtungen. Beispielsweise existiert im Zusammenhang mit der adaptiven Regelung die Bedingung einer „fortwährenden Anregung“ („persistent excitation“), siehe z.B. [SL91, Abschnitt 8.2]. In [Buc07] werden Grenzyklen zur adaptiven Regelung von Schreitmaschinen eingesetzt.

Neben diesen möglichen Anwendungen ist die gezielte Erzeugung von stabilen Grenzyklen durch eine geeignete Rückführung auch eine interessante akademische Frage, siehe z.B. [BI88]. Obwohl komplexe dynamische Systeme seit vielen Jahren ein aktives Forschungsgebiet sind, und etliche Bücher zu dem Thema zur Verfügung stehen, siehe z.B. [GH86, AP90, Far94, AVK11], hat die Erzeugung von Grenzyklen bisher vergleichsweise wenig Aufmerksamkeit erfahren.

In [BM95] wird die Stabilisierbarkeit von Grenzyklen in allgemeinen nichtlinearen eingangsaffinen Systemen untersucht, während im nachfolgenden Beitrag der selben Autoren [BMS96] explizit die Erzeugung eines stabilen Grenzyklus für ein steuerbares lineares System im Mittelpunkt steht. Der gewählte Ansatz basiert dabei auf der Transformation in die Regelungs-Normalform, sodass sich die Systemdynamik als eine Reihe von

Integratorketten darstellt [Son98, Abschnitt 4]. Diesem System wird dann die Dynamik einer auf die Systemdimension angepassten Version der so genannten Liénard-Gleichung aufgeprägt und es wird gezeigt, dass das so rückgeführte System einen eindeutigen und asymptotisch stabilen Grenzzyklus hat.

Ein alternativer Ansatz besteht darin, eine oszillierende Solltrajektorie vorzugeben und diese mit einem Folgeregler zu stabilisieren. Dies ist zum Beispiel mit flachheitsbasierten Methoden möglich.

Im Folgenden wird stattdessen der auf [KR12a] basierende und in [KR12b, KR12c, KR13, KR14b] weiter ausgearbeitete Ansatz vorgestellt, der eine explizite Trajektorienplanung und eine Koordinatentransformation als Entwurfsschritt umgeht und damit vergleichsweise einfach anzuwenden ist. Amplitude und Frequenz der resultierenden Dauerschwingung treten dabei als explizite Verfahrensparameter auf. Obwohl das Entwurfverfahren durch mechanische Systeme motiviert ist, setzt es die für diese Systemklasse kennzeichnenden strukturellen Eigenschaften nicht voraus. Dementsprechend erfolgt die Darstellung des Entwurfs anhand eines allgemeinen linearer Systems.

6.2 Polplatzierung und reelle Jordan-Normalform

Ausgangspunkt ist das allgemeine lineare Eingangsgrößensystem in Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \mathbf{b}\tau \quad \text{mit } \mathbf{x}(t), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_x}, \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$$

wobei τ die skalare Eingangsgröße darstellt.

Es wird angenommen, dass dieses System stabilisierbar¹ ist, und mindestens ein steuerbares Teilsystem der Dimension 2 aufweist. Folglich kann für das System stets eine lineare statische Zustandsrückführung $\tau = \mathbf{k}_1^T \mathbf{x}$ gefunden werden, sodass von den Eigenwerten der Systemmatrix des geschlossenen Kreises genau ein konjugiert komplexes Paar bei $\pm j\omega$ auf der imaginären Achse liegt und alle anderen Eigenwerte negativen Realteil haben, siehe z.B. [Son98, Theorem 13]. Wendet man die Eingangstransformation

$$\tau = \mathbf{k}_1^T \mathbf{x} + \tau_2 \tag{6.1}$$

an, ergibt sich das neue System

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{(\tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T)}_{=: \mathbf{A}} \mathbf{x} + \mathbf{b}\tau_2 = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\tau_2, \tag{6.2}$$

mit dem Eingang τ_2 , dessen Systemmatrix das oben beschriebene Spektrum aufweist und welches von nun an betrachtet wird. Setzt man die neue Eingangsgröße $\tau_2 \equiv 0$, ergibt sich das „autonome“ System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, welches aufgrund des Eigenwert-Paars bei $\pm j\omega$ unendlich viele periodische Lösungen aufweist. Die zugehörigen Lösungen sind periodisch mit einer Periodendauer von $2\pi\omega^{-1}$. Sie werden auch als **geschlossene Orbits** bezeichnet. Die Amplitude der resultierenden Dauerschwingungen hängt dabei von den

¹D.h. falls ein nicht steuerbares Teilsystem existiert, muss dieses asymptotisch stabil sein [Hau70].

Anfangsbedingungen ab. Im nächsten Abschnitt wird eine nichtlineare Rückführung für τ_2 hergeleitet, welche von den unendlich vielen geschlossenen Orbits genau einen asymptotisch stabilisiert und dabei die Amplitude der resultierenden Schwingung festlegt. Dazu erweist sich eine Koordinatentransformation in die sogenannte reelle Jordan-Normalform als zweckmäßig, welche im Folgenden näher betrachtet wird.

Seien $\lambda_1 = j\omega, \lambda_2 = -j\omega, \lambda_r, \dots, \lambda_{n_x}$ die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} . Im Sinne einer möglichst einfachen Darstellung wird dabei vorausgesetzt, dass alle Eigenwerte die algebraische Vielfachheit Eins haben. Dann existieren mit $\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_{n_x}$ n_x linear unabhängige zugehörige Eigenvektoren. Mit Hilfe der regulären Matrix $\tilde{\mathbf{V}} := (\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_n)$ ist nun eine Transformation von \mathbf{A} in die (allgemeine) Jordan-Normalform möglich:

$$\tilde{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{V}} =: \mathbf{J}. \quad (6.3)$$

Bekanntermaßen hat \mathbf{J} wegen des Ausschlusses mehrfacher Eigenwerte Diagonalstruktur, was prinzipiell eine getrennte Betrachtung der damit korrespondierenden Teilsysteme erlauben würde. Durch die komplexwertigen Einträge in \mathbf{J} und $\tilde{\mathbf{V}}$ werden jedoch anschauliche Schlussfolgerungen über die Systemdynamik erheblich erschwert. Dieses Problem lässt sich durch die Verwendung der *reellen Jordan-Normalform* (siehe z.B. [Ber09, Abschnitt 5.3]) beheben, wobei ausgenutzt wird, dass $\tilde{\mathbf{v}}_1$ und $\tilde{\mathbf{v}}_2$ per Konstruktion konjugiert komplex sind. Dadurch kann man mittels

$$\boldsymbol{\nu}_1 := \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2) = \text{Re}(\tilde{\mathbf{v}}_1) \quad (6.4a)$$

$$\boldsymbol{\nu}_2 := \frac{1}{2j}(\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2) = \text{Im}(\tilde{\mathbf{v}}_1), \quad (6.4b)$$

zwei reelle Vektoren definieren. Ihre lineare Hülle sei

$$\mathbb{U} := \text{span}(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) \quad (6.5)$$

und stellt offensichtlich einen Untervektorraum des \mathbb{R}^{n_x} dar.

Satz 6.1. *Der Unterraum \mathbb{U} hat die Dimension zwei und ist invariant bezüglich der durch $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ gegebenen linearen Abbildung.*

Beweis: Durch direkte Berechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{\nu}_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2) = \frac{1}{2}(j\omega\tilde{\mathbf{v}}_1 - j\omega\tilde{\mathbf{v}}_2) \\ &= \frac{j\omega}{2} \left(\underbrace{\text{Re}(\tilde{\mathbf{v}}_1)}_{\boldsymbol{\nu}_1} + j \underbrace{\text{Im}(\tilde{\mathbf{v}}_1)}_{\boldsymbol{\nu}_2} \right) - \frac{j\omega}{2} \left(\underbrace{\text{Re}(\tilde{\mathbf{v}}_1)}_{\boldsymbol{\nu}_1} - j \underbrace{\text{Im}(\tilde{\mathbf{v}}_1)}_{\boldsymbol{\nu}_2} \right) \\ &= -\omega\boldsymbol{\nu}_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

und aus einer analogen Rechnung folgt $\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}_2 = \omega\boldsymbol{\nu}_1$. Weil $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2$ Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind, sind sie linear unabhängig. Aus der Regularität der Transformation (6.4) kann damit direkt $\dim \mathbb{U} = 2$ gefolgert werden. \square

Neben $\lambda_{1,2}$ haben \mathbf{A} und damit auch \mathbf{J} im Allgemeinen noch weitere konjugiert komplexe Eigenwertpaare, sodass insgesamt n_k derartiger Paare vorliegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, kann man eine passende Sortierung voraussetzen, sodass für $1 \leq i \leq n_k$ jeweils $\lambda_{2i-1} = \rho_i + j\mu_i$ und $\lambda_{2i} = \rho_i - j\mu_i$ ein solches Paar bilden.

Zum i -ten konjugiert komplexen Paar tritt in \mathbf{J} ein entsprechender Diagonal-Block der Form $\text{diag}(\rho_i + j\mu_i, \rho_i - j\mu_i)$ auf. Durch die Ähnlichkeitstransformation

$$2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{T}^{-1}} \begin{pmatrix} \rho_i + j\mu_i & 0 \\ 0 & \rho_i - j\mu_i \end{pmatrix} \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \rho_i & \mu_i \\ -\mu_i & \rho_i \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

erhält man den zugeordneten Block der reellen Jordan-Normalform. Die Matrix \mathbf{T} kann dabei als ein Operator aufgefasst werden, der, angewendet auf ein Paar konjugiert komplexer Vektoren, ihren Real- und Imaginärteil durch geeignete Spaltenoperationen voneinander separiert. Damit ist Gleichung (6.4) äquivalent zu

$$(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2) = (\tilde{\boldsymbol{\nu}}_1, \tilde{\boldsymbol{\nu}}_2) \mathbf{T}. \quad (6.8)$$

Diese Aufteilung verallgemeinernd, lässt sich mit der Festlegung

$$\tilde{\mathbf{T}} := \text{blockdiag} \left(\underbrace{\mathbf{T}, \dots, \mathbf{T}}_{n_k \text{ mal}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n_x - 2n_k \text{ mal}} \right) \quad (6.9)$$

die reelle Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} := \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{T}} = (\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \dots, \boldsymbol{\nu}_{n_x}) \quad (6.10)$$

definieren, deren Spalten entweder aus dem Real- bzw. Imaginärteil eines konjugiert komplexen Eigenvektorpaares bestehen, oder, für die reellen Eigenwerte, aus dem Eigenvektor selbst.

Zusammen mit der Inversen $\mathbf{U} := \mathbf{V}^{-1}$ ergibt sich die Ähnlichkeitstransformation von \mathbf{A} in die reelle Jordan-Normalform:

$$\mathbf{UAV} =: \mathbf{J}_r = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \tilde{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

und $\bar{\mathbf{J}} \in \mathbb{R}^{(n_x-2) \times (n_x-2)}$. Die spezielle Struktur von $\tilde{\mathbf{J}}$ ist der Spezialfall des Blocks aus (6.7) mit $\lambda_{1,2} = \rho_1 \pm j\mu_1 = 0 \pm j\omega$. Alle weiteren Eigenwerte sind in $\bar{\mathbf{J}}$ enthalten.

Durch die Koordinatentransformation

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{U}\mathbf{x}(t), \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \quad (6.12)$$

kann die Systemdynamik (6.2) in die Normalform

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{UAV}\mathbf{z} + \mathbf{U}\mathbf{b}\tau_2 = \mathbf{J}_r\mathbf{z} + \mathbf{b}_r\tau_2 \quad (6.13)$$

mit $\mathbf{b}_r := \mathbf{U}\mathbf{b}$ überführt werden. In dieser Koordinatendarstellung wird der lineare Unterraum \mathbb{U} (siehe (6.5)) von den ersten beiden Koordinateneinheitsvektoren $(1, 0, \dots, 0)^T$ und $(0, 1, 0, \dots, 0)$ aufgespannt, denn die Spalten von $\mathbf{V} = (\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \dots)$ werden als Basis benutzt. Damit liegt eine Aufspaltung der Systemdynamik (6.13) in zwei Teilsysteme nahe:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{b}}\tau_2 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{z}}(t) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.14a)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{b}}\tau_2 \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{z}}(t) \in \mathbb{R}^{n_x-2}, \quad (6.14b)$$

wobei der Zusammenhang zu (6.13) durch $\mathbf{z} = \text{col}(\tilde{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{z}})$ und $\mathbf{b}_r = \text{col}(\tilde{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}})$ hergestellt wird.

Satz 6.2. Für $t \rightarrow \infty$ konvergieren die Trajektorien des autonomen Systems (wahlweise repräsentiert durch (6.2), (6.13) oder (6.14), jeweils mit $\tau_2 \equiv 0$) gegen den Unterraum \mathbb{U} .

Beweis: Per Konstruktion hat $\tilde{\mathbf{J}}$ außer dem Paar auf der imaginären Achse alle Eigenwerte von \mathbf{A} und ist damit eine Hurwitz-Matrix. Das zweite Teilsystem konvergiert folglich gegen $\mathbf{0}$ während die Trajektorien des ersten Teilsystems den Unterraum \mathbb{U} aufgrund dessen Invarianz (siehe Satz 6.1) nicht verlassen. \square

Projiziert man die Trajektorien des autonomen Systems auf \mathbb{U} , erhält man bezüglich der Normalform-Koordinaten Kreise mit dem anfangswertabhängigen Radius $\sqrt{(|\tilde{\mathbf{z}}(0)|)}$, denn die quadratische Form $\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}}$ ist eine Erhaltungsgröße bzw. ein erstes Integral (siehe Abschnitt A.3), wie sich leicht überprüfen lässt:

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}}) = \tilde{\mathbf{z}}^T (\tilde{\mathbf{J}}^T + \tilde{\mathbf{J}}) \tilde{\mathbf{z}} \stackrel{(6.11)}{=} 0. \quad (6.15)$$

Der Wert dieses ersten Integrals legt offensichtlich die Amplitude der zugehörigen Schwingung fest. Mit Hilfe der Matrix

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \quad (6.16)$$

kann die für $t \rightarrow \infty$ auftretende Schwingungsamplitude auch für das Gesamtsystem (6.13) ausgedrückt werden:

$$\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^T \mathbf{E} \mathbf{z}. \quad (6.17)$$

Aus dem Satz vom regulären Punkt, siehe z.B. [Jän05, Sektion 1.4], ist bekannt, dass die zu einem gegebenen Wert $\alpha^* > 0$ gehörende Niveaumenge

$$\mathcal{W}_{\alpha^*} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathbf{z}^T \mathbf{E} \mathbf{z} = \alpha^*\} \quad (6.18)$$

eine $(n_x - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n_x} ist. Diese schneidet den Unterraum \mathbb{U} in jedem Fall transversal, siehe Abbildung 6.1. Dadurch ergibt sich die Kodimension der Schnittmenge

$$\mathcal{O}_{\alpha^*} := \mathcal{W}_{\alpha^*} \cap \mathbb{U} \quad (6.19)$$

aus der Summe der Kodimensionen der beiden Untermannigfaltigkeiten:

$$\text{codim}(\mathcal{O}_{\alpha^*}) = \text{codim}(\mathcal{W}_{w^*}) + \text{codim}(\mathbb{U}) = 1 + (n - 2) = n - 1. \quad (6.20)$$

Das heißt, \mathcal{O}_{α^*} ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Genauer gesagt, ist \mathcal{O}_{α^*} gerade der zu $|\tilde{\mathbf{z}}|^2 = \alpha^*$ gehörende geschlossene Orbit des autonomen Systems:

$$\mathbf{z} \in \mathcal{O}_{\alpha^*} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^* = 0. \quad (6.21)$$

In Abbildung 6.1 sind die geometrischen Zusammenhänge schematisch dargestellt.

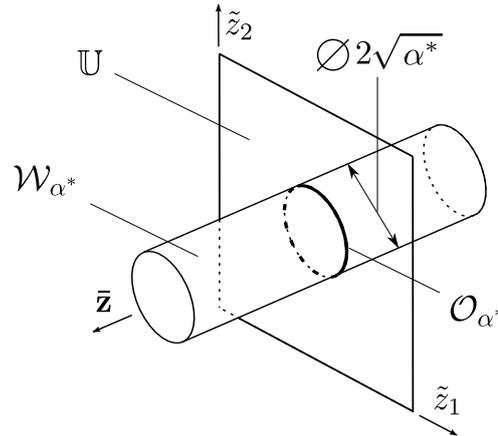


Abbildung 6.1: Schematische Visualisierung der Mengen \mathbb{U} , \mathcal{W}_{w^*} und ihres Schnitts \mathcal{O}_{α^*} .

6.3 Asymptotische Stabilisierung eines Grenzyklus

Ziel soll es nun sein, zunächst die asymptotische Stabilisierung eines gewünschten geschlossenen Orbits in Normalform-Koordinaten zu erreichen, und im Anschluss die so hergeleitete Rückführung in die Originalkoordinaten zurückzutransformieren.

Die Herleitung der Rückführung erfolgt dabei über die Methode der „Regelungs-Ljapunov-Funktion“, siehe z.B. [Son98, 5.7]. Ein zweckmäßiger Kandidat für eine solche Funktion kann aus der geometrischen Anschauung konstruiert werden. Die Funktion $\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*$ entspricht dem quadratischen Abstand eines Punktes in \mathbb{U} zum gewünschten geschlossenen Orbit \mathcal{O}_{α^*} . Das Vorzeichen dieses Ausdrucks gibt dabei an, ob der Abstand nach außen (+) oder innen (–) gerichtet ist. Da für eine Ljapunov-Funktion positive Definitheit Voraussetzung ist, bietet es sich an, dieses Vorzeichen durch Quadrieren der Differenz zu eliminieren. Für die Komponente in $\bar{\mathbf{z}}$ -Richtung liegt ein klassischer quadratischer Ansatz nahe, denn es gilt $\mathbf{z} \in \mathcal{O}_{\alpha^*} \Rightarrow \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$. Aus diesen Überlegungen, motiviert sich das folgende Ergebnis:

Satz 6.3. Sei $\lambda_r < 0$ der betragsmäßig kleinste Realteil eines Eigenwerts von $\bar{\mathbf{J}}$ und gelte ferner $|\bar{\mathbf{b}}|, k_2 > 0$. Dann stellt

$$V(\mathbf{z}) = \frac{k_2 |\bar{\mathbf{b}}|^2}{4|\lambda_r|} (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*)^2 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{z}} \quad (6.22)$$

für das System (6.14) bezüglich des geschlossenen Orbits \mathcal{O}_{α^*} eine lokale Regulations-Ljapunov-Funktion und

$$\tau_2(\mathbf{z}) = -k_2 (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} \quad (6.23)$$

eine lokal asymptotisch stabilisierende Rückführung dar.

Beweis: Entsprechend Definition 5.7.1 in [Son98] muss die Funktion V drei Bedingungen erfüllen. Zunächst stellt man fest, dass V *proper* ist, d.h. dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung² um \mathcal{O}_{α^*} gibt, auf der $V(\mathbf{z}) < \varepsilon$ erfüllt ist. Ebenso gibt es eine Umgebung von \mathcal{O}_{α^*} , auf der $V(\mathbf{z}) > 0$ für alle $\mathbf{z} \notin \mathcal{O}_{\alpha^*}$ gilt, d.h. V ist eine lokal *positiv definite* Funktion. Die dritte Bedingung besagt, dass es für jeden Anfangswert in einer passenden Umgebung einen Eingangsverlauf geben muss, sodass der Wert von V entlang der aus diesem Eingangsverlauf resultierenden Trajektorie $t \mapsto \mathbf{z}(t)$ monoton abnimmt. Um das nachzuweisen, berechnet man zunächst die Lie-Ableitung von V entlang des eingangsabhängigen Vektorfeldes $\mathbf{J}_r \mathbf{z} + \mathbf{b}_r \tau_2$ aus (6.13):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathcal{L}_{(\mathbf{J}_r \mathbf{z} + \mathbf{b}_r \tau_2)} V = \mathcal{L}_{\mathbf{J}_r \mathbf{z}} V + \mathcal{L}_{\mathbf{b}_r} V \tau_2 \\ &\stackrel{(6.14)}{=} \frac{k_2 |\bar{\mathbf{b}}|^2}{|\lambda_r|} (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \underbrace{\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{z}}}_{=0} + \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{z}} + \left(\bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{b}} + \frac{k_2 |\bar{\mathbf{b}}|^2}{|\lambda_r|} (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} \right) \tau_2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Wegen $\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{J}} \tilde{\mathbf{z}} = 0$ (siehe (6.15)) verschwindet der erste Term und man erhält

$$\dot{V} = \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{z}} + \left(\bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{b}} + \frac{k_2 |\bar{\mathbf{b}}|^2}{|\lambda_r|} (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} \right) \tau_2. \quad (6.25)$$

Aus der Tatsache, dass alle Eigenwerte von $\bar{\mathbf{J}}$ einen negativen Realteil haben, und der speziellen Struktur dieser Matrix folgt direkt, dass der erste Summand niemals positiv ist. Setzt man nun die Rückführung (6.23) für τ_2 ein, ergibt sich

$$\dot{V} = \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{b}} \cdot k_2 (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} - \frac{k_2^2 |\bar{\mathbf{b}}|^2}{|\lambda_r|} ((\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}})^2. \quad (6.26)$$

Mit Hilfe der Abschätzungen $\bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{z}} \leq -|\lambda_r| \cdot |\bar{\mathbf{z}}|^2$ und $-\bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{b}} \leq |\bar{\mathbf{z}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \leq 2 \cdot |\bar{\mathbf{z}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}|$ gilt damit

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq - \left(|\lambda_r| |\bar{\mathbf{z}}|^2 - 2 \cdot k_2 |\bar{\mathbf{z}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} + \frac{k_2^2 |\bar{\mathbf{b}}|^2}{|\lambda_r|} ((\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}})^2 \right) \\ &= - \left(\sqrt{|\lambda_r|} |\bar{\mathbf{z}}| - \frac{k_2 |\bar{\mathbf{b}}|}{\sqrt{|\lambda_r|}} (\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} \right)^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

² Typischerweise werden in der Analysis Umgebungen von *Punkten* in metrischen Räumen betrachtet, siehe z.B. [HSZ03, Abschnitt 1.3.2.2]. Hier wird der Begriff aus topologischer Sicht verwendet: Eine Umgebung von \mathcal{O}_{α^*} ist eine offene Menge, die \mathcal{O}_{α^*} enthält.

Damit ist die Stabilität des Grenzyklus im Sinne von Ljapunov bereits gezeigt. Um asymptotische Stabilität nachweisen zu können, wird der Satz von LaSalle herangezogen, siehe z.B. [SL91, Abschnitt 3.4.3]. Dieser sagt aus, dass die größte invariante Teilmenge der Menge aller Punkte, für die $\dot{V}(\mathbf{z}) = 0$ gilt, asymptotisch stabil ist. Aufgrund der Definitheit von $\bar{\mathbf{J}}$ folgt unmittelbar

$$\dot{V}(\mathbf{z}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \quad (6.28a)$$

d.h. \dot{V} kann nur in \mathbb{U} verschwinden, genauer gesagt auf der Teilmenge $\mathcal{O}_{\alpha^*} \cup \{\bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^2 : \bar{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} = 0\}$. Zunächst wird untersucht, ob der durch $\bar{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} = 0$ definierte eindimensionale Unterraum invariante Teilmengen enthält. Dabei kann man sich wegen $\bar{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} = 0 \stackrel{(6.23)}{\Rightarrow} \tau_2 = 0$ auf die Dynamik des autonomen Teilsystems (6.14a) in \mathbb{U} beschränken. Unter diesen Umständen bestehen die Trajektorien, wie oben festgestellt, aus Kreisen um den Ursprung, sodass für alle $\bar{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$ der betrachtete Unterraum wieder verlassen wird und somit der Ursprung die einzige invariante Teilmenge des Unterraums ist. Andererseits ist auf Grund von (6.21) und (6.15) klar, dass \mathcal{O}_{α^*} eine invariante Menge ist. Das heißt nach dem Satz von LaSalle konvergieren alle Trajektorien, die nahe genug an \mathcal{O}_{α^*} beginnen, asymptotisch gegen die Menge $\mathcal{O}_{\alpha^*} \cup \{\mathbf{0}\}$. Schließlich kann man noch zeigen, dass der Ursprung selbst eine instabile Ruhelage des mit (6.23) rückgeführten Systems ist, indem man die lineare Approximation des Teilsystems (6.14a) betrachtet:

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \tilde{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{b}}\tau_2 \stackrel{(6.23)}{=} \tilde{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{z}} + \tilde{\mathbf{b}}k_2\tilde{\mathbf{b}}^T\bar{\mathbf{z}}(\alpha^* - |\bar{\mathbf{z}}|^2) = \underbrace{(\tilde{\mathbf{J}} + k_2\alpha^*\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}}^T)}_{\text{linear}}\bar{\mathbf{z}} - \underbrace{k_2|\bar{\mathbf{z}}|^2\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}}^T}_{\text{T.h.O.}}\bar{\mathbf{z}}. \quad (6.29)$$

Die zwei Eigenwerte der linearen Approximation ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\lambda\mathbf{I}_2 - (\tilde{\mathbf{J}} + k_2\alpha^*\tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{b}}^T)) = (\lambda - \tilde{b}_{11})(\lambda - \tilde{b}_{22}) + (\omega - \tilde{b}_{21})(\omega + \tilde{b}_{21}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.30)$$

wobei die Abkürzung $\tilde{b}_{ij} := \alpha^*k_2\tilde{b}_i\tilde{b}_j$ für $i, j = 1, 2$ eingeführt wurde. Wegen der Voraussetzung $\alpha^*, k_2 > 0$ gilt $\tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{22} \geq 0$. Dadurch verletzt (6.30) immer die Stodola-Bedingung für die Vorzeichen der Koeffizienten eines Hurwitz-Polynoms, siehe z.B. [Rei14, Abschnitt 3.5.2]. Damit können die Trajektorien nur gegen \mathcal{O}_{α^*} konvergieren. \square

Bemerkung 6.4. Tatsächlich ist der Fakt, dass der Ursprung eine (instabile) Ruhelage des rückgeführten Systems ist, der einzige Grund, weswegen Satz 6.3 als lokale statt als globale Aussage formuliert ist. \triangleleft

Bemerkung 6.5. Für den Spezialfall, dass, anders als in Satz 6.3 vorausgesetzt, $|\bar{\mathbf{b}}| = 0$ gilt, kann man ebenfalls die Rückführung (6.23) verwenden. Für den Stabilitätsnachweis eignet sich dann z.B. die Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{z}) = \frac{k_2}{4|\lambda_r|} (\bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{z}} - \alpha^*)^2 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{z}}$, wo gegenüber (6.22) der Skalierungsfaktor $|\bar{\mathbf{b}}|^2$ weggelassen wurde. Die negative Semidefinitheit von \dot{V} folgt dann direkt (vgl. (6.26)) ohne zusätzliche Abschätzungen. \triangleleft

Bemerkung 6.6. Zur Unterstreichung der geometrischen Motivation der Ljapunov-Funktion (6.22) dient die Darstellung einer ihrer Niveaumengen in Abbildung 6.2. Jede Niveaumenge ist dabei homeomorph zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n_x-2}$, was als verallgemeinerter Torus interpretiert werden kann. In dieser Notation repräsentiert \mathbb{S}^1 den Einheitskreis und \mathbb{S}^k die k -dimensionale Einheitskugel. Dabei ist zu beachten, dass der k -Torus, d.h. das k -fache Kartesische Produkt $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ für $k > 1$ nicht homeomorph zu \mathbb{S}^k ist, siehe auch [AMR88a, Abschnitt 3.2]. \triangleleft

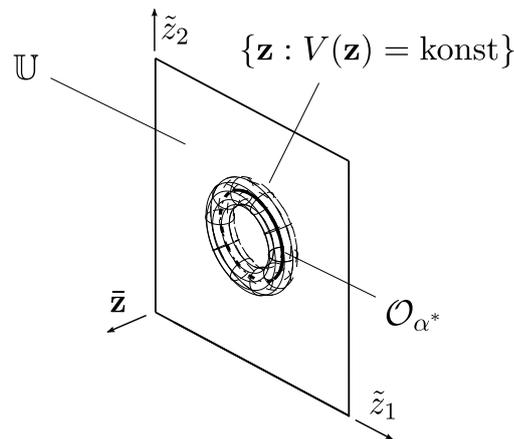


Abbildung 6.2: Visualisierung einer Niveaumenge der Ljapunov-Funktion V . Die Niveaumengen bilden (verallgemeinerte) Tori.

Mit Hilfe der Transformation (6.12) und der in (6.16) definierten idempotenten³ Matrix \mathbf{E} kann man die Rückführung (6.23) auch leicht in die originalen Koordinaten umrechnen. Zusammen mit der linearen Rückführung (6.1) erhält man schließlich

$$\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_1^T \mathbf{x} - k_2 (\mathbf{x}^T \overbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{E} \mathbf{U}}{=: \tilde{\mathbf{E}}} \mathbf{x} - \alpha^*) \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{E} \mathbf{U} \mathbf{b} = \mathbf{k}_1^T \mathbf{x} - k_2 (\mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{x} - \alpha^*) \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{b}. \quad (6.31)$$

Bifurkationsanalyse

Der Parameter α^* in der Rückführung (6.23) entspricht dem Quadrat der Amplitude der resultierenden Dauerschwingung (bezogen auf $\tilde{\mathbf{z}}$ -Koordinaten). Lässt man nun, anstatt wie bisher $\alpha^* > 0$ zu fordern, auch nichtpositive Wert für α^* zu, stellt sich die Frage, welche Konsequenzen sich dann für das rückgeführte System ergeben. Zur Beantwortung dieser Frage bieten sich ebenfalls die Koordinaten der reellen Jordan-Normalform an.

³D.h., es gilt $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}$ [Ber09, Definition 3.1.1].

