

Technische Universität Dresden

**Modellierung und Entwurf von resonanten Mikroaktoren  
mit elektrostatischem Antrieb**

**Dipl.-Ing. Thomas Klose**

der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität  
Dresden

zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktoringenieurs**

(Dr.-Ing.)

vorgelegte Dissertation

Promotionskommission:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Eduard Jorswieck  
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Wolf-Joachim Fischer  
Prof. Dr.-Ing. habil. Gerald Gerlach  
Dr.-Ing. habil. Peter Schwarz

Tag der Einreichung: 5. Oktober 2007  
Tag der Verteidigung: 23. Februar 2016



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des *Fraunhofer Instituts Photonische Mikrosysteme* (IPMS) in Dresden. Ich bedanke mich bei allen Kollegen für ihre Hilfe und Unterstützung, wodurch diese Arbeit erst ermöglicht wurde.

Besonders herzlich möchte ich mich bei meinem Gruppenleiter Dr. Thilo Sandner sowie bei Prof. Dr. habil. Wolf-Joachim Fischer für die Mühe bei der Betreuung dieser Arbeit und die vielen hilfreichen Anregungen bedanken.

Außerdem bedanke ich mich bei Dr. Alexander Wolter, Dr. Detlef Kunze, Dr. Harald Schenk, und Dr. Christian Drabe sowie bei den Herren Holger Conrad und Thomas Graßhoff für ihre fachliche und freundschaftliche Unterstützung und die vielen aufschlussreichen Diskussionen.

Dank gilt auch den Kollegen des *Fraunhofer Institut Integrierte Schaltungen* Institutsteil *Entwurfsautomatisierung* in Dresden für die Zurverfügungstellung der Optimierungsumgebung *MOSCITO* und die gute Zusammenarbeit.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie und bei meinen Freunden für ihre Unterstützung und Geduld bedanken. Besonderer Dank gilt dabei meiner Mutter Frau Karin Klose, die mir meine Ausbildung und Promotion durch ihre kompromisslose Unterstützung erst ermöglicht hat.

Thomas Klose

Dresden, 1. Oktober 2007



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einordnung und Ziele der Arbeit</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen und Stand der Technik</b>	<b>7</b>
2.1	Herstellungstechnologien	8
2.2	MEMS-Aktoren	11
2.2.1	Antriebsprinzipien	11
2.2.2	Elektrostatische Antriebe	13
2.3	Der <i>Fraunhofer IPMS</i> Mikroscoannerspiegel	17
2.3.1	Synchronisierte Anregung	19
2.3.2	Parametrische Anregung	23
2.3.3	Anwendungsmöglichkeiten und Grenzen	27
2.4	Motivationen der Arbeit	31
<b>3</b>	<b>Randbedingungen beim Entwurf</b>	<b>35</b>
3.1	Vereinbarungen und Definitionen	35
3.1.1	Material- und Strukturvereinfachungen	35
3.1.2	Koordinatensysteme	36
3.1.3	Mathematische Vereinfachungen und Definitionen	37
3.2	Strukturmechanische Randbedingungen	40
3.2.1	Richtungsabhängige Materialeigenschaften	40
3.2.2	Geometrische Nichtlinearitäten	42
3.2.3	Strukturmechanische Spannungen	45
3.2.4	Eigenschwingungen	55
3.2.5	Fertigungstoleranzen	58
3.2.6	Dynamische Deformation	60
3.2.7	Strukturdämpfung	63
3.3	Fluidmechanische Randbedingungen	64
3.3.1	Näherungen zur <i>Slip</i> -Korrektur	68
3.3.2	Gültigkeit der quasistatischen Näherung	69
3.3.3	Dämpfungsmechanismen innerhalb der Kammstruktur	70
3.3.4	Dämpfungsmechanismen der bewegten Spiegelplatte	75
3.4	Randbedingungen der Elektrik bzw. Elektrostatik	79
3.4.1	Antriebskapazitäten und Randfelder	79
3.4.2	Spannungsfestigkeit	83
3.4.3	Leistungsaufnahme	86
3.4.4	Elektromechanische Stabilität	87
3.5	Optische Randbedingungen	94
<b>4</b>	<b>Nichtlineare Dynamik</b>	<b>99</b>
4.1	Stabilitätsanalyse	99
4.1.1	Fixpunkte und Grenzzyklen	101
4.1.2	Stabilität	102
4.1.3	Bifurkationen	102
4.1.4	Diskussion	105
4.2	Geometrische Nichtlinearitäten	107
4.2.1	Einfluss auf die Dynamik	108
4.2.2	Diskussion	109

4.2.3	Möglichkeiten zur Beeinflussung . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Werkzeuge für den Entwurf</b>	<b>115</b>
5.1	Anforderungen an Entwurfswerkzeuge . . . . .	115
5.1.1	Kopplung physikalischer Domänen . . . . .	115
5.1.2	Spezielle Anforderungen an <i>FEM</i> -Werkzeuge . . . . .	116
5.1.3	Ordnungsreduktion . . . . .	121
5.1.4	Spezielle Anforderungen an Optimierungswerkzeuge . . . . .	124
5.2	Relevante Entwurfswerkzeuge . . . . .	125
5.2.1	<i>MOSCITO</i> Optimierungsumgebung . . . . .	125
5.2.2	<i>MATLAB</i> <sup>®</sup> -Toolbox <i>SUGAR</i> . . . . .	127
5.3	Klassenbibliothek <i>IMtk</i> . . . . .	129
5.3.1	Programmierparadigmen . . . . .	130
5.3.2	Vererbungsstrategie . . . . .	132
5.3.3	Ordnungsreduktion . . . . .	134
5.3.4	Verifikation der Modelle . . . . .	139
5.3.5	Gültigkeitsbedingungen . . . . .	143
<b>6</b>	<b>Entwurfsprozess</b>	<b>145</b>
6.1	Strategie des Bauelemententwurfs . . . . .	145
6.2	Entwurfsbeispiel . . . . .	147
6.2.1	Anforderungen und Randbedingungen . . . . .	147
6.2.2	Vorauslegung . . . . .	148
6.2.3	Eigenwertanalyse . . . . .	151
6.2.4	Statische nichtlineare Analysen . . . . .	152
6.2.5	Deformationsanalyse . . . . .	155
6.2.6	Statische nichtlineare gekoppelte Analysen . . . . .	158
6.2.7	Dynamische nichtlineare gekoppelte Analysen . . . . .	160
6.3	Diskussion . . . . .	162
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>165</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>169</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>178</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>181</b>
	<b>Listings</b>	<b>182</b>
	<b>Anlagenverzeichnis</b>	<b>183</b>
<b>A</b>	<b>Materialeigenschaften</b>	<b>184</b>
A.1	Einkristallines Silizium . . . . .	184
A.2	Umgebungsluft . . . . .	185
<b>B</b>	<b><i>MEMS</i>-Prozess des <i>Fraunhofer IPMS</i></b>	<b>186</b>
B.1	Prozessablaufplan <i>AME1</i> . . . . .	186
B.2	Prozessabhängige Materialeigenschaften . . . . .	187

---

<b>C</b>	<b>Strukturmechanische <i>FE</i>-Analysen</b>	<b>188</b>
C.1	<i>FEM</i> -Werkzeuge am <i>Fraunhofer IPMS</i> . . . . .	188
C.1.1	<i>ANSYS</i> <sup>®</sup> . . . . .	188
C.1.2	<i>COMSOL Multiphysics</i> <sup>TM</sup> . . . . .	189
C.2	Nichtlinearitäten prismatischer Torsionsstäbe . . . . .	190
C.3	Typische Eigenformen von Mikroscoanerspiegeln . . . . .	192
C.4	Mechanische Spannungen in Torsionsfedern . . . . .	194
C.5	Dynamische Deformation der Spiegelplatte . . . . .	195
C.6	Konvergenzeigenschaften von <i>FE</i> -Netzen . . . . .	196
<b>D</b>	<b>Dämpfungsmechanismen</b>	<b>197</b>
D.1	<i>Slide-film</i> -Dämpfung . . . . .	197
D.2	<i>Squeeze-film</i> -Dämpfung . . . . .	198
<b>E</b>	<b>Bewegungs-Dgl. des <i>IPMS</i> Mikroscoanerspiegels</b>	<b>199</b>
E.1	Fixpunkte . . . . .	199
E.2	Stabilität . . . . .	202
E.3	Bifurkationen . . . . .	204
E.4	Phasenportraits . . . . .	209
<b>F</b>	<b><i>IMtk</i>-Klassenbibliothek</b>	<b>211</b>
F.1	Klassenübersicht . . . . .	211
F.2	Funktionen . . . . .	221
F.3	Datenstruktur <i>IMTK</i> . . . . .	222
F.4	Eigenschaften und Methoden der Basisklasse <i>imtk_element</i> . . . . .	223
F.5	Implementation . . . . .	224
F.6	Beispiele . . . . .	244
<b>G</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse (Entwurfsbeispiel)</b>	<b>251</b>
G.1	Charakterisierung . . . . .	251
G.1.1	Synchronisierte Anregung . . . . .	251
G.1.2	Parametrische Anregung . . . . .	252
G.2	Dynamische Deformation . . . . .	253

## Formelzeichen

### Skalare Größen

Veränderliche oder konstante skalare Größen werden kursiv gesetzt:  $\alpha, b, C$

$A$	Flächeninhalt, Integrationskonstante
$\mathcal{A}$	Blendenöffnungsfunktion
$A_p, A_s, A_u$	Projektionsfläche, Flächeninhalt einer Grenzfläche mit angreifenden Scherkräften
$B$	Integrationskonstante
$C, C'$	elektrische Kapazität, Kapazitätsbelag
$c$	Schallgeschwindigkeit im Fluid
$c_d$	Beiwert zur Druckdämpfung
$D$	Durchmesser, optische Apertur eines Mikrospiegels
$D_L$	Durchmesser eines Laserstrahls
$d$	Abstand (Distanz) zwischen zwei Strukturen, charakteristische Länge
$d_h$	hydraulischer Durchmesser
$E$	Elastizitätsmodul
$E_{[hkl]}$	Elastizitätsmodul in der Kristallrichtung $[hkl]$
$E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}$	Elastizitätsmoduln im anisotropen Material
$f_r$	Bildwiederholrate (frame rate)
$f, f_x, f_y$	Frequenz, Frequenz der Oszillation um die $x$ - bzw. $y$ -Achse (globales Koordinatensystem)
$f_{\square}$	Pulsfolgefrequenz
$G$	Schubmodul
$G_m$	mittleres Schubmodul
$G_{xz}, G_{xy}, G_{yz}$	Schubmoduln im anisotropen Material
$g$	Schwerebeschleunigung
$G'$	Ableitungsbelag
$h$	geometrische Länge einer Struktur in $z'$ -Richtung, Höhe (lokales Koordinatensystem)
$I$	elektrischer Strom
$I_t$	Torsionsflächenmoment
$k$	Skalierungsfaktor einer geometrischen Abmessung, BOLTZMANN-Konstante
$k_b, k_t, k_z$	Biege-, Torsions-, Zugfederhärte
$\bar{k}$	Kreiswellenzahl
Kn	KNUDSEN-Zahl
$\mathcal{L}$	mittlere freie Weglänge im Fluid
$l$	geometrische Länge einer Struktur in $x'$ -Richtung, Länge (lokales Koordinatensystem)
$l_{\text{eff}}$	effektive Länge eines eingespannten Torsionsstabs
$M_b, M_t$	Biege-, Torsionsmoment
$m$	Masse
Ma	MACH-Zahl
$P_i, \bar{P}_i$	Leistung, mittlere Leistung
$p, p_0$	Druck, Normaldruck
$Q$	Güte
$q$	elektrische Ladung
$R$	ohmscher Widerstand, normierte Amplitude, Radius
$r$	Radius

$r_p, r_{th}$	spezifischer piezoelektrischer, spezifischer thermischer Krümmungsradius
$Re, Re_{cr}$	REYNOLDS-Zahl, kritische REYNOLDS-Zahl
$S_{\Delta w, rel}, S_{\Delta w}$	(relative) Empfindlichkeit bezüglich Fertigungstoleranzen
$s$	komplexe Kreisfrequenz
$T$	absolute Temperatur, Periodendauer
$t$	Zeit
$U$	benetzter Umfang eines Strömungskanals
$U_{pi}$	elektrische Stabilitätsspannung ( <i>Pull-in</i> -Spannung)
$U, U_x, U_y$	elektrische Spannung
$u$	charakteristische Strömungsgeschwindigkeit
$W$	Arbeit, Energieänderung
$w$	geometrische Länge einer Struktur in $y'$ -Richtung, Breite (lokales Koordinatensystem)
$w_{min}$	minimale reproduzierbar fertigbare Strukturbreite
$w_{Tr}$	Breite eines offenen Ätzgrabens (Trenchbreite)
$X', Y'$	Koordinaten einer Beobachtungsebene
$x$	normierte Auslenkung
$x, y, z$	Koordinaten des globalen Koordinatensystems
$x', y', z'$	Koordinaten eines lokalen Koordinatensystems
$\bar{\alpha}_i, \alpha_i$	(mittlerer) Dämpfungsfaktor
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$	Amplituden des optischen Ablenkungswinkels
$\alpha_\infty, \beta_\infty$	Beobachtungswinkel im Unendlichen
$\beta_0$	Einfallswinkel
$\gamma_{ij}$	technische Scherdehnungen
$\Delta C, \Delta C_i$	maximale Kapazitätsänderung einer Antriebselektrode
$\Delta T$	Temperaturänderung
$\Delta w$	fertigungsbedingte Abweichung der Strukturbreite
$\Delta \beta$	optische Winkelauflösung
$\delta$	Deformation der Spiegelplatte (Abweichung von der ideal ebenen Fläche)
$\delta_i$	Abklingkonstanten
$\varepsilon$	Permittivität
$\epsilon_{rel}$	relative Abweichung
$\eta$	dynamische Viskosität, <i>langsame Zeit</i>
$\eta_{eff}$	effektive dynamische Viskosität
$\theta_{c,x}, \theta_{c,y}$	mittlere Übergangswinkel (Ausschwenken der Fingerelektroden)
$\hat{\theta}, \hat{\theta}_x, \hat{\theta}_y$	Amplitude des mechanischen Auslenkwinkels
$\theta D$	Maß für die optische Anforderung an ein scannendes Projektionssystem
$\vartheta$	Strukturwinkel, Verdrillung, CELSIUS-Temperatur
$\kappa_b, \kappa_t, \kappa_z$	Biege-, Torsions-, Zugsteifigkeit
$\lambda$	Wellenlänge von Licht
$\lambda_R, \lambda_G, \lambda_B$	Wellenlänge von rotem, grünem, blauem Licht
$\lambda_i$	Eigenwert einer Matrix
$\xi$	Korrekturfaktor, Strömungsparameter, <i>schnelle Zeit</i>
$\rho$	spezifischer elektrischer Widerstand, Raumladungsdichte
$\rho_m$	Dichte

$\rho_r$	Reflexionsgrad
$\sigma$	Moleküldurchmesser
$\sigma_i$	mechanische Hauptnormalspannung
$\sigma_\nu$	mechanische Vergleichsspannung
$\sigma_{\nu,GEH}$	mechanische Vergleichsspannung entsprechend der Gestaltänderungshypothese
$\sigma_{\nu,NSH}$	mechanische Vergleichsspannung entsprechend der Normalspannungshypothese
$\tau$	Pulslänge, Zeitkonstante, normierte Zeit
$\phi$	Torsionsfunktion
$\phi_x, \phi_y$	Phasenverschiebung
$\varphi$	elektrisches Potential, Winkel im polaren Koordinatensystem
$\Psi$	Strahlungsflussdichte
$\psi$	Verwölbungsfunktion, Beugungsfeld (komplexe Amplitudendichte)
$\Omega$	Raumwinkel, LANDAU-Operator

## Vektoren und Pseudovektoren

Veränderliche oder konstante vektorielle Größen sind mit einem Vektorpfeil gekennzeichnet:  $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{C}$

$\vec{B}$	magnetische Flussdichte
$\vec{D}$	dielektrische Verschiebung
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Basisvektoren des globalen Koordinatensystems
$\vec{F}_d, \vec{F}_{\text{mech}}$	Dämpfungskraft, mechanische (rückstellende) Kraft
$\vec{F}_{\text{el}}, \vec{F}_m$	elektrostatische Kraft, LORENTZkraft
$\vec{F}_p, \vec{F}_{\text{th}}$	piezoelektrische Kraft, thermomechanische Kraft
$\vec{M}_{\text{el}}, \vec{M}_d$	elektrostatisches Drehmoment, dämpfendes Drehmoment
$\vec{M}_{\text{mech}}$	mechanisches (rückstellendes) Drehmoment
$\vec{n}_0$	Normalenvektor einer Fläche
$\vec{P}$	Lastvektor, elektrische Polarisation
$\vec{q}$	Auslenkungen eines Makromodells
$\vec{s}$	Weg
$\vec{U}$	Verschiebungskomponenten eines FE-Netzes
$\vec{u}, \vec{v}$	(Strömungs-) Geschwindigkeit
$\vec{X}$	Verschiebungsvektor
$\vec{\beta}$	optischer Ablenkwinkel
$\vec{\Delta}$	Verschiebungsvektor
$\vec{\theta}$	mechanischer Auslenkwinkel
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit

## Matrizen und Tensoren

Veränderliche oder konstante Matrizen und Tensoren werden fett gesetzt:  $\mathbf{\alpha}, \mathbf{b}, \mathbf{C}$

$\mathbf{B}$	Inzidenzmatrix
$\mathbf{C}$	Tensor der elastischen Konstanten
$(\mathbf{c}_{ij})$	Matrix der elastischen Konstanten
$\mathbf{D}, \mathbf{D}_{\text{polar}}$	JACOBI-Matrix

<b>I</b>	Flächenmoment 2. Ordnung
<b>J</b>	Massenträgheitsmoment
<b>K, <math>\tilde{\mathbf{K}}</math></b>	Steifigkeitsmatrix
<b>L</b>	Inzidenzmatrix
<b>M, <math>\tilde{\mathbf{M}}</math></b>	Massenmatrix
<b>(<math>s_{ij}</math>)</b>	Matrix der Elastizitätskoeffizienten
<b>T</b>	Transformationsmatrix
<b><math>\alpha, \tilde{\alpha}</math></b>	Dämpfungsmatrix
<b><math>\varepsilon</math></b>	mechanische Dehnung
<b><math>\sigma</math></b>	mechanische Spannung
<b><math>\Phi</math></b>	Projektionsmatrix

## Abkürzungen

- AME1** Aktor mechanisch elektrostatischer Antrieb; Am *Fraunhofer IPMS* entwickelter und genutzter *MEMS*-Prozess, S. 9
- ANSYS<sup>®</sup>** Analysis System, komplexes und leistungsfähiges FEM-Simulations-Programm mit einer an die Programmiersprache Fortran angelehnten Skriptsprache, S. 119
- APDL** ANSYS<sup>®</sup> Parametric Design Language, S. 188
- ASE<sup>™</sup>** Advanced Silicon Etch; anisotroper Ätzprozess zur Erzeugung von Strukturen mit sehr hohem Aspektverhältnis, S. 187
- BSOI** Bonded Silicon On Insulator, S. 10
- BTRK** BOENDER-TIMMER-RINOY-KAN-Optimierungsalgorithmus; globales Suchverfahren, S. 126
- CAS** Computer Algebra System, S. 201
- COMSOL Multiphysics<sup>™</sup>** komplexes und leistungsfähiges FEM-Simulations-Programm mit einer an die *MATLAB<sup>®</sup>*-Syntax angelehnten Skriptsprache, S. 125
- DFT** Diskrete FOURIER-Transformation, S. 97
- DLP<sup>™</sup>** Digital Light Processing; von *Texas Instruments* patentierte Technologie zur Modulation von Licht mittels *DMD<sup>™</sup>*-Chips, S. 7
- DMD<sup>™</sup>** Digital Micromirror Device; Mikrospiegelmatrix mit nur zwei möglichen (digitalen) Positionen je Mikrospiegel, entwickelt und hergestellt von *Texas Instruments*, S. 7
- DRIE** Deep Reactive Ion Etching, S. 58
- FEM** Finite Elemente Methode; numerisches Verfahren zum Lösen partieller Differentialgleichungen bzw. partieller Differentialgleichungssysteme, S. 3
- FFT** Fast FOURIER-Transformation, S. 97
- Fortran** prozedurale Programmiersprache, S. 188
- FOV** Field Of View; optischer Scan- oder Abbildungsbereich (Winkel oder Abmessung), S. 22
- Fraunhofer IIS-EAS** Fraunhofer Institut integrierte Schaltungen Institutsteil Entwurfsautomatisierung in Dresden, S. 125
- Fraunhofer IPMS** Fraunhofer Institut Photonische Mikrosysteme in Dresden, S. 1
- GEH** Gestaltänderungsenergiehypothese; Vergleichsspannungshypothese, S. 46

- IMtk** *IPMS MEMS* Toolkit, objektorientierte *MATLAB*<sup>®</sup>-Bibliothek zur effizienten Simulation von *MEMS*-Bauelementen mit elektrostatischem Antrieb, S. 5
- Java**<sup>®</sup> Plattformunabhängige, objektorientierte Hochsprache der Firma *SUN*<sup>®</sup> *Microsystems*, S. 125
- LCD** Liquid Crystal Display; Flüssigkristall-Anzeige, S. 158
- Mathematica**<sup>®</sup> Computer-Algebra-System (CAS) der Firma *Wolfram Research*, S. 99
- MATLAB**<sup>®</sup> Matrix Laboratory; leistungsfähige Matrizen-orientierte Entwicklungsumgebung, S. 5
- MEMS** Micro-Electro-Mechanical System; elektromechanisches Mikrosystem, S. 1
- MOEMS** Micro-Opto-Electro-Mechanical System; elektromechanisches optisches Mikrosystem, S. 1
- MOSCITO** am *Fraunhofer IIS*, Institutsteil *EAS* entwickeltes Optimierungsprogramm, S. 125
- REM** Rasterelektronenmikroskop, S. 18
- RF** Radio Frequency, S. 64
- RGB** Rot-Grün-Blau; additives Farbmodell bei dem sich die Grundfarben Rot, Grün und Blau zu Weiß mischen, S. 28
- Simulink**<sup>®</sup> *MATLAB*<sup>®</sup>-Toolbox zur einfachen Modellgenerierung mit Blockschaltbildern, S. 2
- SLM** Spatial Light Modulator; *MEMS*-Bauelemente zur Modulation von Licht, S. 10
- SOI** Silicon On Insulator; Technologie bei der als Ausgangsmaterial ein Siliziumwafer mit vergrabener Oxidschicht dient, S. 10
- SPICE** Software Process Improvement & Capability dEtermination; Simulationssystem für komplexe elektrische Netzwerke, S. 126
- SUGAR** auf *MATLAB*<sup>®</sup> basierendes Simulationssystem für *MEMS*-Anwendungen, S. 125
- VHDL** *VHSIC* (Very High Speed Integrated Circuits) Hardware Description Language; Hardwarebeschreibungssprache für digitale elektrische Systeme, S. 2

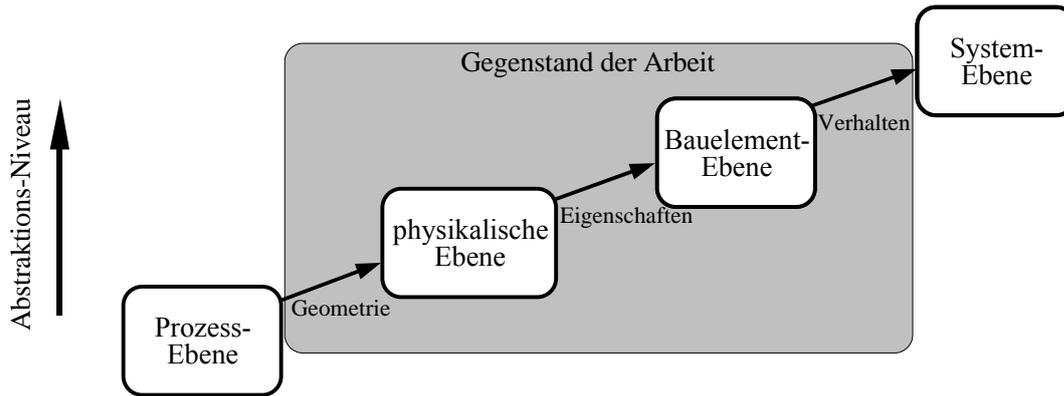
# 1 Einordnung und Ziele der Arbeit

Mit der Mikrosystemtechnik hat sich seit den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts ein neuer, schnell wachsender Zweig der Ingenieurwissenschaften entwickelt. Dieser widmet sich der Entwicklung und Herstellung stark miniaturisierter Bauelemente, deren Strukturabmessungen zumindest in einer Dimension im Mikrometer- oder Submikrometerbereich liegen. Ein solches Bauelement soll meist als Wandler (Transducer) zwischen elektrischen Größen und anderen, nicht-elektrischen Umweltgrößen dienen. Wird im konkreten Fall eine nicht-elektrische Umweltgröße in eine elektrische Größe transformiert, spricht man von einem Sensor, wird eine elektrische Größe in eine Kraft oder Bewegung umgewandelt, von einem Aktor bzw. Mikroaktor. Bauelemente mit mechanischen Komponenten werden als *MEMS* (*micro-electro-mechanical system*) bezeichnet. Dienen sie außerdem noch der direkten oder indirekten Beeinflussung von Licht, können sie auch als *MOEMS* (*micro-opto-electro-mechanical system*) bezeichnet werden. Ein Beispiel für ein solches Bauelement ist der am *Fraunhofer IPMS* in Dresden entwickelte, elektrostatisch resonant angetriebene Mikroscoannerspiegel. Die vorliegende Arbeit befasst sich in erster Linie mit der physikalischen Modellierung, dem Entwurfsprozess und der Optimierung dieser Bauelemente.

In der Mikrosystemtechnik kommen oft Materialien, Methoden und Werkzeuge der Mikroelektronik zum Einsatz. Bauelemente können so beispielsweise im Scheibenverbund in der Silizium-Planartechnologie gefertigt werden. Geometrische und sonstige Strukturen werden dabei mithilfe von Fotolithografie und Ätz- bzw. Abscheideprozessen erzeugt. Anschließend können die Bauelemente mit ebenfalls aus der Mikroelektronik entlehnten Sägeprozessen vereinzelt werden. Aus dieser Methodik resultieren einerseits eine Reihe von Vorteilen wie hohe Zuverlässigkeit, Integrierbarkeit und kostengünstige Produktion der Bauelemente in großen Stückzahlen. Andererseits führt dieses Konzept zu sehr hohen Entwicklungskosten und oft auch zu langen Entwicklungszeiten. Aus diesem Grund fällt der physikalischen Modellierung beim Entwurf von *MEMS*-Bauelementen eine besonders hohe Bedeutung zu.

Unter einem physikalischen Modell wird die Abbildung eines Originals – im konkreten Fall eines *MEMS*-Aktors – auf physikalische Gleichungen bzw. Gleichungssysteme verstanden. Im allgemeinen Fall führt diese Abbildung zu einem partiellen Differentialgleichungssystem, dessen Lösung die Eigenschaften oder das Verhalten des abgebildeten Originals widerspiegelt. Dabei können und müssen nicht alle Attribute des Originals erfasst sein. Mithilfe eines solchen Modells lässt sich also das Verhalten eines Systems bezüglich einer begrenzten Anzahl von physikalischen Einflussgrößen wie z.B. elektrische Spannung, Geschwindigkeit, Dehnung simulieren. Physikalische Modelle ermöglichen es im Idealfall, Probleme die beim Einsatz des späteren Bauelements auftreten können, vorherzusehen und durch geeignete Maßnahmen im Bauelemententwurf zu vermeiden. Außerdem können mithilfe von physikalischen Modellen die Eigenschaften vorhandener Bauelemente untersucht und verstanden werden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Analyse. Ein weiteres Anwendungsfeld für physikalische Modelle ist die effiziente Optimierung und anwendungsbezogene Gestaltung von Bauelementen. Man spricht dann von Synthese. Entsprechend [1] umfasst der Begriff *Entwurf* die Synthese und Analyse eines physikalischen Systems.

Wie auch in vielen anderen Gebieten der Technik ist die Abstraktion, also das Ausblenden bzw. Zusammenfassen und Vereinfachen von Zusammenhängen und Eigenschaften, ein wichtiges Werkzeug beim Entwurf von *MEMS*. Sie bündelt die Aufmerksamkeit des

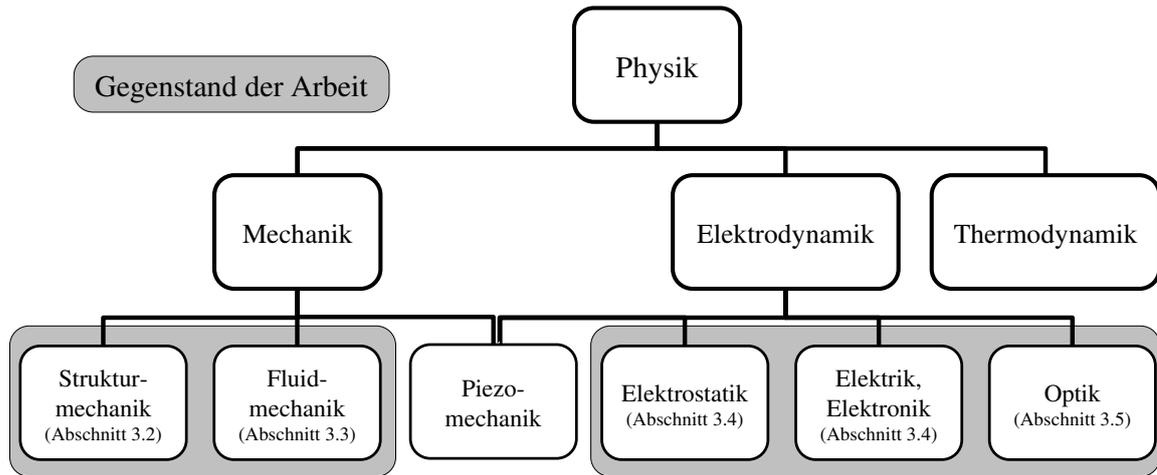


**Abb. 1.1:** Abstraktionsebenen beim Entwurf von MEMS-Bauelementen. Die Darstellung erfolgt in Anlehnung an [2]. Zusätzlich ist die Einordnung der Abstraktionsebenen in die Ziele der Arbeit enthalten.

Entwerfers auf das Wesentliche und hilft bei der Strukturierung und Partitionierung von Problemen. Nach [2] lässt sich der Entwurfsprozess von *MEMS*-Bauelementen in die vier Abstraktionsebenen *process*, *physical*, *device* und *system* unterteilen. Die Prozess-Ebene bzw. *process* bezieht sich dabei auf die zum Einsatz kommende *MEMS*-Technologie, also das Herstellungsverfahren. In dieser Ebene sind beispielsweise Ätz-Simulationen und der Maskenentwurf angesiedelt. Die physikalische Ebene bzw. *physical* bezieht sich auf die physikalischen Eigenschaften des Bauelements. Diese resultieren aus den Materialeigenschaften und realisierten Geometrien und werden typischerweise auf Systeme partieller Differentialgleichungen abgebildet. Da diese im Allgemeinen nur mit vergleichsweise hohem Rechenaufwand und speziellen Methoden lösbar sind, werden oft Modelle reduzierter Ordnung eingeführt. Sie fassen komplexe physikalische Eigenschaften in vereinfachter Form zusammen. Diese Modelle werden der Bauelement-Ebene (*device*) zugeordnet. Sie lassen sich oft auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen abbilden. Um ein *MEMS*-Bauelement im Kontext eines Systems höherer Ordnung bzw. Mikrosystems (Ansteuerschaltung, Auswerte-Elektronik usw.) simulieren zu können, werden sogenannte Verhaltensmodelle benötigt. Diese bilden die relevanten Eigenschaften auf eine definierte Simulations-Schnittstelle (z.B. *VHDL*, *Simulink*<sup>®</sup>) ab. Simulationen, die mit Modellen dieser Art durchführbar sind, werden der System-Ebene (*system*) zugeordnet.

Die vorliegende Arbeit befasst sich ausschließlich mit Problemen der physikalischen Ebene und der Bauelement-Ebene. Dabei werden jedoch durchaus Eigenschaften und Restriktionen, welche aus der System-Ebene oder der *MEMS*-Technologie (Prozess-Ebene) resultieren, berücksichtigt. Abbildung 1.1 verdeutlicht das Abstraktionskonzept für den *MEMS*-Entwurf und die Einordnung der vorliegenden Arbeit anhand eines Schemas.

Die Tatsache, dass ein heterogenes System, wie es ein *MEMS* darstellt, mehrere physikalische Domänen miteinander koppelt, beeinflusst die Anforderungen an dessen Entwurf. Der in vielen Bereichen der Technik zum Einsatz kommende Ansatz, verschiedene physikalische Effekte getrennt voneinander zu untersuchen, verliert beim Entwurf dieser Bauelemente weitgehend an Gültigkeit; verschiedene Effekte beeinflussen sich in ihrer Wirkung gegenseitig und müssen gekoppelt betrachtet werden. Zusätzlich wird der Anspruch dadurch erhöht, dass die Anzahl der physikalischen Domänen, mit denen sich der Entwerfer auseinandersetzen muss, vergleichsweise hoch ist. So müssen beispielsweise beim Entwurf von allen *MEMS* zumindest strukturmechanische und elektrische Phänomene gekoppelt betrachtet werden. Soll das Bauelement nicht in Vakuum betrieben werden, müssen oft



**Abb. 1.2:** *Physikalische Domänen des MOEMS-Entwurfs.* Es sind die beim Entwurf relevanten physikalischen Domänen am Beispiel des am *Fraunhofer IPMS* Dresden entwickelten Mikroscoannerspiegels dargestellt. Es erfolgt außerdem die Einordnung in die Ziele der Arbeit.

Gasdämpfungseffekte – also fluidmechanische Phänomene – berücksichtigt werden. Thermische Effekte beeinflussen oft die Eigenschaften eines *MEMS* und müssen dann ebenfalls mit einbezogen werden, *MOEMS* erfordern zusätzliche Betrachtungen im Bereich der Optik usw. Zusätzlich sind meist noch elektronische Schaltungen zum Betrieb der Bauelemente erforderlich, welche ebenfalls entworfen werden müssen. Oft genügen vereinfachte analytische Modelle nicht den gestellten Anforderungen an die Genauigkeit des Modells, sodass auf spezielle numerische Berechnungsverfahren, wie z.B. die Finite Elemente Methode (*FEM*), zurückgegriffen werden muss. Abbildung 1.2 verdeutlicht diese Besonderheit des Entwurfs von *MOEMS* am Beispiel des am *Fraunhofer IPMS* Dresden entwickelten Mikroscoannerspiegels (Abschnitt 2.3, [3]).

Sowohl zum Entwurf als auch zur Modellierung von *MEMS* und zu den sich dabei z.B. durch Wechselwirkungen unterschiedlicher physikalischer Domänen ergebenden Besonderheiten und Problemen wurden in den letzten Jahren eine Reihe von Fachbüchern [1, 2, 4, 5, 6] und eine große Anzahl technischer und wissenschaftlicher Artikel [7, 8, 9, 10, 11] veröffentlicht. Viele namhafte Hersteller von Simulationswerkzeugen haben ihr Angebot um Speziallösungen zur Simulation von *MEMS* erweitert [12, 13, 14]. Auch komplett neue Systeme, welche ausschließlich für den Entwurf solcher Bauelemente entwickelt wurden, sind verfügbar [15, 16].

Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese vorhandenen Methoden und Werkzeuge des Entwurfs und der Modellbildung zu erweitern und zu systematisieren. Dabei beschränkt sie sich auf resonante mikromechanische Bauelemente mit elektrostatischem Antrieb. Zum besseren Verständnis der Problematik und zur Verifikation von Simulationsergebnissen werden eine Reihe konkreter Beispiele behandelt. Dazu werden die aktuelle *MEMS*-Technologie bzw. verfügbare Bauelemente des am *Fraunhofer IPMS* entwickelten Mikroscoannerspiegels herangezogen.

Ein besonderes Merkmal dieser resonanten Bauelemente ist die Art des zum Einsatz kommenden elektrostatischen Antriebsprinzips. Es handelt sich dabei um eine horizontale Elektrodenanordnung, die in vertikaler Richtung ausgelenkt wird, den sogenannten *Out-of-plane-comb*-Antrieb (siehe dazu Abschnitt 2.3, [3, 17]). Der Schwerpunkt dieser Arbeit

liegt dementsprechend auf der Modellierung und dem Entwurf resonanter *MEMS*- bzw. *MOEMS*-Aktoren mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb.

Viele Aspekte und Probleme der Modellierung und des Entwurfs dieser Bauelemente wurden bereits in [3, 18, 19] und teilweise in [17] erörtert. Die vorliegende Dissertation soll diese Arbeiten ergänzen und fortsetzen. Dabei wird auf neue Anwendungsmöglichkeiten der Bauelemente und die damit verbundenen steigenden Anforderungen und Probleme bzw. deren Lösung eingegangen. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf den folgenden Punkten:

- aus geometrischen Nichtlinearitäten resultierende mechanische Spannungen innerhalb der deformierten Strukturen und deren Verminderung,
- aus geometrischen Nichtlinearitäten resultierende auslenkungsabhängige Federhärten oder mechanische Koppeffekte zwischen Bewegungsachsen und deren Folgen und Möglichkeiten der Einflussnahme,
- trägheitsbedingte dynamische Deformationen der Mikroscoannerspiegel während der Oszillation und Möglichkeiten zu deren Reduzierung,
- Einflüsse von Fertigungstoleranzen auf die Eigenschaften der Bauelemente und Möglichkeiten zu deren Verminderung,
- auftretende Dämpfungsmechanismen und deren Einfluss auf das Verhalten und die Effizienz der Bauelemente.