Durch Einsetzen der Rückführung und Sortieren erhält man aus (6.13) unmittelbar

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} \end{pmatrix} \mathbf{z} - k_2 \mathbf{b}_r \left((\tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} - \alpha^*) \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{b}} \right) \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{J}} \end{pmatrix} \mathbf{z} - k_2 \mathbf{b}_r \left((-\alpha^*) \tilde{\mathbf{b}}^T \tilde{\mathbf{z}} \right)}_{\text{linear}} + \text{T.h.O.} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} + k_2 \alpha^* \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}^T & \mathbf{0} \\ k_2 \alpha^* \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}^T & \bar{\mathbf{J}} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{R}(\alpha^*)} \mathbf{z} + \text{T.h.O.}
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Das Spektrum von \mathbf{R} in Abhängigkeit des Parameters α^* lässt sich leicht angeben. Aufgrund der Block-Dreiecks-Struktur gilt

$$\text{spec } \mathbf{R}(\alpha^*) = \text{spec}(\tilde{\mathbf{J}} + k_2 \alpha^* \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}^T) \cup \text{spec}(\bar{\mathbf{J}}) \tag{6.33}$$

Der Einfluss von α^* auf die beiden Eigenwerte des $\tilde{\mathbf{z}}$ -Teilsystems wird durch das charakteristische Polynom (6.30) beschrieben, dessen Nullstellen

$$\tilde{\lambda}_{1,2} = k_2 \alpha^* \frac{\tilde{b}_1^2 + \tilde{b}_2^2}{2} \pm \sqrt{(k_2 \alpha^*)^2 \frac{(\tilde{b}_1^2 + \tilde{b}_2^2)^2}{4} - (k_2 \alpha^* b_1 b_2)^2 - \omega^2 + (k_2 \alpha^* \tilde{b}_1 \tilde{b}_2)^2} \tag{6.34}$$

lauten. Aus dieser Gleichung ist direkt ablesbar, dass für kleine Werte von $|\alpha^*|$ ein konjugiert-komplexes Eigenwertpaar mit dem Realteil $k_2 \alpha^* \frac{\tilde{b}_1^2 + \tilde{b}_2^2}{2}$ vorliegt. Aufgrund der vorausgesetzten Steuerbarkeit des $\tilde{\mathbf{z}}$ -Teilsystems gilt $\tilde{\mathbf{b}} \neq \mathbf{0}$ und somit ergeben sich für die drei möglichen Werte von $\text{sgn}(\alpha^*) \in \{-1, 0, 1\}$ die in Abbildung 6.3 dargestellten Phasenportraits. Diese lassen sich nicht durch Homeomorphismen in einander umformen und sind demzufolge nicht topologisch äquivalent [Kuz98, Definition 2.5]. Das rückgeführte System weist also eine sogenannte Andronov-Hopf-Bifurkation bezüglich des Parameters α^* auf, vgl. [SL91, S. 10] bzw. [Kuz98, Definition 3.2].

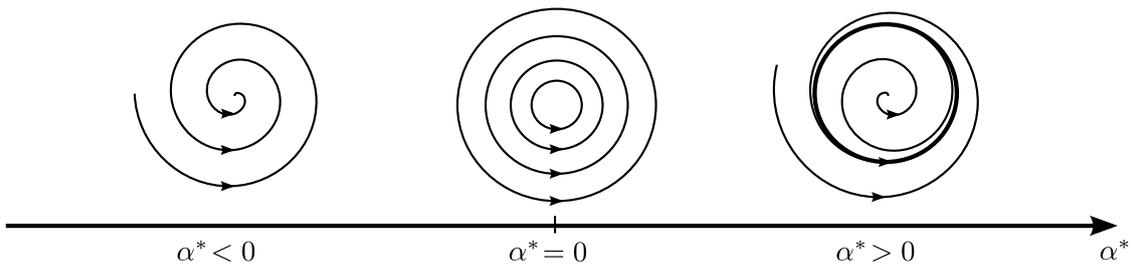


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung der verschiedenen Typen von Phasenportraits in Abhängigkeit von $\text{sgn}(\alpha^*)$: stabiler Fokus für $\alpha^* < 0$, Zentrum für $\alpha^* = 0$ und instabiler Fokus (mit stabilem Grenzzyklus) für $\alpha^* > 0$.

6.4 Simulation und experimentelle Ergebnisse

Die im Abschnitt 6.3 hergeleitete Rückführung wird nun auf ein unteraktuiertes System angewendet.

Beispiel 6.7 (Wagen-Pendel-System; Implementierung: [(18)]). Betrachtet wird das in Abbildung 4.3 dargestellte System aus einem horizontal verschieblichen Wagen (Verschiebung q_1) mit angebrachtem Pendel (Winkel p_1). Ausgangspunkt ist die partiell linearisierte Bewegungsgleichung (4.11) mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x} = (p_1 \ q_1 \ 0 \ 0)^T$. Durch Linearisierung um die Ruhelage $\mathbf{x}_{RL} = (\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$ ergeben sich die Systemmatrizen

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{s_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{s_2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Zur Vereinfachung der weiteren Berechnungen werden die Parameterwerte $g = 9.81\text{ms}^{-2}$ und $s_2 = 0.5\text{m}$ eingesetzt und alle Größen werden auf SI-Einheiten normiert. Durch den Rückführvektor $\mathbf{k}_1^T = (-21.62 \ 2.0 \ -3.0 \ 3.0)$ werden die Eigenwerte der neuen Systemmatrix \mathbf{A} (siehe (6.2)) bei -1 , -2 und $\pm j\sqrt{\frac{g}{s_2}}$ platziert. Durch eine Berechnung der Eigenvektoren erhält man

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} -0.1557j & 0.1557j & -0.0755 & 0.2039 \\ -0.1557j & 0.1557j & 0.7031 & -0.398 \\ 0.6897 & 0.6897 & 0.0755 & -0.4077 \\ 0.6897 & 0.6897 & -0.7031 & 0.7961 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{V} \stackrel{(6.10)}{=} \begin{pmatrix} 0 & -0.1557 & -0.0755 & 0.2039 \\ 0 & -0.1557 & 0.7031 & -0.398 \\ 0.6897 & 0 & 0.0755 & -0.4077 \\ 0.6897 & 0 & -0.7031 & 0.7961 \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

Mit $\mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1}$ ergibt sich dann direkt die Rückführung⁴ (6.31):

$$\tau = -543.5497k_2p_1^3 - 418.6239k_2p_1^2\dot{p}_1 + 145.9809k_2p_1^2q_1 + 276.1663k_2p_1^2\dot{q}_1 + \dots \quad (6.37)$$

Wendet man diese auf das nichtlineare Modell (4.11) an, ergeben sich für $\alpha^* = 10$ die in Abbildung 6.4 dargestellten Simulationsergebnisse. Diese Resultate zeigen einerseits, dass die Stabilisierung prinzipiell auch für das nichtlineare Originalsystem funktioniert und andererseits, dass die Verstärkung k_2 hinreichend groß sein muss, um die Nichtlinearitäten zu kompensieren. Welchen genauen Einfluss k_2 bzw. die durch \mathbf{k}_1^T platzierten Eigenwerte auf das Attraktivitätsgebiet des periodischen Orbits haben bleibt allerdings offen, siehe dazu auch Abschnitt 7.2.6. \triangleleft

Experimentelle Überprüfung

Zur experimentellen Überprüfung wurde das vorgestellte Regelungskonzept auf einem Versuchsstand des Herstellers AMIRA (siehe Abbildung 6.5) umgesetzt. Dieser besteht aus einem Gleichstrommotor, welcher über ein Zahnradgetriebe und einen Zahnriemen mit einem Schlitten verbunden ist, der auf einer Schiene gleitet und an dem ein Pendel

⁴Der vollständige Ausdruck kann [(18)] entnommen werden.

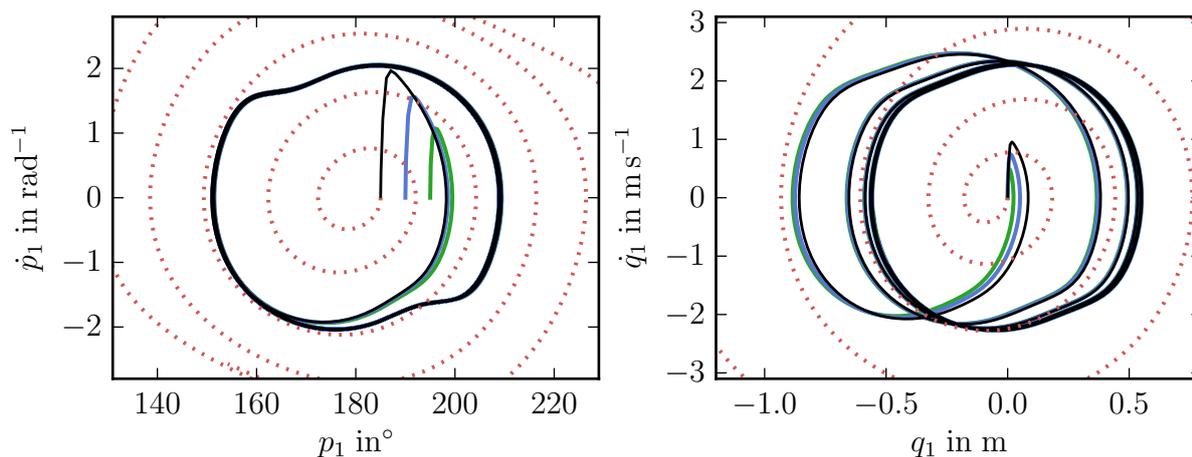


Abbildung 6.4: Simulationsergebnisse für das Wagen-Pendel-System mit der Rückführung (6.31). Anfangsauslenkung Δp_1 gegenüber \mathbf{x}_{RL} : Schwarz und Rot: 5° , Blau: 10° , Grün: 15° . Verstärkung k_2 : Rot: 0.02, sonst 2.0. Offensichtlich divergiert das System für $k_2 = 0.02$. Außerdem ist die aus $\alpha^* = 10$ resultierende Amplitude (ca. $\pm 25^\circ$) bereits so groß, dass die im Entwurf vernachlässigten Nichtlinearitäten zu einer Deformation des Grenzyklus gegenüber der zu erwartenden Ellipse führen.



Abbildung 6.5: Versuchsstand für das Wagen-Pendel-System.

befestigt ist. Über Inkrementalgeber sind der Pendelwinkel p_1 und die Schlittenposition q_1 messbar, durch numerisches Differenzieren erhält man in hinreichend guter Näherung die jeweiligen Geschwindigkeiten.

Die effektiv vom Antrieb auf den Schlitten ausgeübte Kraft ist neben dem Motormoment noch von anderen Größen abhängig: Einerseits wirkt eine beträchtliche Reibung zwischen Schlitten und Schiene sowie im Getriebe, andererseits wird zusammen mit dem Schlitten

eine Kabelkette mitbewegt und dabei verformt. Durch beide Effekte wird die Antriebskraft in Abhängigkeit der der Schlittengeschwindigkeit reduziert.

Identifikation eines Modells für den Antrieb

Um den Aufwand einer expliziten Modellierung dieser Phänomene zu umgehen, wurde für den Zusammenhang zwischen Motorspannung U_M , Schlittengeschwindigkeit \dot{q}_1 und resultierender Beschleunigung \ddot{q}_1 ein einfaches phänomenologisches Modell angesetzt und dessen Parameter identifiziert. Ausgangspunkt war die Aufzeichnung des Signals \dot{q}_1 als Antwort auf Eingangssprünge mit unterschiedlicher Höhe für U_M .

Für eine einzelne Sprungantwort ergibt sich ein Verlauf, welcher der Sprungantwort eines PT1-Gliedes entspricht⁵: Bei konstanter Spannung nimmt die Beschleunigung mit zunehmender Geschwindigkeit ab, bis sich schließlich eine stationäre Geschwindigkeit einstellt, siehe Abbildung 6.6. Daraus motiviert sich das Modell

$$\ddot{q}_1 = \alpha \dot{q}_1 + \beta U_M, \quad (6.38)$$

wobei sich die Parameter α und β als Anstieg bzw. Achsenabschnitt besonders einfach aus der „Geraden-Darstellung“ in Abbildung 6.6 (rechts) ablesen lassen.

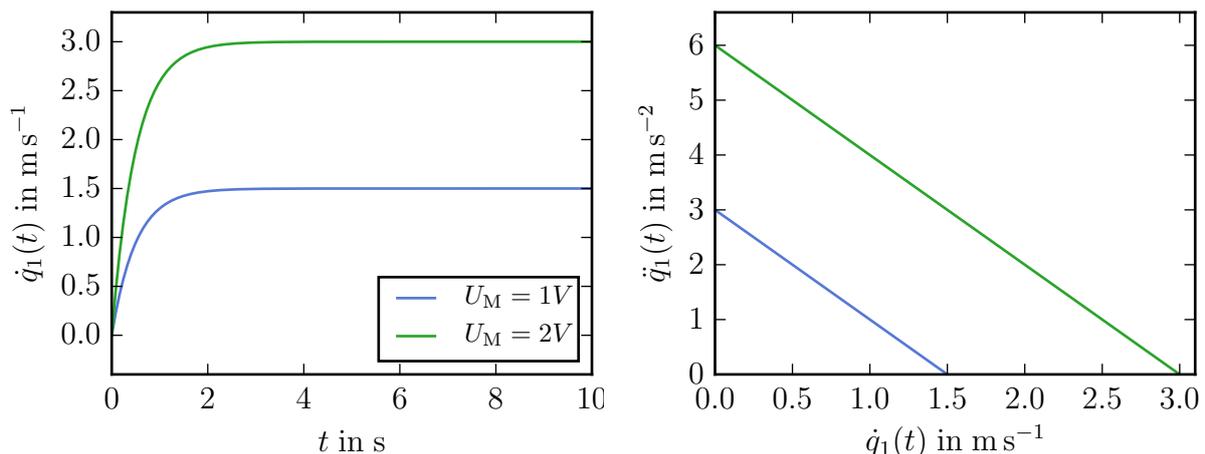


Abbildung 6.6: Sprungantworten für das ideale PT1-Glied (6.38) mit $\alpha = 2$ und $\beta = 3$. Links: Zustandsgröße des PT1-Gliedes (\dot{q}_1) aufgetragen über der Zeit. Rechts: Ableitung der Zustandsgröße (\ddot{q}_1) aufgetragen über der Zustandsgröße. Die Beschleunigung ist zunächst maximal und sinkt mit fortschreitender Zeit immer weiter ab.

Aus dem Vergleich der Messergebnisse für verschiedene Sprunghöhen ergibt sich allerdings eine Diskrepanz zum PT1-Modell, siehe Abbildung 6.7: Einerseits ändert sich der Anstieg erheblich in Abhängigkeit von U_M und andererseits resultiert aus betragsmäßig kleinen

⁵Dieses Beobachtung stimmen mit dem erwarteten Verhalten für einen Gleichstrommotor unter Vernachlässigung der Dynamik des elektrischen Teilsystems überein. Zur Identifikation von PT1-Modellen siehe auch [Ise92, Abschnitt 21.1].

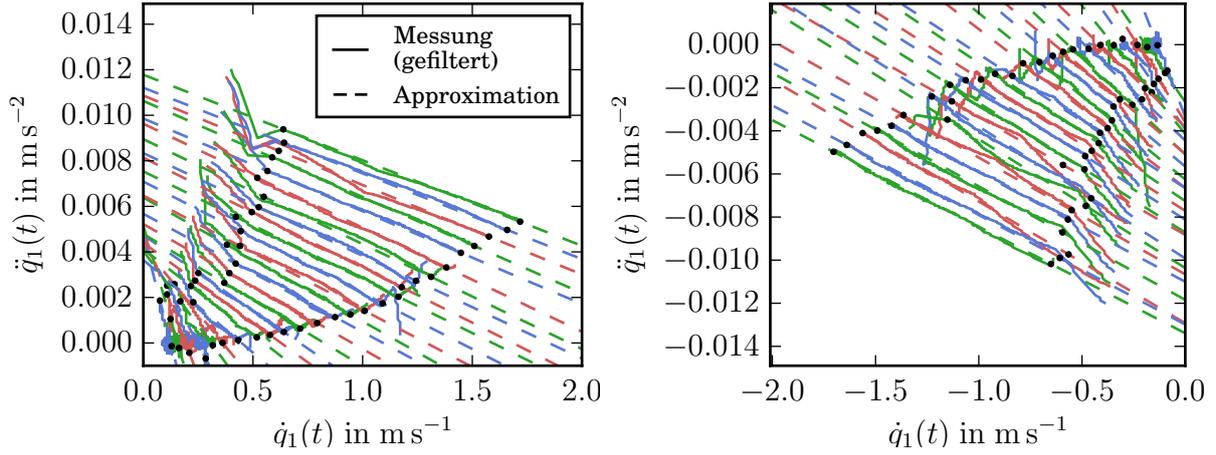


Abbildung 6.7: Gemessene Sprungantworten der Schlittengeschwindigkeit \dot{q}_1 für verschiedene Werte von U_M . Aufgetragen ist \ddot{q}_1 über \dot{q}_1 . Links: positive Eingangsspannungen ($U_M \in [1.9V, 4.4V]$). Rechts: negative Eingangsspannungen ($U_M \in [-4.1V, -1.6V]$).

Spannungen keinerlei Bewegung. Zudem zeigte sich eine erhebliche Richtungsabhängigkeit. Für positive Spannungen setzte die Bewegung bei ca. 1.8V ein, für die entgegengesetzte Bewegungsrichtung bei ca. -1.5V.

Um diesen Effekten Rechnung zu tragen wird an Stelle von (6.38) das erweiterte Modell

$$\ddot{q}_1 = \alpha(U_M)\dot{q}_1 + \beta(U_M) \quad (6.39)$$

angesetzt und für beide Bewegungsrichtungen separat identifiziert. Für jede gemessene Sprungantwort mit der Amplitude U_M erhält man durch eine Geraden-Approximation des Messsignals in der \dot{q}_1 - \ddot{q}_1 -Ebene jeweils die Werte $\alpha(U_M)$ und $\beta(U_M)$. Stellt man diese Werte jeweils in Abhängigkeit von U_M , dar, lassen sich für $|U_M| > 2.4$ mit guter Näherung die linearen Approximationen

$$\alpha(U_M) = \alpha_0 + \alpha_1 U_M \quad (6.40a)$$

$$\beta(U_M) = \beta_0 + \beta_1 U_M \quad (6.40b)$$

identifizieren, siehe Abbildung 6.8. Für jede Richtung⁶ erhält man nun mit

$$U_M^\pm(\dot{q}_1, \ddot{q}_1) = \frac{\ddot{q}_1 - \alpha_0^\pm \dot{q}_1 + \beta_0^\pm}{\alpha_1^\pm \dot{q}_1 + \beta_1^\pm} \quad \text{und} \quad U_M^\pm(\dot{q}_1, \ddot{q}_1) = \frac{\ddot{q}_1 - \alpha_0^\pm \dot{q}_1 + \beta_0^\pm}{\alpha_1^\pm \dot{q}_1 + \beta_1^\pm} \quad (6.41)$$

eine Gleichung, die in Abhängigkeit der aktuellen Geschwindigkeit \dot{q}_1 die zur Erreichung einer gewünschten Beschleunigung \ddot{q}_1 notwendige Spannung U_M liefert. Um Unstetigkeiten bei $\dot{q}_1 = 0$ zu verhindern, hat es sich als zweckmäßig erwiesen, für kleine Geschwindigkeiten

⁶Die Bewegungsrichtung bzw. das Vorzeichen von U_M wird jeweils durch den oberen Index + bzw. - gekennzeichnet.

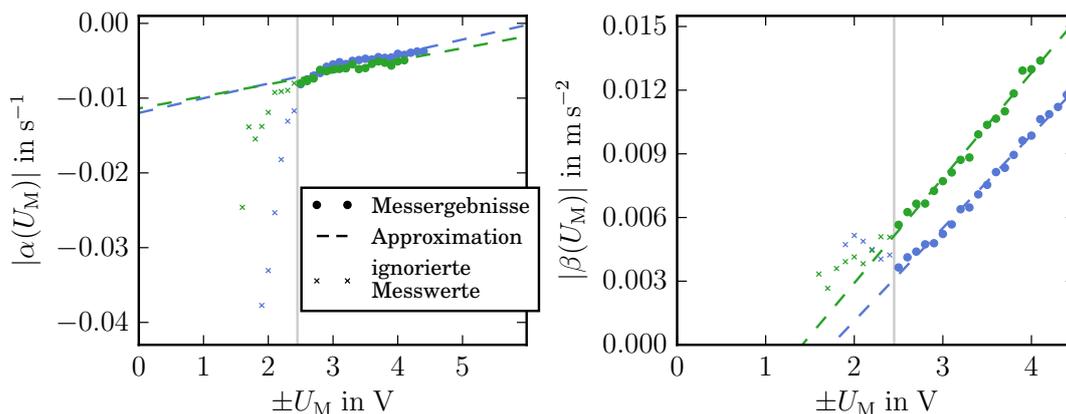


Abbildung 6.8: Approximationen erster Ordnung für $\alpha(U_M)$ und $\beta(U_M)$ zur Bestimmung der Parameter in (6.40). Blau: $U_M > 0$, grün $U_M < 0$. Um beide Bewegungsrichtungen in einem Diagramm darstellen zu können, wurden die Vorzeichen von Abszisse und Ordinate für $U_M < 0$ invertiert. Messergebnisse für niedrige Spannungen ($|U_M| < 2.45V$, links der vertikalen Linie) wurden bei der Bestimmung der Approximationen auf Grund der deutlichen Abweichungen nicht berücksichtigt.

$\dot{q}_1 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ zwischen beiden Spannungswerten linear zu interpolieren:

$$U_M(\dot{q}_1, \ddot{q}_1) = \begin{cases} U_M^-(\dot{q}_1, \ddot{q}_1) & \text{für } \dot{q}_1 \leq -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} \left(U_M^-(\dot{q}_1, \ddot{q}_1)(\varepsilon - \dot{q}_1) + U_M^+(\dot{q}_1, \ddot{q}_1)(\varepsilon + \dot{q}_1) \right) & \text{für } \dot{q}_1 < |\varepsilon| \\ U_M^+(\dot{q}_1, \ddot{q}_1) & \text{für } \dot{q}_1 \geq \varepsilon \end{cases} \quad (6.42)$$

In den durchgeführten Versuchen hat sich dabei ein Wert von $\varepsilon = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bewährt.

Bemerkung 6.8. Aus Abbildung 6.8 geht hervor, dass das identifizierte Antriebsmodell für geringe Geschwindigkeiten erheblich von der Realität abweicht. Durch einen Ansatz höherer Ordnung an Stelle von (6.40) bzw. mit einer anderen Struktur ließe sich die Approximationsgenauigkeit zwar erhöhen, allerdings ist durch den Einfluss von Temperatur und Luftfeuchtigkeit auf die Haft-Reibung im Bereich von $\dot{q}_1 \approx 0$ ohnehin stets mit signifikanten Modellfehlern zu rechnen. Außerdem hat der Ansatz (6.40) den Vorteil, sich eindeutig analytisch nach U_M auflösen zu lassen. Somit stellt (6.42) aus Sicht des Autors einen guten Kompromiss zwischen Modellgenauigkeit und Implementierungsaufwand dar. \triangleleft

Ergebnisse

Durch die unterlagerte Rückführung (6.42) kann nun \ddot{q}_1 als Eingang des Systems aufgefasst und für den Reglerentwurf (unter Vernachlässigung der Modellfehler für kleine Geschwindigkeiten) von dem partiell linearisierten Modell (4.11) ausgegangen werden. Bestimmt man für dieses eine konstante Zustandsrückführung, welche die Ruhelage

$\mathbf{x} = (\pi \ 0 \ 0 \ 0)^T$ asymptotisch stabilisiert, und implementiert diese auf dem Versuchstand, so resultiert aufgrund der vernachlässigten nichtlinearen Effekte (insbesondere Haftreibung und Lose) das in Abbildung 6.9(a) dargestellte „irregulär“ oszillierende Verhalten. Stabilisiert man dagegen mittels der Rückführung (6.31) einen geeigneten periodischen Orbit resultiert zwar ebenfalls eine Dauerschwingung, siehe Abbildung 6.9(b), allerdings ist deren stochastischer Anteil erheblich geringer und darüber hinaus sind ihre Parameter (im Rahmen technischer Grenzen) über die Rückführung explizit vorgebbar.

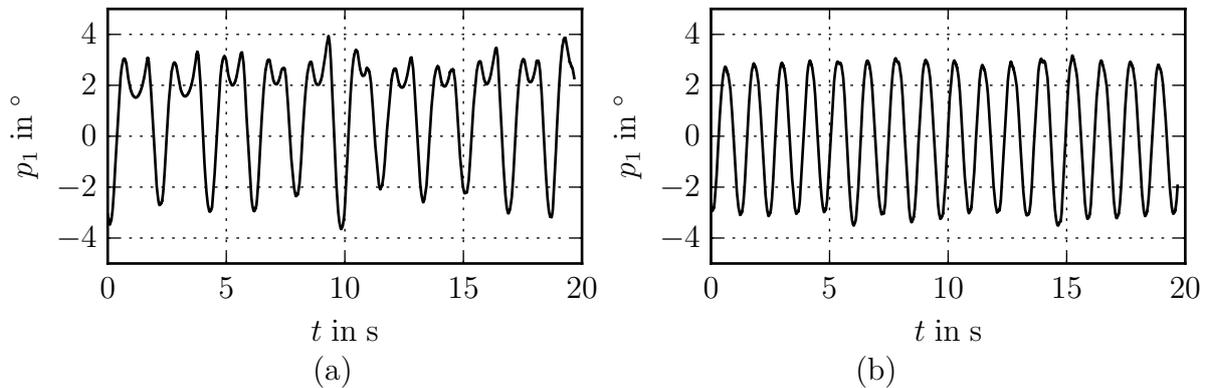


Abbildung 6.9: Gemessener Verlauf des Pendelwinkels $p_1(t)$ für beide Rückführungen. (a): linearen „Ruhelagen-Regler“ (Eigenwerte: $\{-2, -1, -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\pi j\}$). (b): Grenzyklen-Regler mit den Eigenwerten $\{-2, -1, \pm \frac{3}{2}\pi j\}$ der linearen und den Parametern $\alpha^* = 0.5$ und $k_2 = 1$ für die nichtlineare Rückführung. Für die vorgegebene Frequenz von 0.75Hz würden man dargestellten Messintervall 15 Schwingungsperioden erwartet. Durch Abzählen der lokalen Minima erhält man allerdings ca. 16 Perioden. Die vorgegebene Frequenz wird demnach leicht verfehlt, was vermutlich auf die beschränkte Genauigkeit bei der der Schätzung der effektiven Pendellänge zurückzuführen ist.

Ziel der hier vorgestellten Untersuchung war der Nachweis, dass sich die in Abschnitt 6.3 beschriebene Methode zur Stabilisierung eines periodischen Orbits tatsächlich für ein gegebenes unteraktuiertes System umsetzen lässt. Die sich daraus ergebenden offenen Fragen für mögliche weitere Untersuchungen sind im Abschnitt 7.2.6 zusammengefasst.

Kapitel 7

Zusammenfassung und offene Fragen

7.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der regelungstheoretischen Untersuchung mechanischer Systeme, die durch ein holonomes Starrkörpermodell beschrieben werden können. Dabei werden verschiedene Aspekte der Systemanalyse sowie des Entwurfs von Solltrajektorien und Rückführungen betrachtet.

Basierend auf den aus dem Lagrange-Formalismus resultierenden Gleichungen werden in Kapitel 2 verschiedene Modelldarstellungen betrachtet. Hervorzuheben ist dabei die Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform deren Existenz für jedes mechanische System durch Satz 2.6 gesichert wird.

Das dritte Kapitel befasst sich mit linearen bzw. durch Abbruch einer Taylor-Entwicklung linearisierten Systemen. Dabei wird durch die Sätze 3.3 und 3.4 festgehalten, dass für konservative Systeme keine Ruhelage asymptotisch stabil sein kann, und dass die drei möglichen Fälle (oszillierende, linear wachsende oder exponentiell wachsende) Trajektorien allein durch die Hessematrix der potentiellen Energie festgelegt werden und somit unabhängig von den Trägheitseigenschaften des System sind. Zudem wird mit Satz 3.5 eine einfach (d.h. ohne Rechnung) zu prüfende notwendige Bedingung für die Steuerbarkeit eines linearen mechanischen Systems angegeben.

Der Themenkomplex exakte Eingangs-Zustands-Linearisierung und differentielle Flachheit wird im vierten Kapitel behandelt, zunächst für allgemeine, dann unter Einschränkung auf mechanische Systeme. Neben der Diskussion bisher bekannter hinreichender und notwendiger Flachheitsbedingungen, was die Themen exakte Eingangs-Zustands-Linearisierbarkeit durch statische bzw. dynamische Rückführung sowie Steuerbarkeit mit einschließt, werden Ansätze zur Weiterentwicklung der notwendigen Flachheitsbedingungen dokumentiert.

In Abschnitt 4.6 wird die Rolle der Regelflächenbedingung für mechanische Systeme untersucht. In Satz 4.38 wird festgestellt, dass die direkte Anwendung dieser Bedingung auf mechanische Systeme keine Informationen liefert, weil sie immer erfüllt ist. Als Reaktion darauf wird eine Methode vorgeschlagen, um mit Hilfe der Systemdarstellung in Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform bestimmte Systemgrößen auf systematische Weise zu eliminieren und dadurch die Nichtflachheit gewisser Systeme nachweisen zu können. Diese Überlegungen sind in den Sätzen 4.42 und 4.44 zusammengefasst.

Aus dem in [Lé11] und [Fra14] vorgestellten Flachheitskriterium, dessen notwendiger

Teil nicht in endlich vielen Schritten ausgewertet werden kann, wird in Abschnitt 4.7 eine neue notwendige Flachheitsbedingung hergeleitet. Diese basiert darauf, dass die aus einer unimodularen Ergänzung der Systemmatrix resultierenden 1-Formen eine bestimmte Integrierbarkeitsbedingung erfüllen müssen, damit ein flacher Ausgang existieren kann, siehe Satz 4.50. Für Eingrößensysteme ergibt sich durch diese Sichtweise eine erhebliche Vereinfachung gegenüber dem in [Lé11] beschriebenen Verfahren. Da für Mehrgrößensysteme die Auswertung dieser Bedingung aber nach wie vor zu aufwendig ist, wurde sie durch Ausnutzung der speziellen Struktur mechanischer Systeme und unter Vernachlässigung der Unimodularitätsforderung weiter vereinfacht, sodass eine Auswertung für typische Beispielsysteme problemlos möglich ist. Dabei zeigte sich jedoch, dass diese notwendige Flachheitsbedingung von allen untersuchten Systemen erfüllt wird.

Die Eigenschaft „Konfigurationsflachheit“, welche für jene Teilmenge der flachen mechanischen Systeme gilt, die einen flachen Ausgang aufweisen, welcher nur von den Konfigurationskoordinaten abhängt, steht im Mittelpunkt von Abschnitt 4.8. Zunächst wird dort die Hypothese formuliert, dass für quasi-konservative mechanische Systeme beide Eigenschaften äquivalent sind. Vor dem Hintergrund, dass bezüglich Konfigurationsflachheit ein endlich abprüfbares Kriterium bekannt ist, hat diese Frage eine hohe Relevanz. Neben theoretischen Überlegungen und dem Fehlen von Gegenbeispielen wird die Vermutung durch Satz 4.72 gestützt, der aussagt, dass sie zumindest für lineare Systeme zutrifft.