Schließlich werden, unter Berücksichtigung der untersuchten Probleme, Strategien und Werkzeuge zur Verfügung gestellt, mit denen es möglich ist, das Verhalten von Mikroscoannerspiegeln mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb möglichst effizient und exakt zu simulieren (Analyse). Weiterhin werden Strategien zur Optimierung der Eigenschaften dieser Bauelemente entwickelt und an konkreten Beispielen vorgestellt (Synthese). Die für den Entwurf benötigten physikalischen Zusammenhänge und erstellten Modelle werden in Form von mathematischen Herleitungen, Skripten oder Bibliotheken nachvollziehbar und dokumentiert zur Verfügung gestellt.

Die Arbeit umfasst neben dieser Einführung sechs weitere Kapitel, die wie folgt gegliedert sind:

Kapitel 2 verschafft dem Leser einen Überblick zu den wichtigsten Anwendungsgebieten und Herstellungsverfahren von *MEMS*-Aktoren. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den am *Fraunhofer IPMS* entwickelten Mikroscoannerspiegeln. Anhand eines konkreten Anwendungsbeispiels werden schließlich die Anforderungen an zukünftige Bauelemente diskutiert und damit die Motivationen dieser Arbeit abgeleitet.

In Kapitel 3 werden die beim Entwurf von Mikroscoannerspiegeln gültigen Randbedingungen und physikalischen Grundlagen erarbeitet. Dabei werden die relevanten physikalischen Domänen (siehe Abb. 1.2) zunächst voneinander getrennt, also ungekoppelt betrachtet.

In Kapitel 4 wird eine Stabilitätsanalyse der nichtlinearen Bewegungsgleichung der *Fraunhofer IPMS*-Mikroscoannerspiegel vorgestellt. Sowohl das Anschwingen der Bauelemente in parametrischer Resonanz, als auch die in den Frequenz-Antwortkurven typischerweise auftretenden Hysteresen können mit deren Hilfe erklärt werden. Weiterhin werden die Einflüsse geometrischer Nichtlinearitäten auf das Bauelementverhalten untersucht.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit den aus den Eigenschaften der Mikroscannerspiegel folgenden Anforderungen an Entwurfswerkzeuge. Neben einigen Software-Werkzeugen die aus der Arbeit anderer Forschungsgruppen hervorgegangen sind, wird das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte *IPMS MEMS Toolkit IMtk* vorgestellt. Es handelt sich dabei um eine Klassenbibliothek für die Programmumgebung *MATLAB*<sup>®</sup>, mit deren Hilfe ordnungsreduzierte Modelle resonanter *MEMS*-Bauelemente mit elektrostatischem Antrieb erstellt werden können.

In Kapitel 6 wird die aus den erarbeiteten Methoden und Werkzeugen resultierende Entwurfsstrategie für *Fraunhofer IPMS*-Mikroscannerspiegel vorgestellt. Anhand des Entwurfsablaufs eines 2D-Scannerspiegels wird sie anschließend veranschaulicht.

Kapitel 7 fasst die gewonnenen Erkenntnisse zusammen. Schließlich wird ein Ausblick auf weiterführende Arbeiten und zukünftige Fragestellungen gegeben.



## 2 Grundlagen und Stand der Technik

Über mehrere Jahrzehnte hinweg haben *MEMS* an Universitäten und anderen Forschungseinrichtungen eine Art Nischendasein gefristet. Die Gründe dafür lagen unter anderem im Fehlen von ausgereiften und massenproduktionstauglichen Fertigungsprozessen und nicht zuletzt in fehlenden Anwendungen. Vor allem innerhalb der letzten zehn Jahren hat sich dieser Zustand massiv verändert. *MEMS*-Bauelemente sind heute wichtige Bestandteile von Automobilen, Druckern, Projektoren, Barcodescannern usw. Die größte Verbreitung haben sie momentan im Bereich der Inertialsensorik. Vor allem die *Bosch GmbH* [20] ist als größter Hersteller von mikromechanischen Beschleunigungs- und Drehratensensoren für die Automobil- und Unterhaltungsindustrie sehr erfolgreich. Die zahlenmäßig wichtigsten *MEMS*-Aktoren sind zurzeit Druckköpfe, beispielsweise für Tintenstrahldrucker. In diesem Bereich ist die Firma *Dimatix<sup>TM</sup>* in der Entwicklung und Produktion führend [21]. Der wichtigste aktuelle Vertreter der *MOEMS*-Hersteller ist *Texas Instruments* mit seinen *DMD<sup>TM</sup>*-Spiegelmatrizen. Diese kommen vor allem in Video-Projektoren mit *DLP<sup>TM</sup>*-Technologie zum Einsatz. Abbildung 2.2 enthält neben diesen Beispielen für *MEMS*-Sensoren und -Aktoren auch ein Beispiel für die am *Fraunhofer IPMS* entwickelten Mikrospiegel. Aufgrund der Tatsache, dass diese Bauelemente nur im resonanten Betrieb eingesetzt werden können und daher nicht für eine statische Ablenkung sondern nur für einen scannenden Betrieb geeignet sind, spricht man auch von Mikroscannerspiegeln. Sie werden beispielsweise zur Ablenkung des Lasers in portablen Barcode-Lesegeräten eingesetzt. Zukünftige Anwendungen sind im Bereich der scannenden zweidimensionalen Datenaufnahme (Laser-Imager), Spektroskopie oder Projektion von Bildern denkbar bzw. befinden sich in der Entwicklung.

In den folgenden Abschnitten soll dem Leser ein Überblick über verschiedene mögliche Konzepte zur Realisierung von *MEMS*-Aktoren vermittelt werden. Dazu wird kurz auf verbreitete Herstellungstechnologien und Antriebskonzepte eingegangen. Da sich der größte Teil der vorliegenden Arbeit mit den am *Fraunhofer IPMS* entwickelten Bauelementen und Technologien auseinandersetzt, wird auf diese gesondert eingegangen. Schließlich werden am Anwendungsbeispiel „Laserprojektor“ einige Anforderungen an zukünftige Mikroscanner-Bauelemente erläutert und daraus die Motivation dieser Arbeit abgeleitet.

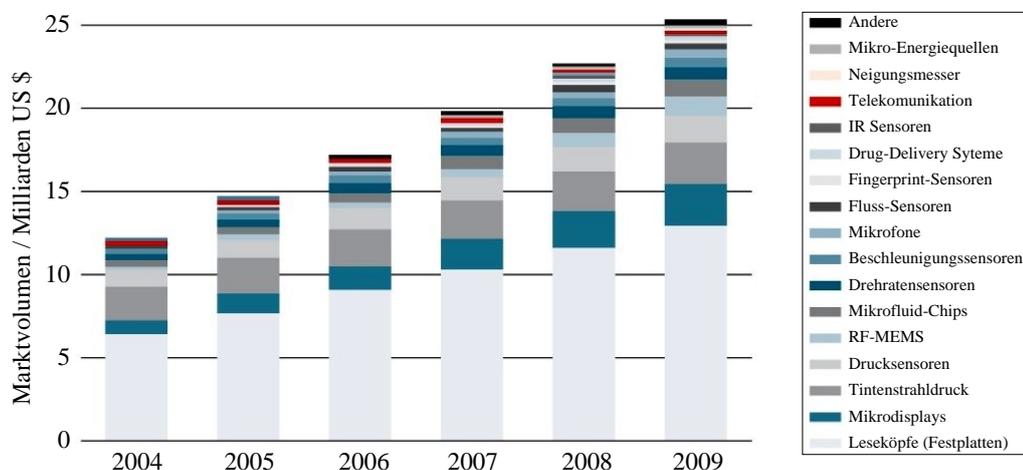
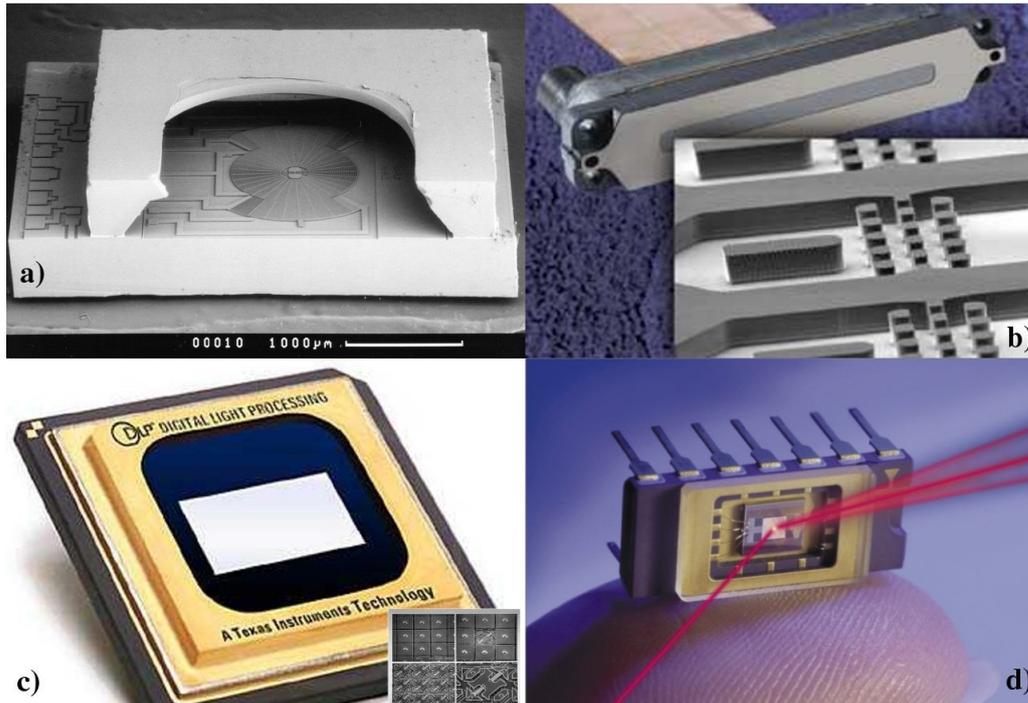


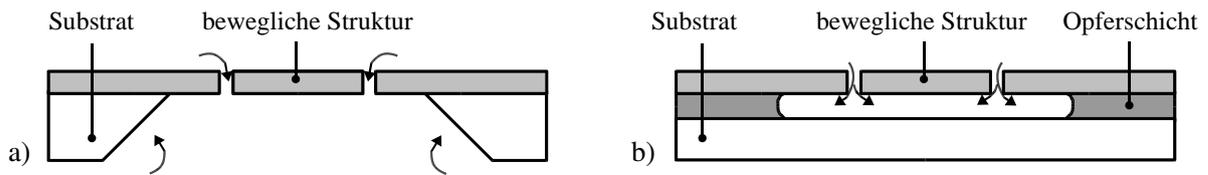
Abb. 2.1: Marktprognose für einige Produkte der Mikrosystemtechnik. nach [22].



**Abb. 2.2:** Beispiele für MEMS-Bauelemente. a) elektronenmikroskopische Aufnahme eines für die Automobilindustrie gefertigten Drehratensensors der *Bosch GmbH* [23]; b) in *MEMS*-Technologie gefertigte Piezo-Mikropumpe für Tintenstrahl-Druckköpfe [24]; c) *DMD<sup>TM</sup>* der Firma *Texas Instruments* [25]; d) am *Fraunhofer IPMS* entwickelter Mikros scannerspiegel [3].

## 2.1 Herstellungstechnologien

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, werden in der Mikrosystemtechnik vor allem Werkzeuge und Technologien eingesetzt, die ihren Ursprung in der Fertigung von mikroelektronischen Schaltungen haben. Als Basismaterial kommt vorzugsweise der Halbleiter Silizium zum Einsatz. Aufgrund des großen, rasch wachsenden Bedarfs der Halbleiterbranche, ist dieses Material in polykristalliner oder einkristalliner Form in großen Mengen bei extrem hoher Reinheit zu vergleichsweise geringen Kosten verfügbar. Vor allem einkristallines Silizium zeichnet sich außerdem durch hervorragende mechanische Eigenschaften aus. Bis zu seiner Fließtemperatur von etwa  $700\text{ }^{\circ}\text{C}$  weist es aufgrund der vernachlässigbar geringen inneren Reibung ein nahezu ideal elastisches Verhalten auf. Die unter idealen Bedingungen gemessene Streckgrenze für unstrukturiertes einkristallines Silizium ist mit  $7\text{ GPa}$  fast zweimal so groß wie die von Stahl [5]. Allerdings wird in der Realität die Bruchspannung durch Strukturierung wesentlich verringert. Die Verringerung ist stark abhängig vom eingesetzten *MEMS*-Prozess und den daraus resultierenden Materialschädigungen. Typische Bruchspannungen (Dauerfestigkeit) für Silizium-Mikrostrukturen liegen daher lediglich im Bereich von  $0.5\text{--}1.4\text{ GPa}$  [5, 11]. Die Dauerfestigkeit von Stahl liegt im Vergleich dazu im Bereich von  $0.2\text{--}0.5\text{ GPa}$  [26]. Eine weitere wichtige mechanische Eigenschaft von Silizium ist das große Elastizitätsmodul bei vergleichsweise geringer Dichte. Damit eignet es sich besonders gut für die Fertigung mikromechanischer Resonatoren mit hohen Schwingfrequenzen. Außerdem besitzt Silizium neben den für sensorische Anwendungen sehr interessanten piezoresistiven Eigenschaften [27] auch gute optische Merkmale. So weist es im sichtbaren und ultravioletten Bereich eine für viele Anwendungen ausreichen-



**Abb. 2.3:** Technologien zur Herstellung von MEMS-Bauelementen. a) Volumenmikromechanik mit Zweiseitenlithografie; b) Oberflächenmikromechanik mit Opferschicht.

de Reflexivität auf, während es für infrarotes Licht transparent ist. Damit ist es vor allem auch für optische *MEMS* interessant. Die für diese Arbeit relevanten Eigenschaften und Materialparameter für einkristallines und polykristallines Silizium sind im Anhang A zusammengefasst.

Da die Mehrzahl der *MEMS*-Entwürfe einschließlich der am *Fraunhofer IPMS* entwickelten Mikroscooperspiegel auf Siliziumtechnologien basieren, werden nun die wichtigsten Technologien zur Silizium-Mikrostrukturierung kurz vorgestellt. Anschließend wird auf den am *Fraunhofer IPMS* zur Fertigung von Mikroscooperspiegeln zum Einsatz kommenden Prozess *AME1* und dessen für den Entwurf relevanten Eigenschaften konkret eingegangen.

**Die Volumenmikromechanik** ist eine Technologie zur dreidimensionalen Strukturierung von vorwiegend einkristallinem Silizium. Dabei wird zumeist ein großer Teil der Waferdicke bearbeitet. Es ist mit dieser Technologie möglich sowohl starre (Düsen, Gitter), deformierbare (Federelemente, Membranen) als auch bewegliche Funktionselemente (Rotoren, Getriebe) zu fertigen. Zur Strukturierung werden fotolithografische Verfahren in Verbindung mit physikalisch-chemischen Ätztechniken genutzt. Diese werden in isotrope und anisotrope Verfahren unterschieden. Isotrope Ätzverfahren zeichnen sich durch eine annähernd gleiche Ätzgeschwindigkeit in allen Raumrichtungen aus. Bei anisotropen Ätzverfahren werden die richtungsabhängigen Eigenschaften des Silizium-Einkristalls ausgenutzt. Diese resultieren aus verschiedenen Packungsdichten und unterschiedlich vielen freien Bindungen des Atomgitters in unterschiedlich orientierten Oberflächen des Materials. Bei geeigneter Wahl des Ätzmediums kann so eine richtungsselektive Ätzung erfolgen. Außerdem kann die Kristallebene mit der höchsten Packungsdichte ( $\{111\}$ -Ebene im Silizium-Kristall) als natürlicher Ätzstopp genutzt werden. In der Volumenmikromechanik können mittels Zweiseitenlithografie beide Seiten des Wafers bearbeitet werden. Auf diese Weise ist es beispielsweise möglich, Membranen mit definierten Dicken aus einkristallinem Silizium herzustellen (Abb. 2.3 und Abb. 2.4 bzw. Anhang B.1, Schritt 7). Weitere Ausführungen zur Volumenmikromechanik und deren Anwendung finden sich in [4, 5]. Typische Vertreter für in Volumenmikromechanik gefertigte *MEMS*-Bauelemente sind die am *Fraunhofer IPMS* entwickelten Mikroscooperspiegel.

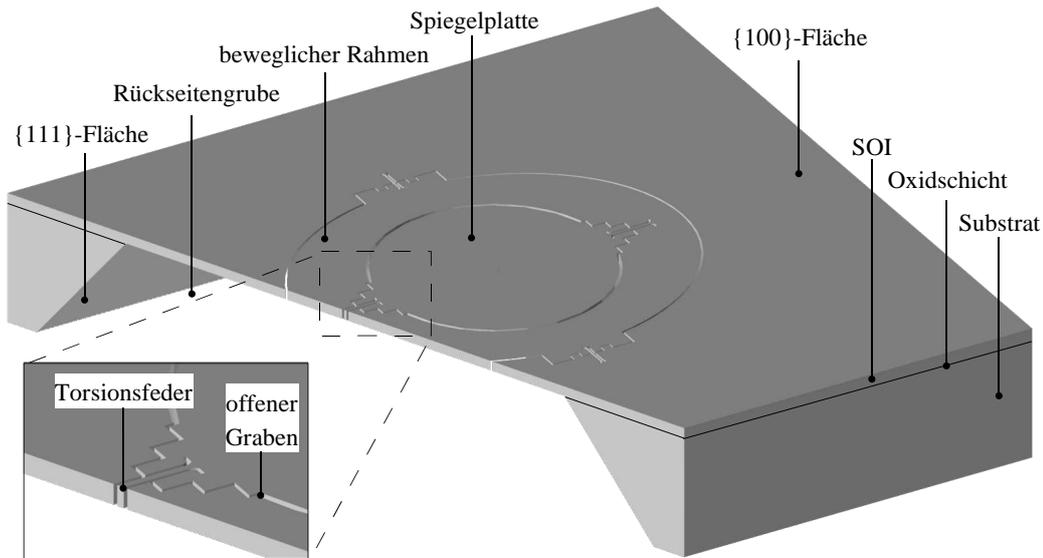
**Die Oberflächenmikromechanik** kann zur dreidimensionalen Strukturierung von Schichtsystemen genutzt werden. Dabei werden Trockenätzverfahren sowohl zur vertikalen, als auch zur lateralen Strukturierung genutzt. Im Gegensatz zur Volumenmikromechanik wird dabei nicht das Gesamtsubstrat, sondern nur oberflächennahe Schichten strukturiert. Auf diese Weise kann eine starke Miniaturisierung von mikromechanischen Strukturen bei geringen Toleranzen erreicht werden. Außerdem ist die Realisierung von echten dreidimensionalen Strukturen möglich. Auch kann das Trägersubstrat bereits mi-

kroelektronische Schaltungen enthalten. Auf diese Weise können voll integrierte Mikrosysteme (z.B. Aktoren mit Ansteuer- oder Sensoren mit Auswerteelektronik) realisiert werden.

Die Nachteile von Oberflächenmikrostrukturen sind hohe mechanische Eigenspannungen in den Strukturen und die im Vergleich zu einkristallinem Silizium schlechteren Materialeigenschaften der Schichtwerkstoffe. Meist werden in der Oberflächenmikromechanik eine oder mehrere polykristalline Schichten genutzt. Mithilfe einer Opferschicht können dabei die in den darüber liegenden Schichten definierten Strukturen freigelegt werden (Abb. 2.3). Auf diese Weise können auch frei bewegliche Teile (Rotoren, Mikromotoren) erzeugt werden. Auch zur Oberflächenmikromechanik finden sich nähere Ausführungen in [4, 5]. Beispiele für in Oberflächenmikromechanik gefertigte *MEMS*-Bauelemente sind die ebenfalls am *Fraunhofer IPMS* hergestellten *SLM*-Spiegelmatrizen (*Spatial Light Modulator*, [28]).

**Der *MEMS*-Prozess *AME1*** wurde am *Fraunhofer IPMS* entwickelt und kommt hauptsächlich bei der Herstellung von Mikroscooperspiegeln zum Einsatz [3, 29, 30]. *AME1* basiert auf Volumenmikromechanik mit Zweiseitenlithografie. Als Basismaterial kommen *BSOI*-Wafer mit standardmäßig 30  $\mu\text{m}$  dicker, hoch dotierter *SOI*-Schicht zum Einsatz. Das eigentliche Bauelement wird durch Strukturierung dieser *SOI*-Schicht definiert. Dabei kommt ein anisotropes Trockenätzverfahren zum Einsatz. Auf diese Weise lassen sich Ätzgräben mit sehr hohen Aspektverhältnissen herstellen. Die reproduzierbare Genauigkeit der geometrischen Strukturen liegt dabei im Bereich von einigen 10 nm. Reflexionsschichten und Leiterbahnen werden durch die Abscheidung von Aluminium realisiert. Verschiedene elektrische Potentiale innerhalb des Bauelementes können durch offene (Ätz-) Gräben voneinander getrennt werden. Wird außerdem eine mechanische Verbindung zwischen Gebieten mit unterschiedlichen elektrischen Potentialen benötigt, kommen mit Polysilizium gefüllte Gräben zum Einsatz. Da Polysilizium elektrisch leitfähig ist, wird die Isolation durch eine zusätzliche Schicht aus Siliziumdioxid an den Grabenwänden gewährleistet. Mithilfe eines anisotropen, nasschemischen Ätzprozesses wird das Substrat von der Rückseite des Wafers unterhalb des mechanisch aktiven Gebietes entfernt. Auf diese Weise werden die beweglichen mikromechanischen Komponenten freigelegt. Ein detaillierter Prozessablauf für *AME1* ist in Anhang B.1 enthalten. Auf die oben erwähnten gefüllten Isolationsgräben wird hier allerdings nicht näher eingegangen. Weitere Informationen dazu finden sich in [3, 31].

Abbildung 2.4 enthält den vereinfachten, schematischen Aufbau eines im *AME1*-Prozess gefertigten Mikroscooperspiegels zur zweidimensionalen Ablenkung von Licht. Um eine Verkippung in zwei orthogonale Richtungen zu ermöglichen, ist die Spiegelplatte kardanisich aufgehängt. Die relativ zueinander beweglichen Bestandteile des Bauelementes sind durch Torsionsfedern mit annähernd rechteckförmigen Querschnitten (prismatische Torsionsstäbe) miteinander verbunden. Diese bestehen wie alle beweglichen Teile aus einkristallinem Silizium und sind daher extrem belastbar. Wird der Spiegel ausgelenkt, werden die Torsionsfedern verdreht und es wirkt aufgrund der elastischen Eigenschaften des Materials ein Drehmoment in Richtung der Ruhelage. In Kombination mit seiner Massenträgheit bildet ein solcher Mikrospiegel daher einen Feder-Masse-Schwinger, also einen mechanischen Oszillator. Bei geeigneter Anregung kann ein solches System quasi-statisch [32, 33, 34] oder in Resonanz betrieben werden. Der Vorteil des resonanten Betriebs liegt in den großen erreichbaren Auslenkungen bei vergleichsweise geringen benötigten Antriebsmomenten. Im resonanten Betrieb ist jedoch nur eine periodische,



**Abb. 2.4:** Schematischer Aufbau eines Mikrosannerspiegels. Dargestellt ist ein Bauelement zur zweidimensionalen Ablenkung von Licht. Die Abbildung beschränkt sich auf die relevanten mikromechanischen Komponenten. Isolationen, Leiterbahnen und Antrieb sind nicht dargestellt.

näherungsweise sinusförmige Auslenkung mit vorgegebener Frequenz möglich. Aufgrund von Prozessschwankungen und daraus resultierenden Fertigungstoleranzen ist diese Frequenz für jedes Bauelement geringfügig verschieden. Die Größenordnung der Abweichung ist dabei von der Geometrie der Torsionsfedern abhängig (Abschnitt 3.2.5).

## 2.2 MEMS-Aktoren

Zum Antrieb von *MEMS*-Aktoren können verschiedene physikalische Effekte genutzt werden. Die folgenden Abschnitte sollen eine Übersicht über die verbreitetsten Antriebsprinzipien geben und dabei die verschiedenen physikalischen Effekte vergleichend bewerten. Schließlich wird auf den *Fraunhofer IPMS* Mikrosannerspiegel und dessen Konzept und Eigenschaften detaillierter eingegangen.

Die im Folgenden genutzten gestrichelten Koordinaten  $(x', y', z')$  beziehen sich auf ein für das jeweilige Problem willkürlich festgelegtes *lokales Koordinatensystem*. Im Gegensatz dazu ist die Lage der Koordinatenachsen  $(x, y, z)$  mit Bezug auf das jeweilige Bauelement eindeutig festgelegt. Die dazu gültigen Vereinbarungen sowie die zur Bezeichnung der Material- und Zustandsgrößen genutzten Konventionen finden sich in Abschnitt 3.1 dieser Arbeit.

### 2.2.1 Antriebsprinzipien

Für eine vergleichende Bewertung verschiedener Prinzipien soll auf die aus der Skalierung in den Mikrometerbereich resultierenden Besonderheiten eingegangen werden. Dazu wird der dimensionslose Faktor  $k$  eingeführt, welcher der Skalierung der geometrischen Abmessungen einer Struktur entspricht [3]. Da bei der Verkleinerung einer dreidimensionalen Geometrie bei gleichbleibender Dichte viele physikalische Eigenschaften bzw. Effekte wie Masse, Massenträgheit und Dämpfung mit wenigstens  $k^3$  skalieren, ist jede Skalierung der Antriebskraft mit einem Exponenten kleiner drei günstig.

**Die Lorentzkraft** wirkt auf eine bewegte Ladung  $q$  im magnetischen Feld mit einer Flussdichte  $\vec{B}$ . Bewegt sich diese Ladung mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  innerhalb des Felds, resultiert dies in einer auf die Ladung wirkende Kraft:

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \cdot \frac{\vec{s}}{t} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen elektrischem Strom  $I$  und der bewegten Ladung  $q = I \cdot t$  ergibt sich für einen dünnen stromdurchflossenen Leiter

$$\vec{F}_m = I \cdot \vec{s} \times \vec{B} \quad (2.2)$$

Unter Verwendung eines Permanentmagneten zur Erzeugung des magnetischen Felds und bei konstanter Stromdichte skaliert die LORENTZKraft mit  $k^3$  [3]. Der magnetische Antrieb zeichnet sich durch vergleichsweise große einkoppelbare Kräfte über einen großen Auslenkbereich aus. Nachteilig wirken sich eine hohe Verlustleistung in der Größenordnung von einigen 10 mW und der aufgrund des nötigen Hybridbaus (Permanentmagnet) hohe Aufwand bei der Fertigung aus. Ein Beispiel für ein MEMS-Bauelement mit magnetischem Antrieb ist der von der Firma *Microvision* entwickelte Mikrospiegel der zurzeit in Display-Anwendungen zum Einsatz kommt [34].

**Der thermomechanische Effekt** wirkt in Schichtstapeln von Materialien mit verschiedenen thermischen Ausdehnungskoeffizienten oder in geometrischen Anordnungen mit großem Temperaturgradienten (*Hot-Arm-Aktor*, [35]). Änderungen der Temperatur führen zu einer Deformation der Struktur. Die nutzbare thermomechanische Kraft ergibt sich beispielsweise für einen aus zwei Schichten bestehenden Bimaterialstreifen (thermischer Bimorph) mit der Länge  $l$  zu:

$$F_{\text{th},z'} = \frac{3}{2} \frac{E_{x'x'} I_{y'y'}}{r_{\text{th}} l} \Delta T \quad (2.3)$$

Dabei ist  $E_{x'x'} I_{y'y'}$  die Biegesteifigkeit um die  $y'$ -Achse und  $r_{\text{th}}$  der spezifische thermische Krümmungsradius des Zweischichtsystems mit  $[r_{\text{th}}] = \text{K} \cdot \text{m}$  [5].  $\Delta T$  entspricht der Änderung der Temperatur bezogen auf diejenige Temperatur, bei der der Bimaterialstreifen keine Krümmung aufweist. Die Temperaturänderung wird meist mithilfe einer elektrischen Mikroheizung (ohmscher Widerstand) eingestellt. Der thermomechanische Effekt skaliert für eine gegebene Temperaturdifferenz  $\Delta T$  mit  $k^2$ . Thermomechanische Aktoren zeichnen sich durch eine vergleichsweise unkomplizierte Fertigung aus. Auch können sie zur Realisierung großer Auslenkungen genutzt werden. Ein Nachteil ist die prinzipbedingte Empfindlichkeit gegenüber Schwankungen der Umgebungstemperatur. Des Weiteren sind thermomechanische Aktoren vergleichsweise träge. Die maximale realisierbare Grenzfrequenz liegt in der Größenordnung von einigen Kilohertz. Ein Beispiel für ein thermomechanisch angetriebenes MEMS-Bauelement findet sich in [36].

**Der inverse piezoelektrische Effekt** wird ebenfalls zum Antrieb von MEMS-Aktoren eingesetzt. Dabei wird ausgenutzt, dass der Piezoeffekt, der in piezoelektrisch aktiven Materialien auftritt, umkehrbar ist (reziproker Piezoeffekt). Es wird an einem solchen Kristall ein elektrisches Feld angelegt, was zu einer Formänderung führt. Die daraus resultierende Kraft für einen Bimorph-Aktor (Zweischichtsystem) mit der Länge  $l$  ergibt sich dann zu:

$$F_{\text{p},z'} = \frac{3}{2} \frac{E_{x'x'} I_{y'y'}}{r_{\text{p}} l} U \quad (2.4)$$

Dabei entspricht  $E_{x'x'}I_{y'y'}$  der Biegesteifigkeit um die  $y'$ -Achse;  $r_p$  ist der spezifische piezoelektrische Krümmungsradius des Zweischichtsystems mit  $[r_p] = \text{V} \cdot \text{m}$  [35].  $U$  ist die am Piezokristall angelegte elektrische Spannung. Der inverse piezoelektrische Effekt skaliert unter Annahme einer konstanten Durchbruchfeldstärke mit  $k^2$  [3]. Piezoelektrische Aktoren zeichnen sich durch geringe Leistungsaufnahme bei sehr hohen Reaktionsgeschwindigkeiten (hohe Grenzfrequenzen) aus. Sie lassen sich jedoch nur bei vergleichsweise geringen Auslenkungen betreiben. Ein Beispiel für ein piezoelektrisch angetriebenes *MEMS*-Bauelement findet sich in [37].

**Die elektrostatische Kraft** wirkt auf Ladungen im elektrischen Feld. Im *MEMS*-Entwurf werden elektrostatische Aktoren durch Elektroden realisiert, welche durch einen Spalt voneinander elektrisch isoliert sind und somit eine Kondensatoranordnung mit der elektrischen Kapazität  $C$  bilden. Wird an diesem Kondensator eine elektrische Spannung  $U$  angelegt, wirkt auf beide Elektroden die betragsmäßig gleiche Kraft in Richtung der größten Kapazitätserhöhung. Für eine durch  $\vec{s}$  vorgegebene Richtung ergibt sich die auf eine solche Elektrode wirkende Kraft zu:

$$\vec{F}_{\text{el}} = \frac{1}{2} U^2 \frac{d}{d\vec{s}} C \quad (2.5)$$

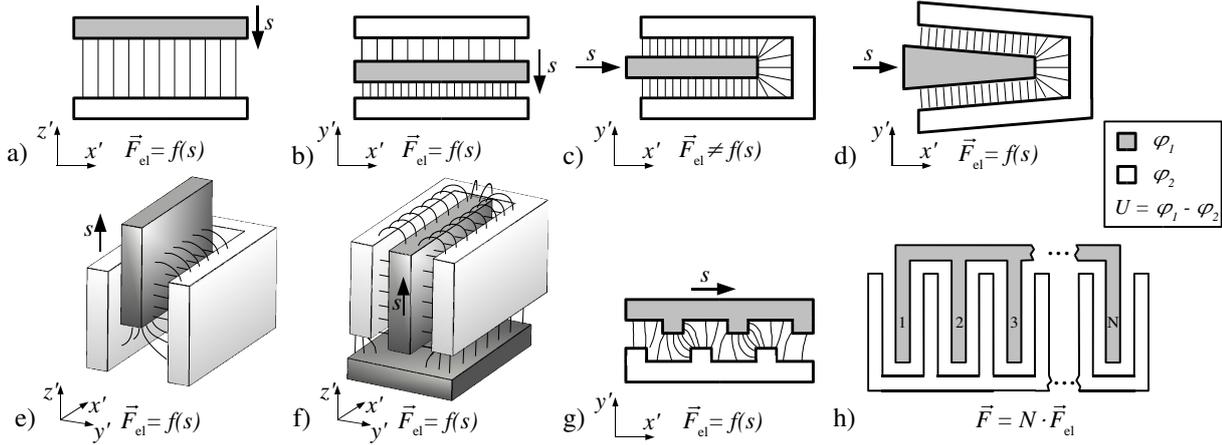
Die elektrostatische Kraft skaliert dabei unter Annahme einer konstanten elektrischen Spannung  $U$  mit  $k^0$  [3]. Damit weist das elektrostatische Antriebsprinzip bezogen auf Mikrostrukturen das günstigste Skalierungsverhalten auf. Da beim Betrieb des Aktors nur Verschiebungsströme fließen, ist die Leistungsaufnahme – vergleichbar mit piezoelektrisch getriebenen Bauelementen – sehr gering. Elektrostatische Aktoren kommen in vielen verschiedenen Ausführungen zum Einsatz. Die einzelnen Lösungen unterscheiden sich dabei stark bezüglich ihrer Eigenschaften. Diese Unterschiede und die sich daraus ergebenden Vor- und Nachteile werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

### 2.2.2 Elektrostatische Antriebe

**Die *Plan-Platten-Elektrode*** (Abb. 2.5a) ist die geometrisch einfachste Variante eines elektrostatischen Antriebs. Unterhalb einer beweglich aufgehängten, mikromechanischen Struktur (z.B. einer Membran) wird eine feste Elektrode angeordnet. Wird zwischen dieser Elektrode und der mikromechanischen Struktur eine elektrische Spannung angelegt, wirkt eine elektrostatische Kraft, welche die Struktur auslenkt. Unter Vernachlässigung der Randfelder (homogenes elektrisches Feld) resultiert diese Kraft für eine geradlinige Bewegung (Translation) in:

$$F_{\text{el},z'} \approx -\frac{1}{2} U^2 \frac{\varepsilon A}{(d_0 - s)^2} \quad (2.6)$$

Dabei ist  $A$  die aktive Fläche der *Plan-Platten-Elektrode* und  $d_0$  der Abstand zwischen dieser und der auslenkbaren Struktur im Ausgangszustand. Mithilfe von *Plan-Platten-Elektroden* lassen sich bei geringen Elektrodenabständen vergleichsweise große Kräfte realisieren. Die zur Verfügung stehenden Wege werden dabei jedoch durch den Elektrodenabstand geometrisch begrenzt. Die nutzbare Kraft nimmt außerdem mit dem Quadrat des Abstands ab. Um bei großen möglichen Auslenkungen relevante Kräfte zu erreichen, muss daher oft mit sehr hohen Antriebsspannungen im Bereich von mehreren hundert Volt



**Abb. 2.5:** Möglichkeiten zur Realisierung elektrostatischer Antriebe. Zur Veranschaulichung des Wirkprinzips ist der qualitative Verlauf des elektrischen Felds dargestellt. a) *Plan-Platten-Elektrode*, b) *Asymmetrische In-plane-Fingerelektrode*, c) *Symmetrische In-plane-Fingerelektrode*, d) *Symmetrische In-plane-Fingerelektrode mit trapezförmiger Gestalt*, e) *Out-of-plane-Fingerelektrode*, f) *Levitations-Fingerelektrode*, g) *Linearantrieb*, h) *Anordnung von Fingerelektroden zu einer Kammelektrode*.

gearbeitet werden. Soll die Auslenkung der Mikrostruktur statisch bzw. quasistatisch erfolgen, wird der verfügbare Weg außerdem durch ein elektromechanisch instabiles Verhalten (*Pull-In*) begrenzt. Dieses ist stark von der mechanischen Aufhängung der beweglichen Mikrostruktur abhängig. Für eine Aufhängung mit einer vom Weg  $s$  unabhängigen Steifigkeit (lineare Feder) begrenzt dieser Effekt die nutzbare Auslenkung auf lediglich ein Drittel des Elektrodenabstands für Translation [5] und ca. auf die Hälfte für eine Verkippung der Mikrostruktur bezüglich der festen Elektrode<sup>1</sup>. Ein weiterer Nachteil dieser Elektrodenanordnung ist die bezogen auf die Möglichkeiten der Mikrostrukturtechnik aufwändige Fertigung. Ein Beispiel für ein Bauelement mit *Plan-Platten-Elektrodenantrieb* ist der am *Fraunhofer IPMS* entwickelte quasistatische Kippspiegel [32].

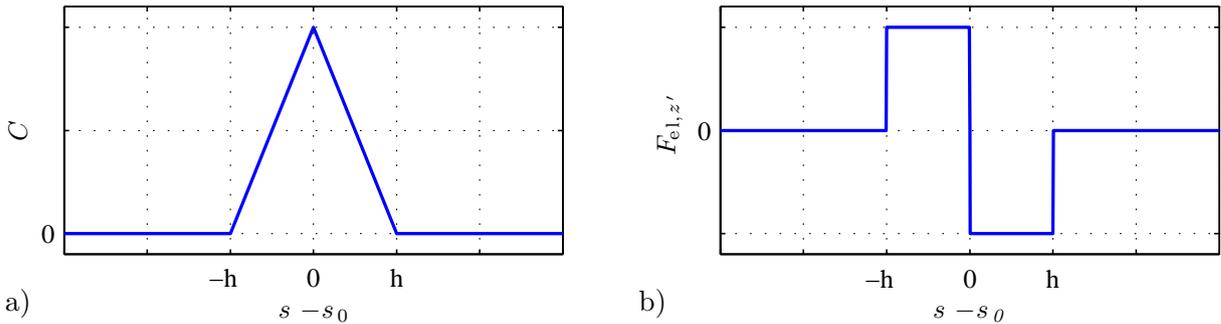
***In-plane-Fingerelektroden*** (Abb. 2.5b-d) sind Anordnungen von fingerförmigen Elektroden innerhalb der Strukturebene des *MEMS*-Bauelements. Sie lassen sich aufgrund ihrer zweidimensionalen Gestalt mit den Mitteln der Mikrostrukturtechnik einfach und mit guter Reproduzierbarkeit fertigen. Es können zwei verschiedene Typen von *In-plane-Fingerelektroden* unterschieden werden:

Bei *asymmetrischer Anordnung* der Elektroden wird eine zur Fingerrichtung orthogonale Auslenkung erzielt. Dabei wird ausgenutzt, dass die Kapazität zweier sich gegenüberliegenden Elektrodenflächen überproportional mit abnehmendem Abstand zunimmt ( $C \sim 1/d^2$ ). Das Resultat ist eine elektrostatische Kraft in Richtung des kleineren Elektrodenabstandes:

$$F_{el,y'} \approx -\frac{1}{2} U^2 \varepsilon A \left( \frac{1}{(d_{01} - s)^2} - \frac{1}{(d_{02} + s)^2} \right) \quad (2.7)$$

$A$  ist dabei die aktive Fläche auf einer Seite der Fingerelektrode,  $d_{01}$  ist der kleinere,  $d_{02}$  der größere Abstand der Elektroden im Ausgangszustand. Mit asymmetrischen *In-plane-*

<sup>1</sup>Auf die analytische Bestimmung des Kippmoments einer solchen Elektrodenanordnung wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen. Informationen dazu finden sich in [32].



**Abb. 2.6:** *Eigenschaften der Out-of-plane-Fingerelektrode.* a) qualitativer Verlauf der Kapazität  $C$  in Abhängigkeit von der Auslenkung; b) der sich ergebende qualitative Kraftverlauf  $F_{el,z'}$ . Es ist zu beachten, dass die Auslenkung  $s$  entsprechend Abb. 2.5 orientiert ist.

Fingerelektroden lassen sich große Kräfte bei kleinen zur Verfügung stehenden Wegen erreichen. Ähnlich wie bei der *Plan-Platten-Elektrode* wird die Auslenkung von elektromechanischen Instabilitäten eingeschränkt.

Bei *symmetrischer Anordnung* der Elektroden (Abb. 2.5c) wird eine Kraftwirkung in Fingerrichtung erzielt. Dabei ändert sich die Größe der aktiven Elektrodenfläche und damit die Kapazität. Im Gegensatz zu allen anderen vorgestellten Konzepten ist die resultierende Kraft nahezu unabhängig von der Auslenkung:

$$F_{el,x'} \approx U^2 \varepsilon \frac{h}{d} \quad (2.8)$$

Dabei ist  $h$  die Dimension der Fingerelektrode in  $z'$ -Richtung und  $d$  der seitliche Abstand zur Gegenelektrode. Die mit einer solchen Anordnung erreichbaren Auslenkungen sind vergleichsweise groß, die Kräfte sind allerdings mindestens eine Größenordnung geringer als bei den bisher vorgestellten Konzepten.

Durch eine trapezförmig zulaufende Gestaltung der Fingerelektroden kann die Kraft wesentlich erhöht werden (Abb. 2.5d). Dabei kommt zum Tragen, dass sich bei der Auslenkung zusätzlich zur aktiven Elektrodenfläche auch der Elektrodenabstand ändert. Allerdings ist die aus einer solchen Anordnung resultierende Kraft von der Auslenkung  $s$  abhängig:

$$F_{el,x'} \approx U^2 \varepsilon h \frac{d_0 \cos \vartheta + l_0 \sin \vartheta}{(d_0 - s \sin \vartheta)^2} \quad (2.9)$$

$d_0$  ist dabei der Elektrodenabstand und  $l_0$  die Länge der aktiven Elektrodenflächen im Ausgangszustand;  $\vartheta$  ist der Anstellwinkel der Seitenflächen der Fingerelektrode. Aufgrund der Wegabhängigkeit der Kraft können bei trapezförmigen *In-plane*-Fingerelektroden elektromechanische Instabilitäten auftreten.

Ein großer Vorteil fingerförmiger Elektroden ist die Möglichkeit zur platzsparenden Anordnung sehr vieler identischer oder ähnlicher Elemente. Auf diese Weise lässt sich die nutzbare Kraft vervielfachen (Abb. 2.5h). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von kammförmigen Elektroden bzw. Kammelektroden. Ein Beispiel für ein *MEMS*-Bauelement mit einem auf *In-plane*-Fingerelektroden basierendem Antrieb findet sich in [23].

**Out-of-plane-Fingerelektroden** (Abb. 2.5e) basieren auf der gleichen geometrischen Anordnung wie *In-plane*-Fingerelektroden. Der Unterschied besteht lediglich in der Rich-

tung der Auslenkung und damit auch in der Richtung der wirksamen elektrostatischen Kraft. Eine bemerkenswerte Eigenschaft von *Out-of-plane*-Fingerelektroden ist, dass die Auslenkung nicht von der Elektrodenanordnung geometrisch begrenzt wird. Entsprechend Gl. (2.5) lässt sich allerdings nur in dem Auslenkungsbereich eine Kraft erzeugen, in dem sich die Kapazität der Elektrodenanordnung ändert. Außerdem kehrt sich die Richtung der Kraft um, wenn die Fingerelektrode eine Auslenkung erreicht, bei der sie sich in einer Ebene mit der Gegenelektrode befindet [3]:

$$F_{\text{el},z'} \approx \begin{cases} 0 & : & |s - s_0| = 0 \\ -\text{sign}(s - s_0) U^2 \varepsilon \frac{l}{d} & : & 0 < |s - s_0| \leq h \\ 0 & : & h < |s - s_0| \end{cases} \quad (2.10)$$

Dabei bezeichnet  $s_0$  die Position der Fingerelektrode im Ausgangszustand relativ zur Gegenelektrode,  $l$  die Länge der aktiven Elektrodenflächen,  $h$  die Dimension der Fingerelektrode in  $z'$ -Richtung (Fingerhöhe) und  $d$  den Abstand der Elektrodenflächen im eingeschwenkten Zustand. Wie aus Gl. (2.10) ersichtlich ist, können nur für Auslenkungen im Bereich der Fingerhöhe Kräfte erzeugt werden. Daher und aufgrund der Tatsache, dass die Elektrodengeometrie die Auslenkung nicht einschränkt, werden *Out-of-plane*-Fingerelektroden vor allem für den Antrieb resonanter Bauelemente genutzt. Dazu wird der Antrieb in einer Weise angesteuert, dass die von ihm erzeugte Kraft periodisch mit einer Frequenz entsprechend der Eigenresonanzfrequenz der auszulenkenden Struktur wirkt (siehe Abschnitt 2.3.1, [3]). Ein solches Bauelement kann dann in Abhängigkeit von den wirksamen Dämpfungsmechanismen bei sehr großen Schwingungsamplituden betrieben werden (Resonanzüberhöhung).

*Out-of-plane*-Fingerelektroden werden in verschiedenen Ausführungen eingesetzt. Dabei kann die Position der Fingerelektroden im Ausgangszustand und die Form der Gegenelektroden variieren. Auch sind Ausführungen mit mehreren übereinander angeordneten oder verkippten Gegenelektroden bzw. Fingerelektroden möglich [33]. Wie im Fall der *In-plane*-Fingerelektroden kann die zur Verfügung stehende Kraft vervielfacht werden, indem mehrere *Out-of-plane*-Fingerelektroden kammförmig angeordnet werden.

Vor allem für Mikrospiegel ist dieses Antriebskonzept sehr interessant, da es neben der *Plan-Platten*-Elektrode die einzige Möglichkeit darstellt, mithilfe eines elektrostatischen Antriebs große Auslenkungen senkrecht zur Strukturebene des Bauelementes zu erreichen. Neben einer Anzahl anderer Bauelemente [38, 39, 40] nutzen auch die am *Fraunhofer IPMS* entwickelten Mikrospecterspiegel *Out-of-plane*-Fingerelektroden als Antrieb (*Out-of-plane-comb*-Antrieb, Abschnitt 2.3).

**Levitations-Fingerelektroden** (Abb. 2.5f) basieren ebenfalls auf der geometrischen Anordnung der *In-plane*-Fingerelektroden. Es wird jedoch eine zusätzliche Elektrode unterhalb der Fingerelektrode bzw. der Gegenelektroden platziert. Diese wird mit dem elektrischen Potential der Fingerelektrode beaufschlagt. Das Resultat ist eine starke Asymmetrie des elektrischen Felds bezüglich der  $x'$ - $y'$ -Ebene. Die aus dieser Asymmetrie resultierende Kraft auf die Fingerelektrode ist von deren Auslenkung  $s$  abhängig [41]:

$$F_{\text{el},z'} \approx U^2 \frac{\varepsilon l}{d} \frac{(s_0 - s)}{s_0} \quad \text{für} \quad s < s_0 \quad (2.11)$$

Dabei ist  $l$  die Länge der aktiven Elektrodenflächen und  $d$  deren Abstand.  $s_0$  entspricht derjenigen Auslenkung, bei der die Kraft  $F_{\text{el},z'}$  null wird (Gleichgewichtspunkt). Diese ist

stark von der Geometrie der Anordnung abhängig und muss mithilfe einer *FE*-Analyse oder experimentell ermittelt werden. Es gilt in jedem Fall  $s_0 < h$ .

Mit Levitations-Fingerelektroden lassen sich vergleichsweise geringe Kräfte und Auslenkungen erreichen. Der Vorteil des Prinzips besteht darin, dass statische Auslenkungen aus der Strukturebene heraus ermöglicht werden. Die verfügbare Kraft kann wieder durch kammförmige Anordnung vervielfacht werden. Ein Beispiel für einen *MEMS*-Aktor mit einem solchen Antriebsprinzip wird in [42] beschrieben.

**Alternative Elektrodengeometrien** können je nach Anwendung und den sich daraus ergebenden Anforderungen ebenfalls zum Einsatz kommen. Ein Beispiel dafür ist in Abb. 2.5g dargestellt. Es handelt sich dabei um einen sogenannten Linearantrieb [5]. Er zeichnet sich durch sehr große bis unbegrenzte Auslenkungen bei vergleichsweise geringen nutzbarer Kräften aus. Die Eigenschaften eines solchen Antriebs hängen sehr stark von der konkreten Ausführung und von der Ansteuerung ab. Anwendung finden solche Antriebe beispielsweise in elektrostatisch getriebenen Mikromotoren [43].

### 2.3 Der Fraunhofer IPMS Mikroscooperspiegel

Der *Fraunhofer IPMS* Mikroscooperspiegel ist ein resonant, elektrostatisch angetriebener *MEMS*-Aktor zur ein- oder zweidimensionalen Ablenkung von Licht. Die Fertigung erfolgt in dem speziell entwickelten, volumenmikromechanischen *MEMS*-Prozess *AME1* unter Verwendung von *BSOI*-Wafern mit einer *SOI*-Schicht aus stark p-dotiertem, einkristallinem Silizium (Anhang B.1). Zur Erhöhung der Reflexivität der Spiegelplatte auf ca. 90% für sichtbares Licht, kommt auf optisch aktiven Flächen eine dünne Aluminium-Schicht zum Einsatz.

Das Verhalten eines eindimensionalen Mikroscooperspiegels lässt sich unter Annahme einer winkelunabhängigen Federhärte der Torsionsfedern, einer ideal steifen Spiegelplatte und eines zur Winkelgeschwindigkeit proportionalen Dämpfungsmoments<sup>2</sup> mithilfe eines Momentengleichgewichts beschreiben [3]:

$$\underbrace{-J_{xx} \ddot{\theta}_x}_{\text{Trägheits-}} + \underbrace{-\alpha_x \dot{\theta}_x}_{\text{Dämpfungs-}} + \underbrace{-k_{t,x} \theta_x}_{\text{Feder-}} + \underbrace{M_{\text{el},x}(\theta_x, U_x)}_{\text{Antriebsmoment}} = 0 \quad (2.12)$$

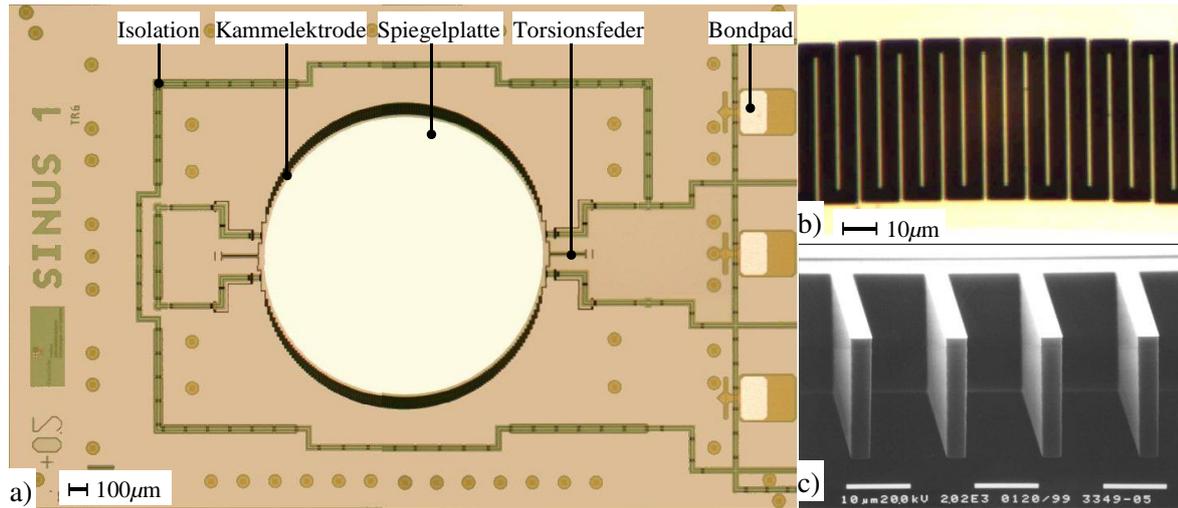
In dieser *Schwingungs-Differentialgleichung* ist  $J_{xx}$  das Massenträgheitsmoment,  $\theta_x$  die mechanische Auslenkung,  $\alpha_x$  der Dämpfungsfaktor und  $k_{t,x}$  die Gesamtfederhärte der auslenkbaren Struktur, jeweils bezogen auf eine Rotation um die  $x$ -Achse.  $M_{\text{el},x}(\theta_x, U_x)$  bezeichnet das elektrostatische Drehmoment, welches vom Antrieb aufgebracht wird. Das Antriebsmoment ist sowohl von der elektrischen Spannung  $U_x$  als auch von der mechanischen Auslenkung der Spiegelplatte  $\theta_x$  abhängig. Entsprechend Gl. (2.10) ist dieser Zusammenhang zusätzlich stark nichtlinear. Die Differentialgleichung (2.12) lässt sich daher nicht geschlossen lösen. Für geringe Dämpfungs- und Antriebsmomente

$$|J_{xx} \ddot{\theta}_x| + |k_{t,x} \theta_x| \gg |\alpha_x \dot{\theta}_x| + |M_{\text{el},x}(\theta_x, U_x)| \quad (2.13)$$

lässt sich jedoch folgende analytische Näherung angeben:

$$\theta_x \approx \hat{\theta}_x \sin(2\pi f_x t + \phi_x) \quad \text{mit} \quad f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{t,x}}{J_{xx}}} \quad (2.14)$$

<sup>2</sup>Nähere Untersuchungen und eine Bewertung dieser Annahmen folgen später in dieser Arbeit. Siehe dazu Abschnitt 3.3.



**Abb. 2.7:** Der Fraunhofer IPMS Mikroscoanerspiegel. a) lichtmikroskopische Aufnahme eines *SINUS*-Scanners zur eindimensionalen Ablenkung von Licht, b) Detailaufnahme des *Out-of-plane-comb*-Antriebs am oberen Rand des Mikrospiegels, c) *REM*-Aufnahme der Fingerelektroden eines *Out-of-plane-comb*-Antriebs.

**Tabelle 2.1:** Typische Beispiele für am Fraunhofer IPMS gefertigte Mikroscoanerspiegel. Die angegebenen Schwingungsamplituden und Antriebsspannungen sind gültig für eine Scanfrequenz nahe der mechanischen Resonanzfrequenz bei Normaldruck.

Designname	Apertur $D/\text{mm}$	Frequenz $f_x/\text{kHz}$	Amplitude $\hat{\theta}_x/^\circ$	Spannung $U_x/\text{V}$	Anwendung
<i>EO</i>	0.5	16.00	28	115	Bildaufnahme, Endoskopie
<i>D06V28</i>	0.6	28.00	10	140	Laser-Projektor
<i>SINUS</i>	1.5	0.25	15	17	Barcode-Scanner
<i>S30150</i>	3.0	0.15	12	35	IR-Spektroskopie

Der zeitliche Verlauf der Auslenkung eines Mikroscoanerspiegels ist also näherungsweise eine sinusförmige Schwingung mit einer Amplitude  $\hat{\theta}_x$ , bei einer Schwing- bzw. Scanfrequenz  $f_x$ . Die Phasenlage wird von  $\phi_x$  festgelegt.

Der elektrostatische Antrieb basiert auf *Out-of-plane*-Fingerelektroden. Diese sind an den auslenkbaren Bestandteilen des Mikrospiegels angeordnet (Abb. 2.7). Die Besonderheit dieses sogenannten *Out-of-plane-comb*-Antriebs ist, dass die Fingerelektroden keine definierte Vorauslenkung besitzen ( $s_0 = 0$ ). Es muss also bei der Fertigung nur eine einstufige, planare Strukturierung der *SOI*-Schicht erfolgen. Dadurch wird der Herstellungsprozess enorm vereinfacht und die Reproduzierbarkeit erhöht.

Entsprechend Gl. (2.10) ist die elektrostatische Kraft einer solchen Elektrodenanordnung jedoch im nicht-ausgelenkten Zustand gleich null (vergleiche dazu Abb. 2.6). Scheinbar kann ein solches Bauelement demnach nicht anschwingen. Aus diesem Grund beinhaltet das ursprüngliche Konzept der *Fraunhofer IPMS* Mikroscoanerspiegel sogenannte Startelektroden. Diese sollten für eine definierte Vorauslenkung des Mikrospiegels sorgen und damit eine Wirksamkeit des *Out-of-plane-comb*-Antriebs garantieren [3]. In der Praxis hat sich jedoch gezeigt, dass alle Bauelemente auch ohne Ansteuerung der

Startelektroden anschwingen. Der Grund hierfür liegt in geringfügigen Asymmetrien der Bauelementgeometrie und Inhomogenitäten des Materials. Diese führen zu sehr geringen statischen Vorauslenkungen der Bauelemente in der Größenordnung von einigen tausendstel Grad. Dies genügt um ein zuverlässiges Anschwingen zu gewährleisten<sup>3</sup>. Aktuelle Mikroscooperspiegel werden ausnahmslos ohne Startelektroden gefertigt.

Die Bewegung der Elektroden erfolgt auf einer Kreisbahn um die  $x$ -Achse. Bei kleinen Auslenkwinkeln  $\theta_x$  sowie unter Vernachlässigung der Verkippung bezüglich der Strukturebene gilt dabei für die Auslenkung  $s$  der  $i$ -ten Fingerelektrode in  $z$ -Richtung:

$$s_i \approx r_i \sin \theta_x \quad i = (1, 2, \dots, N) \quad (2.15)$$

Dabei ist  $r_i$  die mittlere Entfernung (Radius) des  $i$ -ten Elementes einer Kammelektrode mit  $N$  Fingerelektroden von der Drehachse. Dieser Radius kann zunächst als groß bezüglich der Strukturhöhe der Elektroden angenommen werden ( $r_i \gg h$ ). Da sich die Kapazität für  $s_i > h$  nicht ändert (Abb. 2.6 auf S. 15), kann diese Näherung für die Auslenkung in  $z$ -Richtung als allgemeingültig betrachtet werden. Die Kapazität  $C_x$  einer Kammelektrode, welche um die  $x$ -Achse ausgelenkt werden kann, ergibt sich dann aus der Summe der Einzelkapazitäten  $C_i$ :

$$C_x = \sum_{i=1}^N C_i \quad \text{mit} \quad C_i = f(s_i) = f(\theta_x, r_i) \quad (2.16)$$

Da die Auslenkung einer Elektrode  $s_i$  vom Abstand zur Drehachse  $r_i$  (also von der geometrischen Lage innerhalb des Bauelements) abhängig ist, resultiert daraus für die Kapazitätsänderung einer Kammelektrode mit  $r_i \neq \text{const}$  ein qualitativ anderer Verlauf als für eine einzelne Fingerelektrode. Abbildung 2.8 verdeutlicht dies am Beispiel eines Bauelements mit kreisförmiger Spiegelplatte und einem Durchmesser  $D$  von 1.5 mm (*SINUS-Scanner*). Der Antrieb besteht aus 228 Fingerelektroden, die entsprechend Abb. 2.7 entlang des Randes der Spiegelplatte angeordnet sind. Der sich ergebende Verlauf kann in zwei Bereiche unterteilt werden:

$|\theta_x| \leq \theta_{c,x}$  Die Mehrzahl der Fingerelektroden ist aktiv, also in die Gegenelektroden eingeschwenkt. Die Kapazität ändert sich stark in Abhängigkeit von der Auslenkung.

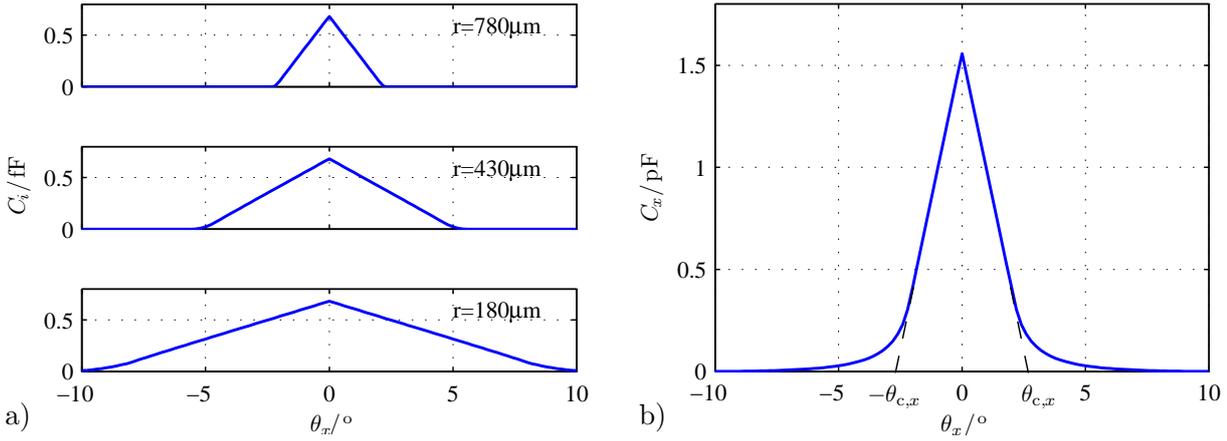
$|\theta_x| > \theta_{c,x}$  Die Mehrzahl der Fingerelektroden ist inaktiv, also aus den Gegenelektroden ausgeschwenkt. Die Kapazität ändert sich kaum bzw. nicht in Abhängigkeit von der Auslenkung.

Der Wert für  $\theta_{c,x}$  hängt von der Geometrie der Kammelektrode ab. Er kann näherungsweise aus dem Verlauf von  $C_x$  bestimmt werden (Abb. 2.8).

### 2.3.1 Synchronisierte Anregung

Wird an den Antriebs Elektroden eines ausgelenkten Mikroscooperspiegels mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb eine elektrische Spannung angelegt, wirkt ein elektrostatisches Dreh-

<sup>3</sup>Wie später noch gezeigt wird, liegt der Grund für das zuverlässige Anschwingen der Bauelemente in den strukturellen Eigenschaften des Systems. Bei bestimmten Kombinationen der Systemparameter wird der Gleichgewichtspunkt bei  $\hat{\theta}_x = 0$  instabil, was zum Start der Oszillation führt.



**Abb. 2.8:** Kapazitätsverlauf des Out-of-plane-comb-Antriebs. Die Kammelektrode besteht aus 228 Fingerelektroden mit einer Länge von  $58.5 \mu\text{m}$ , einer Breite von  $1.5 \mu\text{m}$ , einer Strukturhöhe von  $30 \mu\text{m}$  und einem Elektrodenabstand von  $5 \mu\text{m}$  (*SINUS-Scanner*). a) Verläufe der Kapazität für drei Elektroden mit unterschiedlichem Abstand zur Drehachse; b) Verlauf für die gesamte Elektrodenanordnung mit  $\theta_{c,x} \approx 2.75^\circ$ .

moment  $\vec{M}_{\text{el}}$  in Richtung der Ruhelage. Es ergibt sich analog zu Gl. (2.5) aus der Änderung der Kapazität:

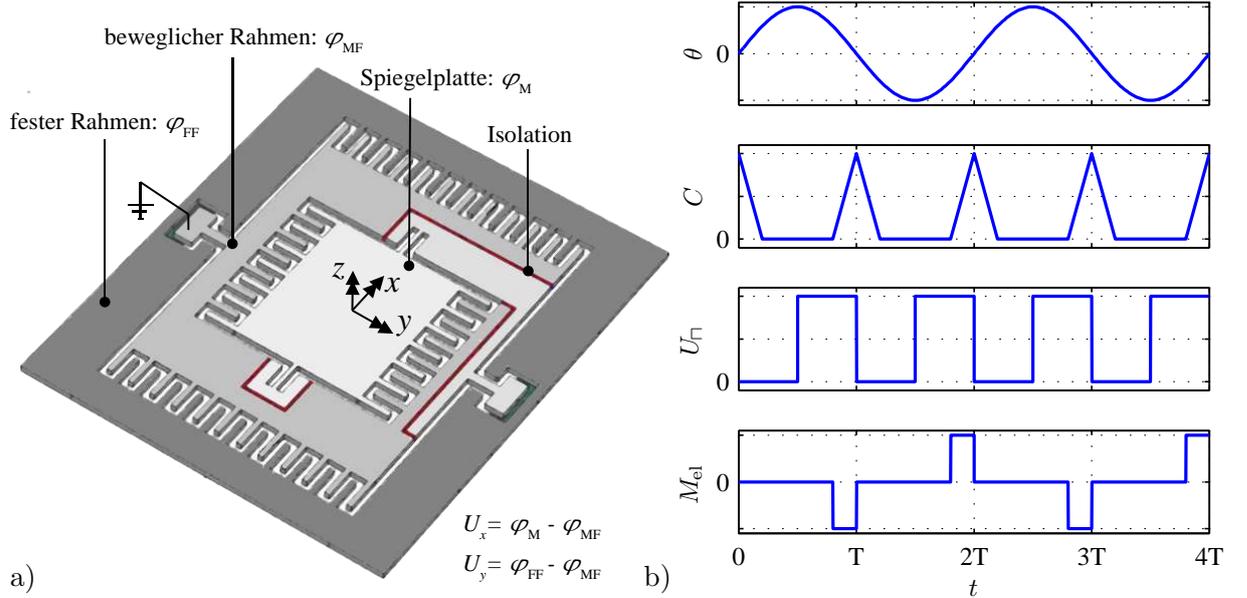
$$\vec{M}_{\text{el}} = \frac{1}{2} U^2 \frac{d}{d\theta} C \quad \longrightarrow \quad M_{\text{el},x} = \frac{1}{2} U_x^2 \frac{d}{d\theta_x} C_x \quad (2.17)$$

Wirkt das elektrostatische Drehmoment in Richtung der momentanen Bewegung  $\vec{\theta}$  des Mikrospiegels, so wird dieser dadurch beschleunigt; Energie wird eingekoppelt. Ein vergleichbarer Betrag an Energie wird dem mechanischen System jedoch wieder entzogen, wenn nach dem Durchlaufen der Ruhelage das elektrostatische Moment der Bewegungsrichtung entgegen wirkt. Um dies zu vermeiden, muss die elektrische Spannung  $U$  auf eine solche Weise moduliert werden, dass im zeitlichen Verlauf der Schwingung überwiegend Energie eingekoppelt wird. Als besonders effizient und einfach zu realisieren hat sich dabei ein pulsformiger Spannungsverlauf

$$U_{\square} = \begin{cases} 0 & : (t - t_0) \bmod T \leq T - \tau \\ \hat{U} & : (t - t_0) \bmod T > T - \tau \end{cases} \quad \text{mit} \quad t \geq t_0 \geq 0 \quad (2.18)$$

mit  $T$  als Periodendauer und  $\tau$  als Pulslänge erwiesen [3]. Dieser muss eine Pulsfrequenz  $f_{\square} = 1/T$  aufweisen, die dem Doppelten der Resonanzfrequenz des mechanischen Oszillators entspricht, sodass bei jeder Halbschwingung (während der Bewegung in Richtung der Ruhelage) Energie eingekoppelt werden kann. Die maximale Effizienz des Antriebs ergibt sich für eine Wahl von  $t_0$  so, dass die fallenden Flanken von  $U_{\square}$  genau den Nulldurchgängen der Spiegelschwingung entsprechen. Der Verlauf der Antriebsspannung muss also mit der Bewegung des Spiegels synchronisiert werden. Dabei ist ein Tastverhältnis  $\tau/T$  von 0.5 optimal. Es wird dann die maximal mögliche Energie eingekoppelt; Abb. 2.9 verdeutlicht dieses Prinzip. Aufgrund der Synchronisation der Antriebsspannung mit der Auslenkung des Bauelementes gilt bei konstantem  $\hat{U}$  und  $\tau/T$ :

$$M_{\text{el},x} = f(\theta_x, U_x) \quad \xrightarrow{U_x=f(\theta_x)} \quad M_{\text{el},x} = f(\theta_x) \quad (2.19)$$



**Abb. 2.9:** Antriebskonzept des Fraunhofer IPMS Mikroscoannerspiegels. a) prinzipielle Führung der verschiedenen Antriebspotentiale.  $U_x$  ist demnach die Antriebsspannung der Spiegelplatte,  $U_y$  des beweglichen Rahmens. b) Ansteuerungsregime für  $t_0 = 0$ .

Mit dieser Vereinfachung lässt sich die Amplitude der Auslenkung im eingeschwungenen Zustand  $\hat{\theta}_x|_{t \rightarrow \infty}$  mithilfe der Energiebilanz einer Oszillation bestimmen. Es wird bei ausreichend großer Amplitude mit jeder Schwingungsperiode des Mikroscoannerspiegels die Energie

$$W_{\text{el},x} = \int_{-\hat{\theta}_x}^0 M_{\text{el},x}(\theta_x, \hat{U}_x) d\theta_x + \int_{\hat{\theta}_x}^0 M_{\text{el},x}(\theta_x, \hat{U}_x) d\theta_x = \Delta C_x \hat{U}_x^2 \quad (2.20)$$

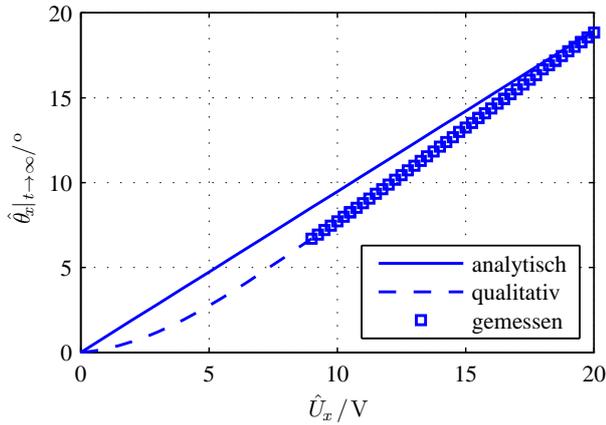
eingekoppelt. Dabei ist  $\Delta C_x$  die maximal mögliche Kapazitätsänderung der Kammelektrode bei Rotation um die  $x$ -Achse.

Die Amplitude der Auslenkung ist stark von der Scanfrequenz, der Antriebsspannung und der Dämpfung des Bauelementes abhängig. Mithilfe von Gl. (2.20) und der Definition der Güte des Oszillators [3] lässt sich der folgende Zusammenhang ermitteln:

$$\hat{\theta}_x|_{t \rightarrow \infty} = \hat{U}_x \sqrt{\frac{\Delta C_x}{2\pi^2 f_x \bar{\alpha}_x}} \quad (2.21)$$

mit  $\bar{\alpha}_x$  als mittlerem Dämpfungsfaktor (siehe Abschnitt 3.3). Der sich ergebende lineare Verlauf ist in Abb. 2.10 für einen typischen Mikroscoannerspiegel dargestellt. Der in der Abbildung ebenfalls enthaltene experimentell ermittelte Verlauf weist vor allem im Bereich kleiner Amplituden Abweichungen auf. Der Grund dafür liegt in der Annahme einer konstanten Dämpfung  $\bar{\alpha}_x$ . In der Realität ändert sich der Dämpfungsfaktor in Abhängigkeit der Auslenkung – vor allem im Bereich  $|\theta_x| \leq \theta_{c,x}$ . Die Ursachen für dieses Verhalten und die daraus folgende zusätzliche Nichtlinearität der Bewegungsgleichung (2.12) und die Konsequenzen für das System werden in Abschnitt 3.3 diskutiert.

Wie aus Abb. 2.9a ersichtlich wird, kommt für den Antrieb des beweglichen Rahmens dasselbe Prinzip wie für die Spiegelplatte zum Einsatz. Entsprechend [3] kann daher das zeitliche Verhalten des beweglichen Rahmens, unabhängig vom Zustand der darin



**Tabelle 2.2:** Parameter des *SINUS*-Scanners.

Parameter	Wert
$\Delta C_x$ / pF	1.56
$f_x$ / Hz	230
$^*\bar{\alpha}_x$ / Nm · s	$1.25 \cdot 10^{-12}$
$J_{xx}$ / kg · m <sup>2</sup>	$1.79 \cdot 10^{-14}$
$k_{t,x}$ / Nm · rad <sup>-1</sup>	$4.42 \cdot 10^{-8}$

\*experimentell bei Normaldruck [44]

**Abb. 2.10:** Zusammenhang zwischen Antriebsspannung und Amplitude bei synchronisierter Anregung. Die Darstellung erfolgt für die Parameter des *SINUS*-Scanners. Die experimentell ermittelten Werte zeigen eine ähnliche Charakteristik.

enthaltenen Spiegelplatte, näherungsweise analog zu Gl. (2.12) beschrieben werden. Für die Auslenkung  $\theta_y$  um die  $y$ -Achse ergibt sich somit

$$\theta_y \approx \hat{\theta}_y \sin(2\pi f_y t + \phi_y) \quad \text{mit} \quad f_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{t,y}}{J_{yy}}} \quad (2.22)$$

und analog zu Gl. (2.21) folgt

$$\hat{\theta}_y|_{t \rightarrow \infty} = \hat{U}_y \sqrt{\frac{\Delta C_y}{2\pi^2 f_y \bar{\alpha}_y}} \quad (2.23)$$

Dabei bezeichnet  $k_{t,y}$  die Torsionsfederhärte und  $J_{yy}$  das Massenträgheitsmoment des beweglichen Rahmens inklusive der Spiegelplatte, jeweils bezogen auf eine Rotation um die  $y$ -Achse. Es ist zu beachten, dass die Antriebsspannung  $U_y$  bezüglich der Kammelektrode umgekehrt zu  $U_x$  definiert ist. Der Grund dafür liegt darin, dass über die Torsionsfedern im Allgemeinen nur zwei elektrische Potentiale  $\varphi_{MF}$  und  $\varphi_M$  auf den beweglichen Rahmen geführt werden können (Abb. 2.9a). Um die Achsen unabhängig voneinander ansteuern zu können, werden daher die Potentiale der Spiegelplatte  $\varphi_M$  und des festen Rahmens  $\varphi_{FF}$  zwischen 0 V und  $\hat{U}$  geschaltet. Dabei dient  $\varphi_{MF}$  als elektrisches Bezugspotential des beweglichen Rahmens (Masse).

Das Antriebskonzept der *Fraunhofer IPMS* Mikros scannerspiegel besitzt neben der unkomplizierten Fertigung den Vorzug einer im Vergleich zu anderen elektrostatisch angetriebenen Bauelementen wesentlich kleineren benötigten Antriebsspannung. So genügt beispielsweise für den *SINUS*-Scanner – ein kommerziell genutztes Bauelement, welches in Barcode-Scannern eingesetzt wird (Abb. 2.7, Tabelle 2.1) – eine Antriebsspannung von ca. 17 V bei synchronisierter Anregung, um eine Amplitude der Auslenkung  $\hat{\theta}_x$  von 15° zu erreichen<sup>5</sup>. Dies entspricht einer Amplitude des optischen Ablenkswinkels von 30° und damit einem optischen Scanbereich (*Field Of View, FOV*) von 60°.