In Kapitel 5 werden verschiedene Ansätze zur Trajektorienplanung untersucht. Nach einer kurzen Diskussion für lineare steuerbare Systeme wird mit Satz 5.2 eine Bedingung angegeben, wann trotz ggf. nicht erfüllter Steuerbarkeit zumindest alle Ruhelagen ineinander überführt werden können. Abschnitt 5.4 befasst sich mit der Trajektorienplanung durch numerische Lösung eines Randwertproblems. Dabei wird ein aus der Literatur¹ bekannter Ansatz aufgegriffen und so modifiziert, dass ein vorgefertigter Randwertlöser (z.B. `bvp4c` von Matlab) nicht mehr benötigt wird. Stattdessen wird das Kollokationsverfahren konkret auf das zu lösende Problem der Trajektorienplanung angepasst, was die Elimination von Variablen durch die explizite Berücksichtigung von Integratorketten erlaubt.

Für quasi-konservative mechanische Systeme ist es zudem möglich, eine Überführungstrajektorie zwischen zwei Ruhelagen durch die Ausnutzung ihrer mit Satz 5.15 gesicherten Zeitumkehrsymmetrie zu bestimmen. Algorithmus 5.18 beschreibt dafür eine mögliches Vorgehen.

Für die Regelung mechanischer Systeme wird üblicherweise die Stabilisierung einer Ruhelage angestrebt. In der Praxis ergeben sich jedoch oft Dauerschwingungen auf Grund unstetiger Effekte wie Spiel und Haftreibung. Kapitel 6 betrachtet deshalb den alternativen Ansatz, statt einer Ruhelage einen Grenzzyklus zu stabilisieren und durch eine geeignete Rückführung dessen Frequenz und Amplitude geeignet vorzugeben. Für lineare Systeme ist unter schwachen Voraussetzungen ein solcher Entwurf mit einer Rückführung dritter Ordnung möglich, wie in Satz 6.3 festgestellt wird. Als hilfreich für die Herleitung hat sich dabei eine Betrachtung des Systems in den Koordinaten der

¹Siehe z.B. [Gra06].

reellen Jordan-Normalform erwiesen.

7.2 Offene Fragen und Ausblick

Wie aus dem Text der vorliegenden Arbeit deutlich wird, sind bei den vorgestellten Untersuchungen eine Reihe von Fragen offen geblieben bzw. haben sich aus diesen ergeben. Die wichtigsten dieser Fragen, bzw. jene, die sich am klarsten formulieren lassen, sind im Folgenden zusammengefasst.

7.2.1 Nichtkollokierte partielle Linearisierung und endliche Fluchtzeit

In Abschnitt 2.3.3 wurde u.a. untersucht, welche Möglichkeiten der Eingangs-Ausgangs-Linearisierung alternativ zur kollokierten partiellen Linearisierung existieren. Es ist bekannt, dass bei der Vorgabe beschränkter Ausgangstrajektorien das Phänomen der endlichen Fluchtzeit auftreten kann. Für den unteraktuierten Zweigelenkmanipulator aus Beispiel 2.4 findet sich in [Kno09, Abschnitt 2.5.1] eine Analyse dieses Verhaltens in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Interessant wäre nun, für möglichst allgemeine mechanische Systeme Bedingungen zu finden, wann das Phänomen endliche Fluchtzeit auftritt.

7.2.2 Notwendige Flachheitsbedingung auf Basis der Integrabilitätsbedingung

Die für die Existenz eines flachen Ausgangs notwendige Integrabilitätsbedingung aus Satz 4.60 hat sich als zu schwach erwiesen, um damit die vermutete Nichtflachheit der untersuchten mechanischen Systeme nachzuweisen. Betrachtet wurde dabei nur der Koeffizient c^* , der in allen für das gesamte Keilprodukt $\Xi_{i,k}$ relevanten Faktoren $\Gamma_{k^*}, \dots, \Gamma_k$ auftritt. Es stellt sich also die Frage, ob es überhaupt mechanische Systeme gibt, für die $c^* \neq 0$ gilt. Ein Hinweis darauf, dass dies nicht so ist, liefert die in Abschnitt B.3 ausgeführte Betrachtung des Spezialfalls von Systemen erster Ordnung mit $n_{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}n_{\mathbf{x}}$. Ob und wie sich diese Beobachtung verallgemeinern lässt, bleibt aber ebenfalls eine offene Frage.

Da Satz 4.60 auf Korollar 4.55 aufbaut, ist es naheliegend, an Stelle von c^* andere Koeffizienten von Γ_k zu betrachten. Wie die Tabelle (4.174) in Beispiel 4.58 zeigt, gibt es für bestimmte Systeme sehr viele Koeffizienten. Um Nichtflachheit nachzuweisen, reicht es zu zeigen, dass für jedes k einer dieser vielen Koeffizienten nicht identisch null ist. Die Schwierigkeit besteht darin, dass alle Koeffizienten außer c^* von der Ableitungsordnung k abhängen. Möglicherweise kann aber die Beziehung (4.179) herangezogen werden, um diese Abhängigkeit explizit zu erfassen.

Für Eingrößensysteme kann man Satz 4.50 in Form von Korollar 4.51 tatsächlich nutzen (auch wenn natürlich für diese Systemklasse das Kriterium für statische Eingangs-

Zustands-Linearisierbarkeit ausreicht, siehe Abschnitt 4.2). Entscheidender Grund ist, dass sich dort die Forderung nach der Unimodularität des Faktors \mathbf{L}_2 explizit berücksichtigen lässt: Eine 1×1 Polynommatrix ist genau dann unimodular, wenn sie weder von $\frac{d}{dt}$ abhängt noch die Nullmatrix ist.

Es ist also zu erwarten, dass auch für den Mehrgrößenfall eine deutlich strengere notwendige Bedingung resultiert, wenn es gelingt, die Unimodularitätsforderung mit einzuarbeiten. Eine zusätzliche Herausforderung ist dabei, dass $\mathbf{L}_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ nicht direkt, sondern in Form des Produkts $\mathbf{L}_2^{-1}\left(\frac{d}{dt}\right)d\mathbf{L}_2\left(\frac{d}{dt}\right)$ in dem entscheidenden Keilprodukt auftritt, siehe Gleichung (4.129). Eventuell könnte der in [Lé11] umrissene Ansatz, die Gesamtheit aller unimodularen Matrizen zu parametrieren, hilfreich sein.

7.2.3 Konfigurationsflachheit

Ein wichtiger Schritt zu einem besseren Verständnis mechanischer Systeme wäre ein Beweis oder eine Falsifizierung der Vermutung 4.66 (die Äquivalenz von allgemeiner Flachheit und Konfigurationsflachheit für quasi-konservative Systeme betreffend). In ersterem Fall wäre außerdem zu hoffen, dass die dadurch aufgedeckten Zusammenhänge zwischen der Flachheitseigenschaft und der Struktur der Modellgleichungen auch auf andere Systemklassen übertragbar sind. Nachdem für den einfachsten möglichen Spezialfall, nämlich lineare Systeme, die Hypothese bestätigt werden konnte, wäre ein möglicher nächster Schritt, die Untersuchung von nichtlinearen mechanischen Systemen mit einem Eingang. Zu zeigen (oder zu widerlegen) wäre dann, dass ein Ausgang mit vollständigem relativen Grad, wenn er existiert, ausschließlich von den Konfigurationskoordinaten abhängen kann.

7.2.4 Verbesserungen der Trajektorienbestimmung mittels RWA-Lösung

Der in Abschnitt 5.4 beschriebene Ansatz zur Trajektorienplanung mittels Kollokationsverfahren ließe sich in verschiedene Richtungen erweitern und verbessern. Da das Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems ohnehin in ein Minimierungsproblem umformuliert wird, liegt es nahe, zusätzlich ein Kostenfunktional mit vorzusehen, sodass nicht eine beliebige Eingangstrajektorie bestimmt wird, welche den Anfangs- in den Endzustand überführt, sondern eine, die im Sinne des Kostenfunktionals optimal ist. Zu untersuchen wäre dann, welchen Einfluss diese Veränderung auf die Konvergenz hat und wie man ggf. die Abbruchkriterien modifiziert. Eine Schwelle für den Absolutwert des Residuums festzulegen, ist dann nicht mehr sinnvoll, da ein Kostenfunktional typischerweise auch im optimalen Fall endliche Werte annimmt.

Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit besteht darin, neben dem Eingangsverlauf auch explizit a priori unbestimmte Parameter als Freiheitsgrade der Lösung zuzulassen. Ein Spezialfall davon könnte die Überführungszeit T sein, welche bisher geeignet geschätzt werden muss und aus Sicht des Randwertlösers ein konstanter Verfahrensparameter ist.

Anstatt für die Systemgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\boldsymbol{\tau}(t) \quad (7.1)$$

im Intervall $[0, T]$ eine Eingangstrajektorie zu suchen, würde man dann mit der Zeittransformation $t(s) = T \cdot s$ und den Festlegungen $\tilde{\mathbf{x}}(s) := \mathbf{x}(Ts)$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(s) := \boldsymbol{\tau}(Ts)$ das System

$$\tilde{\mathbf{x}}'(s) = \dot{\mathbf{x}}(Ts) \cdot t' = T\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(s)) + T\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}(s))\tilde{\boldsymbol{\tau}}(s) \quad (7.2)$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ betrachten und T als freien Parameter auffassen, der im Zuge der Lösung des Randwertproblems mit bestimmt wird.

7.2.5 Allgemeinere Charakterisierung und Kriterium für Zeitumkehrsymmetrie

Im Abschnitt 5.5 wurde die Eigenschaft der Zeitumkehrsymmetrie für Systeme mit Eingang eingeführt und eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass ein System diese Eigenschaft erfüllt. Nach Kenntnis des Autors ist ein abprüfbares Kriterium, um für ein gegebenes System festzustellen, ob es zeitumkehrsymmetrisch ist oder nicht, bisher nicht bekannt. Das gleiche gilt für eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Transformation Ψ in Definition 5.12.

7.2.6 Attraktivitätsgebiet von Ruhelagen und periodischen Orbits

Der in Abschnitt 5.5.3 vorgestellte Algorithmus 5.18 basiert darauf, für die zwei betreffenden Ruhelagen Rückführungen auszulegen, damit diese lokal asymptotisch stabil sind und ein möglichst „großes“ Attraktivitätsgebiet aufweisen. Nach Kenntnis des Autors ist es bisher ungeklärt, wie man eine Rückführung so auslegt, dass ein möglichst großes Attraktivitätsgebiet resultiert.

Eine analoge Frage ergibt sich bei der Stabilisierung eines geschlossenen Orbits. Wie etwa aus Beispiel 6.7 hervorgeht, ist auch dessen Attraktivitätsgebiet im Allgemeinen begrenzt. Interessant wäre, wie dieses von der Wahl der Parameter α^* (Amplitude), ω (Frequenz), k_2 (Verstärkung der nichtlinearen Rückführung) sowie von den platzierten Eigenwerten abhängt.

Anhang A

Ausgewählte mathematische und systemtheoretische Konzepte

A.1 Stabilität

Für die Klasse der nichtlinearen dynamischen Systeme, welche den Spezialfall der linearen Systeme mit einschließt, wird typischerweise das Stabilitätskonzept von Ljapunov herangezogen, siehe beispielsweise in [SL91, Kapitel 3] oder [SJK97, Abschnitt 2.3] für eine ausführliche Beschreibung. Im Allgemeinen ist „Stabilität“ dabei keine globale Eigenschaft eines Systems, sondern eine lokale Eigenschaft einzelner Trajektorien (und damit auch Ruhelagen). Eine Trajektorie heißt **stabil** im Sinne von Ljapunov, wenn geringe Änderung der Anfangswerte ebenfalls nur eine begrenzte maximale Abweichung der gestörten Lösung von der betrachteten Referenztrajektorie bewirken [SJK97, Abschnitt 2.3.1], andernfalls heißt sie **instabil**. Wenn alle von leicht gestörten Anfangswerten ausgehenden Trajektorien für $t \rightarrow \infty$ gegen die Referenztrajektorie konvergieren und diese stabil ist, dann heißt sie **asymptotisch stabil**. Bei linearen zeitinvarianten Systemen in Zustandsraumdarstellung kann die (In)Stabilität des Koordinatenursprungs stets auf das ganze System verallgemeinert werden. Ausschlaggebend sind die Eigenwerte und -vektoren der Systemmatrix. Nach [Lud95a, Satz 3.30] ist ein System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ stabil, wenn \mathbf{A} keine Eigenwerte in der offenen rechten Halbebene hat und wenn für die Eigenwerte auf der imaginären Achse die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmt. Hat \mathbf{A} nur Eigenwerte in der offenen linken Halbebene, so ist der Ursprung und damit das ganze System asymptotisch stabil.

A.2 Attraktivitätsgebiet

Ein autonomes dynamisches System in Zustandsdarstellung habe den Zustandsraum $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, eine Ruhelage im Punkt \mathbf{x}_0 und die Fluss-Abbildung φ_t , siehe z.B. [Arn01, Abschnitt 1.2]. Unter dem Attraktivitätsgebiet der Ruhelage \mathbf{x}_0 versteht man die Teilmenge $\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\}$, d.h. also die Menge aller Punkte, von denen aus die Trajektorien für $t \rightarrow \infty$ nach \mathbf{x}_0 verlaufen. Ganz analog lässt sich auch das Attraktivitätsgebiet eines geschlossenen Orbits definieren.

Aus Regelungstheoretischer Sicht ist die Abschätzung eines Attraktivitätsgebietes relevant, siehe dazu z.B. [Kha02, Abschnitt 8.2] und die dort bzw. auf S. 721 angegebenen

Quellen.

A.3 Erstes Integral

Ein autonomes dynamisches System sei durch die vollständig bestimmte implizite vektorwertige Gleichungen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \stackrel{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^{n \times \gamma} \quad (\text{A.1})$$

gegeben. Eine Funktion $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt erstes Integral dieses Systems wenn $W(\cdot)$ entlang jeder seiner Lösungen konstant ist, aber nicht konstant auf einer beliebigen offenen Teilmenge aus \mathcal{X} . Mit anderen Worten: ein erstes Integral ist eine Erhaltungsgröße für das System. Für weitere Details sei z.B. auf [Arn01, Abschnitt 10.5] und [AP82, Abschnitt 3.7] verwiesen.

A.4 Menge der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen: $GL(n)$

Die Menge der invertierbaren quadratischen Matrizen mit n Zeilen und Spalten und Einträgen aus dem Körper \mathbb{K} wird in der Literatur oft mit $GL(n, \mathbb{K})$ („General Linear Group“, „Allgemeine lineare Gruppe“) bezeichnet, siehe z.B [HN91, Kapitel 1]. Für die Betrachtungen in der vorliegenden Arbeit gilt stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sodass sich die abkürzende Notation

$$GL(n) := GL(n, \mathbb{R}) \quad (\text{A.2})$$

anbietet. Diese Menge weist die reichhaltige Struktur einer Lie-Gruppe auf [HN91], welche aber im Rahmen dieser Arbeit nicht explizit benötigt wird.

A.5 Positiv definite Matrix

Eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, wenn für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ außer dem Nullvektor die Ungleichung

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0 \quad (\text{A.3})$$

erfüllt ist. Daraus folgt unmittelbar die Regularität von \mathbf{M} : Gäbe es einen Eigenwert 0 könnte man \mathbf{x} als zugehörigen Eigenvektor wählen und die Ungleichung verletzen. Unterteilt man \mathbf{M} blockweise,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

dann muss die positive Definitheit (und damit auch die Regularität) auch für die Diagonalblöcke gelten. Das wird durch die Wahl $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ plausibel, denn dann folgt aus (A.3) direkt

$$\mathbf{x}_1^T \mathbf{M}_{11} \mathbf{x}_1 > 0 \quad (\text{A.5})$$

für alle nicht verschwindenden Vektoren \mathbf{x}_1 passender Dimension.

A.6 Mannigfaltigkeit

Eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} der Dimension N ist ein topologischer Raum, der lokal dem \mathbb{R}^N „gleich“. Genauer gesagt, existieren hinreichend viele und in geeigneter Weise kompatible sogenannte Kartenabbildungen aus offenen Teilmengen auf \mathcal{M} in den \mathbb{R}^N , deren vereinigte Definitionsbereiche ganz \mathcal{M} überdecken. Eine genaue Beschreibung des Mannigfaltigkeits-Begriffs und der umfangreichen damit zusammenhängenden Theorie findet sich z.B. in [AMR88a, Jän05] bzw. in [NvdS90, Isi95].

Für die Regelungstheorie hat dieses Konzept folgende Relevanz: Bestimmte dynamische Systeme lassen sich zweckmäßig besser beschreiben, wenn die zeitabhängigen Systemgrößen nicht in einem euklidischen Raum, sondern auf einer allgemeineren Mannigfaltigkeit definiert sind. Das betrifft z.B. auch mechanische Systeme mit rotatorischen Freiheitsgraden, wenn die Lagrange-Funktion invariant bezüglich einer vollständigen Rotation des Freiheitsgrads ist. Deshalb ist es üblich, für mechanische Systeme die Konfigurationsmannigfaltigkeit \mathcal{Q} einzuführen, siehe z.B. [AM87, BL04]. Auch allgemeine dynamische Systeme werden oft auf Mannigfaltigkeiten definiert und die zugehörige Theorie, z.B. für die exakte Linearisierung, wird mit Methoden der Differentialgeometrie entwickelt, siehe z.B. [NvdS90, Isi95]. Für die in den Abschnitten 4.4 und 4.7 betrachtete Flachheitsanalyse werden in der Literatur unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten zugrunde gelegt, siehe z.B. [FLMR99, Lé11, Fra14] bzw. Abschnitt A.15.

Bemerkung A.1. Aus Konsistenzgründen zu den genannten Quellen wird das Mannigfaltigkeitskonzept auch in vorliegender Arbeit verwendet, obwohl die zusätzliche Struktur, die sich aus der Nutzung von Mannigfaltigkeiten ergibt (beispielsweise die Identifikation zweier Konfigurationen die sich nur durch eine Rotation um 2π unterscheiden), nicht betrachtet wird. Im Sinne einer möglichst einfachen Notation, werden zudem dynamische Systeme mit $n_{\mathbf{x}}$ Variablen auf besonders einfachen Mannigfaltigkeiten definiert, nämlich jeweils auf einer offenen und konvexen Teilmenge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}}$. Auf die Berücksichtigung von Kartenabbildungen kann dann verzichtet werden. Für die Systembeschreibung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ wird hier demnach sowohl $\dot{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}}$ als auch $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}}$ geschrieben. \triangleleft

A.7 Diffeomorphismus

Als Diffeomorphismus wird eine eindeutig umkehrbare differenzierbare Abbildung bezeichnet, deren Umkehrabbildung ebenfalls differenzierbar ist, siehe z.B. [Isi95, Abschnitt 1.2]. In dieser Arbeit werden Diffeomorphismen zur Beschreibung von Koordinatentransformationen genutzt.

A.8 Vektorfeld

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung, die jedem Punkt \mathbf{x} einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} einen Vektor in dem zu diesem Punkt gehörenden *Tangentenraum* $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ zuordnet, siehe [AF01, Abschnitt 2.1, Definition 3]. Gilt $\mathcal{M} = \mathcal{X}$ und ist eine Kartenabbildung festgelegt, was in

der vorliegenden Arbeit immer der Fall ist, wird ein Vektorfeld durch eine Abbildung $\mathbf{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ repräsentiert. Weiterhin werde vorausgesetzt, dass diese Abbildung stets unendlich oft differenzierbar sei. Um diese Eigenschaft zu betonen, spricht man dann auch von einem „glatten Vektorfeld“.

Im Kontext dynamischer Systeme in Zustandsdarstellung werden Vektorfelder verwendet, um die zeitliche Änderung des Systemzustandes zu modellieren. Für das autonome System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ beschreibt das Vektorfeld \mathbf{f} für jeden Zustand \mathbf{x} den Tangentialvektor an die Lösungskurve des Systems durch den Punkt \mathbf{x} auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{X} .

A.9 Lie-Ableitung eines Skalarfeldes

Seien $\mathbf{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ und $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je ein gegebenes Vektor- bzw. Skalarfeld auf \mathcal{X} und seien f_1, \dots, f_{n_x} die Komponentenfunktionen der Abbildung \mathbf{f} . Die Lie-Ableitung von h entlang \mathbf{f} ist dann durch

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n_x} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \quad (\text{A.6})$$

gegeben. Mit anderen Worten: Der Operator $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}$ bildet das Skalarfeld h auf ein neues Skalarfeld $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}h$ ab und kann dementsprechend mehrfache angewendet werden. Dafür ist die kompakte Notation

$$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^k h := \mathcal{L}_{\mathbf{f}} \left(\mathcal{L}_{\mathbf{f}}^{k-1} h \right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^0 h := h \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.7})$$

üblich.

Aus geometrischer Sicht entspricht die Lie-Ableitung der Richtungsableitung der Funktion h am Auswertepunkt \mathbf{x} in Richtung des durch $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gegebenen Vektors. Bezüglich des durch \mathbf{f} beschriebenen dynamischen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}h$ äquivalent zur Zeitableitung von \mathbf{h} , denn es gilt auf Grund der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = \mathcal{L}_{\mathbf{f}}h. \quad (\text{A.8})$$

Für höhere Zeitableitungen ergibt sich dann unmittelbar

$$h^{(k)} = \mathcal{L}_{\mathbf{f}}^k h. \quad (\text{A.9})$$

A.10 Distribution

Seien $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ Vektorfelder auf \mathcal{X} . Wertet man diese an einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ aus, spannen die resultierenden Vektoren $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ einen Vektorraum auf. Genauer gesagt handelt es sich dabei um einen Unterraum des Tangentialraums am Punkt \mathbf{x} , welcher mit \mathbb{R}^{n_x} identifiziert wird. Eine Distribution Δ ist nun eine Abbildung, die jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ den entsprechenden Unterraum $\text{span}\{\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_k(\mathbf{x})\} =: \Delta(\mathbf{x})$ zuordnet [Isi95, Abschnitt 1.3]. Man schreibt dann auch

$$\Delta := \text{span}\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k\}. \quad (\text{A.10})$$

A.11 Lie-Klammer und Involutivität

Seien mit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times}$ zwei Vektorfelder auf \mathcal{X} gegeben, dann lässt sich diesen durch die Lie-Klammer

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] := \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} \quad (\text{A.11})$$

ein neues Vektorfeld (in Koordinatendarstellung) zuordnen [Isi95, Abschnitt 1.2]. Gelegentlich wird das Vektorfeld $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ aus als Lie-Ableitung von \mathbf{g} entlang \mathbf{f} bezeichnet. Die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ als zweiwertige Abbildung weist einige interessante Eigenschaften auf, wie z.B. Bilinearität oder Antikommutativität [Isi95, Proposition 1.2.1], welche aber für die vorliegende Arbeit nicht (explizit) von Belang sind. Analog zur mehrfachen Lie-Ableitung eines Skalarfeldes ist auch für die iterierte Lie-Klammer eine kompakte Notation üblich. Mit der Festlegung $\text{ad}_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} := \mathbf{g}$ gilt für $k \in \mathbb{N}_+$

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}^k := [\mathbf{f}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{(k-1)} \mathbf{g}] = \underbrace{[\mathbf{f}, [\mathbf{f}, \dots [\mathbf{f}, \mathbf{g}]]]}_{k \text{ mal}}. \quad (\text{A.12})$$

Mit Hilfe der Lie-Klammer lässt sich nun für Distributionen die folgende Eigenschaft definieren: Eine Distribution Δ entsprechend (A.10) heißt **involutiv**, wenn

$$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \Delta \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] \in \Delta \quad (\text{A.13})$$

gilt, d.h. wenn die Distribution abgeschlossen unter der Lie-Klammer ist. Zu einer gegebenen Distribution Δ ist der **involutive Abschluss** $\text{inv}(\Delta)$ als die kleinste involutive Distribution definiert, die Δ enthält. Praktisch kann man $\text{inv}(\Delta)$ bestimmen, indem man paarweise von den erzeugenden Vektorfeldern die Lie-Klammern bildet und die so erhaltenen Vektorfelder als neue zusätzliche Erzeugende auffasst. Diesen Prozess setzt man so lange fort, bis man eine involutive Distribution erhält. Aufgrund der endlichen Dimension von \mathcal{X} terminiert diese Iteration spätestens mit $\Delta = \mathbb{R}^{n \times}$.

A.12 Meromorphe Funktion

Eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich als Quotient $f(x) = \frac{g_1(\mathbf{x})}{g_2(\mathbf{x})}$ zweier analytischer Funktionen $g_1, g_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen, siehe [CMP07, Abschnitt 1.1]. Die Menge der meromorphen Funktionen $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, welche die algebraische Struktur eines Körpers besitzt, wird mit \mathcal{K}_N bezeichnet. Ganz analog lassen sich mit Hilfe der entsprechenden Kartenabbildungen meromorphe Funktionen statt über \mathbb{R}^N auch über einer N -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} definieren. Für den entsprechenden Körper wird $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ geschrieben. Die Kurzschreibweise $\underline{\mathcal{K}} := \mathcal{K}(\underline{\mathbb{X}}_\infty)$ bezeichnet die in Abschnitt A.15 eingeführte Menge der meromorphen Funktionen über der unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeit $\underline{\mathbb{X}}_\infty$.

A.13 Differentialformen und äußere Ableitung

Eine lineare Abbildung $\omega : \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ aus dem Tangentialraum am Punkt \mathbf{x} der N -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} in die reellen Zahlen heißt **Kovektor**, die Menge aller Kovektoren ist gerade der Dualraum zum Vektorraum $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ und heißt **Kotangententialraum**. Er wird üblicherweise mit $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M}$ bezeichnet. Der Kotangententialraum ist ein Spezialfall des Vektorraums $\text{Alt}^k(\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M})$, d.h. des Raums aller alternierenden Multilinearformen

$$\omega : \underbrace{\mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \times \dots \times \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}}_{k \text{ mal}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{A.14})$$

wobei $\text{Alt}^0(\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M}) := \mathbb{R}$ und $\text{Alt}^1(\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M}) := \mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M}$ festgelegt wird, siehe z.B. [Jän05, Abschnitt 3.1]. Für die Dimension dieses Vektorraums gilt

$$\dim(\text{Alt}^k(\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M})) = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!}. \quad (\text{A.15})$$

Für die Elemente dieser Vektorräume ist das sogenannte **Keilprodukt** (auch äußeres Produkt) erklärt. Seien $\omega \in \text{Alt}^{k_1}(\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M})$ und $\eta \in \text{Alt}^{k_2}(\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M})$ gegeben. Dann ist das Keilprodukt dieser beiden alternierenden Multilinearformen für die $r := k_1 + k_2$ Argumente $\nu_1, \dots, \nu_r \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ folgendermaßen definiert [Jän05, Abschnitt 8.1]:

$$\omega \wedge \eta(\nu_1, \dots, \nu_r) = \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \text{sgn}(\sigma) \cdot \omega(\nu_{\sigma(1)}, \dots, \nu_{\sigma(k_1)}) \cdot \eta(\nu_{\sigma(k_1+1)}, \dots, \nu_{\sigma(r)}). \quad (\text{A.16})$$

Dabei bezeichnet \mathcal{S}_r die Menge der Permutationen der Zahlen $\{1, \dots, r\}$, durch $\text{sgn}(\sigma)$ wird für $\sigma \in \mathcal{S}_r$ das Vorzeichen der Permutation notiert und $\sigma(i)$ liefert das i -te Element des r -Tupels σ . Das so definierte Produkt hat die folgenden Eigenschaften [Jän05, Abschnitt 8.1]: Bilinearität (Linearität in beiden Argumenten), Assoziativität und Antisymmetrie. Letztere Eigenschaft bedeutet

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{(k_1 \cdot k_2)} \eta \wedge \omega \quad (\text{A.17})$$

mit ω und η wie oben.

Seien x_1, \dots, x_N Koordinaten für die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , dann wird die Standardbasis in einem Kotangententialraum $\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M}$ üblicherweise mit den Symbolen dx_1, \dots, dx_N bezeichnet. Für $\text{Alt}^k(\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^*\mathcal{M})$ erhält man dann die Basiselemente $dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k)}$ für $\sigma \in \mathcal{I}_{k, (k+1)n}$ wobei

$$\mathcal{I}_{k, N} := (i_1 < \dots < i_k) \subset \{1, \dots, N\}^k \quad (\text{A.18})$$

die Menge der sortierten k -Tupel bezeichnet, welche hier als **Indextupel** dienen, vgl. [AF01, S. 1].

Ähnlich wie bei der Konstruktion eines Vektorfeldes als Abbildung von der Mannigfaltigkeit in den jeweiligen Tangentialraum, können nun Felder von alternierenden

Multilinearformen punktweise eingeführt werden: Unter einer **Differentialform vom Grad k** bzw. kurz **k -Form** versteht man eine Abbildung ω , die jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ eine alternierende Multilinearform in $\text{Alt}^k(\mathcal{T}_{\mathbf{x}}^* \mathcal{M})$ zuordnet. Mit Hilfe der oben eingeführten Basisformen lässt sich ω punktweise durch

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{k,N}} \omega_{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k)} \quad (\text{A.19})$$

definieren, wobei die $\binom{N}{k}$ skalaren Funktionen ω_{σ} im Rahmen dieser Arbeit als meromorph vorausgesetzt werden. Mit anderen Worten: Es gilt $\omega_{\sigma} \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$ für alle $\sigma \in \mathcal{I}_{k,N}$. Durch diese Einschränkung erhält man für die mit $\Lambda^k(\mathcal{M})$ bezeichnete Menge aller k -Formen auf \mathcal{M} die Struktur eines Vektorraums über dem Körper $\mathcal{K}(\mathcal{M})$. Analog zu (A.15) gilt

$$\dim(\Lambda^k(\mathcal{M})) = \binom{N}{k} \quad (\text{A.20})$$

und außerdem wird $\Lambda^0(\mathcal{M}) := \mathcal{K}(\mathcal{M})$ festgelegt. Für $k = 1$ ist neben „1-Form“ auch die Bezeichnung „Kovektorfeld“ üblich.