Die Realisierung eines synchronisierten Antriebs-Regimes entsprechend den Gln. (2.18) und (2.19) setzt voraus, dass die Nulldurchgänge der Schwingung detektiert werden. Eine solche Detektion ist auf verschiedene Arten möglich. Die einfachste Variante basiert

<sup>5</sup>Diese Angabe ist gültig für eine Operation des Bauelementes bei Normaldruck  $p = p_0 \approx 1 \cdot 10^5$  Pa. Es wird also keine aufwändige Vakuumverpackung benötigt.

auf der zeitaufgelösten Messung der Kapazität der Kammelektroden. Diese weist in der Ruhelage ein Maximum auf, welches von einer geeigneten Messanordnung erkannt werden kann (Abb. 2.9b, [45]). Weitere Möglichkeiten bestehen in der Integration von piezoresistiven Sensoren zur Messung der Momentanauslenkung [27] oder in zusätzlichen optischen Komponenten, mit denen ebenfalls die Auslenkung bestimmt werden kann [46]. In jedem Fall bedeutet eine solche Detektion einen erhöhten Aufwand im System. Außerdem wird die Scanfrequenz allein von den mikromechanischen Komponenten des Bauelementes bestimmt und somit durch Fertigungstoleranzen und Schwankungen der Materialeigenschaften (z.B. bei Änderung der Umgebungstemperatur) beeinflusst. Wird für eine Anwendung eine bestimmte, fest vorgegebene Frequenz bzw. Phasenlage des Scans (z.B. zur Abstimmung mit anderen Systemkomponenten) benötigt, ist ein synchronisiertes Antriebs-Regime daher nicht geeignet.

### 2.3.2 Parametrische Anregung

Eine zweite Möglichkeit zur Ansteuerung von *MEMS*-Bauelementen mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb besteht in der parametrischen Anregung mit einer Spannungs-Pulsfolge entsprechend Gl. (2.18) bei einer Pulsfolgefrequenz  $f_{\square}$  nahe der doppelten Resonanzfrequenz des mechanischen Oszillators. Im Unterschied zur synchronisierten Anregung muss dabei der Nulldurchgang der Schwingung nicht detektiert werden. Auch kann die Frequenz der Schwingung ebenso wie die Amplitude in gewissen Grenzen vorgegeben werden. Die Phasenlage der Schwingung kann sogar beliebig eingestellt werden.

Zur Erklärung des dabei für den Antrieb genutzten Phänomens wird die Definition des elektrostatischen Antriebsmoments entsprechend Gl. (2.17) in die Bewegungsgleichung (2.12) eingesetzt:

$$J_{xx} \ddot{\theta}_x + \bar{\alpha}_x \dot{\theta}_x + k_{t,x} \theta_x - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta_x} C_x U_{\square,x}^2}_{M_{el,x}} = 0 \quad (2.24)$$

Wie aus Abb. 2.11a ersichtlich wird, lässt sich der Verlauf von  $\frac{d}{d\theta_x} C_x$  für kleine Auslenkungen  $|\theta_x| < \theta_{c,x}$  mit einem Polynom dritter Ordnung in der Form

$$\frac{d}{d\theta_x} C_{x/F} \approx r_1 \theta_x + r_3 \theta_x^3 \quad (2.25)$$

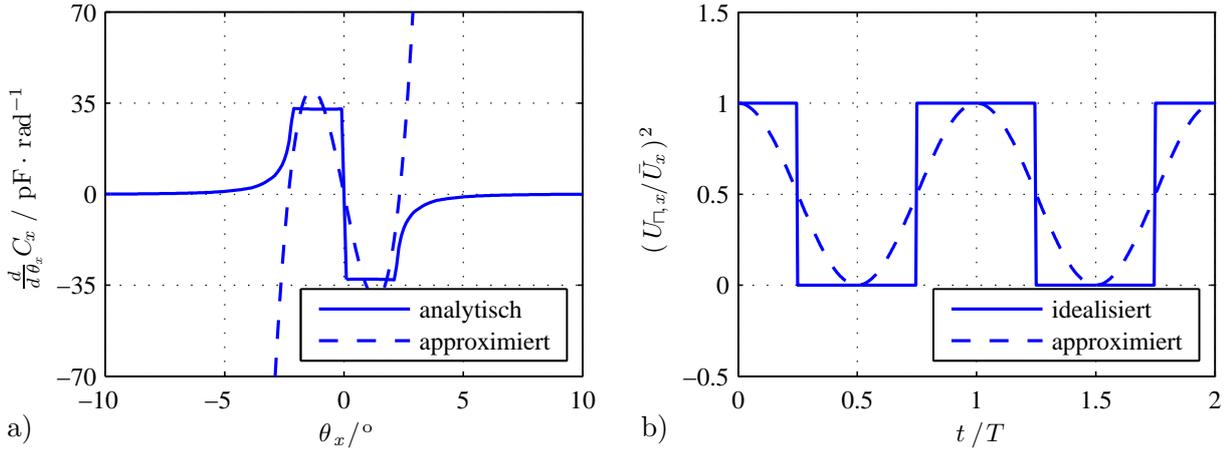
annähern. Der prinzipielle zeitliche Verlauf der Antriebsspannung entspricht in erster Näherung dem eines mit einem Gleichanteil überlagerten Kosinus:

$$U_{\square,x}^2 \approx \frac{\hat{U}_x^2}{2} (1 + \cos(\omega t + \phi)) \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi f_{\square,x}, \quad \phi = \phi_x + \frac{\pi}{2} \quad (2.26)$$

Da für die folgenden Betrachtungen die Basis für die Zeit  $t$  frei gewählt werden kann, gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\phi = 0$ . Für den Verlauf der Antriebsspannung gilt unter diesen Bedingungen:

$$U_{\square,x} \approx \hat{U}_x \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega t} \quad (2.27)$$

Wie in [18] gezeigt werden konnte, ändert eine Anregung mit einem solchen Spannungsverlauf anstelle einer Pulsfolge nichts am prinzipiellen Verhalten der Bauelemente.



**Abb. 2.11:** Näherungen zur Untersuchung der parametrischen Anregung. a) auslenkungsabhängiger Verlauf von  $\frac{d}{d\theta_x} C_x$  am Beispiel des *SINUS*-Scanners. Die Parameter des kubischen Polynoms lauten  $r_1 = -2.57 \cdot 10^{-9}$  und  $r_3 = 1.56 \cdot 10^{-6}$ . b) Approximation des zeitlichen Verlaufs der Antriebsspannung mithilfe einer Kosinusfunktion.

Der Ansatz erscheint daher geeignet, um die qualitativen Eigenschaften der Bewegungs-Dgl. (2.24) zu untersuchen.

Setzt man nun die Näherungen (2.25) und (2.26) in Gl. (2.24) ein, lässt sich die Bewegungs-Dgl. des Mikros scannerspiegels mithilfe der dimensionslosen Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 x &= \theta_x, & \tau &= \frac{\omega t}{2}, & \frac{d}{d\tau} &= \frac{2}{\omega} \frac{d}{dt}, & \frac{d^2}{d\tau^2} &= \frac{4}{\omega^2} \frac{d^2}{dt^2}, & c &= 2 \frac{\bar{\alpha}_x}{J_{xx} \omega}, \\
 \delta_1 &= \frac{4 k_{t,x} - r_1 \hat{U}_x^2}{J_{xx} \omega^2}, & \delta'_1 &= -\frac{r_1 \hat{U}_x^2}{2 J_{xx} \omega^2}, & \delta_3 &= \delta'_3 = -\frac{r_3 \hat{U}_x^2}{J_{xx} \omega^2}
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

als normierte Gleichung folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + c \frac{dx}{d\tau} + (\delta_1 + 2 \delta'_1 \cos 2\tau) x + (\delta_3 + \delta'_3 \cos 2\tau) x^3 = 0 \quad (2.29)$$

Dies ist eine Form der nichtlinearen, gedämpften MATHIEU-Gleichung. Gleichungen dieses Typs werden sowohl in den Natur- als auch in den Ingenieurwissenschaften genutzt, um Systeme mit periodischer Anregung oder die Eigenschaften von *nichtlinearen autonomen* Systemen zu untersuchen [47].

In den Arbeiten von ATAMAN et al. [18, 48, 49] wird diese Bewegungs-Dgl. des *Fraunhofer IPMS* Mikros scannerspiegels auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Zur Vereinfachung werden dazu die nichtlinearen Terme vernachlässigt ( $\delta_3 \approx 0$ ,  $\delta'_3 \approx 0$ ). Die sich auf diese Weise ergebende, lineare MATHIEU-Gleichung

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + c \frac{dx}{d\tau} + p(\tau) x = 0 \quad \text{mit} \quad p(\tau) = \delta_1 + 2 \delta'_1 \cos 2\tau \quad (2.30)$$

wird mithilfe der FLOQUET-Theorie [50] analysiert.

Für das Verhalten der Bauelemente sind vor allem die Stabilitätseigenschaften dieser Gleichung von Interesse. Sie bestimmen die möglichen Arbeitspunkte des Systems und deren Eigenschaften. Die lineare MATHIEU-Gleichung (2.30) besitzt genau einen Gleichgewichtspunkt bei  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$ . Dies entspricht der trivialen Lösung  $\hat{\theta}_x = 0$  der Bewegungs-Dgl. (2.24). In Abhängigkeit von den Parametern  $c$ ,  $\delta_1$  und  $\delta'_1$  kann dieser Fixpunkt verschiedene Stabilitätseigenschaften annehmen [47]:

**Stabil:** Der Fixpunkt  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$  ist ein *Punktattraktor* [50]. Die Lösung der Gl. (2.30) entspricht in erster Näherung der eines gedämpften, harmonischen Oszillators. Die Frequenz der Schwingung ist näherungsweise gleich der mechanischen Resonanzfrequenz des Systems. Es gilt  $\hat{\theta}_x|_{t \rightarrow \infty} = 0$ .

**Instabil:** Der Fixpunkt  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$  ist ein *Sattelpunkt* [50]. Die Lösung der Gl. (2.30) entspricht in erster Näherung der eines ungedämpften, harmonischen Oszillators in Resonanz. Man spricht daher auch von *parametrischer Resonanz*. Die Frequenz der Schwingung des mechanischen Systems ist entweder ein ganzzahliges Vielfaches (*superharmonische Resonanzen*) oder ein ganzzahliger Teiler (*subharmonische Resonanzen*) der Pulsfolgefrequenz  $f_{\square, x}$ . Die Amplitude der Schwingung wächst trotz Dämpfung maßlos an. Es gilt  $\hat{\theta}_x|_{t \rightarrow \infty} = \pm\infty$ . Demnach existieren zwei Lösungen der Form  $\theta_x \approx \hat{\theta}_x \sin(2\pi f_x + \phi_{x1,2})$ , welche sich bezüglich der Phasenlage um  $\pi$  unterscheiden:  $\phi_{x1} = \phi_{x2} + \pi$ .

Entsprechend [47] führen die im realen System vorhandenen Nichtlinearitäten ( $\delta_3 \neq 0$ ,  $\delta'_3 \neq 0$ ) zu einer Verstimmung der parametrischen Resonanz. Diese nimmt mit steigender Amplitude zu, woraus eine Begrenzung der Amplitude auf endliche Werte resultiert. Die instabilen Regionen des Parameterraums für  $c$ ,  $\delta_1$  und  $\delta'_1$  entsprechen demnach Oszillationen des realen Systems bei einer bestimmten, festen Amplitude mit einer zweideutigen Phasenlage. Die Vernachlässigung der nichtlinearen Terme in der Analyse führt jedoch dazu, dass keine Aussage zum qualitativen oder quantitativen Verlauf dieser Amplitude in Abhängigkeit der Systemparameter gemacht werden kann.

Mithilfe der FLOQUET-Theorie können die Bedingungen für Instabilitäten der Gl. (2.30) bzw. deren Lösung ermittelt werden. Es ergeben sich innerhalb des Parameterraums abgeschlossene Regionen die zu instabilen Lösungen führen. Die Grenzen dieser Regionen lassen sich mit einem Ausdruck der folgenden Form annähern [51]:

$$\delta_{1\text{cr},n} \approx n^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a_n^2 + b_n^2) \delta_1'^2 - 4c^2 n^2} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

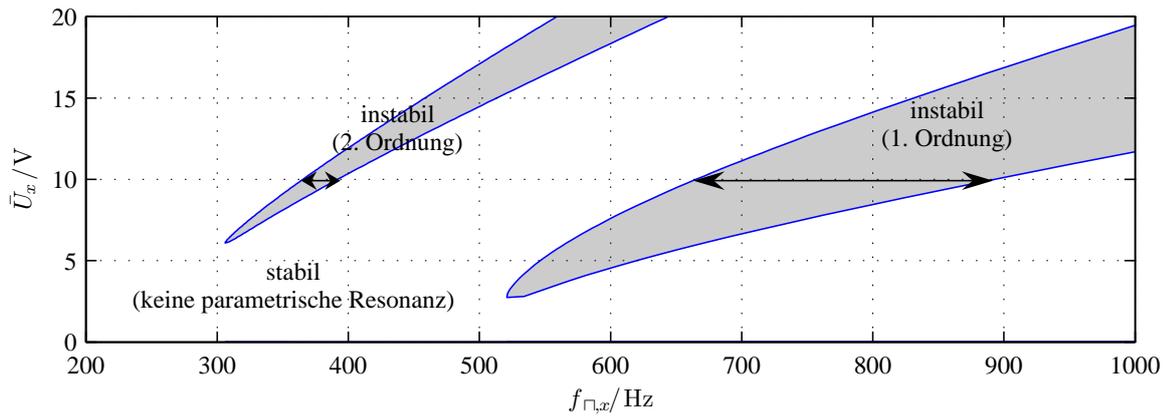
Dabei ist  $n$  die Ordnung der parametrischen Resonanz und  $a_n$  bzw.  $b_n$  sind FOURIER-Koeffizienten des Ausdrucks  $p(\tau)$  entsprechend Gl. (2.30) [51]. Für die parametrischen Resonanzen erster und zweiter Ordnung ergeben sich damit die folgenden Bedingungen für einen Übergang von Stabilität zu Instabilität:

$$\delta_{1\text{cr},1} \approx 1 - \frac{1}{8} \delta_1'^2 \pm \sqrt{\delta_1'^2 - c^2} \quad \text{bzw.} \quad \delta_{1\text{cr},2} \approx 4 + \frac{1}{6} \delta_1'^2 \pm \sqrt{\frac{1}{16} \delta_1'^2 - 4c^2} \quad (2.32)$$

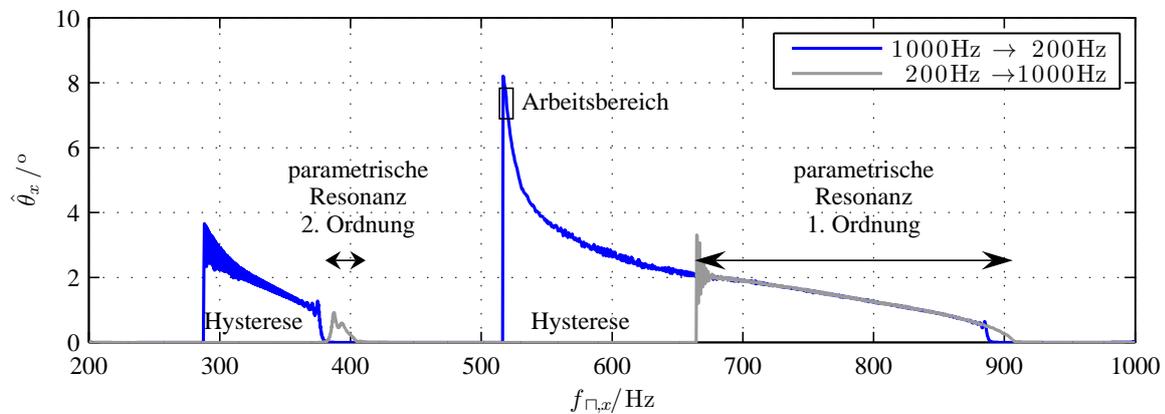
Mithilfe der Zusammenhänge (2.28) lassen sich diese Stabilitätsregionen auf die physikalischen Parameter eines Mikroscooperspiegels übertragen. Es ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen den normierten Parametern  $\delta_1$ ,  $\delta'_1$  und den Parametern der Antriebsspannung  $\hat{U}_x$ ,  $f_{\square, x}$ :

$$\hat{U}_x = 2 \sqrt{\frac{2k_{t,x} \delta_1'}{2r_1 \delta_1' - r_1 \delta_1}} \quad \text{und} \quad f_{\square, x} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_{t,x}}{J_{xx} (\delta_1 - 2\delta_1')}} \quad (2.33)$$

Abbildung 2.12 zeigt die aus den parametrischen Resonanzen erster und zweiter Ordnung resultierenden Stabilitätsregionen der  $\hat{U}_x$ - $f_{\square, x}$ -Ebene am Beispiel des SINUS-Scanners.



**Abb. 2.12:** *Stabilitätsregionen des SINUS-Scanners.* Es bilden sich im  $\hat{U}_x$ - $f_{\square,x}$ -Parameterraum abgeschlossene Regionen mit instabilen Lösungen für Gl. (2.30). Zum besseren Verständnis sind die Arbeitspunkte entsprechend Abb. 2.13 eingezeichnet.



**Abb. 2.13:** *Typische Frequenz-Antwortkurve des SINUS-Scanners.* Bei einer Pulsspannung  $\hat{U}_x = 10 \text{ V}$  (vgl. Abb. 2.12) wird die Pulsfolgefrequenz  $f_{\square,x}$  in einem Bereich von  $200 \dots 1000 \text{ Hz}$  langsam variiert. Das Bauelement schwingt im Arbeitsbereich mit der halben Pulsfolgefrequenz (parametrische Resonanz erster Ordnung). Der Verlauf der Antwortkurve ist von der Richtung der Frequenz-Änderung abhängig (Hysterese).

Bei parametrischer Anregung wird das Bauelement mit einer pulsförmigen Antriebsspannung bei einer Pulsfolgefrequenz in der Größenordnung der doppelten mechanischen Resonanzfrequenz betrieben. Dies entspricht der parametrischen Resonanz erster Ordnung. In Abbildung 2.13 ist eine typische Frequenz-Antwortkurve eines *SINUS*-Scanners bei parametrischer Anregung und einer Pulsspannung von  $10 \text{ V}$  dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die instabilen Regionen der  $\hat{U}_x$ - $f_{\square,x}$ -Ebene mit einer Oszillation bei endlicher Amplitude korrespondieren. Die Zweideutigkeit der Phasenlage kann ebenfalls experimentell beobachtet werden.

Wie ebenfalls in Abb. 2.13 erkennbar ist, existieren stabile Arbeitspunkte mit  $\hat{\theta}_x \neq 0$  auch außerhalb der Regionen parametrischer Resonanz. Diese können allerdings nur erreicht werden, wenn die Pulsfolgefrequenz eines in parametrischer Resonanz schwingenden Bauelementes ausreichend langsam verringert wird (*Down-sweep*). Ist diese Bedingung nicht erfüllt, verbleibt das System im stabilen Zustand bei  $\hat{\theta}_x = 0$ . Es gibt also einen Bereich des  $\hat{U}_x$ - $f_{\square,x}$ -Parameterraums, in dem das Bauelement bezüglich seiner Amplitude

zwei verschiedene Zustände annehmen kann. Ein solches Verhalten wird auch als Hysterese bezeichnet [3].

Bei einem *Down-sweep* aus dem Zustand der parametrischen Resonanz erhöht sich die Amplitude der Schwingung mit steigender Geschwindigkeit und bricht nahe der Eigenresonanz des mechanischen Systems abrupt zusammen (Abb. 2.13). Da die in diesem Bereich erzielbaren Auslenkungen wesentlich größer sind als in parametrischer Resonanz, werden die *Fraunhofer IPMS* Mikroscooperspiegel meist innerhalb ihrer Hysterese, bei einer Schwingfrequenz nahe der mechanischen Eigenfrequenz betrieben. Dazu werden die Bauelemente in parametrischer Resonanz gestartet; anschließend wird die Pulsfolgefrequenz soweit verringert, bis die gewünschte Schwingfrequenz bzw. Amplitude erreicht ist. Ein solches Start-Regime kann beispielsweise mithilfe eines Mikrocontrollers realisiert werden [52].

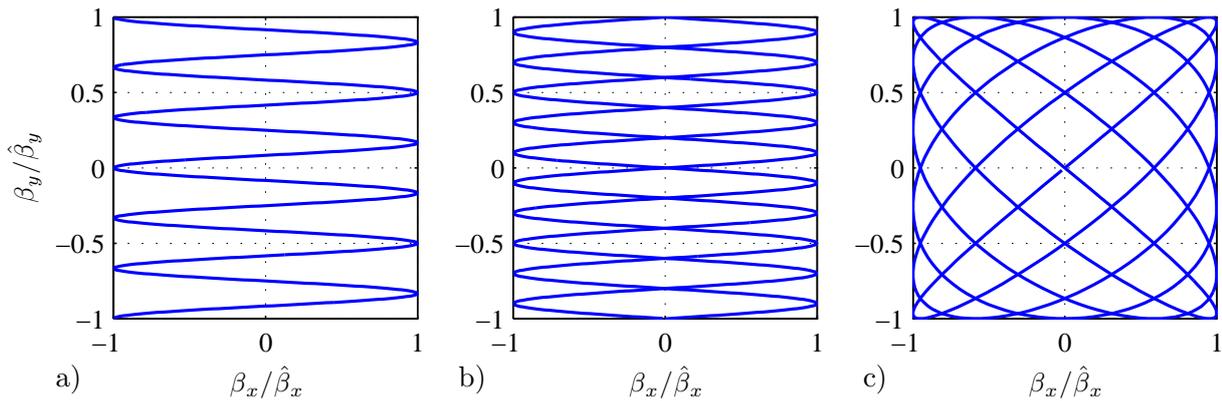
Wie in den Abbildungen 2.12 und 2.13 erkennbar ist, kann mithilfe der linearisierten Bewegungs-Dgl. (2.30) lediglich das Anschwingen der Bauelemente im Bereich der parametrischen Resonanzen erklärt werden. Weder die Begrenzung der Amplitude auf endliche Werte noch deren qualitativer Verlauf werden berücksichtigt. Außerdem kann weder die Hysterese, noch das abrupte Zusammenbrechen der Schwingung in der Nähe der mechanischen Eigenfrequenz begründet werden. Dies ist besonders kritisch, da die Eigenschaften der Mikroscooperspiegel im Arbeitsbereich vor allem von diesen Effekten bestimmt werden. Es lässt sich daher feststellen, dass eine lineare Analyse der Bewegungs-Dgl. (2.24) nicht ausreicht, um die relevanten Eigenschaften der *Fraunhofer IPMS* Mikroscooperspiegel zu erklären. In Kapitel 4 wird daher eine nichtlineare Analyse dieser Dgl. vorgestellt.

Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass in den Veröffentlichungen von ATAMAN et al. die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse teilweise fehlerhaft interpretiert werden. So wird der Effekt des abrupten Zusammenbrechens der Schwingung in der Nähe der mechanischen Eigenresonanz mit dem Übergang von instabilen zu stabilen Regionen des  $\hat{U}_x$ - $f_{\square,x}$ -Parameterraums erklärt. Der Hysterese-Effekt wird in den analytischen Betrachtungen gänzlich vernachlässigt. Aufgrund dieser falschen Interpretation der Ergebnisse fehlt eine kritische Auseinandersetzung mit den gewählten Ansätzen und angewandten Vereinfachungen.

Prinzipiell sind alle in diesem Abschnitt vorgestellten Betrachtungen in gleicher Weise auf den beweglichen Rahmen eines 2D-Mikroscooperspiegels übertragbar. Dieser kann demnach ebenfalls in parametrischer Resonanz bzw. innerhalb seiner Hysterese betrieben werden. Möglich ist auch die Kombination der beiden vorgestellten Antriebsprinzipien. Das Bauelement wird dann um eine der Achsen synchronisiert und um die jeweils andere parametrisch angeregt.

### 2.3.3 Anwendungsmöglichkeiten und Grenzen

In den vergangenen Jahren lag am *Fraunhofer IPMS* der Fokus der Mikroscooperspiegel-Entwicklung vorrangig auf der Verbesserung der Herstellungstechnologie. Neue Bauelemente wurden fast ausschließlich mithilfe der in [3] erarbeiteten Regeln und Werkzeuge entworfen. Auf diese Weise war es möglich, in kurzer Zeit den zum Einsatz kommenden Herstellungsprozess für die kostengünstige Serienproduktion von *MEMS*-Bauelementen zu qualifizieren. Die Tatsache, dass mittlerweile ein für die Produktion hoher Stückzahlen tauglicher, zuverlässiger Prozess zur Verfügung steht, führt dazu, dass zunehmend neue Einsatzmöglichkeiten und Anwendungsgebiete für Mikroscooperspiegel erschlossen



**Abb. 2.14:** Mögliche Strahl-Trajektorien für die Projektion von Bildern. Der zeitliche Verlauf der Ablenkung um die  $x$ -Achse ist immer sinusförmig mit  $f_x > f_y$ . a) annähernd sägezahnförmige Ablenkung um die  $y$ -Achse mit  $f_y = f_r$ ; b) annähernd dreieckförmige Ablenkung um die  $y$ -Achse mit  $f_y = 2 f_r$ ; c) sinusförmige Ablenkung um die  $y$ -Achse mit  $f_y = n f_r \big|_{n=6}$ .

werden können [53]. Viele dieser Anwendungen stellen sehr hohe, teilweise auch neue Anforderungen an die Bauelemente.

Ein Beispiel für eine solche neuartige Anwendung ist die Bildprojektion. Dabei wird ein Mikroscoannerspiegel genutzt, um einen zeitlich in seiner Intensität und Farbe modulierbaren Laserstrahl<sup>6</sup> in zwei zueinander orthogonale Richtungen abzulenken, sodass alle Bildpunkte (Pixel) einer Projektionsfläche überstrichen werden. Dabei kann bei entsprechender Steuerung der Intensität und Farbe des abgelenkten Laserstrahls ein beliebiges Bild projiziert werden. Ein ähnliches Prinzip kommt in Elektronenstrahlröhren (z.B. in Fernsehgeräten) schon seit langem zum Einsatz. Dazu wird jedoch kein Laser sondern ein Elektronenstrahl genutzt. Die Ablenkung erfolgt durch ein modulierbares elektrisches Feld. Dabei wird das Bild mit annähernd konstanter Winkelgeschwindigkeit auf horizontalen Zeilen unidirektional auf einen fluoreszierenden Schirm geschrieben. Dieses für die Belange der Bilddatenaufbereitung und Bildqualität optimale Schema lässt sich problemlos realisieren, weil die zum Einsatz kommende elektrostatische Ablenkvorrichtung eine sehr geringe Trägheit bezüglich des Ablenkwinkels aufweist und somit ein Zeilenrücklauf des dunkel geschalteten Strahls in vernachlässigbar kleinen Zeiträumen möglich ist.

Ein Mikrospiegel besitzt aufgrund seiner bewegten Masse eine wesentlich höhere Trägheit. Es ist daher notwendig, ein anderes Schema als das unidirektionale, zeilenweise Schreiben mit konstanter Winkelgeschwindigkeit für die Projektion zu nutzen. Abbildung 2.14 zeigt – stark vereinfacht – drei mögliche Varianten. Die dargestellten Trajektorien werden während der Projektion mit der Frequenz der Bildwiederholrate  $f_r$  vollständig durchlaufen. Alle Verfahren zeichnen sich dadurch aus, dass die Frequenz des Ablenkzyklus (Scanfrequenz) in einer der beiden orthogonalen Richtungen wesentlich höher ist als in der anderen Richtung. Diese höhere Frequenz wird im Wesentlichen von der Anzahl der projizierten Bildpunkte und von der Bildwiederholrate bestimmt. Mindestwerte für  $f_x$  und verschiedene Grafikstandards können Tabelle 2.3 entnommen werden.

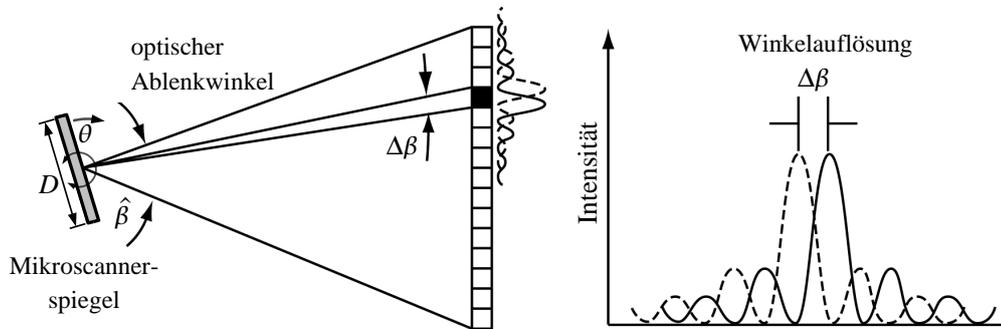
Entsprechend den in Abb. 2.14a und Abb. 2.14b dargestellten Schemata wird das Bild annähernd zeilenweise, jedoch mit sich sinusförmig verändernder Winkelgeschwindigkeit, geschrieben. Die Scanfrequenz der zweiten Richtung (vertikale Ablenkung) liegt in der

<sup>6</sup>Die Modulation der Farbe wird in der Regel durch eine Überlagerung mehrere Strahlen mit unterschiedlichen Wellenlängen (z.B. rot, grün, blau *RGB*) erreicht.

**Tabelle 2.3:** Anforderungen an Mikroscooperspiegel für Projektionsanwendungen. Es wird von einem RGB-Projektor bei einer Bildwiederholrate von  $f_r = 60$  Hz bei verschiedenen Grafikstandards ausgegangen. Die Spiegelplatte wird dabei als kreisförmig angenommen. Das Verhältnis zwischen  $D$  und dem Durchmesser des Lasers (siehe Abschnitt 3.5) gilt  $D/D_L = 1$  [54, 55].

Grafikstandard	QVGA	VGA	SVGA	HDTV
Anzahl der Bildpunkte	$320 \times 240$	$640 \times 480$	$800 \times 600$	$1920 \times 1080$
optische Anforderung $\theta D / ^\circ \text{mm}$	<b>3.9</b>	<b>7.8</b>	<b>9.7</b>	<b>23.3</b>
horizontale Scannfrequenz <sup>†</sup> $f_x / \text{kHz}$	<b>8</b>	<b>16</b>	<b>20</b>	<b>36</b>

<sup>†</sup>Theoretisches Minimum für sägezahnförmige Auslenkung um die  $y$ -Achse (Abb. 2.14a); im konkreten Fall – speziell für sinusförmige Auslenkung um die  $y$ -Achse (Abb. 2.14c) – kann sich diese Anforderung durchaus um den Faktor zwei erhöhen [56, 57].



**Abb. 2.15:** Definition der Winkelauflösung für Mikrospiegel. Die Winkelauflösung  $\Delta\beta$  korrespondiert entsprechend Gl. (2.34) mit dem Abstand zwischen dem Maximum des Intensitätsverlaufs und dessen ersten Minimum [53].

Größenordnung der Bildwiederholrate  $f_r \approx 60$  Hz. Diese Verfahren weisen im Vergleich zur dritten Variante (Abb. 2.14c) einige Vorteile auf; so ist die zur Projektion benötigte Bilddatenaufbereitung weniger komplex [58].

Bei einigen Konzepten für Mikrospiegel existiert bezüglich der Ablenkgeschwindigkeit eine Limitierung nach unten. Eine Ablenkfrequenz in der Größenordnung der Bildwiederholrate lässt sich dann unter Umständen nicht realisieren (siehe dazu auch Abb. 2.16). In einem solchen Fall kann es sich als sinnvoll erweisen, die in Abb. 2.14c dargestellte Variante zu realisieren. Dabei wird die Projektion mithilfe einer flächenfüllenden LISSAJOUS-Kurve erzeugt. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass die Ablenkfrequenzen beider Scan-Richtungen in derselben Größenordnung liegen können. Es erhöht sich allerdings aufgrund des komplexen Projektionsschemas der Aufwand im System; außerdem resultiert aus dem vergleichsweise großen zeitlichen Abstand mit dem benachbarte Zeilen geschrieben werden (*Interline time*) eine subjektive Verschlechterung der Bildqualität [59].

Die sich aus der Anwendung eines Mikroscooperspiegels zur Bildprojektion ergebenden Mindestanforderungen an das optische System werden durch das Produkt des optisch freien Durchmessers  $D$  (optische Apertur) des Spiegels und der Amplitude der Auslenkung  $\hat{\theta}$  charakterisiert. In der Literatur wird diese Kenngröße oft als Theta-D-Produkt  $\theta D$  bezeichnet [55, 54]. Die Anforderung an  $\theta D$  wird vor allem von der für eine gegebene

**Tabelle 2.4:** Gegenüberstellung von benötigten und möglichen optischen Aperturen. Es wird dabei von einer maximalen mechanischen Auslenkung des Scanners von  $\hat{\theta} = 10^\circ$  ausgegangen. Es gelten die in Abb. 2.16 aufgeführten Entwurfsparameter für eine kreisrunde Spiegelplatte.

Grafikstandard	QVGA	VGA	SVGA	HDTV
benötigte Scannfrequenz $f_x/\text{kHz}$	8	16	20	36
benötigtes $D/\text{mm}$	0.4	<b>0.8</b>	<b>1.0</b>	<b>2.3</b>
mögliches $D/\text{mm}$ (Abb. 2.16)	0.9	<b>0.6</b>	<b>0.5</b>	<b>0.4</b>

Bildauflösung benötigt Winkelauflösung des optischen Systems  $\Delta\beta$  bestimmt. Diese hängt von der kleinsten optischen Apertur  $D$  innerhalb des Strahlengangs ab (Beugungsbegrenzung, RAYLEIGH-Kriterium, [60]):

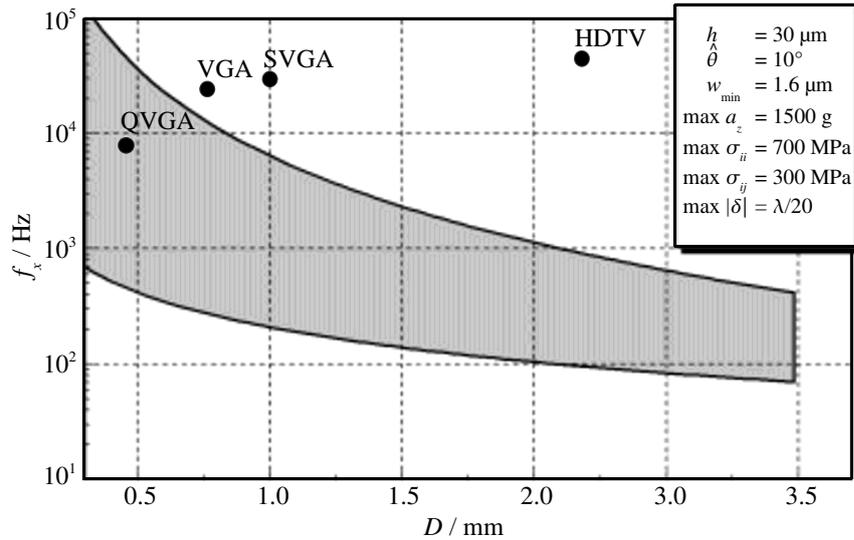
$$\Delta\beta = \arcsin\left(1.22 \frac{\lambda}{D}\right) \quad (2.34)$$

Dabei ist  $\lambda$  die Wellenlänge des reflektierten Lichts. Für einen *RGB*-Projektor muss diejenige im Bild enthaltene Farbe mit der größten Wellenlänge zur Bestimmung der Mindestanforderung an den Mikrospiegel herangezogen werden. Es gilt für diesen Fall  $\lambda = \lambda_R = 635 \text{ nm}$  [54]. Mindestanforderungen an  $\theta D$  für verschiedene Grafikstandards sind ebenfalls in Tabelle 2.3 aufgeführt.

Die Amplitude der Auslenkung eines Mikrospiegels wird von der angestrebten Größe des projizierten Bildes und vom Abstand zwischen Mikrospiegel und Projektionsfläche eingeschränkt. Es werden also für die Realisierung eines großen  $\theta D$ -Wertes Mikrospiegel mit möglichst großen optischen Aperturen  $D$  benötigt. Gleichzeitig muss, wie in Tabelle 2.3 erkennbar ist, mit zunehmender Anzahl der Bildpunkte auch die Scanfrequenz des Bauelements erhöht werden. Es werden also für Laserprojektoren mit hoher Bildqualität (große Anzahl von Bildpunkten, hohe Bildwiederholrate) Mikrospecterspiegel mit möglichst großer Apertur bei möglichst hohen Scanfrequenzen benötigt.

Wie in [3] gezeigt werden konnte, ist der Entwurf von Mikrospecterspiegeln mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb nur innerhalb eines eingeschränkten Entwurfsraums möglich. In Abbildung 2.16 ist dieser für typische Entwurfsparameter, bezogen auf die Scanfrequenz  $f_x$  und die optische Apertur  $D$ , dargestellt. Die Größe und Gestalt des Entwurfsraums wird von den Materialeigenschaften, den gestellten Anforderungen an das Bauelement und von den für die Herstellungstechnologie gültigen Entwurfsregeln bestimmt. Tabelle 2.4 enthält eine Gegenüberstellung der für verschiedene Grafikstandards erforderlichen Minstdurchmesser und der sich entsprechend Abb. 2.16 ergebenden Maximalwerte.