Die **äußere Ableitung** ist eine Abbildung $d : \Lambda^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{k+1}(\mathcal{M})$ mit den folgenden Eigenschaften (siehe [Jän05, Abschnitt 8.3]):

- (a) Die äußere Ableitung $df \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ einer 0-Form $f \in \Lambda^0(\mathcal{M})$ hat die übliche Bedeutung als das Differential $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} dx_N$.
- (b) Es gilt $d \circ d = 0$.
- (c) Für das Keilprodukt $\omega \wedge \eta$ mit $\omega \in \Lambda^k(\mathcal{M})$ gilt die Rechenregel $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

A.14 Integrierbarkeitsbedingungen für 1-Formen

Jeder 0-Form f lässt durch Anwendung der äußeren Ableitung eindeutig die 1-Form df zuordnen. In vielen Fällen ist auch die umgekehrte Richtung von Bedeutung, d.h. die „Integration“ einer 1-Form zu einer 0-Form. Dazu werden zunächst die folgenden Begriffe eingeführt:

Definition A.2. Sei \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit der Dimension $N < \infty$. Eine 1-Form $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ heißt **geschlossen**, wenn $d\omega = 0 \in \Lambda^2(\mathcal{M})$ gilt. Weiterhin heißt ω **exakt** oder **integrabel**, wenn ein $f \in \Lambda^0(\mathcal{M})$ mit $\omega = df$ existiert, d.h. wenn ω das Differential einer skalaren Funktion f ist.

Wegen $d \circ d = 0$ ist jede exakte 1-Form automatisch auch geschlossen. Unter bestimmten Bedingungen, welche für die in dieser Arbeit betrachteten Mannigfaltigkeiten im endlichdimensionalen Fall erfüllt sind, gilt nun auch die Umkehrung dieser Aussage:

Satz A.3 (Lemma von Poincaré, siehe z.B. [AF01, Abschnitt 2.2]). *Ist \mathcal{M} eine konvexe offene Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums so ist jede geschlossene 1-Form aus $\Lambda^1(\mathcal{M})$ gleichzeitig auch exakt.*

Bemerkung A.4. Tatsächlich kann man die Voraussetzung der Konvexität auf die allgemeinere Eigenschaft „Sternförmigkeit“ (siehe z.B. [AF01, S. 16]) abschwächen. Da die betrachteten Umgebungen in dieser Arbeit allerdings ohnehin nie explizit in Erscheinung treten, scheint das verbreitetere Konzept der Konvexität hier angemessen. Um diesen Satz direkt auf die in dieser Arbeit auftretenden 1-Formen anwenden zu können, wird der Definitionsbereich \mathcal{X} der Systemgrößen \mathbf{x} stets als konvexe offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times}$ vorausgesetzt, siehe Abschnitt A.6. ◁

Das Integrabilitäts-Ergebnis aus Satz A.3 lässt sich noch erheblich verallgemeinern. Dazu führt man analog zum Konzept der Distribution von Vektorfeldern (siehe Abschnitt A.10) eine **Kodistribution** als lineare Hülle einer Menge von 1-Formen, d.h. Kovektorfeldern ein.

Satz A.5 (Satz von Frobenius, siehe z.B. [AF01, Abschnitt 2.2]). *Sei \mathcal{M} eine endlichdimensionale Mannigfaltigkeit und seien $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ linear unabhängig. Für die Kodistribution $\text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ existiert genau dann eine Basis aus exakten 1-Formen, wenn*

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = 0 \in \Lambda^{k+2}(\mathcal{M}) \tag{A.21}$$

für alle $i = 1, \dots, k$ gilt.

Bemerkung A.6. In der regelungstheoretischen Literatur ist die duale Version dieses Satzes verbreiteter, z.B. als Grundlage für die Eingangs-Zustands-Linearisierung. Die Kernaussage ist dann, dass eine Distribution Δ von Vektorfeldern auf \mathcal{M} mit konstanter Dimension genau dann integrabel ist, wenn sie involutiv ist, siehe z.B. [Isi95, Satz 1.4.1] oder [KB00, Proposition 3.80]. In diesem Zusammenhang bedeutet „integrabel“, dass sich \mathcal{M} in eine Familie disjunkter Untermannigfaltigkeiten aufteilen lässt, die die gleiche Dimension wie Δ haben und zu der Δ in jedem Punkt von \mathcal{M} tangential liegt. Diese Aufteilung wird auch „reguläre Blätterung“ genannt [AMR88a, Abschnitt 4.4].

Eine ausführliche Diskussion zum Zusammenhang beider Fassungen findet sich u.a. in [PLTS98, Abschnitt 2.3]. ◁

Bemerkung A.7. Die Betonung der endlichen Dimension in den Sätzen A.3 und A.5 begründet sich mit der Einführung der unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeit $\underline{\mathbb{X}}_\infty$ in Abschnitt A.15. Entsprechend [Fra14, Bemerkung 2.6] lassen sich die Integrabilitätsaussagen nicht ohne weitere Annahmen auf unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten übertragen. Allerdings werden in der vorliegenden Arbeit stets nur Differentialformen betrachtet, die auch auf endlichdimensionalen Untermannigfaltigkeiten definiert sind, siehe auch Bemerkung A.8. ◁

A.15 Differentialformen auf Jet-Bündeln unendlicher Ordnung

In der durch $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) = \mathbf{0}$ (vgl. (4.2)) gegebenen impliziten Beschreibung eines dynamischen Systems treten die Systemgrößen $x_1, \dots, x_{n_{\mathbf{x}}}$ und ihrer Zeitableitungen auf. Der u.a. in [Lé11, Fra14] entwickelte Ansatz zur Flachheitsanalyse fasst diese Systemgrößen und ihre Ableitungen als Koordinaten auf einer speziellen Mannigfaltigkeit auf. Da für ein gegebenes System a priori unklar ist, welche maximale Zeitableitungsordnung in den für die Analyse relevanten Rechnungen auftreten, werden den Betrachtungen spezielle unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten, sogenannte Jet-Bündel unendlicher Ordnung in einer unabhängigen Variablen, zugrundegelegt, siehe u.a. auch [FLMR99] und [Sau89]. In der vorliegenden Arbeit wird die Bündelstruktur nicht explizit eingeführt, sondern es werden nur die daraus resultierenden Rechenregeln angegeben.

Mit \mathcal{X} wird entsprechend Bemerkung A.1 die offene und konvexe Umgebung der $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}}$ bezeichnet, auf der die in der impliziten Systembeschreibung vorkommenden Systemgrößen \mathbf{x} definiert sind. Ferner gelten die Festlegungen

$$\underline{\mathbb{X}}_{\kappa} := \mathcal{X} \times \underbrace{\mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}}}_{\kappa \text{ mal}} \quad \text{und} \quad (\text{A.22a})$$

$$\underline{\mathbb{X}}_{\infty} := \mathcal{X} \times \underbrace{\mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}} \times \mathbb{R}^{n_{\mathbf{x}}} \times \dots}_{\text{abzählbar } \infty \text{ oft}}. \quad (\text{A.22b})$$

Bei $\underline{\mathbb{X}}_{\kappa}$ handelt es sich um eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n_{\mathbf{x}}(\kappa + 1)$ mit den Koordinaten $x_1, \dots, x_{n_{\mathbf{x}}}, \dot{x}_1, \dots, x_{n_{\mathbf{x}}}^{(\kappa)}$. Für eine einfachere Referenzierung, ist es bisweilen zweckmäßig, eine durchgehende Nummerierung für die Koordinaten einzuführen:

$$\psi_i := x_j^{(k)} \quad \text{mit } j = i \bmod n_{\mathbf{x}} \quad \text{und} \quad k = (i - j)/n_{\mathbf{x}} \in \mathbb{N} \quad (\text{A.23a})$$

$$\Rightarrow x_j^{(k)} = \psi_{n_{\mathbf{x}} \cdot k + j}. \quad (\text{A.23b})$$

Die Mengen $\mathcal{K}(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa})$ und $\Lambda^r(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa})$ sind dann entsprechend Abschnitt A.13 definiert. Mit der (angepassten) Notation aus [CMP07, Abschnitt 1.3] und der Wahl $N := n_{\mathbf{x}}(\kappa + 1)$ gilt

$$\Lambda^1(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa}) = \text{span}_{\mathcal{K}(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa})}(\{dx_1, \dots, dx_{n_{\mathbf{x}}}, d\dot{x}_1, \dots, dx_{n_{\mathbf{x}}}^{(\kappa)}\}) = \text{span}_{\mathcal{K}(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa})}(\{d\psi_1, \dots, \psi_N\}). \quad (\text{A.24})$$

Durch die aus (A.23a) resultierende Umbenennung $d\psi_i = dx_j^{(k)}$ lässt sich eine k -Form aus $\Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa})$ wie in (A.19) schreiben.

Die in (A.22b) definierte Menge $\underline{\mathbb{X}}_{\infty}$ stellt eine unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit dar. Eine Funktion $\underline{\mathbb{X}}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig (bzw. differenzierbar bzw. analytisch bzw. meromorph), wenn sie nur von endlich vielen Argumenten abhängt und bezüglich dieser stetig (bzw. differenzierbar bzw. analytisch bzw. meromorph) ist [Lé11, S.51]. Damit ist die Menge der meromorphen Funktionen über $\underline{\mathbb{X}}_{\infty}$, welche mit

$$\underline{\mathcal{K}} := \mathcal{K}(\underline{\mathbb{X}}_{\infty}) \quad (\text{A.25})$$

abgekürzt wird, wohldefiniert. Legt man diese Menge für die Koeffizientenfunktionen zugrunde, lässt sich analog zu (A.19) die Menge der k -Formen über $\underline{\mathbb{X}}_\infty$ definieren:

$$\omega \in \Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\infty) \Leftrightarrow \omega = \sum_{\sigma \in \mathcal{I}_{k,\infty}} \omega_\sigma \cdot dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k)}, \quad (\text{A.26})$$

wobei nur eine endliche Anzahl der abzählbar unendlich vielen Koeffizientenfunktionen ω_σ verschieden von der Nullfunktion sein darf und alle Koeffizienten Element der Menge $\underline{\mathcal{K}}$ sein müssen.

Für die in diesem Abschnitt eingeführten Mengen, gelten per definitionem die Beziehungen

$$\underline{\mathbb{X}}_0 \subset \underline{\mathbb{X}}_1 \subset \dots \subset \underline{\mathbb{X}}_\kappa \subset \underline{\mathbb{X}}_\infty \quad (\text{A.27a})$$

$$\underline{\mathcal{K}}(\underline{\mathbb{X}}_0) \subset \underline{\mathcal{K}}(\underline{\mathbb{X}}_1) \subset \dots \subset \underline{\mathcal{K}}(\underline{\mathbb{X}}_\kappa) \subset \underline{\mathcal{K}} \quad (\text{A.27b})$$

$$\Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_0) \subset \Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_1) \subset \dots \subset \Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\kappa) \subset \Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\infty) \quad (\text{A.27c})$$

für alle $\kappa, k \geq 0$.

Zeitableitung von Differentialformen

Für skalare Funktionen f aus $\underline{\mathcal{K}}(\underline{\mathbb{X}}_\kappa)$ ist die Anwendung des Zeitableitungsoperators $\frac{d}{dt}$ bekanntermaßen durch

$$\frac{d}{dt} f = \dot{f} = \sum_{i=0}^N \frac{\partial f}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i \stackrel{(\text{A.23a})}{=} \sum_{i=0}^N \frac{\partial f}{\partial \psi_i} \psi_{i+n_x} \quad (\text{A.28})$$

gegeben. Wegen des potentiellen Auftretens von Ableitungen der Ordnung $\kappa + 1$ bildet $\frac{d}{dt}$ von $\underline{\mathcal{K}}(\underline{\mathbb{X}}_\kappa)$ offensichtlich nach $\underline{\mathcal{K}}(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa+1})$ ab. Tatsächlich kann man die Zeitableitung unter Ausnutzung der Bündelstruktur als Lie-Ableitung bezüglich des sogenannten Cartan-Vektorfeldes auffassen, siehe [Lé11] bzw. [Fra14, Abschnitt 2.5.2]. Damit lässt sich die Anwendung von $\frac{d}{dt}$ auf Differentialformen mathematisch streng herleiten. Für die vorliegende Arbeit soll jedoch die Angabe der daraus resultierenden Rechenregeln ausreichen: Für die Differentialform $\omega \in \Lambda^{k_1}(\underline{\mathbb{X}}_\infty)$ und $\eta \in \Lambda^{k_2}(\underline{\mathbb{X}}_\infty)$ gilt unter Berücksichtigung der Notation $\frac{d}{dt}\omega =: \dot{\omega}$

$$\frac{d}{dt} d\omega = d \frac{d}{dt} \omega = d\dot{\omega}, \quad (\text{A.29a})$$

$$\frac{d}{dt} (\omega \wedge \eta) = \dot{\omega} \wedge \eta + \omega \wedge \frac{d}{dt} \eta. \quad (\text{A.29b})$$

Wendet man die Beziehung (A.29a) auf den Spezialfall der 0-Form $\omega = x_i^{(k)}$ an, ergibt sich

$$\frac{d}{dt} dx_i^{(k)} = d \frac{d}{dt} x_i^{(k)} = dx_i^{(k+1)}, \quad (\text{A.30})$$

wodurch die eingeführte Notation nachträglich gerechtfertigt wird. Offensichtlich gilt

$$\frac{d}{dt} : \Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\kappa) \rightarrow \Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa+1}) \quad (\text{A.31a})$$

für alle $\kappa \geq 0$. Betrachtet man statt $\underline{\mathbb{X}}_\kappa$ dagegen $\underline{\mathbb{X}}_\infty$, so gilt

$$\frac{d}{dt} : \Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\infty) \rightarrow \Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\infty), \quad (\text{A.31b})$$

d.h., dann wird durch die Zeitableitung die Ausgangsmenge (der Urbildbereich) nicht verlassen.

Bemerkung A.8. Für das praktische Rechnen mit Differentialformen hat die Unterscheidung zwischen $\Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\kappa)$ und $\Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\infty)$ keine Bedeutung. So lange nur endlich viele Zeitableitungen durchgeführt werden, kann man alle auftretenden Formen stets als Element von $\Lambda^k(\underline{\mathbb{X}}_\kappa)$ für ein hinreichend groß gewähltes κ auffassen. Die Verwendung von $\underline{\mathbb{X}}_\infty$ erlaubt es aber, die explizite Angabe von κ zu vermeiden. \triangleleft

Mit der Rechenregel (A.29b) ist es möglich, den Zeitableitungsoperator sukzessive nach rechts zu verschieben, dies wird durch das folgende Beispiel illustriert.

Beispiel A.9. Gegeben sei $\alpha = \cos(x_1)\dot{x}_2 dx_1 \wedge d\dot{x}_3$ und zu berechnen ist die Zeitableitung $\frac{d}{dt}\alpha$. Die gegebene 2-Form kann man zunächst in die 0-Form $\cos(x_1)\dot{x}_2 =: \omega$ und die Basis-2-Form $dx_1 \wedge d\dot{x}_3 =: \eta$ aufspalten. Es gilt also nach (A.29b)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\alpha &= \dot{\omega} \wedge \eta + \omega \wedge \frac{d}{dt}\eta \\ &= (-\sin(x_1)\dot{x}_1\dot{x}_2 + \cos(x_1)\ddot{x}_2) \wedge dx_1 \wedge d\dot{x}_3 + \cos(x_1)\dot{x}_2 \wedge \frac{d}{dt}(dx_1 \wedge d\dot{x}_3) \\ &= (-\sin(x_1)\dot{x}_1\dot{x}_2 + \cos(x_1)\ddot{x}_2) \wedge dx_1 \wedge d\dot{x}_3 + \cos(x_1)\dot{x}_2 \wedge d\dot{x}_1 \wedge d\dot{x}_3 + \\ &\quad \cos(x_1)\dot{x}_2 \wedge dx_1 \wedge d\ddot{x}_3, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

wobei zu beachten ist, dass das Keilprodukt mit einer 0-Form, d.h. eines Elements aus $\Lambda^r(\underline{\mathbb{X}}_\kappa) = \underline{\mathcal{K}}$, dem gewöhnlichen Produkt mit einer skalaren Funktion entspricht. Zur Auswertung von $\frac{d}{dt}(dx_1 \wedge d\dot{x}_3)$ wurde Regel (A.29b) mit den Festlegungen $\omega := dx_1$ und $\eta := d\dot{x}_3$ erneut angewandt. \triangleleft

A.16 Nichtkommutative Polynome in $\frac{d}{dt}$

Zur kompakten Beschreibung linearer Differentialoperatoren (mit nicht notwendig konstanten Koeffizienten) ist die Verwendung von Polynomen im Ableitungsoperator $\frac{d}{dt}$ gebräuchlich, siehe z.B. [Rud03, Abschnitt 2.1] oder [Deu03]. In der hier verwendeten Notation wird die Menge dieser Polynome mit Koeffizienten aus $\underline{\mathcal{K}}$ (siehe Abschnitt A.12) durch $\underline{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dt}\right]$ bezeichnet. Sie besitzt die algebraische Struktur eines Rings, wobei für alle $a \in \underline{\mathcal{K}}$ die Multiplikationsregel¹

$$\frac{d}{dt}a = \dot{a} + a\frac{d}{dt}, \quad (\text{A.33})$$

gilt, siehe z.B. [Rud03, Anhang #52] oder [Mid11, Abschnitt 3.2]. Aufgrund dieser Regel ist die Multiplikation in $\underline{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dt}\right]$ im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h. es gibt Elemente $a_1\left(\frac{d}{dt}\right), a_2\left(\frac{d}{dt}\right) \in \underline{\mathcal{K}}\left[\frac{d}{dt}\right]$ für die gilt $a_1\left(\frac{d}{dt}\right)a_2\left(\frac{d}{dt}\right) \neq a_2\left(\frac{d}{dt}\right)a_1\left(\frac{d}{dt}\right)$. Deswegen ist neben dem Eponym Ore-Polynome auch die Bezeichnung Schiefpolynome üblich.

¹Diese Regel lässt sich anschaulich durch die Produktregel der Differentialrechnung begründen: $\frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b} = \left(\dot{a} + \frac{d}{dt}\right)b$.

A.17 Polynommatrizen und ihre Eigenschaften

Zur Beschreibung mehrdimensionaler linearer Differentialoperatoren bietet es sich an, die in Abschnitt A.16 eingeführten Polynome in $\frac{d}{dt}$ in Matrizen zusammenzufassen. Die Menge dieser Polynommatrizen mit n_1 Zeilen und n_2 Spalten wird mit $\underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_2}$ bezeichnet. Zur Verdeutlichung, des Polynomcharakters (bezogen auf $\frac{d}{dt}$) wird für ein Element \mathbf{P} aus dieser Menge typischerweise $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ geschrieben. In bestimmten Situationen ist es zudem zweckmäßig, hervorzuheben, dass die Koeffizienten der Polynome meromorphe Funktionen in den Koordinaten $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ usw. sind. Dazu dient die Notation $\mathbf{P}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right)$.

Definition A.10 (Siehe [Rud03, Anhang #62]). Eine quadratische Polynommatrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ heißt **unimodular**, wenn eine andere Polynommatrix $\check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ existiert, sodass gilt $\check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) = \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right) = \mathbf{I}_{n_1}$. Dann ist $\check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right)$ eine (Links- und Rechts-)Inverse zu $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ und man schreibt $\mathbf{P}^{-1} := \check{\mathbf{P}}$. Die Menge aller unimodularen Matrizen in $\underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ wird mit $\mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ bezeichnet. \triangleleft

Mit anderen Worten: Eine Polynommatrix ist unimodular genau dann, wenn sie eine Inverse hat, die ebenfalls wieder eine Polynommatrix ist. Diese Eigenschaft ist deutlich restriktiver als Invertierbarkeit, denn im Allgemeinen hängt die Inverse von $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ von gebrochenrationalen Termen² in $\frac{d}{dt}$ ab, wie man sich leicht für das Minimalbeispiel $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) = 1 \cdot \frac{d}{dt}$ mit $n_1 = 1$ klar macht. Diese 1×1 -Matrix hat vollen Rang ist aber trotzdem nicht unimodular.

Bemerkung A.11. Betrachtet man Matrizen über $\mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ statt über $\underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ dann sind ihre Einträge gewöhnliche (d.h. kommutative) Polynome in $\frac{d}{dt}$. Für solche Polynommatrizen kann man Unimodularität konsistent mit obiger Definition mit Hilfe der Determinante charakterisieren: Eine Polynommatrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ ist unimodular, wenn ihre Determinante eine nichtverschwindende reelle Zahl ist: $\det \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \stackrel{!}{=} \text{konst} \left(\frac{d}{dt} \right) \neq 0$, siehe z.B. [Kai80, Abschnitt 6.2.3] oder [Rei14, Abschnitt 6.2].

Da die Einträge einer Matrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ im Allgemeinen von den Variablen $x_1, \dots, x_{n_x}, \dot{x}_1, \dots$ usw. abhängen (siehe (A.25)), gibt es Matrizen, welche nur unter bestimmten Bedingungen unimodular sind. Zum Beispiel ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 + (\dot{x}_1 - x_3) \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ unter der Nebenbedingung $\dot{x}_1 - x_3 = 0$ unimodular, sonst aber nicht. In dieser Arbeit spielen insbesondere solche Matrizen eine Rolle, welche entlang der Lösungen eines gegebenen dynamischen Systems unimodular sind.

²In welchen Zusammenhängen $\left(\frac{d}{dt} \right)^{-1}$ überhaupt definiert ist und wie man dieses Objekt ggf. interpretieren kann, soll hier nicht betrachtet werden.

Definition A.12. Ein dynamisches System sei durch die implizite Gleichung

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.34})$$

beschrieben. Die **verallgemeinerten Lösungsmenge**³ dieser Gleichung wird mit

$$\mathcal{F} := \left\{ (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots) \in \underline{\mathbb{X}}_\infty \ : \ \mathbf{F}^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma+\kappa)}) = \mathbf{0}, \ \kappa \geq 0 \right\} \quad (\text{A.35})$$

bezeichnet, wobei die übliche Notation $\mathbf{F}^{(\kappa)}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma+\kappa)}) := \left(\frac{d}{dt}\right)^\kappa \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)})$ gilt. Die Menge \mathcal{F} enthält also alle Punkte aus $\underline{\mathbb{X}}_\infty$, die zu einem Verlauf $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ gehören, welcher mit der Systemgleichung (A.34) sowie mit beliebig hohen Zeitableitungen dieser kompatibel ist.

Eine quadratische Polynommatrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt}\right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt}\right]^{n_1 \times n_1}$ heißt *unimodular bezüglich des durch (A.34) gegebenen dynamischen Systems* oder kurz **\mathcal{F} -unimodular**, wenn sie unter Berücksichtigung von (A.34) und beliebig hoher Zeitableitungen dieser Systemgleichungen eine polynomiale Inverse bezüglich $\frac{d}{dt}$ im Sinne von Definition A.10 hat. Man schreibt dann $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt}\right) \Big|_{\mathcal{F}} \in \mathcal{U}^{n_1 \times n_1}$.

Die zugehörige Menge der \mathcal{F} -unimodularen Matrizen aus $\underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt}\right]^{n_1 \times n_1}$ wird mit $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} \left[\frac{d}{dt}\right]^{n_1 \times n_1}$ bezeichnet. \triangleleft

Offensichtlich gilt $\mathcal{U}^{n_1 \times n_1} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{F}} \left[\frac{d}{dt}\right]^{n_1 \times n_1}$, d.h. die Eigenschaft \mathcal{F} -Unimodularität ist weniger einschränkend als Unimodularität.

Der Begriff Hyperregularität wird in [Lé11, Definition 6] mit Hilfe der sogenannten **Smith-Form**⁴ (A.36) folgendermaßen⁵ eingeführt:

Definition A.13. Eine Polynommatrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt}\right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt}\right]^{n_1 \times n_2}$ mit $n_1 \leq n_2$ heißt **hyperregulär** wenn es zwei unimodulare Matrizen $\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R$ passender Dimension gibt, sodass

$$\mathbf{V}_L \left(\frac{d}{dt}\right) \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt}\right) \mathbf{V}_R \left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2 - n_1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

erfüllt ist. Gilt $n_1 > n_2$ heißt $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt}\right)$ hyperregulär wenn $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt}\right)^T$ hyperregulär ist. \triangleleft

Allerdings ist offensichtlich, dass die Matrix \mathbf{V}_L für die Definition überflüssig ist, denn Gleichung (A.36) von links mit \mathbf{V}_L^{-1} multipliziert liefert

$$\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt}\right) \mathbf{V}_R \left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_L^{-1} \left(\frac{d}{dt}\right) & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2 - n_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.37})$$

³ Das Attribut „verallgemeinert“ bezieht sich hier auf die Berücksichtigung von Zeitableitungen $\mathbf{F}^{(\kappa)}$ der Systemgleichung. In [Fra14, Abschnitt 3.2.2] wird diese Menge als Untermannigfaltigkeit mit der Bezeichnung \mathcal{S}^∞ eingeführt und spielt für den dort diskutierten geometrischen Zugang eine zentrale Rolle.

⁴ Gelgentlich auch als Smith-Jacobson-Form bezeichnet, siehe z.B. [VA13].

⁵ Um Verwechslungen auszuschließen, sei angemerkt, dass im Kontext der theoretischen Mechanik noch eine andere Verwendung der Bezeichnung „hyperregulär“ existiert, siehe [AM87, Definition 3.6.1]. Hintergrund ist dort die Äquivalenz von Lagrangescher und Hamiltonscher Formulierung der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems.

sodass man mit $\tilde{\mathbf{V}}_R := \mathbf{V}_R \begin{pmatrix} \mathbf{V}_L & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_2-n_1} \end{pmatrix}$ auch durch eine einseitige Transformation in die Normalform überführen kann:

$$\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \tilde{\mathbf{V}}_R \left(\frac{d}{dt} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-n_1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.38})$$

Bei (A.38) handelt es sich um die sogenannte **Hermite-Normalform**, die z.B. in [Kai80, Abschnitt 6.2.3] oder [Rei14, Abschnitt 6.2] für Matrizen über $\mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]$ eingeführt wird. Für den in dieser Arbeit nicht betrachteten Fall, einer nicht-hyperregulären Polynommatrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ stimmen Smith- und Hermite-Normalform im Allgemeinen nicht überein, da letztere dann im Gegensatz zu ersterer keine Diagonalmatrix liefert. Weiterhin sei angemerkt, dass für ein gegebenes $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ die Matrizen $\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_R, \tilde{\mathbf{V}}_R$ nicht eindeutig bestimmt sind.

Zwischen den Eigenschaften Unimodularität und Hyperregularität bestehen die folgenden Zusammenhänge:

Lemma A.14.

- (1) *Jedes Produkt aus einer hyperregulären und einer unimodularen Matrix (von rechts oder links) ist hyperregulär.*
- (2) *Jede Hyperspalte und jede Hyperzeile einer unimodularen Matrix ist hyperregulär.*

Beweis: (1): Sei $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_2}$ mit $n_1 < n_2$ hyperregulär. Dann gibt es eine Matrix $\mathbf{U} \in \mathcal{U} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n_2 \times n_2}$ mit $\mathbf{P}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-n_1)} \end{pmatrix}$. Seien nun $\mathbf{V}_L \in \mathcal{U} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n_1 \times n_1}$ und $\mathbf{V}_R \in \mathcal{U} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n_2 \times n_2}$ beliebige unimodulare Matrizen. Dann gilt

$$\underbrace{\mathbf{V}_L \mathbf{P} \mathbf{U}}_{\mathbf{P}_L} \mathbf{V}_L^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-n_1)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.39a})$$

$$\underbrace{\mathbf{P} \mathbf{V}_R}_{\mathbf{P}_R} \mathbf{V}_R^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-n_1)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.39b})$$

Mit anderen Worten, die Matrizen \mathbf{P}_L und \mathbf{P}_R sind auch hyperregulär. Für $n_1 > n_2$ gilt eine analoge Argumentation.

(2): Sei $\mathbf{U} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \mathcal{U} \left(\frac{d}{dt} \right)^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ und in die Hyperspalten $(\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2)$ mit jeweils n_1 bzw. n_2 skalaren Spalten aufgeteilt. Offensichtlich überführt \mathbf{U}^{-1} die erste Hyperspalte in die Smith- bzw. Hermite-Normalform:

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n_2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.40})$$

Jede andere Hyperspalte von \mathbf{U} kann durch vorherige Rechtsmultiplikation mit einer per Konstruktion unimodularen Permutationsmatrix in die Position von \mathbf{U}_1 befördert werden. Für die Hyperzeilen von \mathbf{U} gilt eine analoge Argumentation. \square

Für die Untersuchungen in Kapitel 4 sind die folgenden Begriffe von zentraler Bedeutung.

Definition A.15. Sei $n_1 < n_2$. Eine Polynommatrix $\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(n_2-n_1) \times n_2}$ heißt **unimodulare Vervollständigung**⁶ zur Matrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_2}$ wenn die Kombination der Zeilen von \mathbf{P} und \mathbf{Q} eine unimodulare Matrix liefert:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix} \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_2}. \quad (\text{A.41})$$

Im Fall von $\begin{pmatrix} \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ \mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_2}$ heißt $\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right)$ **\mathcal{F} -unimodulare Vervollständigung**. ◁

Bemerkung A.16. Zur Bestimmung einer unimodularen Vervollständigung einer hyperregulären Matrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ kann man prinzipiell eine Transformation in Smith- bzw. Hermite-Normalform vornehmen, und dann geeignet ergänzen, siehe z.B. [FKFR16]. Eine Alternative zu diesem im Allgemeinen rechenaufwendigen Vorgehen, ist die Verwendung des in [Fra14] vorgeschlagen Algorithmus, siehe auch [Fri15, FFKR16] für eine Implementierung. Ein weitere Ansatz wird in [ZL14] vorgestellt. ◁

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen der Menge aller unimodularen Vervollständigungen und den Rechtsorthokomplementen der Matrix \mathbf{P} her.

Satz A.17. Gegeben seien die hyperregulären Matrizen $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_2}$ und $\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(n_2-n_1) \times n_2}$ mit $n_1 < n_2$. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(1) Es existiert eine Matrix $\mathbf{G} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}}^{n_2 \times (n_2-n_1)}$ mit

$$\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{G} \left(\frac{d}{dt} \right) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\text{A.42a})$$

$$\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{G} \left(\frac{d}{dt} \right) = \mathbf{I}_{n_2-n_1}. \quad (\text{A.42b})$$

(2) Die Matrix \mathbf{Q} ist eine unimodulare Vervollständigung von \mathbf{P} .

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Sei ein $\mathbf{G} \left(\frac{d}{dt} \right)$ gegeben, dass die Gleichungen (A.42) erfüllt. Aus der Hyperregularität von \mathbf{P} folgt die Existenz einer unimodularen Matrix \mathbf{U} mit

$$\mathbf{P}\mathbf{U} = (\mathbf{I}_{n_1} \quad \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-n_1)}) \quad (\text{A.43})$$

(siehe Hermite-Normalform in Gleichung (A.38)). Unterteilt man diese Matrix in zwei Hyperspalten $(\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2)$ mit $\mathbf{U}_1 \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_1}$ und $\mathbf{U}_2 \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times (n_2-n_1)}$, so gilt für die zweite also $\mathbf{P}\mathbf{U}_2 = \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-n_1)}$. Die Matrix \mathbf{U} ist dabei nicht eindeutig und man kann sie stets so wählen, dass $\mathbf{U}_2 = \mathbf{G}$ gilt, denn beide Matrizen spannen den Rechtsnullraum von \mathbf{P} auf. Für die Inverse $\mathbf{U}^{-1} =: \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}$ mit der Unterteilung $\mathbf{V}_1 \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_2}$ und $\mathbf{V}_2 \in$

⁶In [Rei14, Abschnitt 7.6] ist in diesem Zusammenhang „Kompletterung“ bzw. „Ergänzung“ die Rede.

$\underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(n_2-n_1) \times n_2}$ kann man aus (A.43) direkt $\mathbf{V}_1 = \mathbf{P}$ ablesen. Andererseits gilt $\mathbf{V}_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{V}_2 \mathbf{G} = \mathbf{I}_{n_2-n_1}$, d.h. sowohl \mathbf{V}_2 als auch \mathbf{Q} (siehe (A.42b)) sind Linkspseudoinversen von \mathbf{G} . Die Freiheitsgrade bei der Wahl einer Linkspseudoinverse entsprechen gerade der Addition von Zeilen aus dem Linksnultraum, d.h. gibt in jedem Fall eine Matrix $\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(n_2-n_1) \times n_1}$ mit

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{A.44})$$

Da nun aber \mathbf{V}_2 eine unimodulare Vervollständigung zu \mathbf{V}_1 bzw. \mathbf{P} ist, muss das auch für \mathbf{Q} erfüllt sein, denn es gilt $\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}$.

(2) \Rightarrow (1): Sei nun \mathbf{Q} eine beliebige unimodulare Vervollständigung von \mathbf{P} . Dann erhält man aus der Inversen $\begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}^{-1} =: (\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2)$ mit passend gewählter Unterteilung direkt, die Matrix $\mathbf{G} = \mathbf{U}_2$, welche beide Bedingungen der Behauptung erfüllt. \square

Anders ausgedrückt, besagt der Satz A.17: Jede Linkspseudoinverse zu einem Rechtsorthokomplement von \mathbf{P} ist eine unimodulare Vervollständigung und umgekehrt. Für die Flachheitsuntersuchung ist nun eine Verallgemeinerung dieser Aussage relevant, bei der die Bedingungen (A.42) nur auf der verallgemeinerten Lösungsmenge des betrachteten Systems gelten müssen.

Satz A.18. Seien $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ und $\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right)$ wie in Satz A.17 und zusätzlich $\mathbf{G} \left(\frac{d}{dt} \right)$ mit

$$\left(\mathbf{P}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{G}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \Big|_{\mathcal{F}} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\text{A.45a})$$

$$\left(\mathbf{Q}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{G}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \Big|_{\mathcal{F}} = \mathbf{I}_{n_2-n_1}. \quad (\text{A.45b})$$

gegeben, dann ist $\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right)$ eine \mathcal{F} -unimodulare Vervollständigung von $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$.

Bemerkung A.19. Um deutlich zu machen, dass die Einträge der Polynommatrizen \mathbf{P} , \mathbf{Q} und \mathbf{G} von den Koordinaten \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{x}}$ usw. abhängen, auf die sich die Einschränkung $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots) \in \mathcal{F}$ bezieht, wurde die Notation $\langle \mathbf{x} \rangle$ verwendet. \triangleleft

Beweis: Die Argumentation des Beweises von Satz A.17 lässt sich unmittelbar übertragen. Statt einer unimodularen Matrix \mathbf{U} ist nun eine \mathcal{F} -unimodulare Matrix zugelassen, deren hinterer $n_2 \times (n_2 - n_1)$ -Block mit \mathbf{G} übereinstimmt. Folglich ist auch deren Inverse nur \mathcal{F} -unimodular, und deswegen ist \mathbf{Q} eine \mathcal{F} -unimodulare Vervollständigung. \square

Im Folgenden soll nun die Beziehung zwischen der „Smith-Form-Perspektive“ aus [Lé11] und dem in dieser Arbeit vertretenen Ansatz der unimodularen Vervollständigung verdeutlicht werden. Dazu wird zunächst die entsprechende Notation aus [Lé11] übernommen. Sei $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_2}$ hyperregulär und $n_1 < n_2$. Mit $\text{R-Smith}(\mathbf{P})$ (bzw. $\text{L-Smith}(\mathbf{P})$) wird die Menge aller unimodularen Matrizen $\mathbf{U} \in \underline{\mathcal{U}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_2}$ (bzw. $\mathbf{V} \in \underline{\mathcal{U}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$) bezeichnet, für die es eine zugehörige unimodulare Matrix $\mathbf{V}_{\mathbf{U}} \in \underline{\mathcal{U}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$ (bzw. $\mathbf{U}_{\mathbf{V}} \in \underline{\mathcal{U}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_2}$) gibt, sodass die Beziehung

$$\mathbf{V}_{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-n_1)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.46a})$$

$$\text{(bzw. } \mathbf{V} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{U}_{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times (n_2-n_1)} \end{pmatrix} \text{)} \quad (\text{A.46b})$$

erfüllt ist. Für den Fall $n_1 > n_2$ gilt die analoge Festlegung, wobei die Blockmatrix auf der rechten Seite von (A.46) dann zu transponieren ist. Für $n_1 = n_2$ gilt konsequenterweise $\text{R-Smith}(\mathbf{P}) = \text{L-Smith}(\mathbf{P}) = \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_1}$.

Der folgende Satz stellt nun den Zusammenhang zwischen der unimodularen Vervollständigung und einer Charakterisierung über die Smith-Normalform her.

Satz A.20. *Sei $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_2}$ hyperregulär und $n_1 < n_2$. Sei weiterhin $\mathbf{U} \in \text{R-Smith}(\mathbf{P})$ beliebig gewählt und in die Hyperspalten $(\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2)$ mit $\mathbf{U}_1 \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times n_1}$ und $\mathbf{U}_2 \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_2 \times (n_2 - n_1)}$ unterteilt. Sei schließlich noch $\bar{\mathbf{V}}_1 \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(n_2 - n_1) \times n_2}$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

- (1) *Es existiert eine Matrix $\bar{\mathbf{V}}_2 \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n_1 \times n_2}$, sodass gilt $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 \\ \bar{\mathbf{V}}_2 \end{pmatrix} =: \bar{\mathbf{V}} \in \text{L-Smith}(\mathbf{U}_2)$.*
- (2) *Die Matrix $\bar{\mathbf{V}}_1 \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(n_2 - n_1) \times n_2}$ ist eine unimodulare Vervollständigung der Matrix \mathbf{P} .*

Beweis: (1) \Rightarrow (2): Nach Voraussetzung muss eine Matrix $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{V}}} \in \mathcal{U} \left[\frac{d}{dt} \right]^{(n_2 - n_1) \times (n_2 - n_1)}$ existieren, die \mathbf{U}_2 zusammen mit $\bar{\mathbf{V}}$ in die Normalform überführt, für die also gilt:

$$\bar{\mathbf{V}} \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{V}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{(n_2 - n_1)} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times (n_2 - n_1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.47})$$

Aus Rechtsmultiplikation mit $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{V}}}^{-1}$ folgt unmittelbar, dass das Produkt $\bar{\mathbf{V}}_1 \mathbf{U}_2$ unimodular ist:

$$\bar{\mathbf{V}} \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 \mathbf{U}_2 \\ \bar{\mathbf{V}}_2 \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{V}}}^{-1} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times (n_2 - n_1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{V}}_1 \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_{\bar{\mathbf{V}}}^{-1} \Rightarrow (\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{V}}} \bar{\mathbf{V}}_1) \mathbf{U}_2 = \mathbf{I}_{n_2 - n_1}. \quad (\text{A.48})$$

Wegen der Voraussetzung $(\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2) \in \text{R-Smith}(\mathbf{P})$ gilt darüberhinaus stets

$$\mathbf{P} \mathbf{U}_2 = \mathbf{0}. \quad (\text{A.49})$$

Mit anderen Worten: Die Matrix $\mathbf{U}_{\bar{\mathbf{V}}} \bar{\mathbf{V}}_1$ ist eine Linkspseudoinverse zum Rechtsorthokomplement \mathbf{U}_2 der Matrix \mathbf{P} und damit wegen Satz A.17 eine unimodulare Vervollständigung dieser. Wegen Satz 4.21 auf Seite 50 ist auch $\bar{\mathbf{V}}_1$ eine unimodulare Vervollständigung von \mathbf{P} .

(2) \Rightarrow (1): Sei nun \mathbf{Q} eine beliebige unimodulare Vervollständigung von \mathbf{P} . Es reicht zu zeigen, dass die Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$ in $\text{L-Smith}(\mathbf{U}_2)$ liegt. Ausgangspunkt ist das Produkt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} (\mathbf{U}_2 \ \mathbf{U}_1) \stackrel{(\text{A.49})}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{U}_2 & \mathbf{Q} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \mathbf{U}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.50})$$

Weil beide Faktoren nach Voraussetzung unimodular sind, muss das auch für das Produkt gelten. Man macht sich nun leicht klar, dass das $(n_2 - n_1) \times (n_2 - n_1)$ -dimensionale

Produkt $\mathbf{Q}\mathbf{U}_2$ unimodular sein muss, denn nach Lemma A.14 ist die Hyperspalte $\begin{pmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{U}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ notwendigerweise hyperregulär. Deswegen gilt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \mathbf{U}_2 (\mathbf{Q}\mathbf{U}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{(n_2-n_1)} \\ \mathbf{0}_{n_2 \times (n_2-n_1)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.51})$$

womit die Behauptung $\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$ in $\text{L-Smith}(\mathbf{U}_2)$ bewiesen ist. □

A.17.1 Zusammenhang zwischen Linksteilerfreiheit und Hyperregularität

Im Kontext linearer zeitinvarianter Systeme, wie sie z.B. Gegenstand von Abschnitt 4.8.2 sind, werden Polynommatrizen im Zeitableitungsoperator $\frac{d}{dt}$, oder gleichwertig, in der Laplace-Variable s betrachtet. Die Koeffizienten der Einträge stammen dabei aus \mathbb{R} statt aus \mathcal{K} . Eine rechteckige Polynommatrix $\mathbf{P}(s) \in \mathbb{R}[s]^{N \times (n_1+n_2)}$ wird in diesem Rahmen häufig als Matrizenpaar $\mathbf{P}(s) = (\mathbf{P}_1(s) \ \mathbf{P}_2(s))$ mit den Polynommatrizen (bzw. Hyperspalten) $\mathbf{P}_1(s)$ und $\mathbf{P}_2(s)$ aufgefasst.

Definition A.21. Eine Matrix $\mathbf{L}(s) \in \mathbb{R}[s]^{N \times N}$ heißt **gemeinsamer Linksteiler** zu einem gegebenen Paar $\mathbf{P}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{N \times n_1}$, $\mathbf{P}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{N \times n_2}$, wenn zwei Polynommatrizen $\bar{\mathbf{P}}_1(s), \bar{\mathbf{P}}_2(s)$ passender Dimensionen existieren, sodass gilt $\mathbf{P}_i(s) = \mathbf{L}(s)\bar{\mathbf{P}}_i(s)$, für $i = 1, 2$. Sind alle gemeinsamen Linksteiler unimodular, dann heißt das Paar bzw. die Matrix $\mathbf{P}(s) = (\mathbf{P}_1(s) \ \mathbf{P}_2(s))$ **linksteilerfrei**.

Lemma A.22. Jedes Matrizenpaar $(\mathbf{P}_1(s) \ \mathbf{P}_2(s)) \in \mathbb{R}[s]^{N \times (N+n_1)}$ (hier aufgefasst als rechteckige Matrix, wobei $\mathbf{P}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{N \times N}$ jetzt als quadratisch vorausgesetzt wird) kann durch Rechtsmultiplikation mit einer unimodularen Matrix $\mathbf{U}(s) \in \mathbb{R}[s]^{(n+n_1) \times (n+n_1)}$ in die hermitesche Normalform

$$(\mathbf{P}_1(s) \ \mathbf{P}_2(s))\mathbf{U}(s) = (\mathbf{L}(s) \ \mathbf{0}_{n \times n_1}) \quad (\text{A.52})$$

(siehe (A.38)) überführt werden. Dabei bezeichnet $\mathbf{L}(s) \in \mathbb{R}^{N \times N}[s]$ den größten gemeinsame Teiler des Paares $(\mathbf{P}_1(s), \mathbf{P}_2(s))$. Insbesondere, existiert für ein linksteilerfreies Paar stets eine unimodulare Matrix $\mathbf{U}(s)$, sodass $(\mathbf{P}_1(s) \ \mathbf{P}_2(s))\mathbf{U}(s) = (\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_{n \times n_1})$ gilt.

Beweis: Siehe z.B. [Rei14, Abschnitt 6.3].

Aus diesem Lemma wird sofort klar, dass Linksteilerfreiheit und Hyperregularität entsprechend Definition A.13 für Polynommatrizen mit reellen Koeffizienten äquivalente Eigenschaften sind.

A.17.2 Überprüfung einer Polynommatrix in $\frac{d}{dt}$ mit Koeffizienten aus \mathcal{K} auf Unimodularität

Für Polynommatrizen mit konstanten Koeffizienten lässt sich die Unimodularitätsprüfung leicht mit Hilfe der Determinante durchführen, siehe Bemerkung A.11. Wenn die

Polynomkoeffizienten nicht konstant sind, sondern von den zeitabhängigen Koordinaten $x_1, \dots, x_{n_x}, \dot{x}_1, \dots$ usw. abhängen, muss die Multiplikationsregel (A.33) beachtet werden. Dann ist die Definition einer Determinante nicht möglich, wie das folgende Beispiel belegt.

Beispiel A.23. Gegeben sei die Matrix $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) = \begin{pmatrix} x_1(t) & 1 \\ 1 & \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{2 \times 2}$. Wendet man formal den Lapaceschen Entwicklungssatz auf die erste Zeile an, ergibt sich

$$\det_1 = x_1(t) \frac{d}{dt} - 1, \tag{A.53}$$

während eine Anwendung auf die zweite Zeile

$$\det_2 = -1 + \frac{d}{dt} x_1 = \dot{x}_1(t) + x_1(t) \frac{d}{dt} - 1 \neq \det_1 \tag{A.54}$$

liefert. ◁

Um eine Matrix aus $\underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{N \times N}$ auf Unimodularität zu überprüfen, kann man stattdessen direkt die Definition A.10 heranziehen und explizit mittels eines Ansatzes versuchen direkt eine Inverse zu bestimmen⁷. Gegeben sei dazu $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{n \times n}$. Für die Inverse kann man einen Ansatz $\check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right)$ mit freien Parametern verwenden. Dabei wird für den zu den Indizes (i, j) gehörende Eintrag von $\check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right)$ das Polynom

$$f_{i,j,0}(\mathbf{x}) + f_{i,j,1}(\mathbf{x}) \frac{d}{dt} + \dots + f_{i,j,\check{k}}(\mathbf{x}) \left(\frac{d}{dt} \right)^{\check{k}} \tag{A.55}$$

mit den zunächst unbekanntenen Funktionen $f_{i,j,k}(\mathbf{x})$ angesetzt. Der maximal mögliche Polynomgrad \check{k} von $\check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right)$ ist durch den maximalen Polynomgrad $\text{grad} \left(\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) =: \bar{k}$ über die Beziehung

$$\check{k} = (N - 1) \cdot \bar{k} \tag{A.56}$$

festgelegt, siehe z.B. [Lé11, S.73]. Bildet man nun das Produkt $\mathbf{R} \left(\frac{d}{dt} \right) := \check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ und verschiebt den Ableitungsoperator im Resultat unter Beachtung von (A.33) nach rechts, kann man wegen

$$\check{\mathbf{P}} \left(\frac{d}{dt} \right) \mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \stackrel{!}{=} \mathbf{I}_N \tag{A.57}$$

für jeden Eintrag einen Koeffizientenvergleich bezüglich $\frac{d}{dt}$ mit dem entsprechenden Eintrag der Einheitsmatrix durchführen. Daraus ergibt sich ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem: Für die $N^2 \cdot (\check{k} + 1)$ freien Parameter $f_{i,j,k}$ resultieren aus dem Koeffizientenvergleich $N^2 \cdot (\check{k} + \bar{k} + 1)$ Bedingungen. Dieses Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \mathcal{U}_m$ gilt. Diese Lösung ist dann notwendigerweise auch

⁷Dieses Vorgehen wurde dem Autor im März 2015 vom Prof. J. Rudolph vorgeschlagen.

eindeutig. Dieser Ansatz steht als Funktion `unimod_inv` im Modul `sympbtools.noncommutativetools` zur Verfügung, siehe S. 197.

Zur Überprüfung auf \mathcal{F} -Unimodularität müssen zusätzlich noch die im Allgemeinen nichtlinearen Gleichungen $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots) = \mathbf{0}$, sowie ggf. Zeitableitungen dieser berücksichtigt werden. Dies kann geschehen, indem aus den Systemgleichungen resultierende Zusammenhänge zwischen den Koordinaten (x_1, \dots, x_{n_x}) bzw. ihren Ableitungen vor der Unimodularitätsprüfung in $\mathbf{P}_{\langle \mathbf{x} \rangle} \left(\frac{d}{dt} \right)$ eingesetzt werden, siehe auch Beispiel 4.16 bzw. [5].

A.18 Vektor-Formen und Polynommatrizen mit differentialform-wertigen Einträgen

Für eine kompakte Notation bietet es sich an, ebenso wie in [Lé11, Fra14] die Rechenregeln der Matrix-Algebra auf Differentialformen zu übertragen. Dazu wird zunächst wie in Abschnitt A.13 die allgemeine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit den Koordinaten x_1, \dots, x_{n_x} betrachtet. Sei $\omega = \sum_{i=1}^{n_x} m_i dx_i \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, dann lässt sich mit Hilfe des „Spaltenvektors“ $d\mathbf{x} = (dx_1 \ \dots \ dx_{n_x})^T$ und des Zeilenvektors der Koeffizienten $\mathbf{m}^T = (m_1 \ \dots \ m_{n_x}) \in \mathcal{K}(\mathcal{M})^{1 \times n_x}$ unter Anwendung der üblichen Matrixmultiplikation auch $\omega = \mathbf{m}^T d\mathbf{x}$ schreiben.

Sei nun $\mathcal{M} = \mathbb{X}_\infty$ (siehe Abschnitt A.15). Dann lässt sich die bisherige Notation auf polynomiale Einträge des Koeffizientenvektors erweitern und es gilt dann also $\mathbf{m} \left(\frac{d}{dt} \right)^T \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{1 \times n_x}$. Dabei wirkt der Ableitungsoperator $\frac{d}{dt}$ wie in Abschnitt A.15 ab S. 150 beschrieben. Beispielsweise gilt $(\cos x_2 \quad -3 \frac{d}{dt}) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \cos(x_2 dx_1 - 3 dx_2)$.

Eine andere Verallgemeinerung ist es, nicht nur Koeffizientenvektoren, sondern Koeffizientenmatrizen mit mehr als einer Zeile zuzulassen. Daraus erhält man dann eine Vektor-1-Form, d.h. einen 1-Form-wertigen Spaltenvektor:

$$\boldsymbol{\omega} := \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{m}_{1,1} \left(\frac{d}{dt} \right) & \dots & \bar{m}_{1,n_x} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{m}_{N,1} \left(\frac{d}{dt} \right) & \dots & \bar{m}_{N,n_x} \left(\frac{d}{dt} \right) \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{m}} \left(\frac{d}{dt} \right)} d\mathbf{x} = \bar{\mathbf{m}} \left(\frac{d}{dt} \right) d\mathbf{x}, \quad (\text{A.58})$$

mit $\bar{\mathbf{m}} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \mathcal{K} \left[\frac{d}{dt} \right]^{N \times n_x}$. Die Menge der Vektor-1-Formen mit N Komponenten wird mit $(\Lambda^1(\mathbb{X}_\infty))^N$ bezeichnet.

Anwendung des Operators d auf Polynommatrizen

Mit den bisher bekannten bzw. eingeführten Rechenregeln kann der äußere Ableitungsoperator d auf eine Vektor-1-Form $\boldsymbol{\omega}$ angewendet werden, in dem er auf ihre einzelnen

Komponenten angewendet wird:

$$d\boldsymbol{\omega} = d \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d\omega_1 \\ \vdots \\ d\omega_N \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

Bei dem Ergebnis handelt es sich folglich um eine Vektor-2-Form, d.h. um ein Element der Menge $(\Lambda^2(\underline{\mathbb{X}}_\infty))^N$.

Darauf aufbauend lässt sich die Wirkung von d auf eine Polynommatrix mit 0-Formwertigen Einträgen konsistent einführen. Sei $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \boldsymbol{\eta}$ mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \in \underline{\mathcal{K}} \left[\frac{d}{dt} \right]^{N \times s}$ und der Vektor-1-Form $\boldsymbol{\eta} \in (\Lambda^1(\underline{\mathbb{X}}_\infty))^s$. Dann kann man über den formalen Zwischenschritt

$$d\boldsymbol{\omega} = d \left(\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \boldsymbol{\eta} \right) = \left(d\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) d\boldsymbol{\eta} \quad (\text{A.60})$$

den Ausdruck

$$\underbrace{\left(d\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \boldsymbol{\eta}}_{=:\boldsymbol{\varphi}} := d \left(\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \boldsymbol{\eta} \right) - \mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) d\boldsymbol{\eta} \quad (\text{A.61})$$

definieren, wobei Minuend und Subtrahend auf der rechten Seite jeweils wohldefinierte Vektor-2-Formen sind. Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie sich einerseits die Komponenten von $d \left(\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \boldsymbol{\eta}$ und andererseits das Produkt $d \left(\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \right) \boldsymbol{\eta}$ für eine beliebige Vektor-1-Form $\boldsymbol{\eta}$ interpretieren lassen.

Sei das Matrix-wertige Polynom $\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right)$ durch

$$\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) := \begin{pmatrix} L_{1,1,0} & \dots & L_{1,s,0} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{N,1,0} & \dots & L_{N,s,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{1,1,1} & \dots & L_{1,s,1} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{N,1,1} & \dots & L_{N,s,1} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \dots + \begin{pmatrix} L_{1,1,\bar{\kappa}} & \dots & L_{1,s,\bar{\kappa}} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{N,1,\bar{\kappa}} & \dots & L_{N,s,\bar{\kappa}} \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^{\bar{\kappa}} \quad (\text{A.62})$$

gegeben, wobei $L_{i,j,\kappa} \in \underline{\mathcal{K}}$ für $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, s$ und $\kappa = 0, \dots, \bar{\kappa}$ gelte. Dann erhält man $d \left(\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \right)$ durch komponentenweise Anwendung:

$$d\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) := \begin{pmatrix} dL_{1,1,0} & \dots & dL_{1,s,0} \\ \vdots & & \vdots \\ dL_{N,1,0} & \dots & dL_{N,s,0} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} dL_{1,1,\bar{\kappa}} & \dots & dL_{1,s,\bar{\kappa}} \\ \vdots & & \vdots \\ dL_{N,1,\bar{\kappa}} & \dots & dL_{N,s,\bar{\kappa}} \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \right)^{\bar{\kappa}}. \quad (\text{A.63})$$

D.h. der zu den Indizes (i, j) gehörende Eintrag der Matrix-1-Form $d\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right)$ ergibt sich aus der 1-Form $dL_{i,j,0} + dL_{i,j,1} \wedge \frac{d}{dt} + \dots + dL_{i,j,\bar{\kappa}} \wedge \left(\frac{d}{dt} \right)^{\bar{\kappa}}$ welche sich auch als Polynom in $\frac{d}{dt}$ mit 1-Formwertigen Koeffizienten auffassen lässt. Das Keilproduktsymbol vor dem jeweiligen Ableitungsoperator erhöht dabei den Grad der Differentialform *nicht*, d.h. sowohl bei den einzelnen Koeffizienten $L_{i,j,\kappa}$ als auch bei der gesamten Summe handelt es sich um 1-Formen. Vielmehr verdeutlicht das \wedge -Symbol, wie das „Matrix-Vektor-Produkt“ $d\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \boldsymbol{\eta}$ aufzufassen ist: Für die i -te Komponente dieses Spaltenvektors gilt

$$\left(d\mathbf{L} \left(\frac{d}{dt} \right) \boldsymbol{\eta} \right)_i = \sum_{\kappa=0}^{\bar{\kappa}} \sum_{j=1}^s dL_{i,j,\kappa} \wedge \left(\frac{d}{dt} \right)^{\kappa} \eta_j = \sum_{\kappa=0}^{\bar{\kappa}} \sum_{j=1}^s dL_{i,j,\kappa} \wedge \eta_j^{(\kappa)}, \quad (\text{A.64})$$

d.h. es handelt sich um die übliche Matrix-Vektor-Multiplikation, wobei das Produkt zwischen den jeweiligen Einträgen durch das Keilprodukt gebildet wird, nachdem der Ableitungsoperator entsprechend Abschnitt A.15 auf den rechten Faktor angewendet wurde. Dass die komponentenweisen Festlegungen in (A.63) und (A.64) tatsächlich mit der Definition (A.61) verträglich sind, ist in [Lé11, Abschnitt 4.5] durch direktes Einsetzen und Ausrechnen gezeigt⁸. In der vorliegenden Arbeit wird stattdessen eine Beispielrechnung zur Veranschaulichung angegeben.

Beispiel A.24 (Anwendung der äußeren Ableitung auf eine Polynommatrix; Implementierung: [(19)]). Gegeben seien

$$\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}_3 & x_2 \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} & 0 & \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} dx_1 + x_3 dx_2 \\ \sin x_3 dx_1 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

Die Berechnung der in der Gleichung (A.61) definierten Vektor-2-Form $\boldsymbol{\varphi}$ erfolgt auf zwei getrennten Wegen:

$$\underbrace{d\left(\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)\boldsymbol{\eta}\right)}_{=:\boldsymbol{\varphi}_1} - \underbrace{\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)d\boldsymbol{\eta}}_{=:\boldsymbol{\varphi}_2} = \underbrace{\left(d\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)\right)\boldsymbol{\eta}}_{=:\boldsymbol{\varphi}_2}, \quad (\text{A.66})$$

d.h. einerseits über die Definition als Differenz der Vektor-2-Formen $\boldsymbol{\zeta}$ und $\boldsymbol{\rho}$ und andererseits über die Anwendung der in (A.63) und (A.64) gegebenen Berechnungsvorschriften. Als erstes Zwischenergebnis ist die Polynommatrix $\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)$ auf die Vektor-1-Form $\boldsymbol{\eta}$ anzuwenden:

$$\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \sin x_3 dx_1 + x_2 d\dot{x}_3 \\ d\dot{x}_1 + \dot{x}_3 dx_2 + x_3 d\dot{x}_2 + d\ddot{x}_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.67})$$

Durch Bilden der äußeren Ableitung erhält man

$$d\left(\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)\boldsymbol{\eta}\right) = \begin{pmatrix} -\dot{x}_3 \cos x_3 dx_1 \wedge dx_3 - \sin x_3 dx_1 \wedge d\dot{x}_3 + dx_2 \wedge d\dot{x}_3 \\ -d\dot{x}_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge d\dot{x}_2 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{\zeta}. \quad (\text{A.68})$$

Andererseits kann man direkt die äußere Ableitung von $\boldsymbol{\eta}$ zu

$$d\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -dx_2 \wedge dx_3 \\ -\cos x_3 dx_1 \wedge dx_3 \\ 0 dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.69})$$

bestimmen und darauf $\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)$ anwenden:

$$\boldsymbol{\rho} := \mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)d\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} -\cos x_3 \dot{x}_3 dx_1 \wedge dx_3 \\ -dx_2 \wedge d\dot{x}_3 + dx_3 \wedge d\dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.70})$$

⁸ Allerdings wird dort der auf Matrizen angewendete Äußere Ableitungsoperator mit \mathfrak{d} statt mit d bezeichnet.

Damit ergibt sich unmittelbar φ_1 zu

$$\varphi_1 = \zeta - \rho = \begin{pmatrix} -\sin x_3 dx_1 \wedge d\dot{x}_3 + dx_2 \wedge d\dot{x}_3 \\ 0 dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.71})$$

Für die direkte Berechnung von $d\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right)$ entsprechend (A.63) bildet man die äußeren Ableitungen der Einträge $L_{i,j}$,

$$d\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right) = d \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}_3 & x_2 \frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} & 0 & \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 dx_1 & d\dot{x}_3 & dx_2 \wedge \frac{d}{dt} \\ 0 dx_1 & 0 dx_1 & 0 dx_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.72})$$

was zusammen mit (A.64) auf

$$\varphi_2 = d\mathbf{L}\left(\frac{d}{dt}\right) \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 dx_1 & d\dot{x}_3 & dx_2 \wedge \frac{d}{dt} \\ 0 dx_1 & 0 dx_1 & 0 dx_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 + x_3 dx_2 \\ \sin x_3 dx_1 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_3 d\dot{x}_3 \wedge dx_1 + dx_2 \wedge d\dot{x}_3 \\ 0 dx_1 \wedge dx_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.73})$$

führt. Aus dem Vergleich zwischen (A.71) und (A.73) geht dann unmittelbar $\varphi_1 = \varphi_2$ hervor. \triangleleft

Bemerkung A.25. Eine 1-Form, die sich als $\omega \wedge \frac{d}{dt}$ schreiben lässt, bei der man also den Zeitableitungsoperator nach rechts ausklammern kann, hat streng genommen nur als linker Faktor in einem Keilprodukt eine Bedeutung, siehe (A.29b), bzw. als Eintrag in einer entsprechenden Matrix. In einem abstrakteren Sinn kann man sie jedoch selbst als speziellen Differentialoperator auffassen. Vor diesem Hintergrund lässt sich analog zu (A.33) die Rechenregel

$$\frac{d}{dt} \tilde{\omega} = \dot{\tilde{\omega}} + \tilde{\omega} \wedge \frac{d}{dt} \quad (\text{A.74})$$

angeben. Existiert kein Faktor rechts einer solchen 1-Form, gilt $\wedge \frac{d}{dt} = 0$. \triangleleft

Anhang B

Ergänzende Detailrechnungen und Implementierungsaspekte

B.1 Existenzbedingung für passive und aktive Konfigurationskoordinaten

In Abschnitt 2.2 wurde angenommen, dass man die Konfigurationskoordinaten derart wählen kann, dass sich die Bewegungsgleichungen in der Form (2.12), d.h.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{M}_{12}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{M}_{12}^T(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{M}_{22}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{C}_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \\ \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

darstellen lassen. Im Folgenden wird untersucht, unter welchen Bedingungen das möglich ist. Ausgangspunkt sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems in der Form (2.8), d.h.