Wie in Abb. 2.16 erkennbar ist, steht in erster Linie die Begrenzung des Entwurfsraums in Richtung höherer Scanfrequenzen der Nutzung für Projektionsanwendungen im Wege. Diese Begrenzung resultiert aus der trägheitsbedingten dynamischen Deformation der Mikrospiegel; sie kommt vor allem im Umkehrpunkt der Auslenkung zum Tragen und führt zu einer Verkrümmung der Spiegeloberfläche. Geht man davon aus, dass ein abzulenkender Laserstrahl mit einer GAUSS-förmigen Intensitätsverteilung und einem Strahldurchmesser in der Größenordnung der optischen Apertur des Spiegels reflektiert werden soll, ist eine Verzerrung des Intensitätsprofils durch die Unebenheit der Oberfläche zu er-



**Abb. 2.16:** *Entwurfsraum für Fraunhofer IPMS Mikroscoannerspiegel.* Es sind die in [3] ermittelten, realisierbaren Wertepaare von Scanfrequenz  $f_x$  und optischer Apertur  $D$  dargestellt. Der Parameter  $h$  ist die Dicke der Spiegelplatte;  $w_{\min}$  ist die kleinstmögliche reproduzierbar fertigmögliche Strukturabmessung. Zusätzlich sind die minimalen Anforderungen (bei sägezahnförmiger Auslenkung um die  $y$ -Achse) für den Einsatz in Laser-Projektoren mit vier verschiedenen Grafikstandards bei einer Bildwiederholrate von  $f_r = 60$  Hz eingezeichnet.

warten. Dabei wird die Leistungsdichte im Strahlmittelpunkt verringert; außerdem wird die Gestalt des Intensitätsprofils beeinflusst.

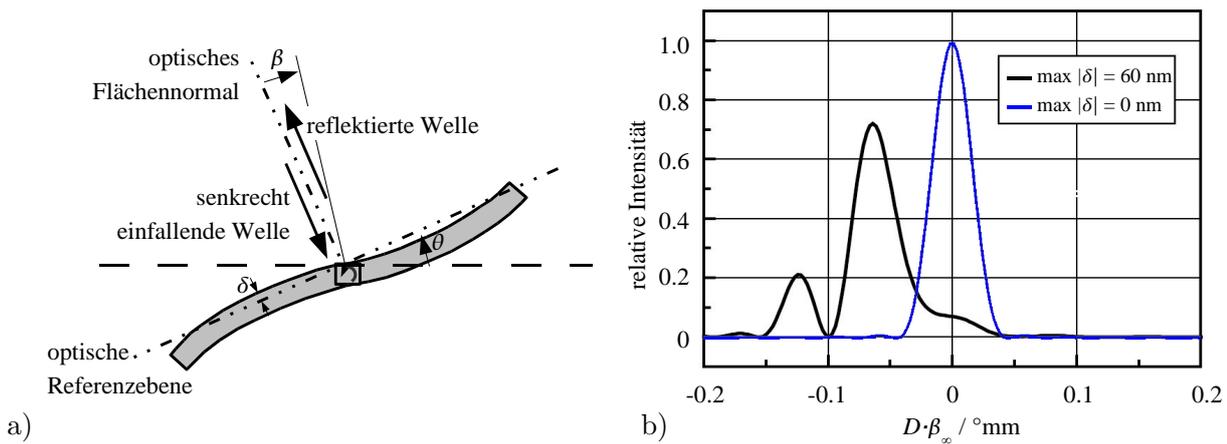
Für viele Anwendungen – so auch für die Projektion – ist neben der Aufweitung des Strahls die durch den dynamischen Oberflächenfehler der Reflexionsebene hervorgerufene Verschiebung des Intensitätsmaximums ein geeignetes Maß für den negativen Einfluss der dynamischen Deformation. Um für einen typischen Deformationsverlauf die Verschiebung des Intensitätsmaximums durch die Spiegeldeformation auf die Halbwertsbreite des Intensitätsprofils zu begrenzen, ergibt sich nach [3] ein maximal tolerierbarer Oberflächenfehler  $\max |\delta|$  von etwa  $\lambda/20$ . Soll also beispielsweise rotes Licht abgelenkt werden, folgt daraus die Entwurfsregel

$$\max_{\theta=\hat{\theta}} |\delta| \leq \frac{\lambda_R}{20} = 32.5 \text{ nm} \quad (2.35)$$

In Abbildung 2.17 ist die typische Deformation eines Mikrospeiegels und die daraus resultierenden Verzerrungen des Strahlprofils im Fernfeld qualitativ dargestellt. Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass ein maximal zulässiger Oberflächenfehler von  $\lambda/20$  nicht für alle Anwendungen benötigt wird. So können durchaus auch dynamische Deformationen in der Größenordnung von  $\lambda/10$  oder sogar  $\lambda/4$  tolerierbar sein. Außerdem muss bei der Bewertung eines Deformationsprofils dessen konkrete Form betrachtet werden (siehe Abschnitt 3.5).

## 2.4 Motivationen der Arbeit

Bei der Erschließung neuer Anwendungsgebiete für *Fraunhofer IPMS* Mikroscoannerspiegel ergeben sich eine Reihe von Problemen. Diese müssen beim Entwurf der Bauelemente berücksichtigt werden. Außerdem besteht die Notwendigkeit, den Entwurfsraum für



**Abb. 2.17:** *Definition der dynamischen Deformation.* a) schematische Darstellung der trägheitsbedingten dynamischen Deformation  $\delta$  der Spiegelplatte; b) Beispiele auftretender Verzerrungen von Intensitätsprofilen für einen Laser mit GAUSS-förmigem Intensitätsprofil. Es wird angenommen, dass die optische Leistungsdichte am Spiegelrand auf den relativen Wert  $e^{-2}$  abgefallen ist [3];  $\beta_\infty$  ist der Beobachtungswinkel im Unendlichen.

Mikroscannerspiegel zu erweitern. Dazu werden neue Ansätze sowie neue Entwurfs- und Optimierungswerkzeuge benötigt; diese sollen im Rahmen dieser Arbeit untersucht bzw. erarbeitet werden.

Im Folgenden werden, basierend auf den beim Entwurf von Mikroscannerspiegeln bestehenden, konkreten Problemstellungen (a), die Motivationen der vorliegenden Arbeit (b) abgeleitet:

1. (a) Trägheitsbedingte Deformationen der Spiegelplatte bei großen Frequenzen und Auslenkungen beeinflussen das Strahlprofil des reflektierten Laserstrahls.
  - (b) Es werden Ansätze und Methoden für den Entwurf und die Optimierung hochfrequenter Bauelemente mit verringerter dynamischer Deformation benötigt.
2. (a) Große Auslenkungen bei hohen Schwingfrequenzen erfordern hohe Antriebsspannungen ( $\bar{U} > 100 \text{ V}$ ). Aufgrund einer begrenzten Spannungsfestigkeit der in den Bauelementen integrierten elektrischen Isolationen erhöht sich dadurch die Komplexität und die Fehleranfälligkeit der Bauelemente (z.B. bei Mehrfach-Isolationen). Außerdem erhöht sich der Aufwand der Ansteuerung bzw. des Systementwurfs (Sicherheitsvorschriften beim Umgang mit hohen Spannungen).
  - (b) Es werden Ansätze und Methoden zur Minimierung der Antriebsspannung benötigt. Voraussetzung dafür ist ein Verständnis der für das Bauelement relevanten Dämpfungsmechanismen.
3. (a) Aus unvermeidlichen Toleranzen bei der Fertigung (Abschnitt 2.1, Anhang B) resultieren Streuungen der Resonanzfrequenzen. Bei 2D-Mikroscannern führt dies außerdem zu einer Streuung des Verhältnisses zwischen Resonanzfrequenz der Spiegelplatte und des beweglichen Rahmens. Für viele Anwendungen ist dieses Frequenzverhältnis bzw. die Scanfrequenz der Bauelemente ein wichtiger, feststehender Systemparameter (vgl. Abb. 2.14).

- (b) Es werden Ansätze zur Vorhersage und Verringerung der prozessbedingten Frequenz-Streuung bzw. deren Auswirkungen benötigt.
- 4. (a) Eine Möglichkeit zur Lösung des Problems 3a ist der Betrieb der Bauelemente bei parametrischer Anregung. Dabei können die Frequenzen und damit auch die Frequenzverhältnisse der Bauelemente in gewissen Grenzen eingestellt werden. Es lassen sich dann jedoch bei gleicher Antriebsspannung nur vergleichsweise geringe Amplituden erreichen. Außerdem ist das System in der Nähe der Eigenresonanz empfindlich gegenüber Störungen; schon geringe Schwankungen der Systemparameter können zum abrupten Zusammenbruch der Schwingung führen.
- (b) Es ist nötig, das Verständnis der physikalischen Vorgänge beim Antrieb mit parametrischer Anregung zu erhöhen. Dann ist es möglich, die Eigenschaften der Bauelemente bei der Anwendung eines solchen Antriebsprinzips zu verbessern.

Letztendlich müssen die entwickelten Ansätze und Methoden in eine erweiterte Entwurfsstrategie für *Fraunhofer IPMS* Mikroscoannerspiegel integriert werden. Dazu werden angepasste Entwurfswerkzeuge benötigt. Die sich ergebenden neuen Grenzen des Entwurfsraums müssen untersucht werden.



## 3 Randbedingungen beim Entwurf

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit den physikalischen Eigenschaften resonanter Mikroscooperspiegel mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb und den sich daraus ergebenden Randbedingungen für den Entwurf und die Simulation dieser Bauelemente. Dazu werden relevante physikalische Phänomene benannt und erklärt. Außerdem werden die aus den Eigenschaften der Bauelemente folgenden Anforderungen an Simulations- und Entwurfswerkzeuge formuliert.

Wie in Kapitel 1 schon ausgeführt wurde, existiert bereits eine große Zahl an Untersuchungen und Veröffentlichungen zum Thema *MEMS*-Entwurf. Eine Aufgabe dieses Kapitels ist es, die darin enthaltenen, für den Entwurf und die Simulation von *Fraunhofer IPMS*-Mikroscooperspiegeln relevanten Aspekte zu sammeln und zu systematisieren. Können in der Literatur keine Lösungsansätze für spezielle Entwurfsprobleme gefunden werden, werden im Rahmen dieser Arbeit eigene Ansätze und Methoden erarbeitet, welche ebenfalls in diesem Kapitel vorgestellt werden. Dies betrifft im Besonderen:

- die Untersuchungen zu geometrischen Nichtlinearitäten in Torsionsfederelementen (Abschnitt 3.2.2, aber auch Abschnitt 4.2),
- die Methoden zur Bestimmung von mechanischen Zugspannungen in fest eingespannten prismatischen Torsionsstäben (Abschnitt 3.2.3),
- die Untersuchungen zu den Einflüssen der Fertigungstoleranzen des *AME1*-Prozesses auf Torsionsfederelemente (Abschnitt 3.2.5),
- die Ermittlung von Korrekturfaktoren zum Bestimmen der dynamischen Deformation einer Spiegelplatte mithilfe analytischer Näherungen (Abschnitt 3.2.6),
- die Untersuchungen zu fluidmechanischen Dämpfungsmechanismen, ausgenommen der *Squeeze-film*-Dämpfung (Abschnitt 3.3),
- die Ansätze zur analytischen Näherung des Momentenverlaufs des *Out-of-plane-comb*-Antriebs (Abschnitt 3.4.1),
- die Methoden zur Bestimmung der elektromechanischen Stabilitätseigenschaften von geraden und trapezförmigen Fingerelektroden (Abschnitt 3.4.4).

Außerdem ist es Aufgabe dieses Kapitels, die Grenzen und Eigenschaften der vorgestellten analytischen Zusammenhänge und Näherungen aufzuzeigen. Dazu werden sowohl Ergebnisse aus experimentellen Untersuchungen, als auch aus numerischen (*FEM*-) Untersuchungen herangezogen.

Zunächst werden jedoch einige, für das weitere Verständnis dieser Arbeit erforderliche, Vereinbarungen und Definitionen vorgestellt. Diese besitzen Gültigkeit sowohl für die im Rahmen der Dissertation durchgeführten Untersuchungen, als auch für die daraus hervorgegangenen Entwurfswerkzeuge.

### 3.1 Vereinbarungen und Definitionen

#### 3.1.1 Material- und Strukturvereinfachungen

Plastische und viskose Materialien erhöhen den mathematischen Aufwand bei der Lösung strukturmechanischer Probleme beträchtlich. Silizium weist als wichtigster Werkstoff der

Mikrosystemtechnik unterhalb der Fließtemperatur ( $\approx 700^\circ\text{C}$ ) nahezu ideal elastische Eigenschaften auf [5]. Da alle in dieser Arbeit betrachteten deformierbaren Strukturen aus einkristallinem Silizium bestehen und weit unterhalb der Fließtemperatur betrieben werden, können alle strukturmechanischen Probleme unter Annahme ideal elastischer Materialeigenschaften formuliert und gelöst werden.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit und zur Reduzierung des Modellierungs- und Rechenaufwands werden außerdem für das jeweils aktuelle Problem unwesentliche Geometriedetails vernachlässigt. Dazu zählen:

- Massenänderungen und mechanische Vorspannungen aufgrund von optischen Verspiegelungsschichten z.B. aus Aluminium,
- Änderungen der elastischen Eigenschaften von Geometrien aufgrund von darin enthaltenen, mit polykristallinem Silizium gefüllten Isolationsgräben,
- Änderung der elastischen Eigenschaften des Materials aufgrund von Dotierung,
- thermische Beeinflussung der elastischen Eigenschaften,
- Abweichungen von ideal senkrechten und ebenen Strukturprofilen aufgrund des Herstellungsprozesses z.B. durch Unterätzung [3],
- Abweichungen von einer idealisierten Kristallorientierung aufgrund von Herstellungstoleranzen des Wafers.

Außerdem werden geometrische Symmetrien zur Vereinfachung genutzt. Dabei auftretende Randeckeffekte werden vernachlässigt (siehe auch Abschnitt 3.3.3).

### 3.1.2 Koordinatensysteme

Für jeden denkbaren Mikroscoannerspigel wird ein kartesisches Koordinatensystem  $(x, y, z)$  definiert. Dieses ist so positioniert bzw. orientiert, dass die Drehachsen, um die der Mikrospiegel verkippt werden kann, auf die  $x$ - und  $y$ -Koordinatenachsen fallen. Im Falle von Bauelementen zur eindimensionalen Ablenkung fällt die  $y$ -Koordinatenachse auf die zur Drehrichtung orthogonale Symmetrieachse des Mikrospiegels. Da die Bauelementebene die höchste in dieser Arbeit gebrauchte Abstraktionsebene ist, wird ein solches Koordinatensystem im Folgenden als *globales Koordinatensystem* bezeichnet.

Einzelne Bestandteile eines Mikroscoannerspiegels werden in *lokalen Koordinatensystemen*  $(x', y', z')$  beschrieben. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass die  $z'$ -Koordinatenachse im Allgemeinen identisch mit der  $z$ -Achse ist. Position bzw. Orientierung der  $x'$ - und  $y'$ -Achsen können frei gewählt werden. Die relative Position und Orientierung eines lokalen Koordinatensystems bestimmt die Lage des zugehörigen Bestandteils innerhalb des Bauelementes. Abbildung 3.1 verdeutlicht dies am Beispiel eines Mikroscoannerspiegels zur zweidimensionalen Ablenkung von Licht. Auf die hier dargestellten Bestandteile wird in den folgenden Abschnitten näher eingegangen. Dimensionen wie Länge  $l$ , Breite  $w$  und Höhe  $h$  sowie Deformationen oder Auslenkungen eines solchen Bestandteils beziehen sich immer auf dessen lokales Koordinatensystem. Dabei ist die Länge immer in  $x'$ -Richtung, die Breite in  $y'$ -Richtung und die Höhe in  $z'$ -Richtung definiert.

Angaben von Richtungen und Orientierungen können für Strukturen aus einkristallinem Silizium auch bezüglich der Kristallorientierung erfolgen. Dazu werden die

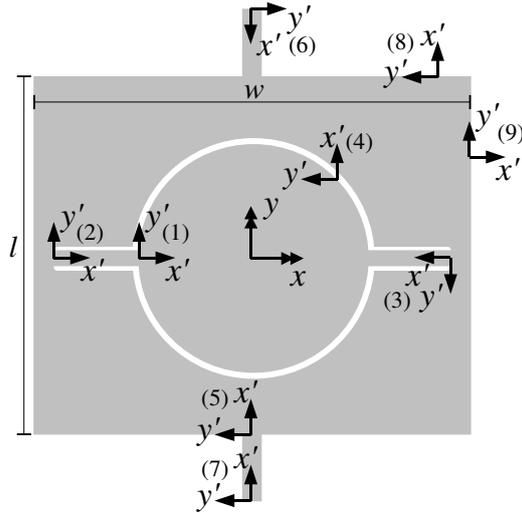


Tabelle 3.1: Symbolerklärung

Symbol	Bedeutung
$(x, y, z)$	globales Koordinatensystem
$(x', y', z')$	lokales Koordinatensystem
einige lokale Koordinatensysteme des 2D-Mikroscooperspiegels	
(1)	Spiegelplatte
(2,3,6,7)	Torsionsfeder
(5)	beweglicher Rahmen
(4,8,9)	Fingerelektrode
Dimensionen im lokalen Koordinatensystem	
$l$	Länge des beweglichen Rahmens
$w$	Breite des beweglichen Rahmens

**Abb. 3.1:** Definition der Koordinatensysteme eines Mikroscooperspiegels. Zusätzlich zum globalen Koordinatensystem sind einige Beispiele für lokale Koordinatensysteme eingezeichnet. Bei allen Koordinatensystemen ist die  $z$ - bzw.  $z'$ -Richtung normal zur Darstellungsebene auf den Betrachter zu orientiert.

MILLERSchen Indices [61] genutzt. Richtungsangaben erfolgen dann in der Form  $[hkl]$ . Gruppen von Richtungen mit gleichen Materialeigenschaften werden als  $\langle hkl \rangle$  ausgedrückt. Kristallebenen werden mit  $(hkl)$ , Gruppen von Ebenen mit gleichen Eigenschaften als  $\{hkl\}$  dargestellt.

### 3.1.3 Mathematische Vereinfachungen und Definitionen

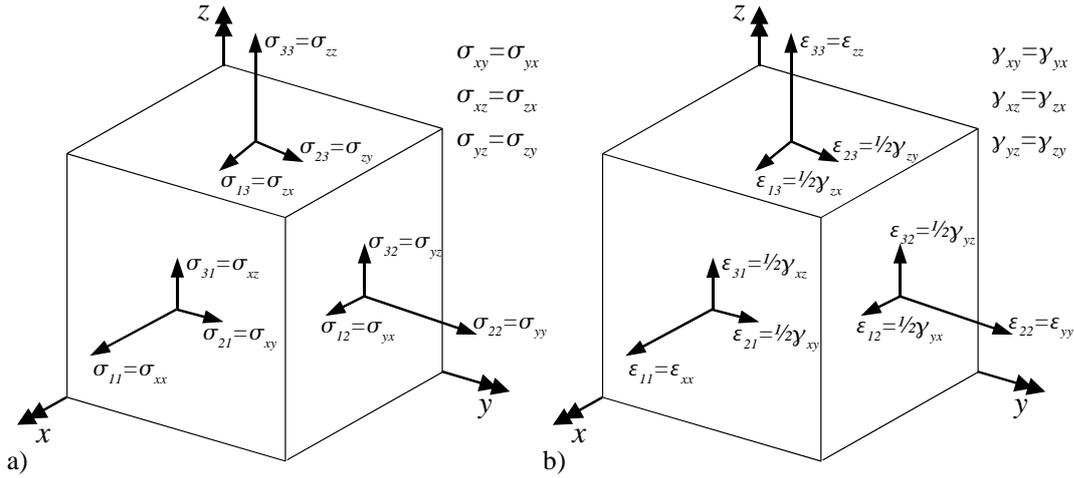
Werkstoffe mit anisotropen (richtungsabhängigen) Materialeigenschaften werden im Allgemeinen durch Tensoren charakterisiert (Materialkenngrößen und Zustandsgrößen). So wird beispielsweise die Spannungs-Dehnung-Beziehung für hinreichend kleine Deformationen eines solchen Materials durch die lineare Tensorfunktion

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.1)$$

ausgedrückt (HOOKEsches Gesetz). Dabei sind die mechanische Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  und die mechanische Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  Tensoren zweiter Stufe mit jeweils neun Komponenten  $\sigma_{ij}$  bzw.  $\varepsilon_{kl}$ .  $\mathbf{C}$  ist ein Tensor vierter Stufe mit 81 Komponenten, den elastischen Konstanten  $c_{ijkl}$ . Aus der Definition von  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  [62] folgt unmittelbar, dass beide Tensoren eine symmetrische Struktur aufweisen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Es sind also nur sechs Komponenten verschieden. Dabei repräsentieren die Elemente der Hauptdiagonalen die Normalkomponenten, die übrigen Elemente die Scherkomponenten (Schubkomponenten) der mechanischen Spannung bzw. Dehnung. Um dieser Tatsache



**Abb. 3.2:** Definition der Zustandsgrößen in anisotropen Werkstoffen.  
a) mechanische Spannung, b) mechanische Dehnung

gerecht zu werden und die Handhabbarkeit dieser Größen zu vereinfachen, wird für die vorliegende Arbeit die folgende Notation der Zustandsgrößen definiert:

$$\begin{array}{l}
 \sigma_{xx} := \sigma_{11} \\
 \sigma_{yy} := \sigma_{22} \\
 \sigma_{zz} := \sigma_{33} \\
 \sigma_{yz} := \sigma_{23} \\
 \sigma_{xz} := \sigma_{13} \\
 \sigma_{xy} := \sigma_{12}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Normalspannungs-} \\ \text{komponenten} \\ \\ \text{Scherspannungs-} \\ \text{komponenten} \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} := \varepsilon_{11} \\
 \varepsilon_{yy} := \varepsilon_{22} \\
 \varepsilon_{zz} := \varepsilon_{33} \\
 \gamma_{yz} := 2 \varepsilon_{23} \\
 \gamma_{xz} := 2 \varepsilon_{13} \\
 \gamma_{xy} := 2 \varepsilon_{12}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Normaldehnungs-} \\ \text{komponenten} \\ \\ \text{Scherdehnungs-} \\ \text{komponenten} \end{array}
 \quad (3.2)$$

Normalkomponenten bzw. Scherkomponenten können dabei auf folgende Weise zusammengefasst werden:

$$\sigma_{ii} := \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}\} \quad \varepsilon_{ii} := \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}\} \quad (3.3)$$

bzw.

$$\sigma_{ij} := \{\sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\} \quad \gamma_{ij} := \{\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\} \quad (3.4)$$

Die Bezeichnung für  $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$  ist an die der technischen Scherdehnungen  $\gamma_{ij}$  angelehnt. Diese sind üblicherweise definiert zu [5, 63]:

$$\gamma_{ij} := \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 2 \varepsilon_{ij} \quad (3.5)$$

In Abbildung 3.2 sind die voneinander verschiedenen Dehnungs- und Spannungskomponenten am Beispiel eines würfelförmigen Volumenelements dargestellt.

Mithilfe der neu eingeführten Schreibweise lässt sich nun das HOOKEsche Gesetz für anisotrope Materialien in Form eines Matrix-Vektor-Produkts formulieren. Dazu werden die sechs unabhängigen Komponenten des Spannungs- bzw. Dehnungstensors zu Orthonormalbasen zusammengefasst [64]. Die dabei genutzten zweifach indizierten Elemente  $c_{ij}$  werden als verallgemeinerte Elastizitätsmodul bezeichnet [5, 62]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & & & \vdots \\ c_{31} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_{61} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Einkristallines Silizium weist aufgrund seiner kubischen Kristallstruktur Materialeigenschaften auf, welche sich bezüglich der Symmetrieachsen des Kristalls mit einem Winkel von  $90^\circ$  in alle Richtungen periodisch verhalten. Man spricht auch von *orthotropen Materialeigenschaften*. Diese Orthotropie des Materials führt dazu, dass lediglich drei Elemente der Matrix  $(\mathbf{c}_{ij})$  unabhängig und verschieden von null sind:

$$(\mathbf{c}_{ij})_{\text{orthotrop}} = \mathbf{T}_c^T \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \mathbf{T}_c \quad (3.7)$$

Die für einkristallines Silizium gültigen Werte  $c_{11}, c_{12}, c_{44}$  finden sich in Anhang A.1. Da diese nur für Koordinatensysteme gültig sind, deren Achsen parallel zu den Kanten der Silizium-Elementarzelle verlaufen, muss für den allgemeinen Fall eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_c \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  eingeführt werden<sup>8</sup>. Diese ergibt sich aus der Bedingung

$$(\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{xy})^T = \mathbf{T}_c (\varepsilon_{x'x'} \ \varepsilon_{y'y'} \ \varepsilon_{z'z'} \ \gamma_{y'z'} \ \gamma_{x'z'} \ \gamma_{x'y'})^T \quad (3.8)$$

wobei  $(x', y', z')$  die lokalen Koordinaten der Elementarzelle des Einkristalls sind.

Für analytische strukturmechanische Betrachtungen werden oft Elastizitätsmoduln  $E$ , Schubmoduln  $G$  und die Querkontraktionszahlen  $\nu$  benötigt. Diese lassen sich mithilfe der inversen  $(\mathbf{c}_{ij})$ -Matrix ausdrücken. Sie wird auch als  $(\mathbf{s}_{ij})$ -Matrix oder Matrix der elastischen Konstanten bezeichnet. Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$(\mathbf{c}_{ij})^{-1} = (\mathbf{s}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & 1/G_{23} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & 1/G_{13} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & 1/G_{12} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

In Anlehnung an Ausdruck (3.2) wird für diese Arbeit die folgende Notation für Elastizitätsmoduln, Schubmoduln und Querkontraktionszahlen vereinbart:

$$\begin{aligned} E_{xx} &:= E_1 & G_{yz} &:= G_{23} & \nu_{yz} &:= \nu_{23} \\ E_{yy} &:= E_2 & G_{xz} &:= G_{13} & \nu_{xz} &:= \nu_{13} \\ E_{zz} &:= E_3 & G_{xy} &:= G_{12} & \nu_{xy} &:= \nu_{12} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dabei weicht die Indizierung der Elastizitätsmoduln vom bisherigen Benennungsschema ab, da aus einem einfachen ein doppelter Index wird. Dies ist nötig, um eine Unterscheidung von den Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{E} = (E_x \ E_y \ E_z)^T$  zu ermöglichen.

Ähnlich wie bei  $(\mathbf{c}_{ij})$  sind für orthotrope Materialien nur drei Komponenten  $s_{ij}$  unabhängig und verschieden von null:

$$(\mathbf{s}_{ij})_{\text{orthotrop}} = \mathbf{T}_s^T \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{pmatrix} \mathbf{T}_s \quad (3.11)$$

<sup>8</sup>Die Multiplikation mit  $\mathbf{T}$  realisiert Koordinatentransformationen wie Drehung oder Translation [65].

Werte für einkristallines Silizium finden sich wieder in Anhang A.1. Die Transformationsmatrix der elastischen Konstanten  $\mathbf{T}_s \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  wird durch die Bedingung

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} & \sigma_{xy} \end{pmatrix}^T = \mathbf{T}_s \begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} & \sigma_{y'y'} & \sigma_{z'z'} & \sigma_{y'z'} & \sigma_{x'z'} & \sigma_{x'y'} \end{pmatrix}^T \quad (3.12)$$

bestimmt.  $(x', y', z')$  sind dabei wieder die lokalen Koordinaten der Elementarzelle.

## 3.2 Strukturmechanische Randbedingungen

Aus dem Arbeitsprinzip bzw. der Geometrie der Mikroscannerspiegel ergeben sich eine Reihe von strukturmechanischen Randbedingungen. Diese beeinflussen die Eigenschaften der Bauelemente und müssen daher beim Entwurf und in der Simulation berücksichtigt werden.

### 3.2.1 Richtungsabhängige Materialeigenschaften

Wie im vorangegangenen Abschnitt bereits erwähnt wurde, weist einkristallines Silizium orthotrope Materialeigenschaften auf. Da alle deformierbaren Elemente eines *Fraunhofer IPMS* Mikroscannerspiegels aus einkristallinem Silizium gefertigt werden, muss dies beim Entwurf beachtet werden. Die elastischen Eigenschaften spielen dabei eine wichtige Rolle. Verläufe der Elastizitäts- und Gleitmoduln, jeweils in Abhängigkeit von der Kristallrichtung sind in Anhang A enthalten.

Vor allem bei der Dimensionierung von Federelementen muss die Orthotropie des Materials berücksichtigt werden. Die Steifigkeiten eines solchen Elements werden anders als bei isotropen Materialien nicht ausschließlich von der Geometrie bestimmt; auch die Orientierung innerhalb des Einkristalls beeinflusst die Eigenschaften.

Für auf Biegung und Zug beanspruchte, gerade Elemente bedeutet dies keine Erhöhung des Aufwands bei der Modellierung. Wie im anisotropen Material bestimmt das Produkt aus Fläche und E-Modul bzw. Flächenmoment 2. Ordnung und E-Modul die Steifigkeit. Es muss bei der Modellierung jedoch darauf geachtet werden, dass das E-Modul entsprechend der Richtung der Struktur im Einkristall gewählt wird. Die Biegesteifigkeiten  $\kappa_b$  eines geraden, stabförmigen Elements in  $x'$ -Richtung (Abb. 3.3a) ergeben sich für Biegung um die  $z'$ - und  $y'$ -Achsen zu

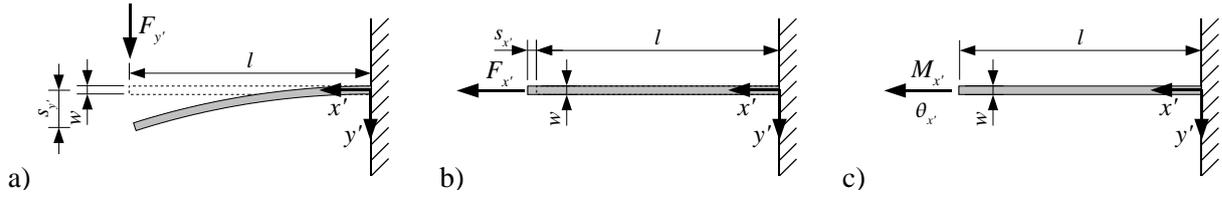
$$\kappa_{b,z'} = E_{x'x'} I_{z'z'} \quad \text{bzw.} \quad \kappa_{b,y'} = E_{x'x'} I_{y'y'} \quad (3.13)$$

Die Zugsteifigkeit eines solchen Elements in  $x'$ -Richtung (Abb. 3.3b) ergibt sich zu

$$\kappa_{z,x'} = E_{x'x'} A \quad (3.14)$$

Dabei ist  $A$  die Querschnittsfläche des Stabs. Das E-Modul  $E_{x'x'}$  hängt von der Ausrichtung der Geometrie innerhalb des Einkristalls ab. In Tabelle 3.2 sind die Steifigkeiten einer typischen Silizium-Mikrostruktur für zwei verschiedene Kristallrichtungen enthalten. Es ist erkennbar, dass sich die Biege- und Zugsteifigkeiten der Struktur für verschiedene Ausrichtungen um bis zu 30 % unterscheiden. Dies gilt in gleichem Maße für die Federhärten einer solchen Struktur; sie ergeben sich direkt aus den Steifigkeiten [66]:

$$k_{b,z'} = \frac{F_{y'}}{s_{y'}} = \frac{3 \kappa_{b,z'}}{l^3} \quad \text{bzw.} \quad k_{b,y'} = \frac{F_{z'}}{s_{z'}} = \frac{3 \kappa_{b,y'}}{l^3} \quad (3.15)$$



**Abb. 3.3:** Einige Belastungsfälle stabförmiger elastischer Elemente.  
a) Biegung; b) Zug; c) Torsion.

**Tabelle 3.2:** Richtungsabhängigkeit der Steifigkeiten einer typischen Mikrostruktur. Ausgangspunkt ist eine stabförmige Struktur mit rechteckigem Querschnitt und den Abmessungen  $(l \times w \times h) = (200 \mu\text{m} \times 2 \mu\text{m} \times 30 \mu\text{m})$ , entsprechend Abb. 3.3.

Richtung im Kristall	$E_{x'x'}/\text{GPa}$	$G_m/\text{GPa}$	Biegung		Zug		Torsion	
			$I_{z'z'}$	$\kappa_{b,z'}/\text{N}\cdot\text{m}^2$	$A$	$\kappa_{z,x'}/\text{N}$	$I_t/\text{m}^4$	$\kappa_{t,x'}/\text{N}\cdot\text{m}^2$
$\langle 100 \rangle$	130	91	$\frac{1}{12}hw^3$	$2.6 \cdot 10^{-12}$	$hw$	7.8	$7.7 \cdot 10^{-23}$	$7.0 \cdot 10^{-12}$
$\langle 110 \rangle$	169	79		$3.4 \cdot 10^{-12}$		10.1		$6.1 \cdot 10^{-12}$

und

$$k_{z,x'} = \frac{F_{x'}}{s_{x'}} = \frac{\kappa_{z,x'}}{l} \quad (3.16)$$

Der Spannungszustand einer torsionsbeanspruchten geraden, stabförmigen Struktur (entsprechend Abb. 3.3c) kann mithilfe der folgenden partiellen Differentialgleichung beschrieben werden [3, 5]:

$$\frac{1}{G_{x'z'}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{1}{G_{x'y'}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = -2 \vartheta \quad \text{mit} \quad \phi_{\text{Rand}} = 0 \quad (3.17)$$

Dabei ist  $\phi$  die Torsionsfunktion (Spannungsfunktion) einer beliebigen Querschnittsfläche entlang der Torsionsachse;  $\phi_{\text{Rand}}$  entspricht dem Spannungszustand am Rand des Querschnitts;  $\vartheta$  wird als Verdrillung bezeichnet. Bei geraden Torsionsstäben mit homogenen Materialeigenschaften ist die Verdrillung über die Länge des Stabs konstant. Es gilt:

$$\vartheta = \frac{d}{dx'} \theta(x') = \frac{\theta_{x'}}{l} \quad (3.18)$$

Für einfache Querschnittsgeometrien kann Gl. (3.17) mithilfe eines FOURIER-Reihen-Ansatzes gelöst werden [67]. Die Torsionssteifigkeit ergibt sich dann durch Integration der Torsionsfunktion über der Querschnittsfläche  $A$  des Torsionsstabs:

$$\kappa_{t,x'} = \frac{2}{\vartheta} \iint_{(A)} \phi \, dA \quad (3.19)$$

In isotropen Materialien gilt  $G_{x'z'} = G_{x'y'} = G$ . Die Torsionssteifigkeit einer geraden, stabförmigen Struktur kann dann auch als Produkt des Gleitmoduls  $G$  und des Torsionsflächenmoments  $I_t$  ausgedrückt werden:

$$\kappa_{t,x'} = GI_t \quad (3.20)$$

Für einen Torsionsstab mit rechteckigem Querschnitt ergibt sich aus den Lösungen von Gl. (3.17) und Gl. (3.19) der folgende Ausdruck für das Torsionsflächenmoment [67]:

$$I_t = \frac{1}{3} w^3 h \left( 1 - \frac{192 w}{\pi^5 h} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \tanh \frac{k\pi h}{2w} \right) \quad \text{mit } w \leq h \quad (3.21)$$

Für Torsionsstäbe mit anderen Querschnittsgeometrien finden sich Ausdrücke und Tabellen zur Bestimmung des Torsionsflächenmoments in Tabellenbüchern der technischen Mechanik [66].

Im orthotropen Fall ist der Gleitmodul im Querschnitt des Torsionsstabs richtungsabhängig. Im Allgemeinen gilt daher  $G_{x'z'} \neq G_{x'y'}$ . Die Torsionssteifigkeit eines geraden Stabs kann dann in Anlehnung an Gl. (3.20) folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\kappa_{t,x'} = G_m I_t \quad (3.22)$$

Dabei ist  $G_m$  das mittlere Gleitmodul der Querschnittsfläche. Es hängt sowohl von der Richtung der Struktur im Einkristall, als auch von deren Querschnittsgeometrie ab.  $G_m$  lässt sich als Integral der Torsionsfunktion  $\phi$  folgendermaßen ausdrücken [5]:

$$G_m = \frac{1}{\vartheta I_t} \iint_{(A)} \phi \, dA \quad (3.23)$$

Dieser Ausdruck kann numerisch gelöst werden. Für einen Torsionsstab mit rechteckigem Querschnitt und Torsionsachse in einer der  $\langle 110 \rangle$ -Richtungen des Silizium-Einkristalls lässt sich auf diese Weise die folgende Größengleichung für  $G_m$  finden [5, 68]:

$$G_m/\text{GPa} = \frac{85.8}{4 \left( \frac{w}{h} + 0.08517 \right)^2 + 3} + 51.2 \quad (3.24)$$

Für die Torsionsfederhärte gilt dann:

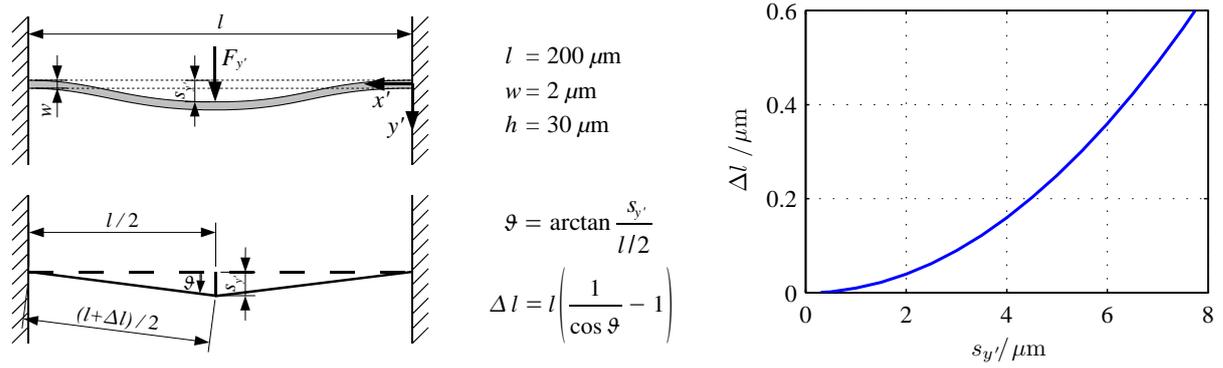
$$k_{t,x'} = \frac{\kappa_{t,x'}}{l} = \frac{G_m I_t}{l} \quad (3.25)$$

Der Einsatz orthotroper Materialien führt also zu einer deutlichen Erhöhung des Aufwands bei der Modellierung torsionsbeanspruchter Federelemente. Wie anhand des Beispiels in Tabelle 3.2 sichtbar wird, muss dieser Aufwand in Kauf genommen werden, um ausreichend genaue Ergebnisse zu erhalten. Lediglich für grobe Abschätzungen ist es zulässig, mithilfe gemittelter Materialkennwerte isotrop zu rechnen.

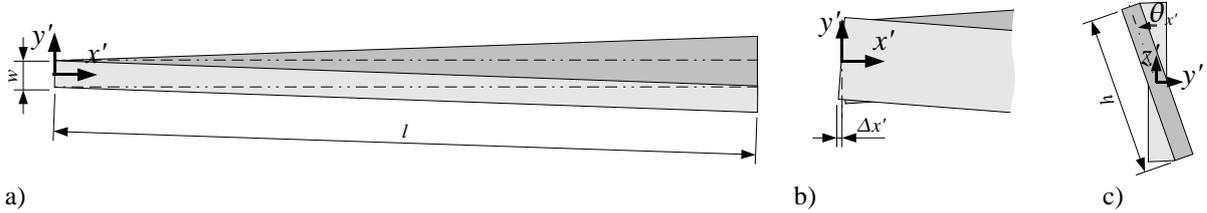
### 3.2.2 Geometrische Nichtlinearitäten

Um die Federkonstante bzw. Federhärte einer Struktur für eine bestimmte Belastung zu bestimmen, geht man von der Geometrie im unbelasteten Zustand aus. Mithilfe der elastischen Eigenschaften des Materials und der sich daraus ergebenden Steifigkeiten lässt sich dann die Federhärte bestimmen. Es ist jedoch möglich, dass sich die Gestalt eines deformierbaren Körpers aufgrund der Belastung in solcher Weise ändert, dass die Federhärte der Struktur signifikant beeinflusst wird. Man spricht dann von einer *verformungsabhängigen Last* bzw. von *nichtlinearen Geometrien*.

In Abbildung 3.4 ist ein typisches Beispiel für eine Struktur mit verformungsabhängiger Last dargestellt. Es handelt sich um einen beidseitig eingespannten, dünnen Stab,



**Abb. 3.4:** Beispiel für eine nichtlineare Geometrie. Aus dem nichtlinearen Zusammenhang zwischen Auslenkung und Länge des Stabs folgt eine mit der Auslenkung überproportional ansteigende Dehnung.



**Abb. 3.5:** Torsionsstab mit rechteckiger Querschnittsfläche. a) verdrehter Torsionsstab, Draufsicht; b) Detailansicht des Stabendes: Verschiebung  $\Delta x'$  in Stabrichtung; c) verdrehter Torsionsstab, Seitenansicht.

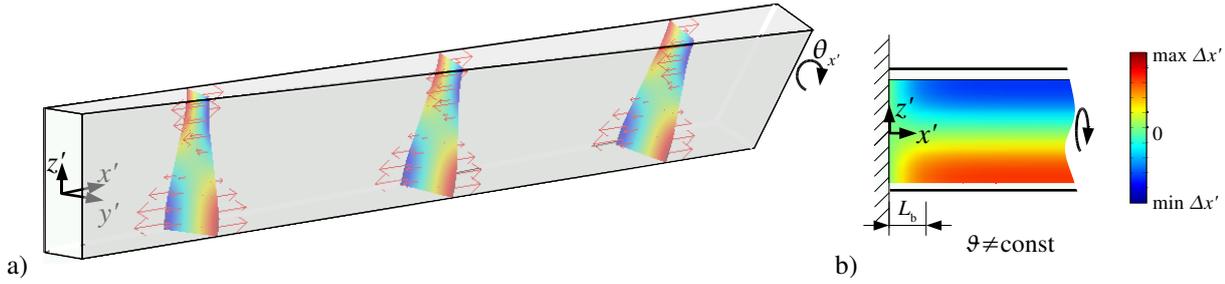
welcher mit einer orthogonal zur Stabrichtung aufgebrauchten Kraft  $F_{y'}$  beaufschlagt wird. Da die Breite des Stabs wesentlich geringer ist als seine Länge ( $w \ll l$ ), wird die Federhärte dieser Anordnung für große Auslenkungen in erster Näherung von der Zugsteifigkeit  $\kappa_{z,x'}$  der Struktur bestimmt. Sie ergibt sich aus dem Produkt des E-Moduls mit der Fläche des Stabquerschnitts (Abschnitt 3.2.1) und kann näherungsweise als konstant angenommen werden. Wie in Abb. 3.4 angedeutet, wächst die Längenänderung des Stabs überproportional mit der Auslenkung in Richtung der angreifenden Kraft. Es ergibt sich eine Abhängigkeit der Federhärte von der Auslenkung der Struktur:

$$k_{y'} = \frac{F_{y'}}{s_{y'}} \approx \frac{8 s_{y'} \kappa_{z,x'}}{l^2 \sqrt{1 + 4 \frac{s_{y'}^2}{l^2}}} \quad (3.26)$$

Aus dem überproportionalen Zusammenhang zwischen Auslenkung  $s_{y'}$  und Dehnung des Stabs  $\Delta l$  resultiert also eine mit der Auslenkung zunehmende Federhärte der Struktur.

Ähnliche Mechanismen wirken auch in prismatischen Torsionsstäben. Die Verdrehung führt zu Verschiebungen innerhalb der Struktur nicht nur in Richtung der Scherkomponenten sondern auch in Stabrichtung (Abb. 3.5). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer *Querschnittsverwölbung*. Der ortsabhängige Verlauf der Verwölbung  $\Delta x' = f(y', z')$  lässt sich mithilfe der SAINT-VERNANT-Theorie [67, 69] bestimmen. In der Literatur wird dazu eine Verwölbungsfunktion  $\psi$  eingeführt. Die Verschiebung ergibt sich dann aus dem Produkt mit der Verdrehung:

$$\Delta x' = \vartheta \psi \quad \text{mit} \quad \psi = f(y', z') \quad (3.27)$$



**Abb. 3.6:** Querschnittsverwölbung in Torsionsstäben mit rechteckigem Querschnitt. a) qualitative Darstellung der Verwölbung  $\Delta x'$ ; b) Einfluss einer festen Einspannung.

Die Lösungen für  $\psi$  ergeben sich aus den Gleichgewichts-Bedingungen der Elastizitätstheorie. Für einachsige Torsionsbelastung vereinfachen sich diese zu [67]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} = 0 \quad (3.28)$$

Setzt man voraus, dass an den Rändern des Stabquerschnitts ausschließlich tangentielle Scherspannungskomponenten auftreten, ergibt sich die Randbedingung für die Lösung dieser Differentialgleichung:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial y'} - z' \right) \frac{dz'}{ds} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial z'} + y' \right) \frac{dy'}{ds} = 0 \quad (3.29)$$

Dabei entspricht  $s$  dem Rand der Querschnittsfläche  $A$ . Für Torsionsstäbe mit rechteckigem Querschnitt kann eine Lösung von Gl. (3.28), unter Beachtung dieser Randbedingung, in [70] gefunden werden. Die Verwölbungsfunktion ergibt sich demnach zu

$$\psi = y'z' - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{w k_n^3 \cosh \frac{k_n h}{2}} \sin(k_n y') \sinh(k_n z') \quad (3.30)$$

mit  $k_n = \frac{(2n+1)\pi}{w}$ ,  $y' \in \left[-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}\right]$ ,  $z' \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$

Lässt die Einspannung eine freie Verwölbung der Stabenden zu, ist die Verdrillung  $\vartheta$  und demnach auch die Verwölbung  $\psi$  über die gesamte Länge des Torsionsstabs konstant; Abbildung 3.6a verdeutlicht dies. Wird hingegen die Verwölbung an den Stabenden durch Einspannungen verhindert oder eingeschränkt, ändern sich sowohl Verdrillung als auch Verwölbung entlang des Stabs (Abb. 3.6b). Außerdem treten neben den Scherdehnungen erhebliche Normaldehnungen senkrecht zur Querschnittsfläche auf. Die Torsionssteifigkeit des Stabs steigt nahe der Einspannung stark an. Dies führt zu einer Erhöhung der Federhärte und außerdem zu einem stärker progressiven Verlauf der Federkennlinie.

Für kleine Auslenkungen kann dieser Effekt nach [67] näherungsweise durch Einführung einer effektiven Länge  $l_{\text{eff}}$  des Torsionsstabs berücksichtigt werden. Diese ergibt sich dann für einen beidseitig fest eingespannten Stab zu:

$$l_{\text{eff}} \approx l - 2L_b \quad \text{mit} \quad L_b = \max\{h, w\} \frac{\sqrt{5(\nu+1)}}{12} \quad (3.31)$$

Dabei ist  $L_b$  die Länge des Stabintervalls, in dem die Verdrillung bzw. die Verwölbung aufgrund der Einspannung signifikant verringert wird (Abb. 3.5b);  $\nu$  ist die POISSON-Zahl des Materials. Für die Verdrillung gilt somit näherungsweise:

$$\vartheta \approx \begin{cases} \frac{\theta_{x'}}{l_{\text{eff}}} & : L_b \leq x' \leq l - L_b \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad 0 \leq x' \leq l \quad (3.32)$$

Die Torsionsfederhärte eines beidseitig eingespannten Torsionsstabs mit rechteckförmiger Querschnittsfläche ergibt sich dann für kleine Auslenkungen zu:

$$k_{t,x'} \approx \frac{\kappa_{t,x'}}{l_{\text{eff}}} \quad (3.33)$$

Es ist zu beachten, dass diese Näherungen (3.31), (3.32), (3.33) prinzipiell nur für isotrope Materialien gültig sind. Es hat sich jedoch gezeigt, dass mithilfe einer mittleren POISSON-Zahl  $\nu = \bar{\nu} \approx 0.28$  auch für einkristallines Silizium sinnvolle Ergebnisse erzielt werden können (vgl. dazu Abb. 3.12 auf S. 52). Des Weiteren ist zu beachten, dass Gl. (3.31) die geometrische Nichtlinearität eines beidseitig eingespannten Torsionsstabs, also den auslenkungsabhängigen Anstieg der Federhärte, nicht berücksichtigt. Die mit der effektiven Länge  $l_{\text{eff}}$  bestimmte Federhärte gilt somit ausschließlich für kleine Auslenkungen. Die bei der Torsion eines prismatischen Stabs auftretenden nichtlinearen geometrischen Effekte können mithilfe numerischer Methoden wie der *FEM* untersucht werden. In Anhang C.2 wird der auf diese Weise ermittelte Verlauf der Federhärte einer Beispielstruktur im Kontext der analytischen Modelle diskutiert.

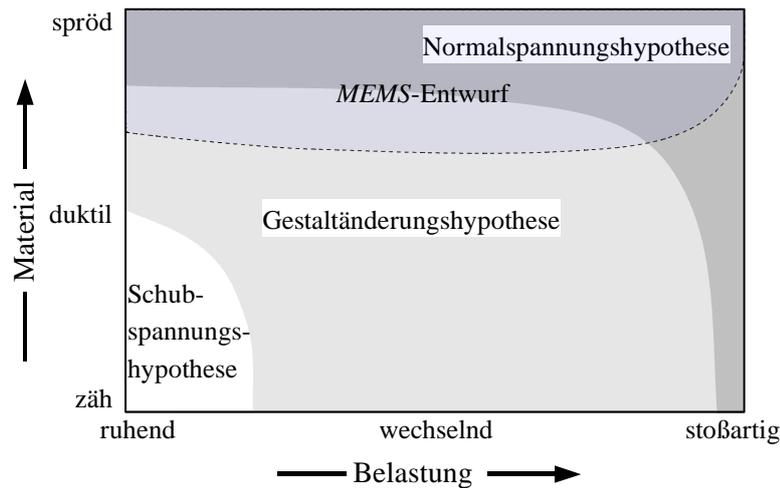
Wie in Abschnitt 4.2 noch gezeigt wird, ist der Verlauf der Federkennlinie bzw. die Abhängigkeit der Federhärte von der Auslenkung ein wichtiges Kriterium beim Entwurf von *Fraunhofer IPMS*-Mikroscannerspiegeln. Dabei genügen bereits geringe Änderungen der Federhärte im Bereich von wenigen Prozent, um die Eigenschaften eines Bauelements stark zu beeinträchtigen. Die geometrischen Nichtlinearitäten mikromechanischer Feder-elemente müssen also unbedingt beim Entwurf berücksichtigt werden.

### 3.2.3 Strukturmechanische Spannungen

Wie bereits erwähnt, werden die beweglichen Bestandteile von *Fraunhofer IPMS* Mikroscannerspiegeln ausschließlich mithilfe deformierbarer Strukturen realisiert. In der Konsequenz resultieren Auslenkungen in mechanischen Dehnungen und entsprechend Gl. (3.1) auch in mechanischen Spannungen innerhalb der Strukturen (siehe Anhang C.4). Wird dabei die Streckgrenze bzw. die Dauerfestigkeit des verwendeten Materials (Anhang A) überschritten, kann es zur Rissbildung und schließlich zum Versagen des Bauelements kommen. Eine möglichst genaue Kenntnis der in einem mikromechanischen Bauelement auftretenden mechanischen Spannungen bzw. deren gezielte Verringerung sind daher wichtige Punkte beim Entwurf.

Wie in Abschnitt 3.1.3 bereits erwähnt wurde, ist zur vollständigen Beschreibung eines Spannungszustands ein Tensor zweiter Stufe notwendig. Dieser enthält sechs voneinander verschiedene Komponenten. Allerdings lässt sich für jeden Ort innerhalb eines Spannungsfelds eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  finden [65], die den Spannungstensor in sein *Hauptachsensystem* überführt. Dies wird als *Hauptachsentransformation* bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$



**Abb. 3.7:** Gültigkeit der Vergleichsspannungshypothesen. Beim *MEMS*-Entwurf kommen vor allem die Normalspannungshypothese und die Gestaltänderungshypothese zum Einsatz. Bauteile aus einkristallinem Silizium sollten vorzugsweise mithilfe der Normalspannungshypothese dimensioniert werden (nach [72]).

Im Hauptachsensystem lässt sich demnach ein beliebiger Belastungszustand mit lediglich drei skalaren Werten beschreiben. Die Komponenten  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  werden als *Hauptnormalspannungen* bezeichnet.

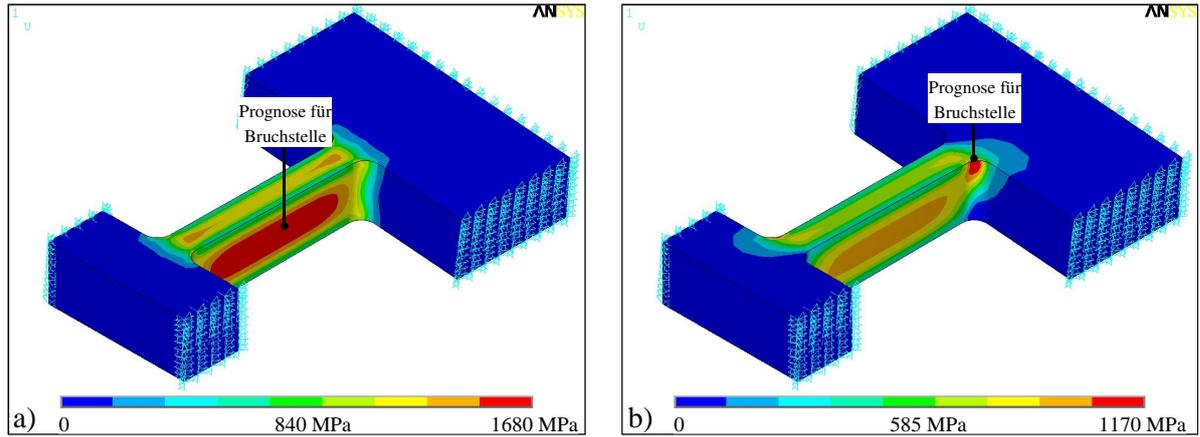
Um eine überschaubare Bewertung der in einem Bauteil auftretenden mechanischen Spannungen bezüglich der Festigkeit bzw. Betriebssicherheit zu erhalten, werden sogenannte Vergleichsspannungen genutzt. Vergleichsspannungen sind fiktive, einachsige Spannungen. Sie fassen für mehrachsige Spannungszustände verschiedene vergleichbare Materialbeanspruchungen zu einem skalaren Wert zusammen. In Abhängigkeit von den Eigenschaften des verwendeten Materials und der Art der Belastung kommen verschiedene Ansätze zur Berechnung einer Vergleichsspannung zum Einsatz. Man spricht dabei auch von *Vergleichsspannungshypothesen* bzw. *Festigkeitshypothesen* [71].

**Die Schubspannungshypothese** bewertet die Belastung eines Bauteils auf Basis der auftretenden Differenzen zwischen den Hauptnormalspannungen. Sie entsprechen den doppelten Werten der vorhandenen Scherspannungen. Nach der Schubspannungshypothese tritt demnach ein Versagen des Bauteils dann auf, wenn die Scherspannungen einen bestimmten Grenzwert überschreiten (Fließ- bzw. Gleitbruch). Die dazu bestimmte Vergleichsspannung wird auch als *Intensitätsspannung* oder *TRESCA-Spannung* bezeichnet und ergibt sich aus den Hauptnormalspannungen:

$$\sigma_\nu = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) \quad (3.35)$$

Die Schubspannungshypothese kommt bei zähen oder duktilen Werkstoffen unter statischer Belastung zum Einsatz. Haupteinsatzgebiet ist der Maschinenbau.

**Die Gestaltänderungshypothese** (Abb. 3.8a) bewertet die Belastung eines Bauteils auf Basis der Gestaltänderungsenergie. Entsprechend der Gestaltänderungshypothese bzw. Gestaltänderungsenergiehypothese (*GEH*) tritt ein Versagen des Bauteils dann auf, wenn die Gestaltänderungsenergiedichte einen bestimmten Grenzwert überschreitet. Die



**Abb. 3.8:** Vergleichsspannungen einer ausgelenkten mikromechanischen Torsionsfeder. Die Auslenkung beträgt  $5^\circ$ ; die Geometrie wurde willkürlich gewählt (vgl. Anhang C.4). a) Gestaltänderungshypothese, MISES-Vergleichsspannung; b) Normalspannungshypothese, größte Hauptnormalspannung.

dazu bestimmte Vergleichsspannung wird auch als MISES-Vergleichsspannung<sup>9</sup> bezeichnet und ergibt sich zu

$$\sigma_\nu = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} \quad (3.36)$$

Im Hauptachsensystem vereinfacht sich die MISES-Vergleichsspannung zu

$$\sigma_\nu = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} \quad (3.37)$$

Die Gestaltänderungshypothese kommt bei zähen oder duktilen Werkstoffen unter ruhender und wechselnder Beanspruchung zum Einsatz. Wichtige Anwendungsgebiete sind der Maschinenbau und das Bauwesen (Stahlkonstruktionen). Eine Vergleichsspannung entsprechend der Gestaltänderungshypothese wird im Folgenden als  $\sigma_{\nu,GEH}$  bezeichnet.

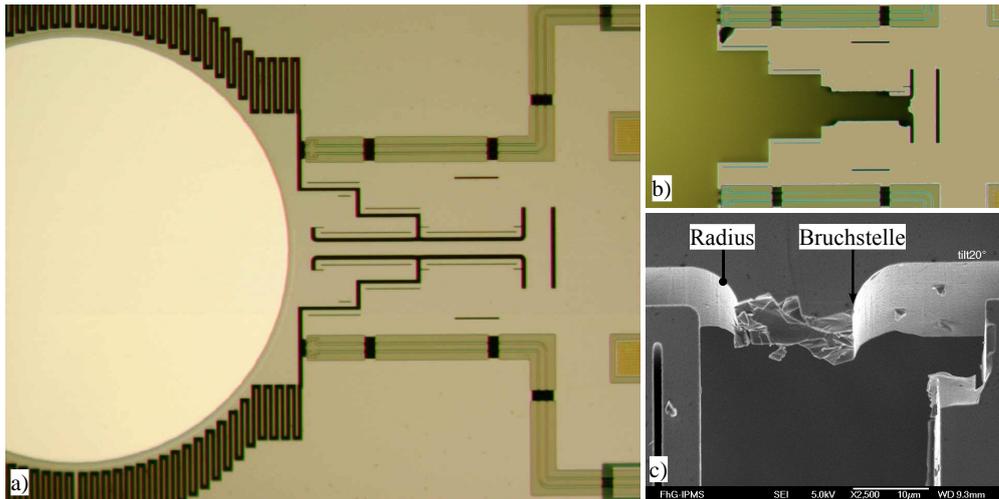
**Die Normalspannungshypothese** (Abb. 3.8b) setzt voraus, dass ein Bauteilversagen aufgrund der größten Normalspannung auftritt (Sprödbruch). Die dazu herangezogene Vergleichsspannung entspricht der größten Hauptnormalspannung:

$$\sigma_\nu = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad (3.38)$$

Die Normalspannungshypothese wird bei spröden Werkstoffen mit ruhender, wechselnder oder stoßartiger Belastung angewandt. Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist die Auslegung von Grauguss-Teilen. Eine Vergleichsspannung entsprechend der Normalspannungshypothese wird im Folgenden als  $\sigma_{\nu,NSH}$  bezeichnet.

Wie anhand Abb. 3.8 deutlich wird, kann die Wahl der Festigkeitshypothese großen Einfluss auf die Interpretation von Simulationsergebnissen und damit auf den Entwurf haben.

<sup>9</sup>Die Nutzung der MISES-Vergleichsspannung in der (*GEH*) setzt voraus, dass die Volumenänderungsenergie vernachlässigbar gering ist (inkompressibles Material). Ist dies nicht der Fall, muss die BELTRAMI-Vergleichsspannung [71] herangezogen werden.



**Abb. 3.9:** *Typisches Versagen einer Torsionsfeder mit rechteckigem Querschnitt.* Der Bruch trat bei einer Auslenkung von  $37.8^\circ$  auf [73]. a) lichtmikroskopische Aufnahme des Scanners vor der Zerstörung; b) lichtmikroskopische Aufnahme der Torsionsfeder nach der Zerstörung; c) *REM*-Aufnahme der Bruchstelle.

So ergeben sich für die gleiche Struktur bei identischer Last grundverschiedene Prognosen für ein Versagen. Während die Gestaltänderungshypothese einen Bruch in der Mitte der Torsionsfeder vorhersagt (Abb. 3.8a), prognostiziert die Normalspannungshypothese einen Bruch in der Nähe der Einspannung (Abb. 3.8b).

Da es sich bei einkristallinem Silizium um ein äußerst sprödes Material handelt, ist es naheliegend beim Entwurf der Mikroscooperspiegel die Normalspannungshypothese anzuwenden. Mithilfe von am *Fraunhofer IPMS* durchgeführten experimentellen Untersuchungen zur mechanischen Belastbarkeit der Bauelemente konnte diese Annahme bestätigt werden [11, 73]. Die im Rahmen dieser Untersuchungen durchgeführten Versuche haben ergeben, dass das Versagen einer geraden mikromechanischen Torsionsfeder unter hoher Belastung typischerweise durch einen Bruch in der Nähe der Einspannung erfolgt. Abbildung 3.9 zeigt eine speziell gefertigte Teststruktur vor und nach der Zerstörung durch eine gezielte Überlastung [73].

Im Normalfall müssen beim Entwurf von Mikroscooperspiegeln zwei verschiedene Belastungsfälle und die daraus resultierenden mechanischen Spannungen berücksichtigt werden:

- die Belastung bei maximaler Auslenkung im Betrieb,
- die Schockbelastung.

Im Folgenden wird auf diese Belastungsfälle im Detail eingegangen.

**Die maximale Auslenkung im Betrieb** tritt während der normalen Operation des Bauelements auf. Aufgrund der resonanten Arbeitsweise wird dieser Belastungszustand zyklisch, meist mehrere tausend mal in der Sekunde erreicht (zyklische Wechsellast). Dementsprechend sollten auf diese Weise beanspruchte Strukturen mit ausreichend hoher Sicherheitsreserve ausgelegt werden. Dabei muss auch eine mögliche Überlast berücksichtigt werden.

Die in einem geraden Torsionsstab auftretenden mechanischen Scherspannungen lassen sich mithilfe der Lösung von Gl. (3.17) bestimmen. Sie entspricht für einen um die  $x'$ -Achse verdrillten Stab den Richtungsableitungen der Torsionsfunktion  $\phi$ :

$$\sigma_{x'y'} = \frac{\partial \phi}{\partial z'} \quad \text{und} \quad \sigma_{x'z'} = -\frac{\partial \phi}{\partial y'} \quad (3.39)$$

In Torsionsstäben mit rechteckförmigem Querschnitt tritt die maximale Scherspannung am Rand der Querschnittsfläche, in der Mitte der längeren Kante auf. Sie ergibt sich in guter Näherung<sup>10</sup> zu [67]

$$\max \sigma_{ij} \approx G_m \vartheta a - 8 \frac{G_m \vartheta a}{2\pi^2} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cosh \frac{k\pi b}{2a}} \quad \text{mit} \quad a < b \quad (3.40)$$

wobei  $\vartheta$  wieder die Verdrillung des Stabs nach Gl. (3.32) bezeichnet;  $a$  entspricht der jeweils kleineren Seitenlänge des Querschnitts,  $b$  der jeweils größeren:

$$a := \begin{cases} w & : w \leq h \\ h & : w > h \end{cases} \quad \text{und} \quad b := \begin{cases} h & : w \leq h \\ w & : w > h \end{cases} \quad (3.41)$$

Für Strukturen mit großem Aspektverhältnis ( $a \ll b$ ) wird der Reihenausdruck in Gl. (3.40) klein im Verhältnis zum ersten Term. Näherungsweise gilt daher für Torsionsstäbe mit sehr schmalen (flachen), rechteckförmigem Querschnitt:

$$\max \sigma_{ij} \approx G_m \vartheta a \quad (3.42)$$

Für  $w/h < 0.5$  liegt die Abweichung dieser Näherung unterhalb von 10 %.

Geht man von einer einachsigen, reinen Torsionsbeanspruchung aus, so ergibt sich die aus der maximalen Scherspannung resultierende, größte Hauptnormalspannung zu:

$$\sigma_{\nu, \text{NSH}} = \max |\sigma_{ij}| \quad (3.43)$$

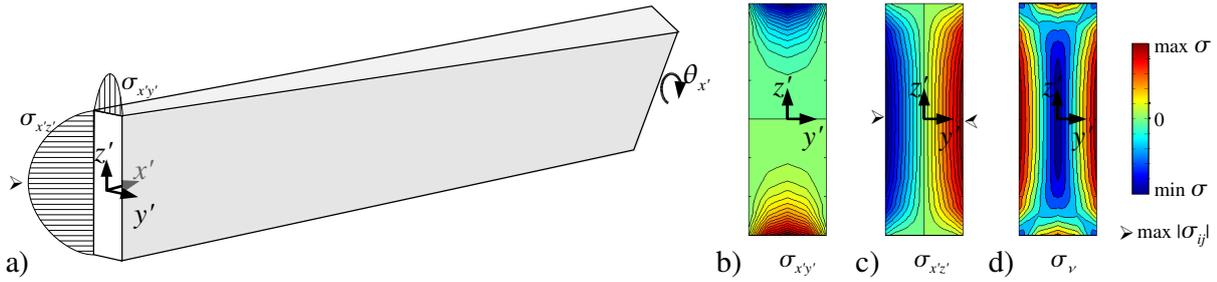
Aufgrund der Tatsache, dass am Ort der maximalen Scherspannung innerhalb des Stabquerschnitts alle übrigen Spannungskomponenten null sind (vgl. Abb. 3.10), vereinfacht sich die MISES-Vergleichsspannung entsprechend Gl. (3.37) zu:

$$\sigma_{\nu, \text{GEH}} = \sqrt{3} \max |\sigma_{ij}| \quad (3.44)$$

Unter Vernachlässigung der eventuell von den Einspannungen hervorgerufenen Dehnungen sagen demnach beide Vergleichsspannungshypothesen ein Versagen des Bauteils bei Überlast durch Bruch im mittleren Bereich der Torsionsfeder voraus.

Sind die Stabenden mit einer Einspannung versehen, welche eine Verwölbung des Querschnitts verhindert oder zumindest erschwert, müssen die dadurch in Stabrichtung entstehenden Normalspannungen berücksichtigt werden. Sie treten in denjenigen Stabintervallen auf, in denen die Verwölbung signifikant verringert wird (siehe Abschnitt 3.2.2). Die Länge eines solchen Intervalls  $x' \in [0, L_b]$  ergibt sich entsprechend Gl. (3.31).

<sup>10</sup>Es handelt sich um eine Näherung, da zur Bestimmung der maximalen Scherspannung der mittlere Schubmodul  $G_m$  genutzt wird. Die exakten Lösungen für die Richtungsableitungen der Torsionsfunktion Gl. (3.17) und damit die Scherspannungen in orthotropen Materialien sind vergleichsweise unhandlich. Sie können beispielsweise in [3] gefunden werden.



**Abb. 3.10:** Scherspannungen in Torsionsstäben mit rechteckförmigem Querschnitt.

a) Belastung des Stabs und Verlauf der Scherspannungen an den Seiten des Querschnitts; b) Verlauf der Scherspannungskomponente  $\sigma_{x'y'}$  im Querschnitt; c) Verlauf der Scherspannungskomponente  $\sigma_{x'z'}$  im Querschnitt; d) Verlauf der Vergleichsspannung entsprechend der Normalspannungshypothese ( $\sigma_{v,NSH} \geq 0$ ).

Zur Bestimmung der Größenordnung der an den Einspannungen auftretenden Normalspannungen wird die Verwölbung der Querschnittsfläche  $\Delta x'$  an der Stelle  $x' = L_b$  benötigt. Diese folgt aus Gl. (3.30) und Gl. (3.32) und entspricht der Verwölbung eines Stabs mit der Länge  $l_{\text{eff}}$  ohne feste Einspannung in  $x'$ -Richtung. Die  $x'$ -Normaldehnungskomponente des Intervalls  $x' \in [0, L_b]$  ergibt sich nun näherungsweise aus der Änderung der Verwölbung und der Intervalllänge:

$$\varepsilon_{x'x'} \Big|_{x \in [0, L_b]} = \frac{d}{dx'} \Delta x' \Big|_{x \in [0, L_b]} \approx \frac{\Delta x' \Big|_{x'=L_b} - \Delta x' \Big|_{x'=0}}{L_b} \quad (3.45)$$

Geht man nun davon aus, dass die feste Einspannung des Torsionsstabs die Verwölbung vollkommen unterdrückt, so gilt  $\Delta x' \Big|_{x'=0} = 0$ . Die maximale Normaldehnung in  $x'$ -Richtung ergibt sich dann zu:

$$\max \varepsilon_{x'x'} \approx \frac{\max \Delta x' \Big|_{x'=L_b}}{L_b} \quad (3.46)$$

Die daraus mithilfe des HOOKEschen Gesetzes (3.1) abgeleiteten maximalen Normalspannungen in  $x'$ -Richtung sind gleichzeitig die größten Normalspannungen innerhalb der Struktur:

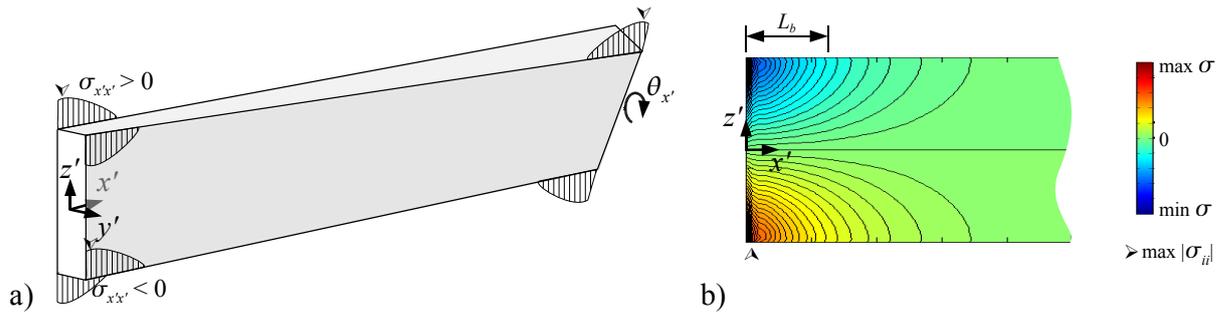
$$\max \sigma_{ii} = \max \sigma_{x'x'} \approx E_{x'x'} \max \varepsilon_{x'x'} \quad (3.47)$$

Mit den Zusammenhängen (3.46), (3.27), (3.30) und (3.31) ergibt sich die maximale Normalspannung in einem Torsionsstab mit rechteckförmigem Querschnitt und fester Einspannung näherungsweise zu:

$$\max \sigma_{ii} \approx \frac{E_{x'x'} \theta_{x'}}{L_b (l - L_b)} \max_{\substack{-\frac{w}{2} \leq y' \leq \frac{w}{2} \\ -\frac{h}{2} \leq z' \leq \frac{h}{2}}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8(-1)^n}{w k_n^3 \cosh \frac{k_n h}{2}} \sin(k_n y') \sinh(k_n z') \right) \quad (3.48)$$

mit  $k_n = \frac{(2n+1)\pi}{w}$

Aus den Lösungen der Verwölbungsfunktion  $\psi$  für verschiedene  $w$  und  $h$  lässt sich erkennen, dass die maximalen Verwölbungen des Querschnitts und damit die maximalen Normalspannungen entweder genau an oder nahebei gegenüberliegenden Längskanten des



**Abb. 3.11:** Normalspannungen in Torsionsstäben mit rechteckförmigem Querschnitt und fester Einspannung. a) Belastung des Stabs und Verlauf der Normalspannungen an den Längskanten; b) Verlauf der Normalspannungskomponente  $\sigma_{x'x'}$  an der Seitenfläche des Torsionsstabs.

Torsionsstäben auftreten. Abbildung 3.11 verdeutlicht dies. Geht man davon aus, dass die Scherspannungskomponenten entlang der Längskanten des Torsionsstabs zu null werden (vgl. dazu Abb. 3.10), so kann zur Bestimmung der Vergleichsspannungen wieder von einer einachsigen Belastung ausgegangen werden. Sowohl die größte Hauptnormalspannung, als auch die MISES-Vergleichsspannung ergibt sich dann zu:

$$\sigma_{\nu,NSH} = \sigma_{\nu,GEH} = \max \sigma_{ii} \quad (3.49)$$

Die kritischen (größten) Vergleichsspannungen innerhalb der beanspruchten Struktur ergeben sich also entsprechend den Gln. (3.43), (3.44) und (3.49) nach den beiden wichtigen Vergleichsspannungshypothesen des *MEMS*-Entwurfs zu:

$$\max \sigma_{\nu,NSH} = \max \{ \max |\sigma_{ij}|, \max \sigma_{ii} \} \quad (3.50)$$

$$\max \sigma_{\nu,GEH} = \max \{ \sqrt{3} \max |\sigma_{ij}|, \max \sigma_{ii} \} \quad (3.51)$$

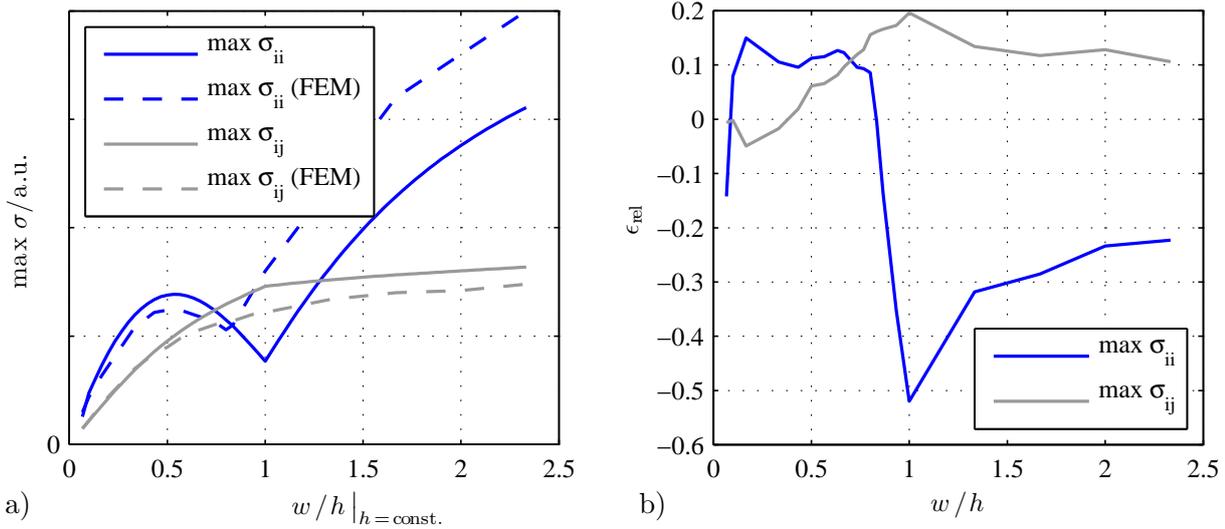
Scherspannungen werden demnach in der Gestaltänderungshypothese höher bewertet als in der Normalspannungshypothese. Dies wird auch in Abb. 3.8 deutlich.