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{B.2})$$

Satz B.1. *Für das allgemeine mechanische System (B.2) existiert genau dann eine Koordinatentransformation $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$, die das System zusammen mit einer Eingangstransformation $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau}$, in die Form*

$$\tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\xi}) \ddot{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) + \tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

überführt, wobei $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{\mathbf{K}}$ entsprechend (2.9) aus den mittels

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi}) := \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \quad (\text{B.4})$$

transformierten Energie-Funktionen

$$\tilde{T}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) := T(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}}), \quad (\text{B.5a})$$

$$\tilde{V}(\boldsymbol{\xi}) := V(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi})) \quad (\text{B.5b})$$

hervorgehen, wenn für die Komponenten der Vektordifferentialform

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}) := \begin{pmatrix} \omega_1(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ \omega_{n_{\mathbf{q}}}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} := \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} \quad (\text{B.6})$$

die Bedingung

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n_{\mathbf{q}}} = 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, n_{\mathbf{q}}. \quad (\text{B.7})$$

gilt.

Beweis: Zunächst soll die Auswirkung einer allgemeinen Koordinatentransformation auf die Bewegungsgleichungen untersucht werden. Im zweiten Schritt wird dann der Zusammenhang zu $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ hergestellt.

Mit Hilfe der $(1 \times n)$ -Zeilenvektoren

$$\mathbf{L}_0(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) := \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad (\text{B.8a})$$

$$\mathbf{L}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) := \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \quad (\text{B.8b})$$

lassen sich die Lagrange-Gleichungen (2.6) in vektorieller Form angeben:

$$\dot{\mathbf{L}}_1^T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{L}_0^T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \stackrel{(2.7)}{=} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\tau} - \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}). \quad (\text{B.9})$$

Andererseits lautet mit $\dot{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{(B.4)}{=} \mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}}$ die Lagrange-Funktion in $\boldsymbol{\xi}$ -Koordinaten

$$\tilde{L}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = L(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}}). \quad (\text{B.10})$$

Nun kann man völlig analog zu (B.8)

$$\tilde{\mathbf{L}}_0(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) := \frac{\partial \tilde{L}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}})}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad (\text{B.11a})$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_1(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) := \frac{\partial \tilde{L}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}})}{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}} \quad (\text{B.11b})$$

eingeführen und als Pendant zu (B.9) die Lagrange-Gleichungen in $\boldsymbol{\xi}$ -Koordinaten in vektorieller Form anschreiben:

$$\dot{\tilde{\mathbf{L}}}_1^T(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) - \tilde{\mathbf{L}}_0^T(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \tilde{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\tau} - \tilde{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}). \quad (\text{B.12})$$

Die Zusammenhänge zwischen den Vektoren \mathbf{L}_0 und $\tilde{\mathbf{L}}_0$ bzw. \mathbf{L}_1 und $\tilde{\mathbf{L}}_1$ sind dabei folgendermaßen: Mit der Kettenregel und Gleichung (B.10) ergibt sich aus (B.11)

$$\tilde{\mathbf{L}}_1 = \mathbf{L}_1 \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi}) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}}}} \mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi}), \quad (\text{B.13a})$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{L}_0 \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi}) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}}}} \mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{L}_1 \Big|_{\substack{\boldsymbol{\theta}=\mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi}) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}=\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}}}} \cdot (\mathbf{Z}''(\boldsymbol{\xi})\dot{\boldsymbol{\xi}}), \quad (\text{B.13b})$$

wobei $(\cdot)'$ die Kurzschreibweise für $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \dot{\xi}}$ ist und im Ausdruck $\mathbf{Z}''(\xi)\dot{\xi}$ die in [Röb05, Abschnitt 2.4] angegebene Tensornotation verwendet wurde. Bei \mathbf{Z}' handelt es sich um eine $n \times n$ -Matrix, sodass eine nochmalige Ableitung nach den n Koordinaten in ξ einen Tensor dritter Stufe liefert. Wendet man diesen auf den $n \times 1$ -Vektor $\dot{\xi}$ an, erhält man wieder eine $n \times n$ -Matrix. Eine vergleichbare Situation tritt bei der Bestimmung von $\ddot{\theta}$ in ξ -Koordinaten auf:

$$\ddot{\theta} \stackrel{\text{(B.4)}}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \mathbf{Z}(\xi) = \frac{d}{dt} (\mathbf{Z}'(\xi)\dot{\xi}) = \mathbf{Z}'(\xi)\ddot{\xi} + (\mathbf{Z}''(\xi)\dot{\xi})\dot{\xi}. \quad (\text{B.14})$$

Mit dieser Notation ergibt die Zeitableitung von (B.13a)

$$\dot{\tilde{\mathbf{L}}}_1 = \left(\tilde{\mathbf{L}}_1\right) \Big|_{\substack{\theta=\mathbf{Z}(\xi) \\ \dot{\theta}=\mathbf{Z}'(\xi)\dot{\xi} \\ \ddot{\theta}=\mathbf{Z}'(\xi)\ddot{\xi}+(\mathbf{Z}''(\xi)\dot{\xi})\dot{\xi}}} \mathbf{Z}'(\xi) + \mathbf{L}_1 \Big|_{\substack{\theta=\mathbf{Z}(\xi) \\ \dot{\theta}=\mathbf{Z}'(\xi)\dot{\xi}}} \cdot (\mathbf{Z}''(\xi)\dot{\xi}) \quad (\text{B.15})$$

und folglich erhält man für die Differenz auf der linken Seite der vektoriellen Lagrange-Gleichung (B.12)

$$\dot{\tilde{\mathbf{L}}}_1^T(\xi, \dot{\xi}) - \tilde{\mathbf{L}}_0^T(\xi, \dot{\xi}) = \mathbf{Z}'(\xi)^T \cdot \left(\tilde{\mathbf{L}}_1 - \mathbf{L}_0\right)^T \Big|_{\substack{\theta=\mathbf{Z}(\xi) \\ \dot{\theta}=\mathbf{Z}'(\xi)\dot{\xi} \\ \ddot{\theta}=\mathbf{Z}'(\xi)\ddot{\xi}+(\mathbf{Z}''(\xi)\dot{\xi})\dot{\xi}}}. \quad (\text{B.16})$$

Mit anderen Worten: Die Lagrange-Gleichungen in ξ -Koordinaten gehen aus (B.9) durch Einsetzen der Rücktransformation $\theta = \mathbf{Z}(\xi)$ und Linksmultiplikation mit deren transponierter Jacobimatrix $\mathbf{Z}'(\xi)^T$ hervor.

Setzt man nun (B.9) in (B.16) ein und das Resultat wiederum in (B.12), erhält man für die rechte Gleichungsseite die Beziehung von (B.12)

$$\tilde{\mathbf{B}}(\xi)\tau - \tilde{\mathbf{R}}(\xi, \dot{\xi}) = \mathbf{Z}'(\xi)^T \left(\mathbf{B}(\theta)\tau - \mathbf{R}(\theta, \dot{\theta})\right) \Big|_{\substack{\theta=\mathbf{Z}(\xi) \\ \dot{\theta}=\mathbf{Z}'(\xi)\dot{\xi}}} \quad (\text{B.17})$$

und damit das wichtige Zwischenergebnis

$$\tilde{\mathbf{B}}(\xi) = \mathbf{Z}'(\xi)^T \cdot \mathbf{B}(\theta) \Big|_{\theta=\mathbf{Z}(\xi)}. \quad (\text{B.18})$$

Damit unter Berücksichtigung der inversen Eingangstransformation

$$\tau = \mathbf{S}^{-1}(\theta)\tilde{\tau} \quad (\text{B.19})$$

die Transformation $\xi = \mathbf{A}(\theta)$ das System (B.2) in die Form (B.3) überführt, muss folglich

$$\underbrace{\left(\mathbf{A}'(\theta)^T\right)^{-1}}_{\mathbf{Z}'(\mathbf{A}(\theta))^T} \mathbf{B}(\theta)\tau = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{S}(\theta) \end{pmatrix} \tau = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\tau} \end{pmatrix} \quad (\text{B.20})$$

gelten. Durch Transponieren und anschließende Rechtsmultiplikation mit \mathbf{A}' erhält man

$$\mathbf{B}(\theta)^T = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}(\theta)^T \end{pmatrix} \mathbf{A}'(\theta). \quad (\text{B.21})$$

Unterteilt man die Koordinatentransformation in $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_p(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{a}_q(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{a}_q(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_q}$ ergibt sich

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})^T = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{a}'_q(\boldsymbol{\theta}), \quad (\text{B.22})$$

bzw. – zusammen mit der Definition (B.6) – in 1-Form-Notation geschrieben

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{a}'_q(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T d\mathbf{a}_q(\boldsymbol{\theta}). \quad (\text{B.23})$$

Das heißt, die Vektor-1-Form $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})$ ist eine Linearkombination der exakten 1-Formen in $d\mathbf{a}_q(\boldsymbol{\theta})$. Als Konsequenz des Satzes von Frobenius, siehe z.B. [CMP07, Abschnitt 1.4] und [PLTS98, Abschnitt 2.3], muss die Bedingung (B.6) notwendigerweise erfüllt sein.

Es bleibt zu zeigen, dass (B.7) bereits hinreichend für die Existenz der Transformation $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ ist. Der hinreichende Teil des Satzes von Frobenius impliziert die Existenz eines (Matrix-wertigen) integrierenden Faktors $(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T)^{-1}$, sodass $(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T)^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})^T$ eine Jacobimatrix ist, nämlich gerade \mathbf{a}'_q (siehe (B.23)). Die n_q linear unabhängigen Zeilen von $(\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{B}^T$ lassen sich nun stets durch eine $n_p \times n$ -Matrix $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ mit vollem Zeilenrang so ergänzen, dass die $n \times n$ -Matrix $\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \end{pmatrix}$ regulär und integrabel ist. Dazu verwendet man beispielsweise den Ansatz

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{B}^{\perp L}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})^T, \quad (\text{B.24})$$

wobei \mathbf{E}_1 eine reguläre $n_p \times n_p$ -Matrix und \mathbf{E}_2 eine beliebige $n_p \times n_q$ -Matrix bezeichnet. Bei $\mathbf{B}^{\perp L}$ handelt es sich um ein Linksorthokomplement von \mathbf{B} , d.h. um n_p linear unabhängige Zeilen, die sämtlich senkrecht auf den Spalten von \mathbf{B} stehen. Die Regularität von $\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \end{pmatrix}$ ist durch diesen Ansatz also per Konstruktion sichergestellt. Im Folgenden wird nachgewiesen, dass man $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ stets so wählen kann, dass $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ eine Jacobimatrix (nämlich gerade $\mathbf{a}'_p(\boldsymbol{\theta})$) ist. Mit der Festlegung der Vektor-1-Form $\boldsymbol{\mu} := \mathbf{B}^{\perp L}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}$ und (B.6) ergibt sich

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\mu} + \mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{B.25})$$

Die aus dem Lemma von Poincaré (siehe Satz A.3) folgende Integrabilitätsbedingung lautet $d(\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$. Durch äquivalente Umformungen lässt sich daraus eine Forderung nach linearer Abhängigkeit herleiten, die sich mit Hilfe der in Abschnitt A.18 eingeführten Matrix-Differentialformen kompakt darstellen lässt. Es gilt demnach

$$\mathbf{0} \stackrel{!}{=} d(\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}) = d(\mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\mu}) + d(\mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega}) \quad (\text{B.26a})$$

$$\Leftrightarrow d\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta})^{-1} (d\mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\mu} + d\mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\omega}), \quad (\text{B.26b})$$

d.h. $d\boldsymbol{\mu}$ ist eine Linearkombination von $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\omega}$ und $d\boldsymbol{\omega}$ mit 1- bzw 0-Form-wertigen Koeffizienten. Wegen

$$d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \stackrel{(\text{B.23})}{=} d(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T d\mathbf{a}_q(\boldsymbol{\theta})) \stackrel{\text{dod}=0}{=} d\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T d\mathbf{a}_q(\boldsymbol{\theta}) \stackrel{(\text{B.23})}{=} d\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T)^{-1} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \quad (\text{B.27})$$

ist $d\boldsymbol{\omega}$ linear abhängig von $\boldsymbol{\omega}$ und aus (B.26b) folgt somit

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\mu} &= -\mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta})^{-1} \left(d\mathbf{E}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu} + \left(d\mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{E}_2(\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^T)^{-1} \right) \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}) \right) \\ &=: \tilde{\mathbf{E}}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu} + \tilde{\mathbf{E}}_2(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Die Zweiformen $d\mu_1, \dots, d\mu_{n_p}$ müssen sich also als Linearkombinationen der 1-Formen μ_1, \dots, μ_{n_p} und $\omega_1, \dots, \omega_{n_q}$ darstellen lassen. Das ist genau dann möglich, wenn

$$d\mu_i \wedge \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_{n_p} \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{n_q} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall i = 1, \dots, n_p. \quad (\text{B.29})$$

gilt. Bei dem Produkt auf der linken Seite handelt es sich um eine $n + 2$ Form über n Variablen. Die Bedingung (B.29) ist somit immer erfüllt. \square

Korollar B.2. Für Systeme mit $n_p = 1$ und für Systeme mit $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \text{konst}(\boldsymbol{\theta})$ existiert immer eine Darstellung der Form (B.1).

Beweis: Im Fall $n_p = 1$ gilt $n_q = n - 1$. Somit ist das Keilprodukt auf der linken Seite von (B.7) eine $n + 1$ -Form in n Variablen und muss folglich verschwinden. Unabhängig davon ist (B.7) erfüllt, wenn \mathbf{B} nicht von $\boldsymbol{\theta}$ abhängt, weil dann $d\omega_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n_q$ gilt. \square

Beispiel B.3 (Ebener Senkrechtstarter; Implementierung: [[20](#)]). Zur Verdeutlichung der diskutierten Koordinatenwahl bzw. -transformation wird das in Abbildung B.1 dargestellte Fluggerät in der vertikalen Ebene betrachtet.

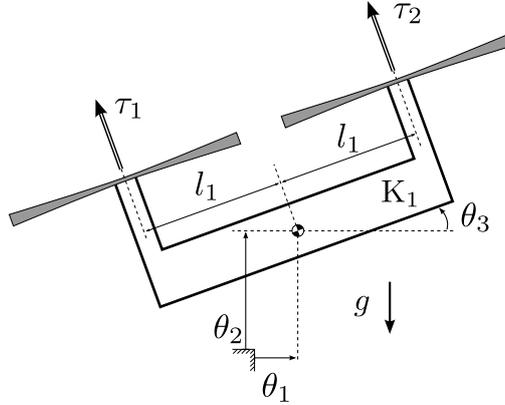


Abbildung B.1: Schematische Darstellung eines Fluggeräts in der vertikalen Ebene (PVTOL). Das System besteht aus dem Starrkörper K_1 der über alle drei ebenen Freiheitsgrade verfügt. Zur Beschreibung der Konfiguration dienen die inertialen Koordinaten $\tilde{\theta}_1$ (horizontale Verschiebung des Schwerpunkts), $\tilde{\theta}_2$ (vertikale Verschiebung des Schwerpunkts) und $\tilde{\theta}_3$ (Verdrehung der Körperachse). Die beiden Kräfte τ_1, τ_2 bilden den Systemeingang. Das System kann als einfaches ebenes Modell eines Quadropters aufgefasst werden.

Zunächst werden die auf das Inertialsystem bezogenen Schwerpunktskoordinaten (θ_1, θ_2) sowie die Orientierung θ_3 zur Beschreibung der Konfiguration benutzt.

Die Bewegungsgleichungen lauten (siehe [⟨20⟩]):

$$\begin{pmatrix} m_1 \ddot{\theta}_1 \\ m_1 \ddot{\theta}_2 + m_1 g \\ J_1 \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 & \cos \theta_3 \\ -l_1 & l_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.30})$$

Aus $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ kann man mit (B.6) unmittelbar die beiden 1-Formen $(\begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix}) = \boldsymbol{\omega}$ ablesen:

$$\omega_1 = -\sin \theta_3 d\theta_1 + \cos \theta_3 d\theta_2 - l_1 d\theta_3 \quad (\text{B.31a})$$

$$\omega_2 = -\sin \theta_3 d\theta_1 + \cos \theta_3 d\theta_2 + l_1 d\theta_3. \quad (\text{B.31b})$$

Wegen $n_{\mathbf{p}} = 1$ und Korollar B.2 ist die von $\boldsymbol{\omega}$ aufgespannte Kodistribution auf jeden Fall integrierbar. Gesucht ist nun eine Basis aus integrierbaren 1-Formen. Dazu vereinfacht man zunächst durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\theta_3 \\ -\sin \theta_3 d\theta_1 + \cos \theta_3 d\theta_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.32})$$

Offensichtlich ist $\tilde{\omega}_1$ bereits integrierbar. Andererseits gilt

$$d\hat{\omega}_2 \wedge \tilde{\omega}_1 = (\cos \theta_3 d\theta_1 \wedge d\theta_3 + \sin \theta_3 d\theta_2 \wedge d\theta_3) \wedge d\theta_3 = 0 \quad (\text{B.33})$$

Deswegen muss es eine Funktion $E(\boldsymbol{\theta})$ geben, sodass mit $\tilde{\omega}_2 := \hat{\omega}_2 + E(\boldsymbol{\theta})\tilde{\omega}_1$ gilt: $d\tilde{\omega}_2 = 0$. Durch Einsetzen des Ansatzes erhält man für diese Zweiform

$$d(\hat{\omega}_2 + E(\boldsymbol{\theta})\tilde{\omega}_1) = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta_3 + \frac{\partial}{\partial \theta_1} E(\theta_1, \theta_2, \theta_3) & \sin \theta_3 + \frac{\partial}{\partial \theta_2} E(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \wedge d\theta_2 \\ d\theta_1 \wedge d\theta_3 \\ d\theta_2 \wedge d\theta_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0, \quad (\text{B.34})$$

woraus man mit $E(\boldsymbol{\theta}) = -\theta_1 \cos \theta_3 - \theta_2 \sin \theta_3$ unmittelbar eine mögliche Lösung dieses Systems von partiellen Differentialgleichungen für die Koeffizienten von $d\tilde{\omega}_2$ ablesen kann. Nun lässt sich bereits der untere Teil der gesuchten Transformation $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ angeben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\theta}) = \int \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \int d\theta_3 \\ \int (-\sin \theta_3 d\theta_1 + \cos \theta_3 d\theta_2 - (\theta_1 \cos \theta_3 - \theta_2 \sin \theta_3) d\theta_3) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \theta_3 \\ -\theta_1 \sin \theta_3 + \theta_2 \cos \theta_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

Zur Bestimmung von $\mathbf{a}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\theta})$ berechnet man zunächst ein möglichst einfaches Linksorthokomplement von $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$ und bildet die 1-Form

$$\mu_1 = \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})^{\perp L} d\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \end{pmatrix} d\boldsymbol{\theta} = \cos \theta_3 d\theta_1 + \sin \theta_3 d\theta_2. \quad (\text{B.36})$$

Diese ist nicht direkt integrierbar, allerdings liefert

$$\tilde{\mu}_1 = \mu_1 - (\theta_1 \cos \theta_3 + \theta_2 \sin \theta_3) \tilde{\omega}_1 = \cos \theta_3 d\theta_1 + \sin \theta_3 d\theta_2 - (\theta_1 \sin \theta_3 + \theta_2 \cos \theta_3) d\theta_3 \quad (\text{B.37})$$

eine exakte 1-Form [⟨20⟩]. Durch deren Integration erhält man

$$(1 \ 0 \ 0) \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{a}_p(\boldsymbol{\theta}) = \int \tilde{\mu}_1 = \theta_1 \cos \theta_3 + \theta_2 \sin \theta_3. \quad (\text{B.38})$$

Die gesamte Transformation lautet mithin

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_p(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{a}_q(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \cos \theta_3 + \theta_2 \sin \theta_3 \\ \theta_3 \\ -\theta_1 \sin \theta_3 + \theta_2 \cos \theta_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

Die Umkehrtransformation folgt durch Auflösen nach $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \xi_2 - \xi_3 \sin \xi_2 \\ \xi_1 \sin \xi_2 + \xi_3 \cos \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

Mit Hilfe der Jacobimatrix

$$\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \cos \xi_2 & -\xi_1 \sin \xi_2 - \xi_3 \cos \xi_2 & -\sin \xi_2 \\ \sin \xi_2 & \xi_1 \cos \xi_2 - \xi_3 \sin \xi_2 & \cos \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}}, \quad (\text{B.41})$$

kann man einerseits die Geschwindigkeiten in den neuen Koordinaten ausdrücken, $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi}) \dot{\boldsymbol{\xi}}$, und andererseits auch die virtuellen Verschiebungen $\delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi}) \delta \boldsymbol{\xi}$. Mit letzteren wiederum lässt sich die virtuelle Arbeit¹ δW in $\boldsymbol{\xi}$ -Koordinaten ausdrücken:

$$\begin{aligned} \delta W &= Q_1 \delta \theta_1 + Q_2 \delta \theta_2 + Q_3 \delta \theta_3 = \delta \boldsymbol{\theta}^T \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \delta \boldsymbol{\xi}^T \cdot (\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\xi}))^T \cdot \mathbf{B}(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\xi})) \cdot \boldsymbol{\tau} \\ &= -\delta \xi_2 l_1 \tau_1 + \delta \xi_2 l_1 \tau_2 + \delta \xi_2 \tau_1 \xi_1 + \delta \xi_2 \tau_2 \xi_1 + \delta \xi_3 \tau_1 + \delta \xi_3 \tau_2. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Durch Koeffizientenvergleich bezüglich $\delta \boldsymbol{\xi}$ erhält man nun mit

$$(\tilde{Q}_1 \ \tilde{Q}_2 \ \tilde{Q}_3)^T = (0 \ (\xi_1 - l_1) \tau_1 + (\xi_2 + l_1) \tau_2 \ \tau_1 + \tau_2)^T \quad (\text{B.43})$$

die rechten Seiten für die Lagrange-Gleichungen in $\boldsymbol{\xi}$ -Koordinaten. Deren linke Seiten ergeben sich aus der Transformation der Energie-Funktionen (siehe (B.5)) und sinngemäßer Anwendung von (2.6). Als Ergebnis erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} m_1 & -m_1 \xi_3 & 0 \\ -m_1 \xi_3 & J_1 + m_1 \xi_1^2 + m_1 \xi_3^2 & m_1 \xi_1 \\ 0 & m_1 \xi_1 & m_1 \end{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{\xi}} + m_1 \begin{pmatrix} -\xi_1 \dot{\xi}_2^2 - 2 \dot{\xi}_2 \dot{\xi}_3 \\ 2 \xi_1 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 + 2 \xi_3 \dot{\xi}_2 \dot{\xi}_3 \\ -\xi_3 \dot{\xi}_2^2 + 2 \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} + gm_1 \begin{pmatrix} \sin \xi_2 \\ \xi_1 \cos \xi_2 - \xi_3 \sin \xi_2 \\ \cos \xi_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -l_1 + \xi_1 & l_1 + \xi_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:= \hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\xi})} \boldsymbol{\tau}, \quad (\text{B.44})$$

¹Auf das Konzept der virtuellen Arbeit wird in der vorliegenden Arbeit nicht tiefer eingegangen. Stattdessen wird beispielsweise auf die Referenz [Nol04, Abschnitt 1.3.4] verwiesen.

welche mit der Eingangstransformation

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2l_1} & \frac{l_1 + \xi_1}{2l_1} \\ \frac{1}{2l_1} & \frac{l_1 - \xi_1}{2l_1} \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{B.45})$$

schließlich in die Form (B.3) überführt werden können. \triangleleft

Beispiel B.4 (Modifizierter ebener Senkrechtstarter; Implementierung: [(20)]). Wird das System aus dem vorangegangenen Beispiel mit der Zusatzbedingung $\tau_2 \equiv 0$ (siehe Abbildung B.2) modifiziert, dann gilt $n_p = 2$ und $n_q = 1$, sodass Korollar B.2 nicht mehr anwendbar ist. Die Matrix

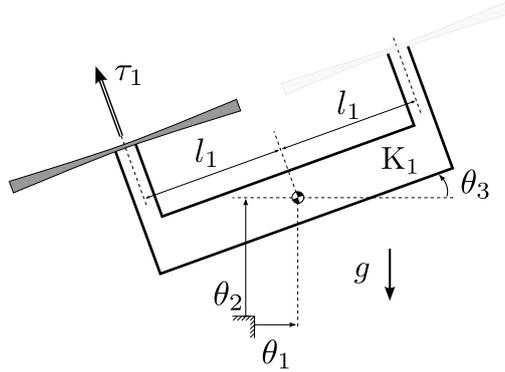


Abbildung B.2: Mit der Bedingung $\tau_2 \equiv 0$ modifizierter Senkrechtstarter aus Abbildung B.1.

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} -\sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 \\ -l_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.46})$$

besteht dann nur noch aus einer Spalte (vgl. (B.30)), sodass mit der Festlegung

$$\omega_1 \stackrel{(\text{B.6})}{:=} -\sin \theta_3 d\theta_1 + \cos \theta_3 d\theta_2 - l_1 d\theta_3 \quad (\text{B.47})$$

$$(\text{B.48})$$

die Keilproduktbedingung aus Satz B.1

$$d\omega_1 \wedge \omega_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{B.49})$$

lautet. Stattdessen erhält man aber

$$\begin{aligned} d\omega_1 \wedge \omega_1 &= (\cos \theta_3 d\theta_1 \wedge d\theta_3 + \sin \theta_3 d\theta_2 \wedge d\theta_3) \wedge (-\sin \theta_3 d\theta_1 + \cos \theta_3 d\theta_2 + -l_1 d\theta_3) \\ &= -1 d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Mit anderen Worten: Das modifizierte Senkrechtstarter-System lässt sich nicht in die Darstellung (B.3) überführen. \triangleleft

B.2 Beispiel zur Nichtexistenz der BI-Normalform aus [OS01] für bestimmte Systeme

Beispiel B.5 (Ebenes Einachsiges Fahrzeug, siehe auch Beispiel 4.57; Implementierung: [(21)]). Betrachtet wird das in Abbildung 4.8 dargestellte System mit $n_{\mathbf{p}} = 1$ und $n_{\mathbf{q}} = 2$. Mit den Abkürzungen

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} J_0 + J_1 + J_2 + l_0^2 m_0 + l_0^2 m_1 + l_0^2 m_2 + l_1^2 m_2 + m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 \\ J_1 + J_2 + l_1^2 m_2 + m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 \\ J_2 + m_2 s_2^2 \\ l_0 m_2 s_2 \\ l_1 m_2 s_2 \\ l_0 l_1 m_2 + l_0 m_1 s_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.51})$$

erhält man für die Teilblöcke der Massenmatrizen \mathbf{M}_{11} , \mathbf{M}_{12} :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 + 2M_4 \cos(p_1 + q_1 + q_2) + 2M_5 \cos q_2 + 2M_6 \cos(p_1 + q_1) \\ M_2 + M_4 \cos(p_1 + q_1 + q_2) + 2M_5 \cos q_2 + M_6 \cos(p_1 + q_1) \\ M_3 + M_4 \cos(p_1 + q_1 + q_2) + M_5 \cos q_2 \end{pmatrix}^T. \quad (\text{B.52})$$

Zu untersuchen ist nun entsprechend [OS01, Abschnitt 3.7], ob die beiden Spalten der Matrix

$$\tilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}}_1 & \tilde{\mathbf{g}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_{11}^{-1} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{I}_{n_{\mathbf{q}}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.53})$$

eine involutive Distribution aufspannen. Die Lie-Klammer der beiden Basisvektorfelder liefert $[\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2] = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \tilde{\mathbf{g}}_3$, wobei $*$ einen von Null verschiedenen umfangreicheren Ausdruck symbolisiert. Offensichtlich ist dieses Vektorfeld nicht in der Distribution $\text{span}(\tilde{\mathbf{g}}_1, \tilde{\mathbf{g}}_2)$ enthalten und diese somit nicht involutiv. Mit anderen Worten: Für dieses System existiert die in [OS01, Abschnitt 3.7] beschriebene Byrnes-Isidori-Normalform nicht. Allerdings existiert, wie für alle Systeme in der Darstellung (2.12), die Lagrange-Byrnes-Isidori-Normalform, siehe Abschnitt 2.3.2. \triangleleft

B.3 Unimodulare Vervollständigung und Koeffizientenbestimmung für den Spezialfall

$$n_{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} n_{\mathbf{x}}$$

Motiviert durch die in Abschnitt 7.2.2 aufgeworfene Frage, ob ein System existiert, für das $c^* \neq 0$ gilt, wird hier ein allgemeines System erster Ordnung (d.h. in der impliziten Systemdarstellung in (4.2) gilt $\gamma = 1$) mit $n_{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} n_{\mathbf{x}}$ betrachtet. Das zugehörige Variationssystem sei durch

$$d\mathbf{F} = \mathbf{P}_0 d\mathbf{x} + \mathbf{P}_1 d\dot{\mathbf{x}} \quad (\text{B.54})$$

$$n_{\mathbf{F}} = \frac{1}{2}n_{\mathbf{x}}$$

gegeben. Die verallgemeinerte Jacobimatrix lautet dann

$$\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right) = \left(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \frac{d}{dt} \right) \quad (\text{B.55})$$

und hat doppelt so viele Spalten wie Zeilen. Wenn das Produkt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I_{n_{\mathbf{F}}} & -I_{n_{\mathbf{F}}} \frac{d}{dt} \\ 0 & I_{n_{\mathbf{F}}} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{U}[\frac{d}{dt}]^{n_{\mathbf{x}} \times n_{\mathbf{x}}}} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \frac{d}{dt} \\ \mathbf{P}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 - \dot{\mathbf{P}}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.56})$$

regulär ist, was für ein generisches System² stets der Fall ist, dann ist $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1$ eine unimodulare Vervollständigung von $\mathbf{P} \left(\frac{d}{dt} \right)$ und mithin $\omega = \mathbf{P}_1 dx$ ein flacher Ausgang des Variationssystems. Damit gilt

$$\dot{\omega} = \dot{\mathbf{P}}_1 dx + \mathbf{P}_1 d\dot{x}. \quad (\text{B.57})$$

Bezeichnen nun $\mathbf{P}_{0,i}$, $\mathbf{P}_{1,i}$ und $\dot{\mathbf{P}}_{1,i}$ jeweils die i -te Zeile von \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 und $\dot{\mathbf{P}}_1$, dann lässt sich an Stelle von (B.54) und (B.57) auch

$$dF_i = \mathbf{P}_{0,i} dx + \mathbf{P}_{1,i} d\dot{x} \quad (\text{B.58a})$$

$$\dot{\omega}_i = \dot{\mathbf{P}}_{1,i} dx + \mathbf{P}_{1,i} d\dot{x} \quad (\text{B.58b})$$

für $i = 1, \dots, n_{\mathbf{F}}$ schreiben. Daraus folgt unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} & \text{coeff}_{d\dot{x}_1 \wedge \dots \wedge d\dot{x}_{n_{\mathbf{x}}}} (\dot{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \dot{\omega}_{n_{\mathbf{F}}} \wedge dF_1 \wedge \dots \wedge F_{n_{\mathbf{F}}}) \\ &= \pm \text{coeff}_{d\dot{x}_1 \wedge \dots \wedge d\dot{x}_{n_{\mathbf{x}}}} \underbrace{((\dot{\mathbf{P}}_{1,1} dx + \mathbf{P}_{1,1} d\dot{x}))}_{\dot{\omega}_1} \wedge \underbrace{(\mathbf{P}_{0,1} dx + \mathbf{P}_{1,1} d\dot{x})}_{dF_1} \wedge \dots \\ &= \pm \text{coeff}_{d\dot{x}_1 \wedge \dots \wedge d\dot{x}_{n_{\mathbf{x}}}} ((\mathbf{P}_{1,1} d\dot{x}) \wedge (\mathbf{P}_{1,1} d\dot{x}) \wedge \dots) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

gelten muss. D.h. wegen Lemma (4.59), verschwindet stets der Koeffizient zu derjenigen Basis- n -Form, die nur aus Faktoren der höchsten Ableitungsordnung besteht. Tatsächlich reicht es dafür schon aus, wenn in $\mathbf{Q} \left(\frac{d}{dt} \right)$ nur eine Zeile von \mathbf{P}_1 auftritt, siehe Gleichung (B.59).

²Hier wird angenommen, dass \mathbf{P}_0 und \mathbf{P}_1 regulär sind und ihrer Einträge in keinem Zusammenhang stehen.

B.4 Rangbestimmung von symbolischen Matrizen

Für einige der in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungsmethoden (siehe z.B. die Abschnitte 4.2 und 4.5) ist die Bestimmung des Rangs einer symbolischen Matrix, d.h. einer Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{z})$ mit n_1 Zeilen und n_2 Spalten, deren Einträge aus symbolischen Ausdrücken in den Variablen $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_{n_z})$ bestehen, erforderlich. Die Rangbestimmung lässt sich auf die Frage zurückführen, ob ein gegebener mathematischer Ausdruck gleich oder ungleich Null ist.

Beispiel B.6. Betrachtet werden die Matrizen

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \sin^2 z_1 + \cos^2 z_1 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & z_2 - 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.60})$$

mit $\det \mathbf{A}_1(\mathbf{z}) = \sin^2 z_1 + \cos^2 z_1 - 1$ bzw. $\det \mathbf{A}_2(\mathbf{z}) = z_2 - 1$. Unter Ausnutzung der Identität $\sin^2 z_1 + \cos^2 z_1 = 1$ hat \mathbf{A}_1 den generischen Rang 1. Ohne diese Information läge stattdessen eine ähnliche Situation wie bei \mathbf{A}_2 vor für allgemeine $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ den Rang zu 2 bestimmen. \triangleleft

Sowohl für Menschen, als auch für ein Computer-Algebra-System (CAS) ist es unter Umständen nicht in endlicher Zeit möglich, für einen gegebenen symbolischen Ausdruck zu entscheiden, ob dieser identisch verschwindet. Als Ausweg bietet es sich an, alle Variablen in dem Ausdruck durch zufällige Zahlen zu ersetzen und damit die Rangbestimmung auf eine numerische Aufgabe zurückzuführen. Aus dieser Herangehensweise ergeben sich zwei Probleme: Erstens hängt der Rang einer symbolischen Matrix im Allgemeinen vom Auswertepunkt ab (z.B. gilt in obigem Beispiel $\text{rank } \mathbf{A}_2(\mathbf{z})|_{z_2=1} = 1$), und zweitens muss durch die begrenzte Darstellungsgenauigkeit von Zahlen im Computer festgelegt werden, unter welchen Umständen ein numerischer Wert als Null angesehen wird.

Die erste Schwierigkeit lässt sich durch folgenden Satz erheblich relativieren:

Satz B.7. *Seien alle Elemente der Matrixwertigen Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{R}^{n_z} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{z})$ analytisch³, und sei $\hat{r} := \max_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}} \text{rank } \mathbf{A}(\mathbf{z})$ der maximal mögliche Rang, dann gilt für fast alle⁴ $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$*

$$\text{rank } \mathbf{A}(\mathbf{z}) = \hat{r}. \quad (\text{B.61})$$

Beweis: Sei $\mathbf{z}^* \in \mathbb{R}^{n_z}$ fixiert und gelte $\text{rank } \mathbf{A}(\mathbf{z}^*) = \hat{r}$. Dann gibt es eine $\hat{r} \times \hat{r}$ Teilmatrix $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{z}^*)$ mit endlicher Determinante. Aufgrund der vorausgesetzten Analytizität und den Eigenschaften der Determinante ist auch $\mathbf{z} \mapsto \det \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{z})$ eine analytische Funktion, d.h. ihr Kern, lässt sich durch eine algebraische Varietät approximieren und ist folglich eine Hyperfläche im \mathbb{R}^{n_z} (Kodimension 1) und damit eine Menge vom Maß null [GZZZ13, S. 331]. \square

³D.h. sie lassen sich lokal beliebig genau durch ihre Taylorreihe approximieren.

⁴Eine Eigenschaft gilt für **fast alle** Elemente in \mathbb{R}^{n_z} , wenn sie nur auf einer Menge vom Lebesgue-Maß null nicht erfüllt ist, siehe z.B. [Els05, Definition 4.4.1, S. 140].

Mit anderen Worten: Unter den genannten Voraussetzungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass man durch Einsetzen eines zufälligen Elements aus $\mathbb{R}^{n \times z}$ einen anderen als den maximal möglichen Rang erhält, gleich 0. Deshalb wird der maximale Rang als **generischer Rang** bezeichnet. Die Notwendigkeit der Annahme, dass alle Einträge analytisch sein müssen, lässt sich leicht am Gegenbeispiel der 1×1 -Matrix $(\operatorname{sgn}(z_1) + 1)$ verdeutlichen, welche für $z_1 < 0$ den Rang 0 und für $z_1 > 0$ den Rang 1 hat.

Für die regelungstechnischen Untersuchungen in dieser Arbeit ist in der Regel der generische Rang ausreichend. Falls notwendig werden Singularitäten, d.h. die Teilmengen mit kleinerem Rang gesondert betrachtet. Obwohl es sich dabei um Nullmengen handelt, können sie eine besondere Bedeutung haben (z.B. Ruhelagen).

Die zweite oben identifizierte Schwierigkeit soll zunächst mit einem Beispiel illustriert werden.

Beispiel B.8 (Numerische Rangbestimmung; Implementierung: $[\langle 22 \rangle]$). Betrachtet werden die Ausdrücke

$$A_1 := "(\sin 3.0)^2 + (\cos 3.0)^2 - 1" \quad \text{bzw.} \quad A_2 := "(\sin 3.0)^{500}" \quad (\text{B.62})$$

Ihre numerische Auswertung (symbolisiert durch $\operatorname{evalf}(\cdot)$) mit **SymPy** ergibt⁵

$$\operatorname{evalf}(A_1) \approx -1.11 \cdot 10^{-16} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{evalf}(A_2) \approx 6.23 \cdot 10^{-426}, \quad (\text{B.63})$$

d.h. obwohl A_1 symbolisch gleich null ist und A_2 nicht, legt die (direkte) numerische Auswertung einen entgegengesetzten Schluss nahe. \triangleleft

Ursache für diese Problematik ist die endliche Darstellungsgenauigkeit von Zahlen im Computer und die daraus resultierenden Rundungsfehler. Typischerweise wird für numerische Berechnungen ein Datentyp mit sogenannter „doppelter Genauigkeit“ verwendet. Dabei liegt die Maschinengenauigkeit, d.h. die kleinste positive Zahl ε für die (bei Auswertung durch die entsprechende Software) $1 + \varepsilon > 1$ gilt, im Bereich von 10^{-16} , [Wik16]. Während das CAS **SymPy** standardmäßig für Gleitkommaberechnungen auch diesen Datentyp einsetzt, erlaubt es jedoch auch die Auswertung von Gleitkommaberechnungen mit beliebiger (vorgebbarer) Genauigkeit. Zusammen mit der Annahme, dass sich ein mathematischer Ausdruck, der tatsächlich gleich 0 ist, bei höherer Auswertegenauigkeit streng monoton dem Wert 0 annähert, lässt sich damit „numerisches Rauschen“ von kleinen aber endlichen Zahlen zu unterscheiden. Dazu werden in den zu untersuchenden Ausdruck $A(\mathbf{z})$ anstelle von Gleitkommazahlen exakte rationale Zahlen eingesetzt. Anschließend wird eine Gleitkommaauswertung einmal mit moderater und einmal mit hoher Präzision, d.h. einmal mit 100 und einmal mit 200 signifikanten Dezimalstellen durchgeführt⁶. Man erhält die numerischen Werte A_{100} und A_{200} . Der Ausdruck $A(\mathbf{z})$ wird genau dann als Null angesehen, wenn die (willkürliche) Festlegung

$$\left| \frac{A_{200}}{A_{100}} \right| < 0.01 \quad (\text{B.64})$$

⁵Vergleichbare Ergebnisse erhält man auch mit den Programmen **Octave**, **Maxima** und **MATLAB**.

⁶Dabei ist zu beachten, dass auch die „moderate“ Genauigkeit deutlich genauer ist, als die typische Gleitkommapräzision mit ca. 15 signifikanten Stellen.

erfüllt ist.

Beispiel B.9 (Fortsetzung von Beispiel. B.8; Implementierung: [(22)]). Durch Verwendung des SymPy-Datentyps `Rational` anstelle des Python-Standard-Gleitkommatyps `float` (doppelte Genauigkeit) erhält man zusammen mit Genauigkeitsvorgabe von 100 (`evalf100`) bzw. 200 Stellen bereits deutlich genauere Ergebnisse:

$$\text{evalf}_{100}(\text{"}(\sin 3)^2 + (\cos 3)^2 - 1\text{"}) \approx -3.04 \cdot 10^{-210}, \quad (\text{B.65a})$$

$$\text{evalf}_{200}(\text{"}(\sin 3)^2 + (\cos 3)^2 - 1\text{"}) \approx -1.59 \cdot 10^{-409}. \quad (\text{B.65b})$$

Prinzipiell bleibt aber das Problem, dass auch bei diesen genaueren Ergebnissen ein fester absoluter Schwellwert zu Fehlinterpretationen führen kann, siehe (B.63). Deswegen wird der Quotient

$$\frac{\text{evalf}_{200}(\text{"}(\sin 3)^2 + (\cos 3)^2 - 1\text{"})}{\text{evalf}_{100}(\text{"}(\sin 3)^2 + (\cos 3)^2 - 1\text{"})} \approx 5.23 \cdot 10^{-200} \approx 0 \quad (\text{B.66})$$

betrachtet, aus dem mit der Festlegung (B.64) erwartungsgemäß gefolgert werden kann dass der Ausdruck verschwindet.

Andererseits erhält man für

$$\frac{\text{evalf}_{200}(\text{"}(\sin 3)^{500}\text{"})}{\text{evalf}_{100}(\text{"}(\sin 3)^{500}\text{"})} \approx 1 - 3.85 \cdot 10^{-102} \approx 1. \quad (\text{B.67})$$

<

Nachdem nun geklärt ist, wie algorithmisch festgestellt werden kann, ob ein mathematischer Ausdruck gleich Null ist oder nicht, soll nun die eigentliche Rangbestimmung betrachtet werden. Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ mit numerischen Einträgen ist es üblich⁷ die **Singulärwerte**, d.h. die Quadratwurzeln der nichtverschwindenden Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \in n_2 \times n_2$, zu betrachten, siehe [Ber09, Definition 5.6.1]. Der Rang von \mathbf{A} entspricht gerade der Anzahl der positiven Singulärwerte dieser Matrix, und folglich der Anzahl der nichtverschwindenden Eigenwerte von $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, siehe ebenfalls [Ber09, Definition 5.6.1]. Bezeichne nun d die Anzahl der verschwindenden Eigenwerte (bzw. die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 0) von $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, dann gilt:

$$\text{rank } \mathbf{A} = n_2 - d, \quad (\text{B.68})$$

⁷Z.B. verwenden die Software Pakete `Numpy`, `Octave` und `MATLAB` diesen Ansatz. Die im Paket `SymPy` bereits implementierte `rank()`-Methode, basiert stattdessen auf einer Umformung der Matrix in die sogenannte reduzierte Spaltenstufenform. Dieser Ansatz ist für symbolische Matrizen günstiger, setzt aber eine verlässliche Null-Elemente-Erkennung voraus. Während die ob beschriebene Methode prinzipiell hierfür verwendet werden könnte, ist ihre Kombination mit dem Singulärwert-Ansatz aus Implementierungssicht vorzuziehen.

d.h. die Rangbestimmung kann auf die Bestimmung von des sogenannten Defekts d zurückgeführt werden. Da die konkreten numerischen Werte der anderen Eigenwerte irrelevant sind, reicht es, die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\det(\lambda \mathbf{I}_{n_2} - \mathbf{A}^T \mathbf{A}) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + \underbrace{a_{n_2}}_1 \lambda^{n_2} \quad (\text{B.69})$$

zu betrachten. Der Defekt d ergibt sich aus den Bedingungen

$$a_i = 0 \text{ für } i < d, \quad (\text{B.70a})$$

$$a_i \neq 0 \text{ für } i = d, \quad (\text{B.70b})$$

mit anderen Worten, aus dem Index i des ersten nichtverschwindenden Koeffizienten.

Im Gegensatz zu den Singulärwerten von \mathbf{A} lassen sich die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ in `SymPy` mit beliebig vorgegebbarer Genauigkeit durch die `berkowitz()`-Methode berechnen, welche auf dem in [Ker09] vorgestellten Ansatz basiert. Mittels der oben beschriebenen „Quotientenmethode“ kann dann numerisch robust der erste nichtverschwindende Koeffizient und damit der Rang von \mathbf{A} bestimmt werden. Für weitere Implementierungsdetails sei auf den Quellcode verwiesen, siehe Seite 197.

Symbolverzeichnis

Bemerkung B.10. In der vorliegenden Arbeit wird eine vereinzelte Doppelbelegungen von Symbolen zugelassen, wenn es einerseits der Lesbarkeit und Nachvollziehbarkeit dient und andererseits eine Verwechslung durch den Verwendungszusammenhang ausgeschlossen werden kann. Wie in vielen anderen deutschsprachigen Fachpublikationen wird der Punkt als Trennzeichen für Dezimalbrüche verwendet, das Komma dagegen als Trennzeichen für Aufzählungen.

Lateinische Buchstaben

Symbol	Bedeutung	Bezug
$\mathbf{A}^{\perp L}, \mathbf{A}^{\perp R}$	Ein Links- bzw. Rechtsorthokomplement einer Matrix \mathbf{A}	Gl. (2.48)
\mathbf{a}	Vektor der aktuierten Beschleunigungen, Eingang für exakt linearisierte mechanische Systeme (bei Eingangs-Ausgangs- oder Eingangs-Zustands-Linearisierung)	Gl. (2.18)
$\text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}$	k -fach iterierte Lie-Klammer des Vektorfeldes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ mit dem Vektorfeld $\mathbf{f}(x)$	Gl. (A.12)
\mathbf{b}_r	Eingangsvektor in reeller Jordan-Normalform	Gl. (6.13)
c^*	Koeffizient von Γ_{k^*} bezüglich der n -Form $d\theta_1^{(k)} \wedge \dots \wedge d\theta_n^{(k)}$	Gl. (4.161)
$\text{coeff}_{\Psi_\sigma}(\mu)$	Koeffizientenabbildung der r -Form μ bezüglich der Basis- r -Form Ψ_σ	Gl. (4.159)
$\text{col}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$	Spaltenvektor, gebildet aus den Komponenten der Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{q}	Gl. (2.15)
\mathbf{C}, \mathbf{C}_i	Vektoren der Coriolis- und Zentrifugalkräfte	Gl. (2.9a)
d	Äußere Ableitung von Funktionen und Differentialformen	Abschn. A.13
$dx_i, d\theta_i$	Zur Koordinate x_i bzw. θ_i gehörende Basis-1-Form	Abschn. A.13
$dx_i^{(k)}$	Zur Koordinate $x^{(k)}$ gehörende Basis-1-Form; Element von $\Lambda^1(\mathbb{X}_\infty)$	Abschn. A.15
$d\mathbf{x}$	Vektorwertige 1-Form: $d\mathbf{x} = (dx_1 \dots dx_{n_x})^T$	Abschn. A.18
$\mathbf{F}(\mathbf{a})$	Vektorwertige Funktion zur Definition eines nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems in den Unbekannten \mathbf{a} bzw. des zugehörigen Optimierungsproblems	Gl. (5.25)
$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(\kappa)})$	Vektorwertige Funktion zur Angabe impliziter Systemgleichungen	Gl. (4.2)
\mathcal{F}	Lösungsmenge der Gleichungen $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^{(\kappa)}) = \mathbf{0}$ und Zeitableitung beliebiger Ordnung	Gl. (A.35)
$\text{GL}(n)$	Menge der regulären $n \times n$ -Matrizen	Abschn. A.4
\mathbf{H}_k	Hessematrix der Funktion $f_{\mathbf{z}_4, k}(\cdot, \cdot)$ bezüglich des zweiten Arguments	Abschn. 4.6

Symbol	Bedeutung	Bezug
\mathbf{I}_N	$N \times N$ -Einheitsmatrix	Abschn. 2.2
id_m	m -dimensionale Identische Abbildung	Abschn. 4.4
$\text{in}(\mathbf{A})$	Trägheitsindex der quadratischen Matrix \mathbf{A}	Abschn. 3.3
$\text{inv}(\Delta)$	Involutiver Abschluss der Distribution Δ	Abschn. 4.5
$\mathcal{I}_{r,N}$	Menge aller geordneter r -Tupel mit Einträgen aus $\{1, \dots, N\} \subset \mathbb{N}_+$	Abschn. A.13
\mathbf{J}_r	Systemmatrix in reeller Jordan-Normalform	Gl. (6.13)
$\tilde{\mathbf{J}}$	Systemmatrix des oszillierenden Teilsystems	Gl. (6.14)
$\bar{\mathbf{J}}$	Systemmatrix des exponentiell gedämpften Teilsystems	Gl. (6.14)
$\mathcal{K}(\mathcal{M}), \underline{\mathcal{K}}$	Menge (Körper) der meromorphen Funktionen über der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} bzw. $\underline{\mathbb{X}}_\infty$	Abschn. A.12
$\underline{\mathcal{K}}[\frac{d}{dt}]$	Ring der Schiefpolynome im Ableitungsoperator $\frac{d}{dt}$ mit Koeffizienten aus $\underline{\mathcal{K}}$	Abschn. A.16
$\underline{\mathcal{K}}[\frac{d}{dt}]^{r \times s}$	Menge der $r \times s$ -Matrizen mit Einträgen aus $\underline{\mathcal{K}}[\frac{d}{dt}]$	Abschn. A.17
$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$	Vektor der konservativen und dissipativen verallgemeinerten Kräfte	Abschn. 2.2
k^*	Hilfsgröße: $k^* := \max(k_{\Omega_0}, 2)$	Gl. (4.150)
k_{Ω_0}	Ableitungsordnung des flachen Ausgangs des Variationssystems	Gl. (4.148)
$L(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$	Lagrange-Funktion	Abschn. 2.2
$\mathcal{L}_f^k h(\mathbf{x})$	Lie-Ableitung der Ordnung k des Skalarfeldes $h(x)$ entlang des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$	Abschn. 4.2
$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$	Massenmatrix eines mechanischen Systems	Abschn. 2.2
$\bar{\mathbf{M}}$	Konstante Massenmatrix eines linearen mechanischen Systems	Gl. (3.6)
$\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_+$	Menge der Natürlichen Zahlen mit bzw. ohne 0	
n	Anzahl der Freiheitsgrade eines mech. Systems	Abschn. 2.2
$n_{\mathbf{F}}$	Anzahl der skalaren Systemgleichungen eines impliziten dynamischen Systems $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$	Gl. (4.2)
n_k	Anzahl konjugiert komplexer Eigenwertpaare	Abschn. 6.2
$n_{\mathbf{p}}$	Anzahl der passiven Freiheitsgrade eines mechanischen Systems	Gl. (2.14)
$n_{\mathbf{q}}$	Anzahl der aktuierten Freiheitsgrade eines mechanischen Systems ($\hat{=}$ Anzahl der Stellgrößen)	Gl. (2.14)
$n_{\mathbf{x}}$	Anzahl der Systemgrößen/Koordinaten \mathbf{x}	Gl. (4.2)
$\mathbf{O}_{n_1 \times n_2}$	Geeignet geformte Nullmatrix aus $\mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$	Gl. (4.194)
$\text{ord}_{d\boldsymbol{\theta}}$	höchste Ableitungsordnung bezüglich der Basisformen	S. 77
\mathbf{p}	Vektor der nicht aktuierten Konfigurationskoordinaten	Gl. (2.14)
$\mathbf{P}(\frac{d}{dt})$	Matrix, deren Einträge Schiefpolynome in $\frac{d}{dt}$ sind	Abschn. 4.4
$\mathbf{P}_{\mathbf{F}}(\frac{d}{dt})$	Verallgemeinerte Jacobimatrix der Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\gamma)}) = \mathbf{0}$	Abschn. 4.4
\mathbf{q}	Vektor der aktuierten Konfigurationskoordinaten	Gl. (2.14)
$\mathbf{R}_{\mathbf{r}}$	Zum vektoriellen relativen Grad \mathbf{r} gehörende Entkopplungsmatrix	Definition 4.3
$\mathcal{R}_T^U(\mathbf{x}_0)$	Menge der innerhalb einer Zeit $\tilde{T} \leq T$ von \mathbf{x}_0 aus erreichbaren Punkte	Gl. (4.60)

Symbol	Bedeutung	Bezug
$r(k)$	Grad der Differentialform $\Xi_{i,k}$	Gl. (4.153a)
$\underline{s}(k)$	Maximale Anzahl der in der $r(k)$ -Form $\Xi_{i,k}$ als Faktoren auftretenden Basis-1-Formen	Gl. (4.153b)
$T(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$	kinetische Energie eines mechanischen Systems	Abschn. 2.2
T	Betrachtete Laufzeit einer Trajektorie eines dynamischen Systems	Gl. (5.2)
\mathbf{u}	Vektor der Geschwindigkeiten der nicht aktuierten Konfigurationskoordinaten	Gl. (2.14)
\mathbf{v}	Vektor der Geschwindigkeiten der aktuierten Konfigurationskoordinaten	Gl. (2.14)
\mathbf{y}	(Flacher) Ausgang eines Systems	Definition 4.1
\mathcal{X}	Offene und konvexe Teilmenge des $\mathbf{R}^{n_{\mathbf{x}}}$, welche als Zustandsraum bzw. als Bildbereich von Trajektorien allgemeiner Systemgrößen $t \mapsto \mathbf{x}(t) \ni \mathcal{X}$ dient	Abschn. 4.1
$\underline{\mathbb{X}}_{\kappa}$	Manigfaltigkeit mit den Koordinaten $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(\kappa)}$	Gl. (A.22)
$\underline{\mathbb{X}}_{\infty}$	Unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots$	Gl. (A.22)

Griechische Buchstaben und sonstige Symbole

Symbol	Bedeutung	Bezug
Γ_k	Spezielle Differentialform vom Grad $r \leq n$	Gl. (4.149)
γ	Maximale Ableitungsordnung von \mathbf{x} in den impliziten Systemgleichungen	Gl. (4.2)
Θ_k	Spezielle Differentialform vom Grad n	Gl. (4.161)
$\boldsymbol{\theta}$	Vektor der Konfigurationskoordinaten $\theta_1, \dots, \theta_n$ eines mechanischen Systems	Abschn. 2.2
κ	(maximal auftretende) Ableitungsordnung eines Tupels von Systemgrößen	Abschn. 4.1
$\Lambda^r(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa})$	Menge aller r -Formen auf $\underline{\mathbb{X}}_{\kappa}$	Abschn. A.15
$(\Lambda^r(\underline{\mathbb{X}}_{\kappa}))^N$	Menge aller N -elementigen Vektor- r -Formen auf $\underline{\mathbb{X}}_{\kappa}$	Abschn. A.18
$\Xi_{i,k}$	Spezielle Differentialform vom Grad $r \leq k \cdot n$	Gl. (4.149)
$\sigma_{i,j,k}$	Koeffizienten eines bilinearen Gleichungssystems	Gl. (4.91)
$\boldsymbol{\sigma}$	Index-Tupel	Abschn. 4.7.2
$\boldsymbol{\sigma}(i)$	i -tes Element von $\boldsymbol{\sigma}$	Abschn. 4.7.2
$\boldsymbol{\tau}$	Vektor der Eingangsgrößen eines mechanischen Systems (verallgemeinerte Kräfte) oder eines allgemeinen dynamischen Systems	Abschn. 2.2
Φ_k	Spezielle Differentialform vom Grad $n_{\mathbf{F}} = n_{\mathbf{x}} - m$	Gl. (4.125)
$\Psi_{\boldsymbol{\sigma}}$	Spezielle Differentialform vom Grad r wobei $\boldsymbol{\sigma}$ ein Indextupel mit r Elementen ist	Gl. (4.158)
Ω_k	Spezielle Differentialform vom Grad m	Gl. (4.125)

Literaturverzeichnis

- [Ada14] ADAMY, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Aufl., 2014.
- [AF00] ÅSTRÖM, K. J. und FURUTA, K.: *Swinging up a pendulum by energy control*. *Automatica*, 36(2):287–295, 2000.
- [AF01] AGRICOLA, I. und FRIEDRICH, T.: *Globale Analysis: Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik*. Vieweg, Braunschweig, 2001.
- [AM87] ABRAHAM, R. und MARSDEN, J. E.: *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley, Redwood City, 2. Aufl., 1987.
- [AMR88a] ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E. und RATIU, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications (Applied Mathematical Sciences)*. Springer, New York, 2. Aufl., 1988.
- [AMR88b] ASCHER, U. M., MATTHEIJ, R. M. M. und RUSSEL, R. D.: *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [AP82] ARROWSMITH, D. K. und PLACE, C. M.: *Ordinary Differential Equations*. Chapman and Hall, London, 1982.
- [AP90] ARROWSMITH, D. K. und PLACE, C. M.: *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Arn01] ARNOLD, V. I.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, Berlin, 2. Aufl., 2001.
- [AVK11] ANDRONOV, A. A., VITT, A. A. und KHAIKIN, S. E.: *Theory of Oscillators*. Dover Publications, New York, 2011.
- [B⁺03] BLOCH, A. M. et al.: *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, New York, 2003.
- [Ber09] BERNSTEIN, D. S.: *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2. Aufl., 2009.

- [BI88] BYRNES, C. und ISIDORI, A.: *Feedback stabilization about attractors and the problem of asymptotic disturbance rejection*. In *Proc. of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, S. 32–36. Austin, Texas, 1988.
- [BL04] BULLO, F. und LEWIS, A. D.: *Geometric Control of Mechanical Systems*. Springer, New York, 2004.
- [BM95] BACCIOTTI, A. und MAZZI, L.: *Stabilizability of closed orbits*. *Systems & Control Letters*, 24(2):97–101, 1995.
- [BMS96] BACCIOTTI, A., MAZZI, L. und SABATINI, M.: *Generation of stable limit cycles in controllable linear systems*. *Systems & Control Letters*, 28(1):43–48, 1996.
- [Bou13] BOUBAKER, O.: *The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: a survey*. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 10:1–9, 2013.
- [BPR03] BASU, S., POLLACK, R. und ROY, M.-F.: *Algorithms in Algebraic Geometry*. Springer, Berlin, 2003.
- [BS92] BORTOFF, S. A. und SPONG, M. W.: *Pseudolinearization of the Acrobot using spline functions*. In *Proc. of the 31st Conf. on Decision and Control*, S. 593–598. Tucson, Arizona, 1992.
- [BS06] BANAVAR, R. und SANKARANARAYANAN, V.: *Switched Finite Time Control of a Class of Underactuated Systems*. Springer, Berlin, 2006.
- [Buc07] BUCHLI, J.: *Engineering Limit Cycle Systems: Adaptive Frequency Oscillators and Applications to Adaptive Locomotion Control of Compliant Robots*. Dissertation, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.
- [CB97] CAMERON, J. M. und BOOK, W. J.: *Modeling Mechanisms with Nonholonomic Joints Using the Boltzmann-Hamel Equations*. *The International Journal of Robotics Research*, 16(1):47–59, 1997.
- [CBCDB14] CHOUKCHOU-BRAHAM, A., CHERKI, B., DJEMAI, M. und BUSAWON, K.: *Analysis and Control of Underactuated Mechanical Systems*. Springer International Publishing Switzerland, Cham, 2014.
- [CMP07] CONTE, G., MOOG, C. H. und PERDON, A. M.: *Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems*. Springer, London, 2. Aufl., 2007.
- [Col12] COLLON, C.: *Entwurf invarianter Folgeregler für Systeme mit Lie-Symmetrien*. Logos, Berlin, 2012.
- [Deu03] DEUTSCHER, J.: *A linear differential operator approach to flatness based tracking for linear and non-linear systems*. *International Journal of Control*, 76(3):266–276, 2003.

- [DLIMO02] DE LUCA, A., IANNITTI, S., MATTONE, R. und ORIOLO, G.: *Underactuated Manipulators: Control Properties and Techniques*. Machine Intelligence and Robotic Control, 4:113–125, 2002.
- [DMGM00] DALLA MORA, M., GERMANI, A. und MANES, C.: *Design of State Observers from a Drift-Observability Property*. IEEE Trans. on Automatic Control, 45(8):1536–1540, 2000.
- [Els05] ELSTRODT, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, Berlin, 3. Aufl., 2005.
- [Far94] FARKAS, M.: *Periodic motions*. Springer, New York, 1994.
- [FFKR16] FRITZSCHE, K., FRANKE, M., KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Über die systematische Bestimmung flacher Ausgänge nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. at - Automatisierungstechnik, 2016. (eingereicht).
- [FKFR16] FRITZSCHE, K., KNOLL, C., FRANKE, M. und RÖBENACK, K.: *Unimodular completion and direct flat representation in the context of differential flatness*. Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics, 2016. (eingereicht).
- [FL01] FANTONI, I. und LOZANO, R.: *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer, London, 2001.
- [FLMR95] FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P. und ROUCHON, P.: *Flatness and defect of non-linear systems: Introductory Theory and Examples*. International Journal of Control, 61:1327–1361, 1995.
- [FLMR99] FLIESS, M., LÉVINE, J., MATRIN, P. und ROUCHON, P.: *A Lie-Bäcklund Approach to Equivalence and Flatness of Nonlinear Systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, 44(5):922–937, 1999.
- [FRA13] FRANCH, J., REYES, A. und AGRAWAL, S. K.: *Differential flatness of a class of n -DOF planar manipulators driven by an arbitrary number of actuators*. In *Proc. of the European Control Conference*, S. 161–166. 2013.
- [Fra14] FRANKE, M.: *Über die Konstruktion flacher Ausgänge für nichtlineare Systeme und zur Polzuweisung durch statische Ausgangsrückführungen*. Logos, Berlin, 2014.
- [Fri15] FRITZSCHE, K.: *Untersuchung und Implementierung eines Algorithmus zur Analyse nichtlinearer Systeme auf differentielle Flachheit*. Diplomarbeit, TU Dresden, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 2015.
- [FRW09] FRANKE, M., RUDOLPH, J. und WOITTENNEK, F.: *Motion planning and feedback control of a planar robotic unicycle model*. In *Proc. Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics*, S. 501–506. 2009.