Abbildung 3.12a vergleicht den Verlauf der maximalen Normalspannung  $\max \sigma_{ii}$  mit dem der maximalen Scherspannung  $\max \sigma_{ij}$  bei variiertem Aspektverhältnis  $w/h$ . Ausgangspunkt sind Strukturen, bestehend aus einkristallinem Silizium mit  $x'$  in [110]-Richtung. Es ist erkennbar, dass in den analytischen Modellen die maximale Normalspannung meist höhere Werte annimmt als die maximale Scherspannung. Lediglich im Bereich  $w/h \approx 1$  wird die maximale Scherspannung größer. Geht man von der Normalspannungshypothese aus, gilt demnach für gerade Torsionsstäbe mit  $w/h \neq 1$  entsprechend Gl. (3.51):

$$\max \sigma_{\nu} = \max \sigma_{\nu,NSH} = \max \sigma_{ii} \quad (3.52)$$

Vergleicht man die Ergebnisse der analytischen Modelle mit Resultaten aus *FE*-Analysen (Abb. 3.12a) wird deutlich, dass sich diese Aussage zumindest für gerade Torsionsstäbe mit  $x'$  in [110]-Richtung für beliebige Aspektverhältnisse  $w/h$  verallgemeinern lässt. Die maximale Normalspannungskomponente  $\max \sigma_{ii} = \max \sigma_{x'x'}$  ist demnach entsprechend der Normalspannungshypothese immer die kritische Spannung die zum Versagen der Struktur führt.

Wie in Abb. 3.12a bzw. Abb. 3.12b erkennbar ist, treten vor allem im Bereich  $w/h \approx 1$  große Unterschiede zwischen den Ergebnissen der analytischen Modelle und den Ergebnissen des *FE*-Modells auf. Der Grund hierfür liegt in erster Linie in der fehlenden bzw. nicht



**Abb. 3.12:** Grenzen der analytischen Spannungsmodelle. a) Verlauf der maximalen Normalspannung  $\max \sigma_{ii}$  sowie der maximalen Scherspannung  $\max \sigma_{ij}$  für gerade Torsionsstäbe mit rechteckigem Querschnitt aus einkristallinem Silizium ( $x'$  in  $[110]$ -Richtung). Zum Vergleich sind mithilfe der *FEM* ermittelte Verläufe dargestellt. b) relative Abweichung  $\epsilon_{rel}$  der analytischen Modelle in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis  $w/h$ .

vollständigen Berücksichtigung der orthotropen Materialeigenschaften in den Gln. (3.31), (3.40) und (3.48). Als kritisch sind die Abweichungen der analytisch bestimmten Normalspannungen im Bereich  $w/h > 0.8$  zu bewerten. Sie führen zu einer Unterschätzung der Vergleichsspannung. Die vorgestellten analytischen Modelle sollten demnach unter den gegebenen Bedingungen (einkristallines Silizium,  $x'$  in  $[110]$ -Richtung) ausschließlich zur Auslegung von Torsionsfedern mit einem Aspektverhältnis  $w/h < 0.8$  genutzt werden. Die Abweichung liegt in diesem Bereich in einer tolerierbaren Größenordnung von 10%. Außerdem wird die kritische Spannung eher überschätzt, was die tatsächlich Belastbarkeit des Bauelements erhöht.

Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass der auf diese Weise gefundene Anwendungsbereich der analytischen Modelle nicht ohne Weiteres auf andere Materialien oder Materialrichtungen übertragbar ist. Um für diese eine ähnliche Aussage treffen zu können, werden entsprechende Vergleiche mit Ergebnissen aus *FE*-Analysen benötigt.

Eine weitere Einschränkung der analytischen Modelle ist die Beschränkung auf gerade Torsionsstäbe mit ideal fester Einspannung der Stabenden. In der Realität besitzen Einspannungen aufgrund der Tatsache, dass sie aus dem gleichen Material wie die Feder ausgebildet werden, nur eine endliche Steifigkeit. Außerdem können, in Abhängigkeit vom eingesetzten Herstellungsprozess, keine beliebig kleinen geometrischen Radien innerhalb einer Struktur realisiert werden. Eine reale Torsionsfeder muss also an ihren Enden immer Bereiche aufweisen, in denen sich der Querschnitt verändert. Beide Eigenschaften realer Torsionsfedern führen tendenziell zu einer Verringerung der Normalspannungen in der Nähe der Einspannungen und sind somit nicht kritisch für den Entwurf.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die vorgestellten analytischen Modelle nur bedingt für die Auslegung der Bauelemente für den Dauerbetrieb geeignet sind. Sie sollten lediglich zur Abschätzung der Größenordnung auftretender Spannungen genutzt werden und können keinesfalls *FE*-Analysen der belasteten Strukturen ersetzen.

**Die maximale Schockbelastung** wirkt aufgrund einer externen Beschleunigung des Bauelements. Sie tritt meist nicht im Normalbetrieb auf und kann als einmaliges oder seltenes Ereignis (z.B. Aufprall nach Fall, Vibrationen beim Starten einer Maschine, Stöße) betrachtet werden. Ein Abbruch der Schwingung des Bauelements aufgrund der maximalen Schockbelastung ist zulässig. Es dürfen jedoch keine bleibenden Schäden entstehen.

Durch Schockbelastung hervorgerufene Beschleunigungen können innerhalb der Bauelement-Ebene ( $x$ - $y$ -Ebene) oder senkrecht dazu ( $z$ -Richtung) wirken. Dabei werden die beweglichen Teile des Bauelements ausgelenkt, was zu Kollisionen oder zum Bruch der belasteten Bestandteile führen kann. Vor allem Kollisionen der Fingerelektroden müssen in jedem Fall vermieden werden. Wegen der geringen Abmessungen können diese sehr schnell zerbrechen. Außerdem kann eine Kollision der Elektroden während des Betriebs zu einem elektrischen Kurzschluss führen, wodurch das Bauelement mit hoher Wahrscheinlichkeit zerstört wird. Aufgrund der Tatsache, dass die Abstände zwischen den Fingerelektroden im Bereich weniger Mikrometer liegen, genügen schon vergleichsweise geringe Auslenkungen innerhalb der Bauelement-Ebene um einen bleibenden Schaden zu verursachen. Aus diesem Grund kommen beim Entwurf von *Fraunhofer IPMS* Mikros scannerspiegeln Strukturen zum Einsatz, die unerwünschte Auslenkungen der beweglichen Bestandteile zumindest begrenzen. Ein solcher Stopper kann beispielsweise durch einen offenen Graben realisiert werden, dessen Breite so gewählt wird, dass ein definierter Anschlag erreicht wird, bevor sich Fingerelektroden berühren können.

Geht man davon aus, dass Stopper eine Beschädigung des Bauelements bei auftretenden Beschleunigungen innerhalb der  $x$ - $y$ -Ebene wirksam verhindern, müssen beim Entwurf lediglich Beschleunigungen in  $z$ -Richtung berücksichtigt werden. Dabei wird die Spiegelplatte (bzw. bei 2D-Scannern auch der bewegliche Rahmen) in  $z$ -Richtung ausgelenkt, was zu einer Biegebelastung der Torsionsfedern führt. Setzt man voraus, dass die Biegung der Spiegelplatte bzw. des beweglichen Rahmens vernachlässigbar ist, und nimmt man ferner an, dass die Beschleunigung quasistatisch erfolgt<sup>11</sup> und nur geringe Auslenkungen bewirkt, ergibt sich das statische Biegemoment am Ende einer geraden Torsionsfeder zu [3]:

$$\max M_{b,y'} = \frac{F_z l}{4} = \max |a_z| \frac{m l}{4} \quad (3.53)$$

Dabei ist  $m$  die Masse des auslenkbaren Bestandteils des Bauelements und  $a_z$  die Beschleunigung in  $z$ -Richtung. Die maximale Normalspannung einer geraden Torsionsfeder mit rechteckigem Querschnitt ergibt sich dann entsprechend [3, 66] zu:

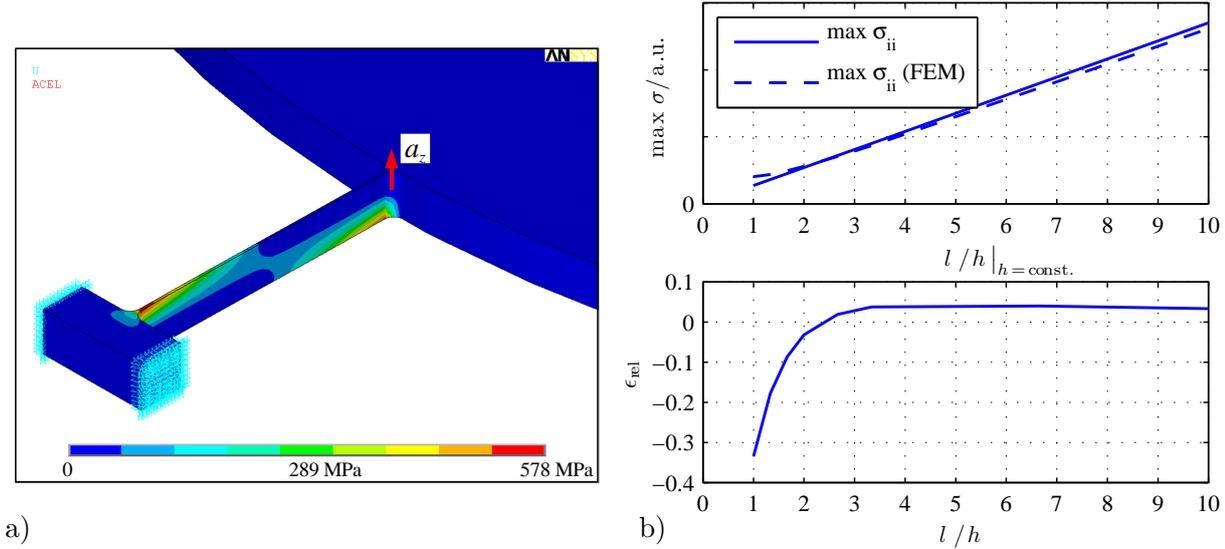
$$\max \sigma_{ii} = \max \sigma_{x'x'} = \max |a_z| \frac{3 m l}{2 w h^2} \quad (3.54)$$

Geht man von einer einachsigen Belastung aus, ergibt sich die kritische Vergleichsspannung nach der Normalspannungshypothese zu:

$$\max \sigma_{\nu,NSH} = \max \sigma_{ii} \quad (3.55)$$

Vergleicht man nun die Ergebnisse des analytischen Modells wieder mit *FE*-Analysen, so zeigt sich ein gemischtes Bild. Für schmale Torsionsfedern ( $w \ll h$ ) stimmen die Ergebnisse über weite Bereiche des Parameterraums gut überein. Die Abweichung liegt in der Größenordnung von 5%. Die kritischen Spannungen treten an den Enden der schmalen Randflächen der Federn auf (Abb. 3.13a). Dies entspricht der Annahme eines maximalen

<sup>11</sup>Die Beschleunigung kann als quasistatisch angesehen werden, wenn deren Änderungsgeschwindigkeit gering ist und die Dauer groß im Verhältnis zu der Periodendauer der Eigenschwingung in Richtung der Beschleunigung. Siehe dazu Abschnitt 3.2.4.

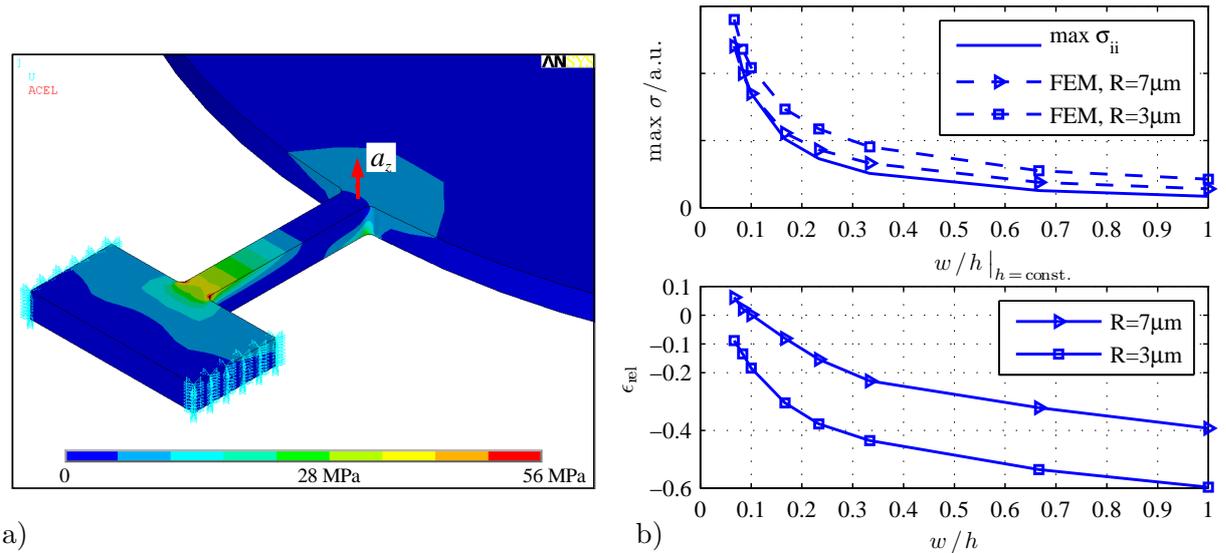


**Abb. 3.13:** Mechanische Spannungen in schmalen Torsionsfedern unter Schockbelastung. a) Verlauf der größten Hauptnormalspannung in einer Torsionsfeder (SINUS-Scanner) mit  $(w \times l \times h) = (2 \mu\text{m} \times 200 \mu\text{m} \times 30 \mu\text{m})$  und  $a_z = 2500g$ ; b) Vergleich des analytischen Modells mit Ergebnissen aus *FE*-Analysen bei Variation des Aspektverhältnisses  $l/h$ .

Biegemoments an den Federenden (vgl. Gl. (3.53)). Lediglich für sehr kurze Torsionsfedern mit  $l < 2.5h$  treten erwartungsgemäß Abweichungen auf. Die kritische Spannung wird in diesem Bereich stark unterschätzt. In Abbildung 3.13b sind der Verlauf der kritischen Vergleichsspannung und die relative Abweichung  $\epsilon_{rel}$  des analytischen Modells für verschiedene Aspektverhältnisse  $l/h$  dargestellt.

Für Torsionsfedern mit  $w \ll h$  (Abb. 3.14a) verliert das analytische Modell mit zunehmender Federbreite  $w$  an Gültigkeit. Aufgrund der endlichen Steifigkeit der Einspannungen bilden sich an den Enden der Längskanten kleine Bereiche mit sehr großen Normalspannungen heraus (Kerbwirkung). Die Größenordnung dieser Spannungen ist sehr stark von der jeweiligen Ausführung der Federenden abhängig. Abbildung 3.14b stellt die mithilfe von *FE*-Modellen ermittelten Verläufe der kritischen Vergleichsspannung für verschiedene Radien an den Federenden (siehe auch Abb. 3.9c) gegenüber. Es ist erkennbar, dass die Abweichung des analytischen Modells mit abnehmendem Radius größer wird. Für Radien mit  $R = 7 \mu\text{m}$  (Standardmaß für *Fraunhofer IPMS*-Mikroscannerspiegel) überschreitet die relative Abweichung die 10%-Grenze ab Seitenverhältnissen von  $w/h \approx 0.15$ . Für breitere Torsionsfedern wächst die relative Abweichung bis über 50% an. Dabei wird die kritische Spannung unterschätzt.

Die von externen Beschleunigungen hervorgerufenen mechanischen Spannungen sind in erster Linie für Mikroscannerspiegel mit schmalen (weichen) Torsionsfedern kritisch beim Entwurf. Der in Abb. 3.14b dargestellte Verlauf der Vergleichsspannungen für verschiedene Federbreiten verdeutlicht dies. Mit zunehmender Breite der Federn sinken für eine gegebene Beschleunigung die mechanischen Spannungen, sodass für breite Federn die Größenordnung dieser Spannungen meist weit unterhalb der Bruchspannung des Materials liegt. Es ist daher trotz der auftretenden großen Abweichungen durchaus sinnvoll, das analytische Modell entsprechend Gl. (3.54) für den Entwurf zu benutzen. Es muss jedoch für Federn mit  $w/h > 0.15$  die Größenordnung der analytisch bestimmten Spannungen geprüft werden. Sollten diese in den Bereich der Bruchspannung gelangen, sind



**Abb. 3.14:** Mechanische Spannungen in breiten Torsionsfedern unter Schockbelastung. a) Verlauf der größten Hauptnormalspannung in einer vergleichsweise breiten Torsionsfeder mit  $(w \times l \times h) = (30 \mu\text{m} \times 200 \mu\text{m} \times 30 \mu\text{m})$ ,  $R = 7 \mu\text{m}$  und  $a_z = 2500g$ ; b) Vergleich des analytischen Modells mit Ergebnissen aus *FE*-Analysen bei Variation des Aspektverhältnis  $w/h$ .

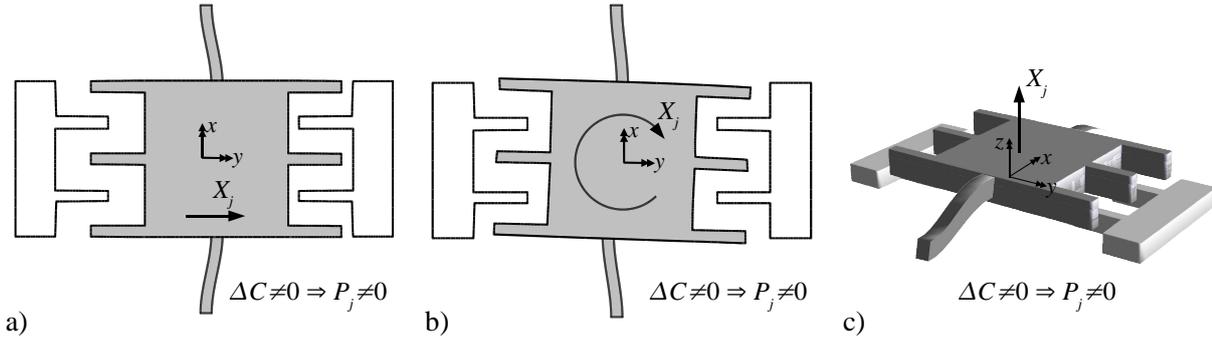
weitere Untersuchungen bzw. Anpassungen der Geometrie notwendig. Gleiches gilt auch für Federgeometrien, die von der einer geraden Torsionsfeder stark abweichen.

Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass das analytische Modell für Mikroschneiderspiegel mit sehr langen, schmalen Torsionsfedern ( $l \gg h$ ,  $l \gg w$ ), also mit einer vergleichsweise weichen Aufhängung an Gültigkeit verliert. Diese Bauelemente erfahren bei Beschleunigung in  $z$ -Richtung große Auslenkungen. Die dabei aufgrund der zunehmenden Zugbelastung in den Federn auftretenden geometrischen Nichtlinearitäten (vgl. Abschnitt 3.2.2), führen zu einer Erhöhung der Steifigkeit und damit zu einer Verringerung der Auslenkung und folglich zu einer geringeren Biegebelastung in der Einspannung. Die Auslegung sehr langer Torsionsfedern bzw. einer Aufhängung, die bei Schockbelastung zu große Auslenkungen führt, erfordert demnach weitere Untersuchungen unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten, beispielsweise mithilfe der *FEM*.

### 3.2.4 Eigenschwingungen

In den vorangegangenen Betrachtungen werden die Federelemente eines Mikroschneiderspiegels als ideale Torsionsfedern mit nur einem Freiheitsgrad betrachtet. Die Deformation des schwingenden Körpers wird dabei vernachlässigt, ebenso wie die Massenträgheit der Torsionsfedern. Unter diesen Bedingungen kann die Bewegung der Spiegelplatte mithilfe einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung annähernd beschrieben werden (Gl. (2.24) auf S. 23).

Im realen Bauelement werden sowohl die Torsionselemente, als auch die schwingenden Körper durch Strukturierung einer Schicht aus einkristallinem Silizium ausgebildet (*SOI*-Schicht, Abschnitt 2.1). Sie bestehen also aus demselben Material und besitzen die gleichen mechanischen Eigenschaften. Die Funktion eines mechanischen Elements wird ausschließlich von seiner Geometrie bestimmt. Außerdem müssen alle beweglichen Teile mithilfe deformierbarer Strukturen realisiert werden. Mechanische Komponenten, die



**Abb. 3.15:** Beispiele für Freiheitsgrade eines 1D-Mikroscanners. Da sich die Kapazität der Kammelektrode bei einer mechanischen Auslenkung in jedem Fall ändert, wird bei aktivem Antrieb eine Kraft oder ein Moment in Verschiebungsrichtung eingekoppelt. a) Translation in  $y$ -Richtung; b) Rotation um die  $z$ -Achse; c) Translation in  $z$ -Richtung.

in guter Näherung nur einen Freiheitsgrad besitzen, wie z.B. Gleitlager, können nicht gefertigt werden.

In der Realität besitzt das Bauelement demnach eine wesentlich höhere Anzahl von Freiheitsgraden  $n$  (siehe Abb. 3.15 bzw. Anhang C.3). Ein solches System kann mit einem Differentialgleichungssystem (Dgls.), bestehend aus  $n$  Differentialgleichungen, beschrieben werden [5]:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{X}} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\vec{X}} + \mathbf{K} \cdot \vec{X} = \vec{P} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}, \mathbf{K}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \vec{X} \in \mathbb{R}^n \quad (3.56)$$

Dabei ist  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix,  $\boldsymbol{\alpha}$  die Dämpfungsmatrix und  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix des Systems. Diese sogenannten Systemmatrizen werden von den Materialeigenschaften und der Geometrie des Bauelements definiert.  $\vec{X}$  ist der Verschiebungsvektor. Er beschreibt die Auslenkung (Verschiebung) des Systems bezüglich der  $n$  Freiheitsgrade.  $\vec{P}$  wird als Lastvektor bezeichnet.

Nimmt man an, dass der  $i$ -te Freiheitsgrad des Systems der gewünschten Kippbewegung der Spiegelplatte um die  $x$ -Achse entspricht, ergibt sich der folgende Zusammenhang mit Gl. (2.24):

$$M_{ii} = J_{xx}, \quad \alpha_{ii} = \alpha_x, \quad K_{ii} = k_{t,x}, \quad X_i = \theta_x \quad \text{und} \quad P_i = M_{el,x} \quad (3.57)$$

Die Bewegungsgleichung (2.24) ist demnach ein Sonderfall des Dgls. (3.56) für den gilt:

$$X_j = 0 \quad \text{für alle} \quad j \neq i, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.58)$$

Dies ist gleichzeitig die Bedingung dafür, dass sich ein Mikroscannerspiegel in der gewünschten Weise verhält, also ausschließlich eine Kippbewegung um die Federachse ausführt. Diese Forderung lässt sich nur ausreichend sicher gewährleisten, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$P_j = 0 \quad \text{für alle} \quad j \neq i \quad (3.59)$$

$$M_{qr} \approx 0, \quad K_{qr} \approx 0 \quad \text{für alle} \quad q \neq r, \quad q, r \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.60)$$

$$\alpha_{qr} > 0 \quad \text{für alle} \quad q, r \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.61)$$

Die Komponenten des Lastvektors dürfen also nur für den gewünschten Freiheitsgrad einen Wert ungleich null annehmen (Gl. (3.59)). Auch muss die mechanische Kopplung

zwischen den Freiheitsgraden gering sein (Gl. (3.60)). Werden außerdem die Bewegungen in Richtung der störenden Freiheitsgrade gedämpft (Gl. (3.61)), ist zumindest für  $t \rightarrow \infty$  Bedingung (3.58) ausreichend sicher erfüllt.

Aufgrund der Wirkungsweise des *Out-of-plane-comb*-Antriebs lässt sich jedoch in der Realität Bedingung (3.59) niemals vollständig erfüllen. Wie in Abb. 3.15 erkennbar ist, können immer auch in anderen Bewegungsrichtungen als der Kippbewegung elektrostatische Kräfte bzw. Momente eingekoppelt werden. Die dabei wirksamen Mechanismen entsprechen prinzipiell denen der parametrischen Anregung der Kippbewegung (siehe dazu Abschnitt 2.3.2).

Auch Bedingung (3.60) lässt sich in einem realen mechanischen System nicht erfüllen. Vor allem in 2D-Mikroscannern ist eine mechanische Kopplung zwischen den Freiheitsgraden unvermeidlich.

Es existieren also Wertekombinationen für die Antriebsparameter  $\bar{U}$ ,  $f_{\square}$  bei denen ein Mikroscannerspiegel in einer unerwünschten Bewegungsrichtung zu schwingen beginnt. Dies kann die Funktion des Bauelements beeinträchtigen, im schlimmsten Fall sogar zu dessen Zerstörung führen. Diese Eigenschaft muss beim Entwurf berücksichtigt werden. Es genügt daher nicht, das Bauelement nur im Kontext des gewünschten Freiheitsgrads (Kippbewegung) zu betrachten. Die Eigenschaften weiterer Freiheitsgrade müssen ebenfalls untersucht und gegebenenfalls berücksichtigt werden. Dabei ist vor allem die Lage der verschiedenen Eigenfrequenzen ein wichtiges Kriterium. Diese kann aus Gl. (3.56) mithilfe einer Eigenwertanalyse ermittelt werden. Dazu wird zunächst der Lastvektor null gesetzt und die Dämpfung des Systems vernachlässigt (homogenes, ungedämpftes System):

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{X}} + \mathbf{K}\vec{X} = 0 \quad (3.62)$$

Der Lösungsansatz  $\vec{X} = \hat{X}e^{\lambda t}$  führt zu dem folgenden Eigenwertproblem:

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\hat{X} = 0 \quad (3.63)$$

Die nicht-trivialen Lösungen dieser Gleichung bestimmen die Eigenwerte  $\lambda_i$  des Systems. Sie lassen sich mithilfe der Koeffizientendeterminante ausdrücken:

$$\det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K}) = 0 \quad (3.64)$$

Es ergeben sich  $2n$  konjugiert komplexe Eigenwerte  $\lambda_i$  bzw.  $n$  Eigenfrequenzen  $f_i$  des Systems:

$$\lambda_i = \pm j\omega_i \quad \text{bzw.} \quad f_i = \frac{1}{2\pi}\omega_i \quad (3.65)$$

Durch Einsetzen der Eigenwerte  $\lambda_i$  in Gl. (3.63) erhält man die Eigenvektoren  $\vec{X}_i$  des Systems. Diese bestimmen die Form der mit einer Eigenfrequenz verknüpften Schwingung.

Mithilfe einer solchen Eigenwertanalyse und geeigneten Entwurfsregeln ist es möglich, Probleme, die beim Betrieb eines Bauelements auftreten können, schon in der Entwurfsphase zu erkennen und zu vermeiden. Anhang C.3 enthält Darstellungen typischer Eigenformen von 1D- und 2D-Scannern.

### 3.2.5 Fertigungstoleranzen

Bei der Fertigung von Mikroscooperspiegeln kommt es zu Abweichungen zwischen den Bauelementen bezüglich physikalischer Eigenschaften wie Eigenresonanzfrequenz, Dämpfung, Reflexivität oder elektrischer Widerstand. Der Grund hierfür liegt in geringem Maße in Variationen der Materialeigenschaften (elastische Konstanten, Massendichte, Dotierung). Eine wesentlich größere Rolle spielen dabei fertigungsbedingte geometrische Abweichungen zwischen den einzelnen Bauelementen. Mithilfe des für die Herstellung von *MEMS*-Bauelementen zum Einsatz kommenden Herstellungsprozesses (Abschnitt 2.1) können Strukturen nur mit einer endlichen Genauigkeit gefertigt werden. Diese Genauigkeit liegt typischerweise im Bereich von einigen zehn bis hundert Nanometern. Da die charakteristischen geometrischen Abmessungen der gefertigten Strukturen selbst oft im Bereich einiger Mikrometer liegen, resultieren diese vergleichsweise hohen geometrischen Genauigkeiten bei der Fertigung in signifikanten Abweichungen der Bauelementeigenschaften [74].

Um große Auslenkungen erreichen zu können, müssen *Fraunhofer IPMS* Mikroscooperspiegel nahe der mechanischen Eigenresonanzfrequenz betrieben werden (Abschnitt 2.3). Daher sind die fertigungsbedingten Abweichungen der Eigenresonanzfrequenz besonders wichtig und müssen unbedingt beim Entwurf berücksichtigt werden.

Der am *Fraunhofer IPMS* zum Einsatz kommende Herstellungsprozess *AME1* (Abschnitt 2.1 bzw. Anhang B) ist dadurch gekennzeichnet, dass signifikante geometrische Abweichungen vor allem bei der Ausbildung der offenen Gräben auftreten (*DRIE*-Ätzung). Dabei können Fehler bezüglich der relativen Positionen der Gräben zueinander vernachlässigt werden. Wesentlich wichtiger sind Abweichungen der Grabenbreite und -form. Sie resultieren beispielsweise aus Schwankungen des Drucks oder der Konzentration des Ätzgases während der Prozessierung. Auch die Position und Ausrichtung des Bauelements innerhalb der Prozesskammer kann eine Rolle spielen. Die Abweichungen der Grabengeometrie resultieren in einem Versatz der Strukturkanten im Bauelement und damit in geringfügigen Änderungen der Masse bzw. Massenträgheit des schwingenden Körpers und in Abweichungen der Federgeometrien.

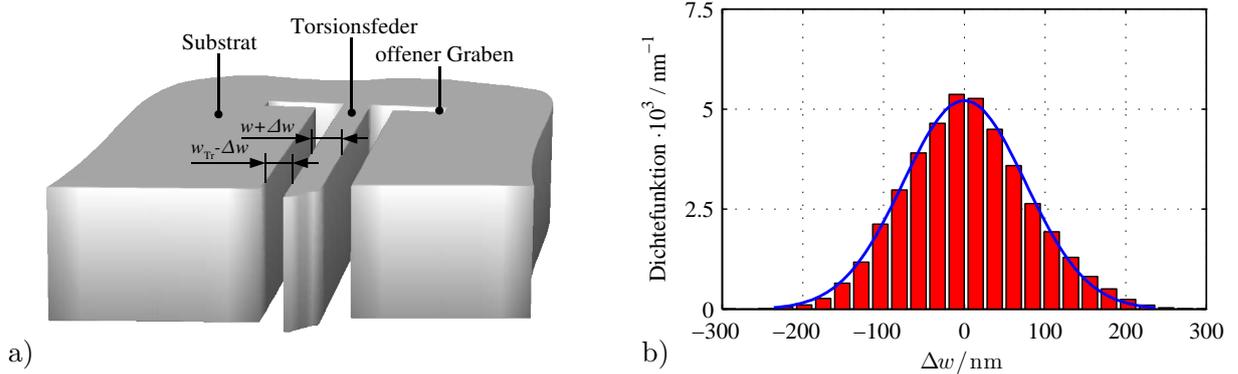
Die Abweichung der Massenträgheit liegt typischerweise in einem Bereich von weit unter einem Prozent. Da sich die Eigenresonanzfrequenz des Bauelements entsprechend Gl. (2.14) indirekt proportional zur Quadratwurzel der Massenträgheit verhält, ist der Einfluss der Abweichungen von Massen bzw. Massenträgheiten auf die Eigenresonanzfrequenz noch geringer.

Wesentlich größere Einflüsse ergeben sich durch Fertigungstoleranzen der Federgeometrien. Geht man beispielsweise von einer geraden Torsionsfeder mit schmalen rechteckigem Querschnitt aus, ergibt sich aus den Gleichungen zur Bestimmung der Torsionsfederhärte (Gl. (3.21) und Gl. (3.25)) unter Annahme eines konstanten mittleren Gleitmoduls und der Näherung für die Eigenresonanzfrequenz (Gl. (2.14)) ein überproportionaler Zusammenhang zwischen der Strukturbreite  $w$  und der Eigenresonanzfrequenz:

$$f \sim \sqrt{k_t} \sim w^{3/2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f}{f + \Delta f} = \left( \frac{w}{w + \Delta w} \right)^{3/2} \quad \text{für} \quad w < h \quad (3.66)$$

Dabei bezeichnen  $\Delta f$  die Abweichung der Frequenz und  $\Delta w$  die Abweichung der Strukturbreite (Abb. 3.16a). Es gilt somit:

$$\Delta f = \frac{f}{\Gamma} \left( 1 + \frac{\Delta w}{w} - \Gamma \right) \quad \text{mit} \quad \Gamma = \sqrt{\frac{w}{w + \Delta w}} \quad (3.67)$$



**Abb. 3.16:** Geometrische Abweichungen aufgrund von Fertigungstoleranzen. a) Abweichungen der Grabenbreite führen zu Kantenverschiebungen in der gefertigten Struktur und damit zu Abweichungen der Federbreiten. b) Verteilung der Abweichung der Strukturbreite  $\Delta w$  für 10 890 vergleichbare *Fraunhofer IPMS* Mikroscoannerspiegel. Der Verlauf der Verteilung ist in guter Näherung normalverteilt.

Für im Verhältnis zur Strukturbreite  $w$  kleine Abweichungen  $\Delta w$  lässt sich dieser Ausdruck durch den Term erster Ordnung seiner TAYLOR-Reihenentwicklung nach  $\Delta w$  gut annähern:

$$\Delta f \approx 3f \frac{\Delta w}{2w} \quad \text{für} \quad \Delta w \ll w \quad (3.68)$$

Mithilfe dieses Zusammenhangs lässt sich die Größenordnung der prozessbedingten Abweichungen der Strukturbreiten für den Fertigungsprozess *AME1* (Anhang B) bestimmen. Dazu wurde die Eigenresonanzfrequenz einer ausreichend großen Anzahl von Bauelementen des gleichen Typs experimentell bestimmt. Aus den sich ergebenden Frequenzabweichungen  $\Delta f$  lassen sich mithilfe des Zusammenhangs (3.68) die dazugehörigen Abweichungen der Torsionsfederbreiten bestimmen. Ab einer Anzahl von ca. 10 000 Bauelementen ändert sich die Verteilung der so bestimmten Abweichungen nur noch in geringem Maße. In Abbildung 3.16 ist die sich für 10 890 zufällig ausgewählte Bauelemente ergebende Verteilung der Federbreitenabweichung dargestellt. Es ist erkennbar, dass der Verlauf in guter Näherung GAUSS-förmig ist. Ein Test auf Normalverteilung nach SHAPIRO-WILK [75] ergibt einen Wert der Testgröße von  $W = 0.986$  bei einem Signifikanzniveau  $P = 0.053$ . Demnach kann die prozessbedingte Abweichung der Strukturbreiten in guter Näherung als normalverteilt angesehen werden. Die Standardabweichung beträgt dabei<sup>12</sup> ca. 75 nm.

Um die Eigenschaften eines bestimmten Entwurfs bezüglich der Empfindlichkeit gegenüber Fertigungstoleranzen quantifizieren zu können, wird in Anlehnung an die Messtechnik ein Empfindlichkeitswert  $S_{\Delta w}$  (Sensitivität) eingeführt:

$$S_{\Delta w} = \frac{\partial f}{\partial \Delta w} \quad (3.69)$$

Für Mikroscoannerspiegel mit geraden Torsionsfedern ergibt sich unter Annahme von im Vergleich zur Strukturbreite kleinen Abweichungen mithilfe der Näherung (3.68) der folgende Ausdruck:

$$S_{\Delta w} \approx \frac{\Delta f}{\Delta w} \approx \frac{3f}{2w} \quad (3.70)$$

<sup>12</sup>Dieser Wert besitzt ausschließlich für die Strukturhöhen des *SINUS*-Scanners, also 30  $\mu\text{m}$  hohes *SOI* Gültigkeit.

Dabei ist zu beachten, dass sich die auf diese Weise ermittelten Empfindlichkeiten immer auf die absoluten Werte der Eigenresonanzfrequenzen beziehen. Will man Entwürfe mit unterschiedlichen Frequenzen bezüglich der relativen Frequenzabweichungen vergleichen, sollte eine normierte Empfindlichkeit herangezogen werden:

$$S_{\Delta w, \text{rel}} = \frac{S_{\Delta w}}{f} \approx \frac{3}{2w} \quad (3.71)$$

Für viele Anwendungen sind die zulässigen Abweichungen der Eigenresonanzfrequenz ein wichtiges Kriterium beim Entwurf. Ist diese Abweichung zu groß, sinkt die Ausbeute. In der Folge steigen die Fertigungskosten. Die Fertigungstoleranzen müssen daher unbedingt beim Entwurf berücksichtigt werden.

### 3.2.6 Dynamische Deformation

Wie in Abschnitt 2.3.3 bereits erwähnt wurde, kommt es aufgrund endlicher Steifigkeiten der auslenkbaren Platten zu trägheitsbedingten Deformationen der Spiegeloberflächen. Diese führen zu einer Beeinflussung der Eigenschaften des reflektierten Lichts (Abb. 2.17 auf S. 32). Für die meisten Anwendungen ist daher die Form und Größenordnung der dynamischen Deformation ein wichtiges Kriterium.