- [Fö93] FÖLLINGER, O.: *Nichtlineare Regelungen II*. Oldenbourg-Verlag, München, 1. Aufl., 1993.
- [Gan86] GANTMACHER, F. R.: *Matrizentheorie*. Springer, Berlin, 1986.
- [GEK13] GLÜCK, T., EDER, A. und KUGI, A.: *Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation*. Automatica, 49(3):801–808, 2013.
- [GH86] GUCKENHEIMER, J. und HOLMES, P.: *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, New York, 2. Aufl., 1986.
- [GHZ05] GRAICHEN, K., HAGENMEYER, V. und ZEITZ, M.: *A new approach to inversion-based feedforward control design for nonlinear systems*. Automatica, 41(12):2033–2041, 2005.
- [GLD93] GULL, S., LASENBY, A. und DORAN, C.: *Imaginary numbers are not real – the geometric algebra of spacetime*. Foundations of Physics, 23(9):1175–1201, 1993.
- [GPS06] GOLDSTEIN, H., POOLE, C. P. und SAFKO, J. L.: *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH, 2006.
- [Gra06] GRAICHEN, K.: *Feedforward Control Design for Finite-Time Transition Problems of Nonlinear Systems with Input and Output Constraints*. Shaker Verlag, Aachen, 2006.
- [Gra15] GRAICHEN, K.: *Methoden der Optimierung und optimalen Steuerung*, 2015. Vorlesungs-Skriptum, Universität Ulm, WS 2015/16.
- [GTZ07] GRAICHEN, K., TREUER, M. und ZEITZ, M.: *Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation*. Automatica, 43(1):63–71, 2007.
- [GZ06] GRAICHEN, K. und ZEITZ, M.: *Inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf mit Ein- und Ausgangsbeschränkungen*. Automatisierungstechnik, 54(4):187–199, 2006.
- [GZZZ13] GROSCHE, G., ZIEGLER, V., ZEIDLER, E. und ZIEGLER, D., Hg.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik: Teil II*. Teubner Verlag, Wiesbaden, 8. Aufl., 2013.
- [Hag03] HAGENMEYER, V.: *Robust nonlinear tracking control based on differential flatness*. VDI Verlag, Düsseldorf, Germany, 2003.
- [Hau70] HAUTUS, M. L. J.: *Stabilization controllability and observability of linear autonomous systems*. In *Indagationes mathematicae (proceedings)*, S. 448–455. 1970.

- [Hes99] HESTENES, D.: *New foundations for classical mechanics*. Kluwer, New York, 2. Aufl., 1999.
- [HM90] HAUSER, J. und MURRAY, R. M.: *Nonlinear controllers for non-integrable systems: the Acrobot example*. In *Proc of the American Control Conference*, S. 669–671. 1990.
- [HN91] HILGERT, J. und NEEB, K.-H.: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Vieweg, 1991.
- [HRK16] HUANG, C., RÖBENACK, K. und KNOLL, C.: *Semi-Analytic Finite Horizon Control of an Underactuated Manipulator*. In *Proc. of the 13th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*. Leipzig, 2016.
- [HSZ03] HACKBUSCH, W., SCHWARZ, H. R. und ZEIDLER, E.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2. Aufl., 2003.
- [IHGC12] INCE, D. C., HATTON, L. und GRAHAM-CUMMING, J.: *The case for open computer programs*. *Nature*, 482(7386):485–488, 2012.
- [Ise92] ISERMANN, R.: *Identifikation dynamischer Systeme 2*. Springer, 2 Aufl., 1992.
- [Isi95] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Springer, London, 3. Aufl., 1995.
- [Jän05] JÄNICH, K.: *Vektoranalysis*. Springer, Berlin, 5. Aufl., 2005.
- [Jan10] JANSCHKE, K.: *Systementwurf mechatronischer Systeme: Methoden-Modelle-Konzepte*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [Kai80] KAILATH, T.: *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [KB00] KWATNY, H. G. und BLANKENSHIP, G. L.: *Nonlinear Control and Analytical Mechanics: A Computational Approach*. Birkhäuser, Boston, 2000.
- [Kel76] KELLER, H. B.: *Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems*. Capital City Press, Montpelier, 1976.
- [Ker09] KERBER, M.: *Division-free computation of subresultants using Bezout matrices*. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(12):2186–2200, 2009.
- [Kha02] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3. Aufl., 2002.

- [KLR11] KNOLL, C., LEIST, B. und RÖBENACK, K.: *Konzeption und prototypische Realisierung eines Versuchsstandes zur Regelung eines unteraktuierten Manipulators*. In *Tagungsband Mechatronik*, S. 241–246. Dresden, 2011.
- [Kno09] KNOLL, C.: *Steuerung und Regelung eines nicht-holonomen Manipulatormodells*. Diplomarbeit, TU Dresden, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 2009.
- [KR11] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Trajectory Planning for a Non Flat Mechanical System Using Time-Reversal Symmetry*. Proc. in *Applied Mathematics and Mechanics*, 11(1):819–820, 2011.
- [KR12a] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Generation of stable limit cycles with prescribed frequency and amplitude via polynomial feedback*. In *Proc. of the 9th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*. 2012.
- [KR12b] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Robust Generation of Desired Periodic Orbits: From Electrical Oscillators in the Phase Plane to Underactuated Systems of Higher Order*. In *Proc. of the Conference on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, S. 78–81. 2012.
- [KR12c] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Orbital stabilization of a class of underactuated mechanical systems*. Proc. in *Applied Mathematics and Mechanics*, 12(1):711–712, 2012.
- [KR13] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Stable Limit Cycles with specified Oscillation Parameters Induced by Feedback: Theoretical and Experimental results*. *Transactions on Systems, Signals and Devices*, 8(1):127–147, 2013.
- [KR14a] KNOLL, C. und REINSCHKE, K.: *Software-unterstützter Steuerungs- und Reglerentwurf eines instabilen mechanischen Starrkörpersystems*. Techn. Ber., Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, TU Dresden, 2014. <https://github.com/TUD-RST/MSRM>, Stand 03.06.2016.
- [KR14b] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Forced nonlinear oscillation of underactuated systems: the balance board example*. Proc. in *Applied Mathematics and Mechanics*, 14(1):299–300, 2014.
- [KR14c] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *On configuration flatness of linear mechanical systems*. In *Proc. of the European Control Conference*, S. 1416–1421. 2014.
- [KR15a] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Konfigurationsflachheit linearer mechanischer Systeme*. *at-Automatisierungstechnik*, 63(8):597–605, 2015.
- [KR15b] KNOLL, C. und RÖBENACK, K.: *Maneuver-based control of the 2-degrees of freedom underactuated manipulator in normal form coordinates*. *Systems Science & Control Engineering*, 3(1):26–38, 2015.

- [KRD16] KNOLL, C., RÖBENACK, K. und DARIIMAA, B.: *Holonomic Modeling and Hierarchic Tracking Control of an Unstable Underactuated Nonholonomic System*. In *Proc. of the 13th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*. Leipzig, 2016.
- [Kre99] KREISSELMEIER, G.: *Struktur mit zwei Freiheitsgraden*. *Automatisierungstechnik*, 47(6):266–269, 1999.
- [KS01] KIERZENKA, J. und SHAMPINE, L. F.: *A BVP Solver Based on Residual Control and the MATLAB PSE*. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 27(3):299–316, 2001.
- [KS13] KOLAR, B. und SCHLACHER, K.: *Flatness Based Control of a Gantry Crane*. In *Proc. of the 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, S. 487–492. 2013.
- [KS15] KOLAR, B. und SCHLACHER, K.: *Flache konzentriertparametrische Systeme, Theorie und Praxis*. e&i Elektrotechnik und Informationstechnik, 132(4-5):214–220, 2015.
- [KSK15] KUNZE, A., SCHNABEL, O. und KNOLL, C.: *PyTrajectory Dokumentation*, 2015. <https://pytrajectory.readthedocs.org>, Stand 03.06.2016.
- [Kuz98] KUZNETSOV, Y.: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, New York, 1998.
- [Kü13] KÜHNEL, W.: *Differentialgeometrie: Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 6. Aufl., 2013.
- [LaV06] LAVALLE, S. M.: *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [Lev07] LEVINE, J.: *On the equivalence between differential flatness and dynamic feedback linearizability*. In *Proc. of the 3rd IFAC Symposium on Power System, Structure and Control*, S. 338–343. 2007.
- [Lin09] LINDERT, S.-O.: *Beiträge zur Steuerung und Regelung von mehrvariablen LTI-Systemen in polynomialer Darstellung*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2009.
- [LM99] LEWIS, A. D. und MURRAY, R. M.: *Configuration Controllability of Simple Mechanical Control Systems*. *SIAM Review*, 41(3):555–574, 1999.
- [LR98] LAMB, J. S. W. und ROBERTS, J. A. G.: *Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey*. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, 112(1-2):1–39, 1998.
- [LR06] LINDERT, S.-O. und REINSCHKE, K.: *Entwurf von Trajektoriensteuerungen mit Folgeregelung für Regelstrecken mit mehreren Steuereingängen*. Workshop des GMA-Fachausschusses 1.4, Bosen, Saarland, 2006.

- [Lud95a] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1: Grundlagen, Synthese linearer Regelungssysteme*. Springer, Berlin, 1995.
- [Lud95b] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 2: Zustandsrekonstruktion, optimale und nichtlineare Regelungssysteme*. Springer, Berlin, 1995.
- [Lun97] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2*. Springer, Heidelberg, 6. Aufl., 1997.
- [LY13] LIU, Y. und YU, H.: *A survey of underactuated mechanical systems*. Control Theory & Applications, IET, 7(7):921–935, 2013.
- [Lé09] LÉVINE, J.: *Analysis and Control of Nonlinear Systems - A Flatness-based Approach*. Springer, Dordrecht, 2009.
- [Lé11] LÉVINE, J.: *On necessary and sufficient conditions for differential flatness*. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 22(1):47–90, 2011.
- [Mid11] MIDDEKE, J.: *A computational view on normal forms of matrices of Ore polynomials*. Dissertation, Research Institute for Symbolic Computation (RISC), Linz, 2011.
- [MLD] *MATLAB-Dokumentation zu bvp4c*. <http://de.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp4c.html>, Stand 03.06.2016.
- [MLS94] MURRAY, R. M., LI, Z. und SASTRY, S.: *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [MMR03] MARTIN, P., MURRAY, R. und ROUCHON, P.: *Flat systems, equivalence and trajectory generation*. Techn. Ber., California Institute of Technology, CDS, 2003.
- [Mor01] MORGANSEN, K. A.: *Controllability and Trajectory Tracking for Classes of Cascade-Form Second Order Nonholonomic Systems*. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, S. 3031–3036. 2001.
- [MR01] MARSDEN, J. E. und RATIU, T. S.: *Einführung in die Mechanik und Symmetrie: Eine grundlegende Darstellung klassischer mechanischer Systeme*. Springer, Berlin, 2001.
- [MRS95] MURRAY, R. M., RATHINAM, M. und SLUIS, W.: *Differential Flatness of Mechanical Control Systems: A Catalog of Prototype Systems*. In *Proc. of the 1995 ASME International Congress and Exposition*. 1995.
- [Nol04] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 2, Analytische Mechanik*. Springer, Berlin, 4. Aufl., 2004.

- [NR13] NICOLAU, F. und RESPONDEK, W.: *Flatness of two-inputs controlaffine systems linearizable via one-fold prolongation*. In *Proc. of the 9th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, S. 499–504. 2013.
- [NvdS90] NIJMEIJER, H. und VAN DER SCHAFT, A. J.: *Nonlinear Dynamical Control systems*. Springer, New York, 1990.
- [NW06] NOCEDAL, J. und WRIGHT, S.: *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, New York, 2006.
- [ON91] ORIOLO, G. und NAKAMURA, Y.: *Control of Mechanical Systems with Second-Order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators*. In *Proc. of the 30th Conf. on Decision and Control*, S. 2398–2403. Brighton, England, 1991.
- [OS01] OLFATI-SABER, R.: *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [PLTS98] PAPPAS, G. J., LYGEROS, J., TILBURY, D. und SASTRY, S.: *Exterior Differential Systems in Control and Robotics*. In BAILLIEUL, J., SASTRY, S. S. und SUSSMANN, H. J., Hg., *Essays on Mathematical Robotics*, S. 271–372. Springer, New York, 1998.
- [PTVF07] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. und FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 3. Aufl., 2007.
- [Puj07] PUJOL, J.: *The solution of nonlinear inverse problems and the Levenberg-Marquardt method*. *Geophysics*, 72(4):W1–W16, 2007.
- [Rei96] REITMANN, V.: *Reguläre und chaotische Dynamik*. Teubner, Leipzig, 1996.
- [Rei14] REINSCHKE, K.: *Lineare Regelungs- und Steuerungstheorie*. Springer Vieweg, Berlin, 2. Aufl., 2014.
- [RM96] RATHINAM, M. und MURRAY, R. M.: *Configuration flatness of Lagrangian systems underactuated by one control*. In *Proc. 35th Conference on Decision and Control*, S. 1688–1693. 1996.
- [RM98] RATHINAM, M. und MURRAY, R. M.: *Configuration Flatness of Lagrangian Systems Underactuated by One Control*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 36(1):164–179, 1998.
- [Röb05] RÖBENACK, K.: *Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme mit Hilfe des Automatischen Differenzierens*. Shaker Verlag, Aachen, 2005.

- [Rot97] ROTHFUSS, R.: *Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [Rou94] ROUCHON, P.: *Necessary Condition and Genericity of Dynamic Feedback Linearization*. Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control, 4(2):1–14, 1994.
- [RPK13] ROBENACK, K., PASCHKE, F. und KNOLL, C.: *Nonlinear Control with Approximately Linear Tracking Error*. In *Proc. of the European Control Conference*, S. 149–154. IEEE, 2013.
- [RR12] RESPONDEK, W. und RICARDO, S.: *On Linearization of Mechanical Control Systems*. In *IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Non Linear Control*, S. 102–107. 2012.
- [RRZ96] ROTHFUSS, R., RUDOLPH, J. und ZEITZ, M.: *Flatness Based Control of a Nonlinear Chemical Reactor*. Automatica, 32(10):1433–1439, 1996.
- [RRZ97] ROTHFUSS, R., RUDOLPH, J. und ZEITZ, M.: *Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme*. Automatisierungstechnik, 45:517–525, 1997.
- [Rud03] RUDOLPH, J.: *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [Rud15] RUDOLPH, J.: *Flatness Based Control - An Introduction*, 2015. Unterlagen zu einem Kurs an der Universität Sarajevo 2013, nachträglich überarbeitet.
- [RvdSMK99] REYHANOGLU, M., VAN DER SCHAFT, A., MCCLAMROCH, N. H. und KOLMANOVSKY, I.: *Dynamics and Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems*. IEEE Trans. on Automatic Control, 44(9):1663–1671, 1999.
- [Sau89] SAUNDERS, D. J.: *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [SB94] SETO, D. und BAILLIEUL, J.: *Control problems in super-articulated mechanical systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 39(12):2442–2453, 1994.
- [Sch14] SCHÖBERL, M.: *Contributions to the Analysis of Structural Properties of Dynamical Systems in Control and Systems Theory: A Geometric Approach*. Shaker, 2014.
- [Sei14] SEIFRIED, R.: *Dynamics of Underactuated Multibody Systems*. Springer, Cham, 2014.

- [SH01] SCHERM, N. und HEIMANN, B.: *Nichtlineare zeitdiskrete Regelung eines unteraktuierten Manipulators*. Automatisierungstechnik, 49(3):107–114, 2001.
- [SI12] SATO, K. und IWAI, T.: *Configuration flatness of Lagrangian control systems with fewer controls than degrees of freedom*. Systems & Control Letters, 61(2):334–342, 2012.
- [SJK97] SEPULCHRE, R., JANKOVIĆ, M. und KOKOTOVIĆ, P.: *Constructive Nonlinear Control*. Springer, London, 1997.
- [SKR00] SHAMPINE, L. F., KIERZENKA, J. und REICHELT, M. W.: *Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c*, 2000. http://www.mathworks.com/bvp_tutorial, Stand 03.06.2016.
- [SL91] SLOTINE, J. J. E. und LI, W.: *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1991.
- [Son88] SONTAG, E. D.: *Controllability is harder to decide than accessibility*. SIAM journal on control and optimization, 26(5):1106–1118, 1988.
- [Son98] SONTAG, E. D.: *Mathematical Control Theory*. Springer, New York, 2. Aufl., 1998.
- [Spo94a] SPONG, M.: *The Control of Underactuated Mechanical Systems*. In *Proc. of the First International Conference on Mechatronics, Mexico City*, S. 1–21. 1994.
- [Spo94b] SPONG, M.: *Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems*. In *Proc. of the Intelligent Robots and Systems IROS*, S. 314–321. 1994.
- [Spo95] SPONG, M. W.: *The swingup control problem for the Acrobot*. IEEE Control Systems Magazine, 15(1):49–55, 1995.
- [Spo98] SPONG, M. W.: *Underactuated Mechanical Systems*. In SICILIANO, B. und VALAVANIS, K. P., Hg., *Control Problems in Robotics*, S. 135–150. Springer, London, 1998.
- [SS14a] SCHLACHER, K. und SCHÖBERL, M.: *Geometrische Darstellung nichtlinearer Systeme*. at - Automatisierungstechnik, 62(7):452–462, 2014.
- [SS14b] SCHÖBERL, M. und SCHLACHER, K.: *Eine Normalform für eine spezielle Klasse flacher nichtlinearer Mehrgrößensysteme in Pfaffscher Systemdarstellung*. at - Automatisierungstechnik, 62(7):463–474, 2014.

- [SSK14] SCHLACHER, K., SCHÖBERL, M. und KOLAR, B.: *Flache Pfaffsche Systeme, ein alternativer Zugang mit Kontaktformen*. Vortrag auf dem Workshop des GMA-Fachausschusses 1.4: Theoretische Verfahren der Regelungstechnik, Anif, 22.-24. Sept., 2014.
- [SSK15] SCHLACHER, K., SCHÖBERL, M. und KOLAR, B.: *A jet space approach to derive flat outputs*. In *Proc. 1st conference on modelling, identification and control of nonlinear systems*. 2015.
- [ST95] SLUIS, W. M. und TILBURY, D. M.: *A bound on the number of integrators needed to linearize a control system*. In *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control*. New Orleans, Louisiana, 1995.
- [Tas15] TASCHNER, R.: *Anwendungsorientierte Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Fachrichtungen, Bd. 3: Geometrie und Räume von Funktionen*. Carl-Hanser, München, 2015.
- [Unb98] UNBEHAUEN, H.: *Systemtheorie 2: Mehrdimensionale, nichtlineare und adaptive Systeme*. Oldenbourg Verlag, München, 7. Aufl., 1998.
- [VA13] VERHOEVEN, G. und ANTRITTER, F.: *Ein Werkzeug zur automatisierten Flachheitsanalyse nichtlinearer Systeme*. *Automatisierungstechnik*, 61(1):60–71, 2013.
- [VN97] VAN NIEUWSTADT, M. J.: *Trajectory generation for nonlinear control systems*. Dissertation, California Institute of Technology, 1997.
- [Wik16] WIKIPEDIA: *Machine epsilon* — *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*, 2016. https://en.wikipedia.org/wiki/Machine_epsilon, Stand 03.06.2016.
- [Wil07] WILLEMS, J. C.: *The behavioral approach to open and interconnected systems*. *IEEE Control Systems Magazine*, 27(6):46–99, 2007.
- [WK77] WILLERS, F. A. und KRAPP, K.-G. B.: *Elementar-Mathematik - Ein Vorkurs zur Höheren Mathematik*. Steinkopff-Verlag, Darmstadt, 14. Aufl., 1977.
- [Wol74] WOLOVICH, W. A.: *Linear Multivariable Systems*. Springer, New York, 1974.
- [WSH10] WEIDEMANN, D., SCHERM, N. und HEIMANN, B.: *Bahnplanung und Regelung unteraktuierter Manipulatoren mittels nichtlinearer zeitdiskreter Ansätze*. *Automatisierungstechnik*, 58(2):90–101, 2010.
- [ZF14] ZAICZEK, T. und FRANKE, M.: *Tracking Control of A Balancing Robot – A Model-Based Approach*. *Archive of Mechanical Engineering*, 61:331–346, 2014.

- [ZL14] ZHOU, W. und LABAHN, G.: *Unimodular completion of polynomial matrices*. In *Proc. of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, S. 413–420. 2014.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ebener Zweigelenkmanipulator	12
2.2	Lineares mechanisches System, translatorisch, $n = 3$	21
3.1	Möglichen Fälle für die (In-)Stabilität mechanischer Systeme	28
4.1	Klassifikationsschema zur Einordnung differentiell flacher Systeme	32
4.2	„Lücke“ zwischen hinreichenden und notwendigen Flachheitsbedingungen	34
4.3	Wagen-Pendel-System	38
4.4	System aus zwei horizontal beweglichen Körpern und einem Pendel	39
4.5	Acrobot	57
4.6	Doppelpendel vollständig aktuiertem Aufhängepunkt	67
4.7	Mechanismus mit $n = 5$ und $n_{\mathbf{q}} = 3$	68
4.8	Ebenes einrädiges Fahrzeug	81
4.9	Mechanisches System mit vier Freiheitsgraden ($n_{\mathbf{p}} = 2, n_{\mathbf{q}} = 2$)	82
4.10	Zwei elastisch gekoppelte verschiebliche Massen	93
5.1	Wagen mit viskos verschieblicher Last	100
5.2	Verläufe der Zustandsgrößen während Ruhelagenüberführung (Bsp. 5.3)	101
5.3	Ergebnisse der Trajektorienplanung (Bsp. 5.4)	103
5.4	Trajektorienplanung durch Lösung einer RWA mit PyTrajectory	109
5.5	Lösung einer RWA mit und ohne Berücksichtigung der Integratorketten	110
5.6	Vergleich Rechenzeit mit und ohne Integratorkettenberücksichtigung	111
5.7	Trajektorienplanung mittels Zeitumkehrsymmetrie: Schritte 3, 5, 6.	119
6.1	Schematische Visualisierung der Mengen \mathbb{U} , \mathcal{W}_{w^*} und ihres Schnitts \mathcal{O}_{α^*}	125
6.2	Schematische Visualisierung einer Niveaumenge der Ljapunov-Funktion	128
6.3	Verschiedenen Typen von Phasenportraits in Abhängigkeit von $\text{sgn}(\alpha^*)$	129
6.4	Simulationsergebnisse für das Wagen-Pendel-System (Grenzzyklus)	131
6.5	Versuchsstand für das Wagen-Pendel-System.	131
6.6	Sprungantworten für ein ideales PT1-Glied	132
6.7	Gemessene Sprungantworten der Schlittengeschwindigkeit \dot{q}_1	133
6.8	Approximationen für $\alpha(U_M)$ und $\beta(U_M)$	134
6.9	Messung für $p_1(t)$ für zwei Regler	135
B.1	Fluggerät in der vertikalen Ebene (PVTOL)	168
B.2	Modifiziertes PVTOL	171

Verzeichnis implementierter Beispielrechnungen und weiterer Software

- [<1>] Zweigelenkmainipulator mit passivem zweiten Gelenk, ohne Schwerkraft. Verwendet in Beispielen: 2.4, 2.11, 4.33.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/zweigelenk_manipulator.ipynb
- [<2>] Translatorisches mechanisches System mit drei Freiheitsgraden. Verwendet in Beispiel: 2.15.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/nicht_kollokierte_partielle_linearisierung_nach_spong.ipynb
- [<3>] Wagen-Pendel-System (Untersuchung der Integrierbarkeit des flachen Ausgangs des Variationssystems). Verwendet in Beispielen: 4.10, 4.40, 4.41, 4.54. http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/wagen_pendel_nichtflachheit.ipynb
- [<4>] Zwei elastisch gekoppelte Körper und ein aktuiertes Pendel (Untersuchung der statischen EZ-Linearisierbarkeit). Verwendet in Beispielen: 4.11, 4.13, 4.20.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/zwei_elast_gekoppelte_wagen_pendel.ipynb
- [<5>] Akademisches Beispiel zum Unterschied zwischen unimodularer und \mathcal{F} -unimodularer Vervollständigung. Verwendet in Beispiel: 4.16.
<http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/f-unimodularitaet.ipynb>
- [<6>] Acrobot (Zweigelenkmainipulator mit passivem erstem Gelenk) unter Einfluss der Schwerkraft. Verwendet in Beispiel: 4.34.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/acrobot_steuerbarkeit.ipynb
- [<7>] Zweifachpendel mit vollständig aktuiertem verschieblichem Aufhängepunkt. Verwendet in Beispiel: 4.46.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/zweifachpendel_nq2_np2_ruled_manif.ipynb
- [<8>] Mechanismus aus zwei translatorisch aktuierten Körpern und zwei Pendeln. Verwendet in Beispiel: 4.47.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/planar_verschieb_masse_pendel_akt_masse_pendel.ipynb
- [<9>] Akademisches Beispiel (Nachweis der Nichtflachheit für ein Eingrößensystem). Verwendet in Beispiel: 4.53.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/nichtflachheit_akademisches_bsp_m1.ipynb

- [<10>] Ebenes einachsiges Fahrzeug (Untersuchung der Integrierbarkeit des fl. Ausgangs des Variationssystems). Verwendet in Beispielen: 4.57, 4.61.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/einachsiges_fz_unimod_ergaenzung_und_notwendige_integrabilitaetsbedingung.ipynb
- [<11>] Planar verschiebliches Pendel mit Zusatzmasse (Untersuchung der Integrierbarkeit des flachen Ausgangs des Variationssystems). Verwendet in Beispielen: 4.58, 4.62.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/planar_verschiebl_pendel_elast_masse_int.ipynb
- [<12>] (Konfigurations-)Flachheit eines linearen translatorischen Systems. Verwendet in Beispiel: 4.74.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/visko-elastisch-transl_np1_nq1.ipynb
- [<13>] (Konfigurations-)Flachheit des linearisierten Modells des einachsigen Fahrzeugs. Verwendet in Beispiel: 4.75.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/einachsiges_fz_konfflache_ausgaenge_linearisiert.ipynb
- [<14>] Wagen mit rutschender Last (Steuerbarkeitsanalyse und Trajektorienberechnung). Verwendet in Beispiel: 5.3.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/wagen_mit_rutschender_last.ipynb
- [<15>] Mechanismus aus zwei translatorisch aktuierten Körpern und zwei Pendeln: Trajektorienplanung durch RWA-Lösung. Verwendet in den Beispielen: 5.8, 5.10.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/planar_verschieb_masse_pendel_akt_masse_pendel_rwa.ipynb
- [<16>] Acrobot: Trajektorienplanung durch RWA-Lösung. Verwendet in Beispiel: 5.10.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/acrobot_rwa.ipynb
- [<17>] Wagen-Pendel-System (Trajektorienplanung mittels Zeitumkehrsymmetrie). Verwendet in Beispiel: 5.19.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/wagen_pendel_zus.ipynb
- [<18>] Erzeugung einer Dauerschwingung das Wagen-Pendel-System. Verwendet in Beispiel: 6.7.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/wagen_pendel_grenzyklus.ipynb
- [<19>] Überprüfung der Anwendung der äußeren Ableitung auf eine Polynommatrix. Verwendet in Beispiel: A.24.
<http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/polynommatrix-1-form.ipynb>
- [<20>] PVTOL: Koordinatentransformation (Aufspaltung in passive und aktive Koordinaten). Verwendet in Beispielen: B.3, B.4.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/senkrechtstarter_pvtol_koordinatentransformation.ipynb

- [<21>] Einachsiges ebenes Fahrzeug: Nichtexistenz der BI-NF nach [OS01, Abschnitt 3.7]. Verwendet in Beispiel: B.5.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/einachsiges_fz_nichtexistenz_bi_nf_nach_01fati-Saber.ipynb
- [<22>] Numerische Rangbestimmung. Verwendet in Beispielen: B.8, B.9.
http://nbviewer.ipython.org/github/cknoll/beispiele/blob/master/numerische_rangbestimmung.ipynb

Weitere Software

Die oben aufgelisteten Beispiele verwenden die vom folgenden vom Autor wesentlich mitentwickelten Module bzw. Pakete:

Name	Zweck / Funktionalität
<code>symbtools.core</code>	Allgemeine Funktionen mit Bezug zur Regelungstheorie. Z.B. Verschiedene Typen von Lie-Ableitungen, Rangprüfung, Involutivitätstest, Transitionspolynome zur Trajektorienplanung, Eigenwertplatzierung.
<code>symbtools.modeltools</code>	Aufstellen der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems mit Hilfe des Lagrange-Formalismus, Transformation in kollokierte partiell linearisierte Zustandsdarstellung, und in LBI-Normalform.
<code>symbtools.noncommutativetools</code>	Funktionen zum Rechnen mit nichtkommutativen Matrizen (verwendet in Kapitel 4). Z.B. Rechtsverschiebung des des Operators $\frac{d}{dt}$ und Berechnung der Inversen einer unimodularen Matrix. https://github.com/cknoll/rst_symbtools
<code>pycartan</code>	Funktionen zum Rechnen mit Differentialformen auf Jet-Mannigfaltigkeiten (verwendet in Kapitel 4). Z.B. Keilprodukt, äußere Ableitung, Kontraktion, Anwendung des Operators $\frac{d}{dt}$. https://github.com/cknoll/pycartan
PyTrajectory	Softwarepaket zur Trajektorienplanung auf Basis der Lösung einer Randwertaufgabe (verwendet in Abschnitt 5.4). http://pytrajectory.readthedocs.io/en/master/index.html