Für die maximale dynamische Deformation existieren Näherungslösungen lediglich für rechteckförmige Spiegelplatten [76, 77]. Sie basieren auf der Balkentheorie nach BERNOULLI-EULER. Die Durchbiegung der Spiegelplatte  $\Delta z$  lässt sich demnach durch die Lösungen einer Differentialgleichung vierter Ordnung (Biegedifferentialgleichung, [77]) beschreiben. Mit der dimensionslosen Variablen  $\chi = y'/w$  ergibt sich die Lösung der Biegedifferentialgleichung zu [3]:

$$\Delta z(\chi) = \frac{\Delta z_0}{11} (\chi^5 - 10\chi^3 + 20\chi^2) \quad \text{für} \quad 0 \leq \chi \leq 1 \quad (3.72)$$

Aus dieser Biegelinie kann der maximale Oberflächenfehler  $\max \delta$  (vgl. Abb. 2.17 auf S. 32) bestimmt werden. Er ergibt sich näherungsweise zu [76]

$$\max \delta \approx 0.166 \Delta z_0 \quad \text{mit} \quad \Delta z_0 = \frac{11}{3840} \frac{m w^4 M_{t,x}}{\kappa_{b,z} J_{xx}} \quad (3.73)$$

mit  $m$  als Masse der Spiegelplatte,  $M_{t,x}$  als wirksames Torsionsmoment an der Drehachse und  $\kappa_{b,x}$  als Biegesteifigkeit der Spiegelplatte bei Biegung um die  $x$ -Achse. Geht man davon aus, dass die Länge der Spiegelplatte  $l$  in der Größenordnung der Breite  $w$  liegt, kann der Einfluss der Querkontraktion des Materials auf die Steifigkeit nicht vernachlässigt werden. Daher muss die Definition der Biegesteifigkeit (Gl. (3.13)) entsprechend der Plattentheorie korrigiert werden [78]. Es gilt dann:

$$\kappa_{b,x} = \frac{1}{1 - \nu_{xy}^2} E_{yy} I_{xx} \quad (3.74)$$

Mit dem Zusammenhang zwischen Masse und Massendichte bzw. Torsionsfederhärte und Torsionsmoment ( $k_{t,x} = M_{t,x}/\theta_x$ ) sowie mit Gl. (2.14) ergibt sich für die maximale dynamische Deformation näherungsweise der folgende Ausdruck:

$$\max \delta \approx 0.226 f_x^2 \theta_x \frac{\rho_m w^5 (1 - \nu_{xy}^2)}{E_{yy} h^2} \quad (3.75)$$

Die Deformation nimmt demnach linear mit der Auslenkung und quadratisch mit der Schwingfrequenz zu. Den größten Einfluss auf die Deformation hat die Breite der Spiegelplatte. Sie geht mit fünfter Potenz ein.

Neben der maximalen Deformation der Spiegelfläche ist der quadratische Mittelwert des Oberflächenfehlers ein wichtiges Maß zur Bewertung der optischen Qualität. Er ist definiert zu:

$$\text{rms } \delta := \left[ \frac{1}{A} \iint_{(A)} \delta^2 dA \right]^{1/2} \quad (3.76)$$

Dabei ist  $A$  die Spiegeloberfläche.

Gleichung (3.75) basiert auf der Annahme, dass das an der Platte angreifende Torsionsmoment  $M_{t,x}$  entlang der Drehachse konstant wirkt. Die Deformation wird daher über die gesamte Plattenlänge als konstant angenommen. Da im Fall eines Mikroscooperspiegels nur durch die Torsionsfedern mechanische Momente in die Spiegelplatte eingekoppelt werden, ist für lange Platten bzw. für steigende Verhältnisse  $l/w$  mit einer zunehmenden Abweichung des analytischen Modells zu rechnen.

Mithilfe der *FEM* lässt sich die dynamische Deformation von Spiegelplatten mit beliebiger Gestalt bestimmen. Dafür können zwei verschiedene Ansätze genutzt werden. Sind geometrische Nichtlinearitäten (Abschnitt 3.2.2) vernachlässigbar und wird der Mikrospiegel nahe der Eigenresonanzfrequenz betrieben, kann die Deformation näherungsweise mit einer Eigenwertanalyse (Abschnitt 3.2.4) bestimmt werden. Dabei wird ausgenutzt, dass die Information über die Gestalt der ausgelenkten Spiegelplatte in der jeweiligen Eigenform enthalten ist. Die Deformation der Oberfläche kann aus der von der Eigenform vorgegebenen Verschiebung der Plattenoberfläche bestimmt werden. Dazu muss die folgende Funktion minimiert werden:

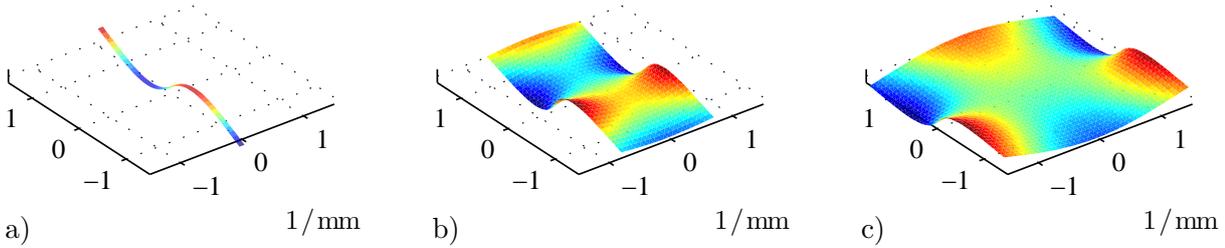
$$\frac{1}{A} \iint_{(A)} \left( (\mathbf{T} \cdot \vec{\Delta}) \cdot \vec{e}_z \right)^2 dA \rightarrow \min \quad (3.77)$$

mit  $\vec{\Delta}$  als das sich aus der Eigenform der genutzten Resonanz ergebende Verschiebungsvektorfeld,  $\vec{e}_z$  als Basisvektor in  $z$ -Richtung des globalen Koordinatensystems und der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  als Optimierungsparameter. Die Transformation entspricht dabei im Falle eines Kippspiegels einer Verschiebung und Drehung [65]. Die dynamische Deformation für eine gegebene Auslenkung  $\theta_x$  ergibt sich dann zu:

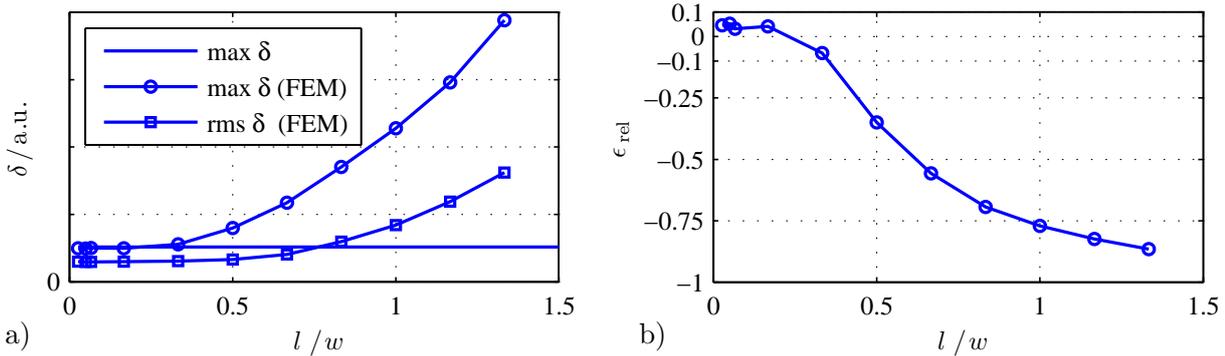
$$\delta = \frac{\theta_x}{\theta_{\text{norm}}} \left( \mathbf{T} \cdot \vec{\Delta} \right)_{(A)} \cdot \vec{e}_z \quad (3.78)$$

Dabei ist  $\theta_{\text{norm}}$  diejenige Auslenkung, welche der Normierung der Eigenvektoren in der zu Grunde liegenden Eigenform entspricht.

Eine zweite Möglichkeit, mithilfe der *FEM* die dynamische Deformation einer Spiegelplatte zu bestimmen, beruht auf einer statischen nichtlinearen Analyse, bei der eine Last auf den Mikrospiegel simuliert wird, die der bei der jeweiligen Auslenkung und Frequenz angreifenden Last entspricht [79]. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass sie auch für nicht-resonant ausgelenkte Bauelemente angewandt werden kann. Außerdem können auslenkungsabhängige Federhärten (geometrische Nichtlinearitäten) berücksichtigt werden. Voraussetzung für die statische Analyse ist jedoch, dass die Frequenzen der auf die Spiegelplatte wirkenden Lasten gering sind im Vergleich zu den Eigenfrequenzen der Platte



**Abb. 3.17:** *Deformationsprofile rechteckiger Spiegelplatten.* Dargestellt ist der mithilfe der *FEM* ermittelte normierte Verlauf der trägheitsbedingten Deformation. Die mittels Torsionsfedern aufgehängten Spiegelplatten haben eine Breite von  $w = 3$  mm. a)  $l = 80 \mu\text{m}$  ( $l/w = 0.03$ ); b)  $l = 1.5$  mm ( $l/w = 0.5$ ); c)  $l = 3$  mm ( $l/w = 1$ ).



**Abb. 3.18:** *Grenzen des analytischen Modells für die dynamische Deformation.* a) qualitativer Verlauf der maximalen Deformation von rechteckförmigen Spiegelplatten bei konstanter Auslenkung und Frequenz im Vergleich zu Ergebnissen aus *FE*-Analysen; b) relative Abweichung des analytischen Modells.

selbst (vgl. dazu Anhang C.3). Soll diese Methode für einen in Eigenresonanz betriebenen Mikrospiegel zum Einsatz kommen, entspricht die auf die Spiegelplatte wirkende Last einer zeitabhängigen Winkelbeschleunigung. Sie ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (2.12) unter Vernachlässigung des Antriebs- und Dämpfungsmoments zu:

$$\ddot{\theta}_x = -\frac{k_{t,x}}{J_{xx}} \theta_x \quad \text{bzw. mit Gl. (2.14):} \quad \ddot{\theta}_x = -(2\pi f_x)^2 \theta_x \quad (3.79)$$

Abbildung 3.17 zeigt den mithilfe von Eigenwertanalysen ermittelten, normierten Verlauf der dynamischen Deformation für rechteckförmigen Spiegelplatten mit unterschiedlichen Seitenverhältnissen  $l/w$ . Dabei entspricht Abb. 3.17a den in Gl. (3.75) getroffenen Annahmen erwartungsgemäß recht gut. Die Geometrie kann als Balken, entsprechend der Theorie nach BERNOULLI-EULER betrachtet werden ( $l \ll w$ ). Die Deformation entspricht dem Verlauf der Biegelinie nach Gl. (3.139). Mit zunehmender Plattenlänge (Abb. 3.17b,c) verändert sich die Gestalt der Deformation jedoch sehr stark. Für  $l \approx w$  bzw.  $l > w$  sind keine Ähnlichkeiten mit dem ursprünglich angenommenen Verlauf mehr erkennbar (Abb. 3.17c).

Vergleicht man nun die anhand Gl. (3.75) bestimmten Werte mit Ergebnissen aus *FE*-Analysen, lässt sich der Gültigkeitsbereich des analytischen Modells abschätzen. Abbildung 3.18a zeigt den Verlauf der zu erwartenden Deformation in Abhängigkeit von dem Verhältnis der Plattenlänge und -breite. Zusätzlich ist der Verlauf des quadratischen Mittelwerts der Deformation  $\text{rms } \delta$  dargestellt. Es ist erkennbar, dass die mithilfe der *FEM* ermittelten Deformationswerte für Spiegel mit typischen Abmessungen ( $l \approx w$ )

**Tabelle 3.3:** Korrekturfaktoren zur Bestimmung der dynamischen Deformation. Sowohl die maximale dynamische Deformation als auch der quadratische Mittelwert lassen sich unter Nutzung von geometrieabhängigen Korrekturfaktoren näherungsweise anhand Gl. (3.75) bestimmen (vgl. Anhang C.5). Es gilt  $h = 30 \mu\text{m}$ .

Gleichung (3.82)	$f(\delta)$	rechteckig ( $l = w$ )	elliptisch ( $l = w$ )
$f(\delta) = \xi \left( 0.226 f_x^2 \theta_x \frac{\rho_m w^5 (1 - \nu_{xy}^2)}{E_{yy} h^2} \right)$	max $\delta$	$\xi \approx 3.9$	$\xi \approx 2.5$
	rms $\delta$	$\xi \approx 1.5$	$\xi \approx 0.8$

stark von den analytisch ermittelten Ergebnissen abweichen. Akzeptiert man eine relative Abweichung von 10%, kann Gl. (3.75) nur für Platten mit einem Seitenverhältnis  $l/w < 0.3$  angewandt werden (Abb. 3.18b). Für einen typischen Mikroskanner mit einem Seitenverhältnis  $l/w \approx 1$  ergibt sich eine relative Abweichung in der Größenordnung von  $-75\%$ . Das Modell ist demnach nur sehr eingeschränkt für den Entwurf von Mikroskannerspiegeln geeignet.

Anhand der Ergebnisse der durchgeführten *FE*-Analysen lässt sich zeigen, dass die in Gl. (3.75) beschriebenen Zusammenhänge zumindest qualitativ auch für große Seitenverhältnisse  $l/w$  gültig bleiben (Anhang C.5). Für  $l/w = \text{const}$  gilt demnach näherungsweise:

$$\max \delta \sim f_x^2 \theta_x \frac{\rho_m w^5 (1 - \nu_{xy}^2)}{E_{yy} h^2} \Bigg|_{l/w=\text{const}} \quad (3.80)$$

Außerdem gilt  $\max \delta \sim \text{rms } \delta$  und damit:

$$\text{rms } \delta \sim f_x^2 \theta_x \frac{\rho_m w^5 (1 - \nu_{xy}^2)}{E_{yy} h^2} \Bigg|_{l/w=\text{const}} \quad (3.81)$$

Sowohl der Verlauf der maximalen Deformation als auch des quadratischen Mittelwerts lässt sich also bis auf eine geometrieabhängige Konstante näherungsweise bestimmen. Wie ebenfalls anhand von *FE*-Analysen gezeigt werden kann (Anhang C.5), gilt gleiches für elliptische Spiegelplatten mit festem Verhältnis der Halbachsen. Tabelle 3.3 enthält die für runde und quadratische Spiegelplatten ermittelten Korrekturfaktoren zur näherungsweisen Bestimmung der maximalen dynamischen Deformation und zur Bestimmung des quadratischen Mittelwerts. Die beim Einsatz dieser Faktoren bzw. Gl. (3.82) auftretende Abweichung liegt in einer Größenordnung von lediglich 10%.

Die bei der dynamischen Deformation wirksamen Mechanismen lassen sich also nur qualitativ mithilfe von analytischen Methoden beschreiben. Zur Untersuchung von Plattengeometrien mit beliebigem Seitenverhältnis bzw. beliebiger Form sind *FE*-Analysen unabdingbar. Mit den dabei erhaltenen Ergebnissen können jedoch anhand der Zusammenhänge (3.80) bzw. (3.81) Rückschlüsse auf ähnliche Geometrien gezogen werden. So kann beispielsweise der Einfluss einer veränderten *SOI*-Dicke oder Spiegelgröße abgeschätzt werden.

### 3.2.7 Strukturdämpfung

Unter Strukturdämpfung versteht man die Umwandlung nutzbarer Energie in nicht nutzbare Energie innerhalb der mechanischen Strukturen eines Bauelements. Darunter zählen

spannungsinduzierte Platzwechselvorgänge von Atomen, das Wandern von Versetzungen sowie Wechselwirkungen an eventuell vorhandenen Korngrenzen [5]. Weitere Ursachen für den Verlust nutzbarer Energie in Mikrostrukturen sind Körperschall und auftretende thermische Verluste aufgrund von innerer Reibung.

Aufgrund der besonderen Eigenschaften von hochreinem, einkristallinem Silizium (keine Korngrenzen, sehr hohe Eigenfrequenz der Gitterstruktur) sind die in Mikroscoannerspiegeln auftretenden Strukturdämpfungseffekte vernachlässigbar. Dies wird besonders deutlich, wenn man die Schwingungsgüten von resonanten Bauelementen mit sehr geringer fluidmechanischer Dämpfung (Vakuum) und guter Entkopplung von energieabsorbierenden Trägermaterialien (Schwingungsisolation) mit denen von bei Normaldruck betriebenen Mikroscoannerspiegeln vergleicht. So konnten mit mikromechanischen Filterstrukturen (*RF-MEMS*) aus einkristallinem Silizium Güten von über 600 000 erzielt werden (bei  $p \approx 0.1$  Pa, [80]). Die Güte eines Mikroscoannerspiegels bei Normaldruck liegt im Vergleich dazu in einer Größenordnung von 100. Der mit Abstand größte Teil der Dämpfung resultiert aus Wechselwirkungen der Mikrostruktur mit dem umgebenden Fluid – also aus den fluidmechanischen Randbedingungen.

### 3.3 Fluidmechanische Randbedingungen

Aufgrund des vergleichsweise effizienten Antriebsprinzips (siehe Abschnitt 2.3) können *Fraunhofer IPMS*-Mikroscoannerspiegel bei Normaldruck – also ohne Vakuum-Gehäuse – betrieben werden. Dies verringert den Fertigungsaufwand erheblich; das den Resonator umgebende Fluid führt jedoch zu einer vergleichsweise großen Dämpfung bzw. zu geringen Schwingungsgüten. Neben der daraus resultierenden Beschränkung der erreichbaren Amplituden beeinflusst die Dämpfung außerdem noch andere wichtige Eigenschaften der Bauelemente wie die Stabilitätsregionen (siehe Abschnitt 2.3.2). Die wirksamen fluidmechanischen Dämpfungsmechanismen müssen daher unbedingt beim Entwurf berücksichtigt werden.

Um die Wahl der für die Modellierung einsetzbaren physikalischen Werkzeuge und Zusammenhänge treffen zu können, stehen einige Kenngrößen zur Verfügung, mit denen eine Fluidströmung charakterisiert werden kann. Diese werden im Folgenden für die in einem Mikroscoannerspiegel auftretenden Strömungen bestimmt.

**Die Knudsen-Zahl** misst das Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Moleküle eines Fluids zu einer charakteristischen, geometrischen Bezugslänge. Mithilfe der KNUDSEN-Zahl lässt sich prüfen, ob die Kontinuitätsbedingung der NAVIER-STOKES-Gleichungen erfüllt ist [4], also ob sich die Gesetze der Gasdynamik kontinuierlicher Medien anwenden lassen. Die KNUDSEN-Zahl ist definiert zu:

$$\text{Kn} = \frac{\mathcal{L}}{d} \quad (3.83)$$

Dabei ist  $\mathcal{L}$  die mittlere freie Weglänge der Moleküle im Fluid [4]. Die charakteristische Länge  $d$  entspricht in diesem Fall der typischen Breite eines Mikrokanals (für *Fraunhofer IPMS* Mikroscoannerspiegel Abstand der Fingerelektroden), in dem die Strömung stattfindet. Die mittlere freie Weglänge ergibt sich zu [4]

$$\mathcal{L} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi p \sigma^2} \quad (3.84)$$

mit  $k$  als BOLTZMANN-Konstante,  $T$  als absolute Temperatur,  $p$  als Druck und  $\sigma$  als Durchmesser der Moleküle im Fluid.

Die Kontinuitätsbedingung der NAVIER-STOKES-Gleichungen gilt als erfüllt unter der Bedingung  $\text{Kn} < 0.1$ . Mit Gl. (3.83) und Gl. (3.84) ergibt sich daher für den Quotienten aus Druck und Temperatur:

$$\frac{p}{T} > \frac{k}{\sqrt{2} \pi \text{Kn} d \sigma^2} \Big|_{\text{Kn} < 0.1} \quad (3.85)$$

Geht man von einer charakteristischen Länge (Elektrodenabstand) von  $d = 5 \mu\text{m}$  und einer maximalen Umgebungstemperatur von  $T = 333 \text{ K}$  ( $\approx 60^\circ\text{C}$ ) aus und nimmt ferner einen Moleküldurchmesser von  $\sigma = 0.35 \text{ nm}$  (Stickstoff) an, ergibt sich ein Mindestdruck von  $1.7 \cdot 10^4 \text{ Pa}$  für die Erfüllung der Kontinuitätsbedingung. Bei Normaldruck ( $p = p_0 \approx 10^5 \text{ Pa}$ ) ist die Bedingung für die Anwendbarkeit der Strömungstheorie nach NAVIER-STOKES demnach erfüllt.

Die sich ergebenden Lösungen sind bei Annahme von *No-slip*-Randbedingungen<sup>13</sup> allerdings nur gültig, wenn zusätzlich die Bedingung  $\text{Kn} < 10^{-3}$  erfüllt wird. Ist dies nicht der Fall, tritt ein Schlupf an den Grenzflächen zwischen Struktur und Fluid auf, welcher durch entsprechende Anpassung der Randbedingungen berücksichtigt werden muss (*Slip*-Randbedingung). Mit den oben genannten Parametern ergibt sich ein Mindestdruck von  $1.7 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ . Die NAVIER-STOKES-Gleichungen mit *No-slip*-Randbedingungen sind daher bei Normaldruck nicht gültig.

Eine Alternative zur Nutzung von *Slip*-Randbedingungen ist die Einführung einer sogenannten *Slip*-Korrektur. Dazu wird die dynamische Viskosität des Fluids mithilfe eines druck- und temperaturabhängigen, experimentell ermittelten Faktors korrigiert [5, 10]. Es ergibt sich eine effektive dynamische Viskosität:

$$\eta_{\text{eff}} := \frac{\eta}{1 + f(\text{Kn})} \quad (3.86)$$

Dabei ist  $\eta$  die dynamische Viskosität des Fluids. Diese ist abhängig von der Temperatur, nicht jedoch vom Druck. Aufgrund der Tatsache, dass der in der effektiven dynamischen Viskosität enthaltene Korrekturfaktor sowohl von der Temperatur als auch vom Druck abhängt, gilt im Gegensatz dazu:

$$\eta = f(T), \text{Kn} = f(p, T) \quad \rightarrow \quad \eta_{\text{eff}} = f(p, T) \quad (3.87)$$

Es können also mithilfe der *Slip*-Korrektur druckabhängige Phänomene (Einflüsse von Druckschwankungen, Betrieb bei geringen Drücken) untersucht werden. Dabei muss jedoch immer die Kontinuitätsbedingung der NAVIER-STOKES-Theorie (3.85) erfüllt bleiben.

**Die Reynolds-Zahl** wird genutzt, um die turbulenten bzw. laminaren Eigenschaften von Strömungen zu bestimmen. Sie stellt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften dar. Für eine ideale Flüssigkeit mit einer Viskosität  $\eta$  von null ist das Verhältnis unendlich. Die REYNOLDS-Zahl ist definiert zu [4]:

$$\text{Re} = \frac{\rho_m}{\eta} u d \quad (3.88)$$

<sup>13</sup>stetiger Übergang der Geschwindigkeit an den Grenzflächen der Strukturen

Dabei ist  $\rho_m$  die Massendichte,  $u$  ist die charakteristische Geschwindigkeit der Strömung und  $d$  die charakteristische Länge der umströmten Struktur. Die maximale REYNOLDS-Zahl ( $\max \text{Re}$ ) ist ausschlaggebend für die Eigenschaften der Strömung. Überschreitet sie den kritischen Wert  $\text{Re}_{\text{cr}} \approx 2000$ , treten Turbulenzen auf. Ansonsten ist die Strömung laminar.

Da die REYNOLDS-Zahl entsprechend Gl. (3.88) direkt proportional zur Strömungsgeschwindigkeit ist, muss zur Bestimmung ihres Maximums die maximale Strömungsgeschwindigkeit bzw. die maximale Geschwindigkeit der sich bewegenden Mikrostruktur herangezogen werden. Diese tritt typischerweise am äußeren Rand der Spiegelplatte auf. Sie ergibt sich aus dem Abstand zur Drehachse  $D/2$  und der Frequenz bzw. der Amplitude der Schwingung:

$$\max \text{Re} = \frac{\pi \rho_m}{\eta} \hat{\theta}_x f_x D d \quad (3.89)$$

Selbst für extreme Scanner-Parameter mit  $D = 2 \text{ mm}$ ,  $f_x = 40 \text{ kHz}$ ,  $\hat{\theta}_x = 20^\circ$  ist die maximale REYNOLDS-Zahl bei Standard-Bedingungen ( $p = p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\vartheta = 20^\circ \text{C}$ ) kleiner als 100. Bei sinkendem Druck verringert sie sich zusätzlich. Es gilt daher für Mikroscooperspiegel im Allgemeinen:

$$\max \text{Re} \ll \text{Re}_{\text{cr}} \quad (3.90)$$

Es treten also keinerlei Turbulenzen auf. Die Theorie der laminaren Strömungen kann ohne Einschränkungen angewandt werden.

**Die Mach-Zahl** gibt das Verhältnis von Trägheitskräften zu Kompressionskräften an. Dies entspricht dem Quotienten aus Strömungsgeschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit im Fluid:

$$\text{Ma} = \frac{u}{c} \quad (3.91)$$

Die MACH-Zahl einer Strömung kann herangezogen werden, um den Einfluss von Kompressionseffekten abzuschätzen. Gilt  $\text{Ma} < 0.3$ , können diese vernachlässigt werden. In diesem Fall kann die Strömung mithilfe vereinfachter (inkompressibler) NAVIER-STOKES-Gleichungen beschrieben werden [5].

Geht man wieder von den extremen Parametern aus, die zur Bestimmung der maximalen REYNOLDS-Zahl herangezogen wurden, ergibt sich die maximale charakteristische Strömungsgeschwindigkeit am Rand der Spiegelplatte zu  $(\max u) \approx 45 \text{ m/s}$ . Mit der Schallgeschwindigkeit in Luft ergibt sich daraus eine Größenordnung für die MACH-Zahl von 0.1.

Die in einem Mikroscooperspiegel auftretenden Strömungen lassen sich demnach mithilfe der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen unter Berücksichtigung einer *Slip*-Korrektur modellieren:

$$\begin{aligned} \rho_m \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) &= -\nabla p + \eta_{\text{eff}} \Delta \vec{u} + \vec{P} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \vec{u}_{\text{Rand}} &= \vec{v}_{\text{Rand}} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Dabei ist  $p = f(x, y, z)$  der Druck und  $\vec{u} = f(x, y, z)$  die Geschwindigkeit des Fluids. Mithilfe des Ausdrucks  $\vec{P}$  lässt sich eine auf das Fluid wirkende Volumenkraft (z.B. Gravitationskraft) berücksichtigen;  $\vec{u}_{\text{Rand}}$  und  $\vec{v}_{\text{Rand}}$  entsprechen der Strömungsgeschwindigkeit an den Randflächen der Struktur bzw. der Geschwindigkeit der Randflächen selbst.

Der Widerstand einer bewegten Struktur im Fluid kann anhand des aus der Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichungen resultierenden Druck- bzw. Geschwindigkeitsfelds berechnet werden. Die dabei wirksamen Dämpfungskräfte ergeben sich durch Integration des Drucks an den Grenzflächen zwischen Struktur und Fluid (Normalkomponente) und der Geschwindigkeitsänderung des Fluids in Richtung der Grenzflächennormalen (Tangentialkomponente der Dämpfungskraft) [4, 5]:

$$\vec{F}_d = \iint_{(A)} p \vec{n}_0 dA + \iint_{(A)} \eta_{\text{eff}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}_0} dA \quad (3.93)$$

Dabei ist  $\vec{n}_0$  der Normalenvektor der Grenzfläche zwischen Struktur und Fluid. Es ist zu beachten, dass die effektive dynamische Viskosität  $\eta_{\text{eff}}$  von der für die jeweilige lokale Strömung gültigen charakteristischen Länge und damit vom Ort abhängt. Sie kann daher nicht als konstant betrachtet werden.

Das auf eine kippende Spiegelplatte wirkende, dämpfende Drehmoment  $M_d$  ergibt sich dann zu:

$$\vec{M}_d = \iint_{(A)} \vec{r} \times d\vec{F}_d \quad (3.94)$$

Dabei ist  $\vec{r}$  der zur Drehachse der untersuchten Struktur orthogonale Ortsvektor der Dämpfungskraft (vgl. Abb. 3.25 auf S. 76).

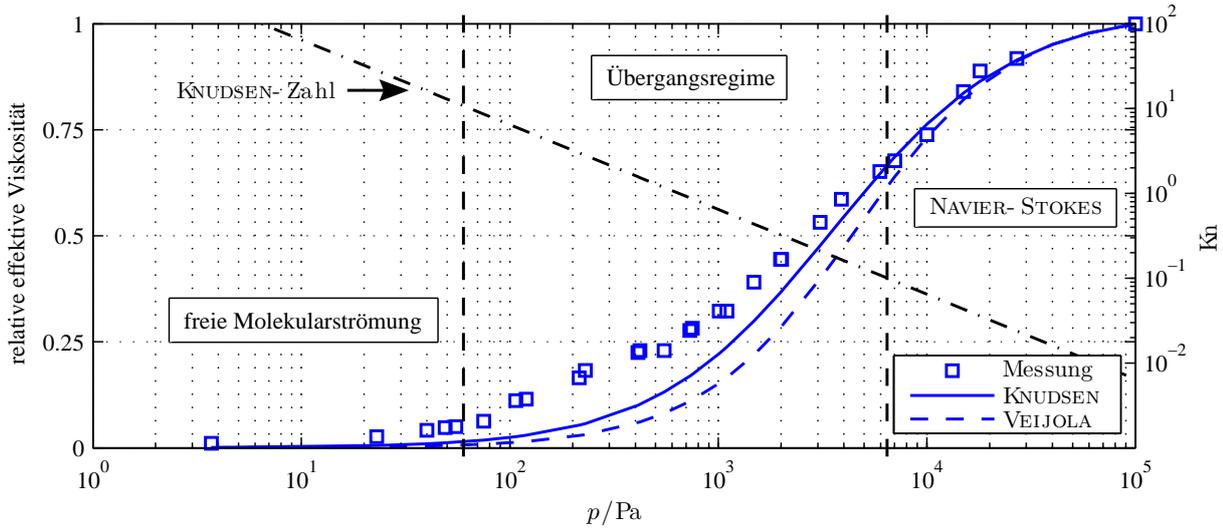
Da der zeitliche Verlauf des Dämpfungsmoments nicht direkt messtechnisch erfassbar ist, wurde bereits in Abschnitt 2.3 ein experimentell bestimmbares Dämpfungsmaß  $\bar{\alpha}_i$  eingeführt. Es kann genutzt werden, um relevante Dämpfungsmechanismen durch Variation der Geometrie zu identifizieren [44]. Außerdem kann es genutzt werden, um Dämpfungsmodelle zu verifizieren. Bezüglich der Bewegungsgleichung (2.12) entspricht  $\bar{\alpha}_i$  dem über einer Schwingungsperiode zeitlich gemittelten Dämpfungsfaktor  $\alpha_i$

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha_i dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{M_{d,i}}{\dot{\theta}_i} dt \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{f_i} \quad (3.95)$$

und lässt sich anhand des Ausschwingverhaltens für beliebige Mikroscoannerspiegel experimentell ermitteln [44]. Alternativ kann  $\bar{\alpha}_i$  mithilfe des Zusammenhangs (2.21) auf S. 21 zumindest für große Auslenkungen näherungsweise aus dem gemessenen Zusammenhang von Amplitude und Pulsspannung im synchronisierten Betrieb bestimmt werden. Dazu muss jedoch die Kapazität der Antriebs Elektrode bekannt sein:

$$\bar{\alpha}_i \approx U^2 \frac{\Delta C_i}{2\pi^2 f_i \hat{\theta}_i^2} \quad (3.96)$$

Werden Messungen bei verschiedenen Schwingungsamplituden durchgeführt, kann anhand des sich ergebenden Verlaufs für  $\bar{\alpha}_i$  auf den qualitativen Verlauf des Dämpfungsfaktors  $\alpha_i$  und damit des Dämpfungsmoments  $M_{d,x}$  rückgeschlossen werden.



**Abb. 3.19:** Approximationen zur Slip-Korrektur. Der Verlauf ist in die drei KNUDSEN-Regimes unterteilt. Neben den Approximationen für die effektive dynamische Viskosität ist der experimentell ermittelte Verlauf dargestellt. Die charakteristische Länge der Test-Struktur beträgt  $11.5 \mu\text{m}$  [83], die freie Weglänge im Fluid wurde mit  $74 \text{ nm}$  angenommen, außerdem gilt  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ .

### 3.3.1 Näherungen zur Slip-Korrektur

Um eine möglichst gute Abbildung der realen Strömungsvorgänge zu erhalten, ist die Wahl der Funktion  $f(\text{Kn})$  für die Slip-Korrektur entsprechend Gl. (3.86) von entscheidender Bedeutung. In der Literatur können verschiedene Ansätze für  $f(\text{Kn})$  gefunden werden. Für den MEMS-Entwurf kommen aufgrund des dabei gültigen Bereichs der KNUDSEN-Zahl lediglich zwei Ansätze in Frage:

1. Die empirische Näherung von KNUDSEN basiert auf Untersuchungen der Strömungsverhältnisse in Kapillar-Rohren:

$$f_1(\text{Kn}) := \frac{Z \text{Kn}}{0.1474} \quad \text{mit} \quad Z = \frac{\text{Kn} + 2.507}{\text{Kn} + 3.095} \quad (3.97)$$

Dieser Ansatz wurde beispielsweise von ANDREWS et al. für den Entwurf mikromechanischer Drucksensoren genutzt [81, 82].

2. Die Näherung von VEIJOLA et al. wurde für den Entwurf mikromechanischer Beschleunigungssensoren entwickelt [10]:

$$f_2(\text{Kn}) := 9.638 \text{Kn}^{1.159} \quad (3.98)$$

Die resultierenden qualitativen Verläufe für die effektive dynamische Viskosität sind in Abb. 3.19 enthalten.

Eine Entscheidung zugunsten einer der beiden Näherungen kann nur aufgrund von experimentellen Untersuchungen erfolgen. Zu diesem Zweck wurden exemplarisch für Fraunhofer IPMS-Mikroscannerspiegel Untersuchungen an den in [44] vorgestellten Teststrukturen durchgeführt. Dabei handelt es sich um Scannerspiegel mit runder Spiegelplatte ( $D = 1.5 \text{ mm}$ ) und einer mechanischen Resonanzfrequenz von ca.  $1 \text{ kHz}$ . Die Teststrukturen zeichnen sich unter anderem dadurch aus, dass die Dämpfung hauptsächlich von

den laminaren Strömungen innerhalb der Kammelektroden verursacht wird [44]. Wie aus Gl. (3.93) bzw. den nachfolgenden Abschnitten noch deutlich wird, folgt daraus ein näherungsweise linearer Zusammenhang zwischen der effektiven dynamischen Viskosität und den dämpfenden Momenten. Entsprechend Gl. (3.95) gilt daher bei konstanter Amplitude der Auslenkung:

$$\bar{\alpha}_x \sim M_{d,x} \quad \text{und demzufolge} \quad \bar{\alpha}_x \sim \eta_{\text{eff}} \quad (3.99)$$

Zur Bestimmung des Verlaufs der tatsächlichen effektiven dynamischen Viskosität muss der Scannerspiegel bei konstanter Temperatur und veränderlichem Druck mit synchronisierter Anregung betrieben werden. Dabei muss die Antriebsspannung in solcher Weise geregelt werden, dass die Amplitude der Auslenkung näherungsweise konstant ist. Entsprechend Gl. (3.96) lässt sich dann der Verlauf des Dämpfungsfaktors in Abhängigkeit vom Druck bestimmen. Nach Gl. (3.99) entspricht dieser dem Verlauf der effektiven dynamischen Viskosität. Abbildung 3.19 enthält neben den sich aus den zwei vorgestellten Ansätzen ergebenden Verläufen den auf diese Weise experimentell bestimmten Verlauf. Es wird deutlich, dass beide Näherungen im Gültigkeitsbereich der NAVIER-STOKES-Gleichungen eine gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Daten zeigen. Erwartungsgemäß werden die Abweichungen für KNUDSEN-Zahlen  $\text{Kn} > 0.1$  zunehmend größer. Bei einem Druck von 1000 Pa beträgt die relative Abweichung bereits näherungsweise -50 %.

Aufgrund der besseren Übereinstimmung mit den Messwerten im *Übergangsregime* stellt die Näherung nach KNUDSEN für den Entwurf von Mikroscannerspiegeln die bessere Wahl dar. Es gilt daher die folgende Definition:

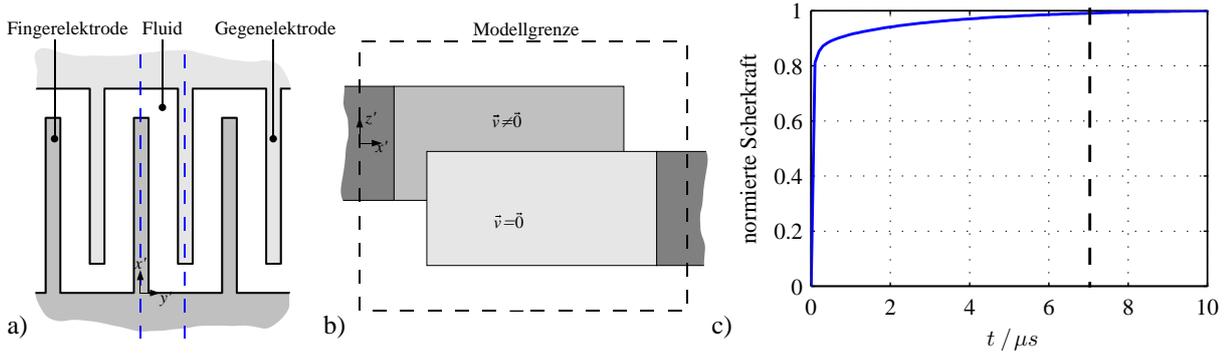
$$\eta_{\text{eff}} := \frac{\eta}{1 + f_1(\text{Kn})} \quad (3.100)$$

Neben der Verifikation des Ansatzes zur Bestimmung der effektiven dynamischen Viskosität können die experimentell ermittelten Daten genutzt werden, um die Grenzen der mithilfe der NAVIER-STOKES-Theorie erstellten Dämpfungsmodelle zu untersuchen. Unter diesem Gesichtspunkt wird deutlich, dass die entsprechenden Modelle durchaus geeignet sein können, um Abschätzungen und Trenduntersuchungen innerhalb des Übergangs zur freien Molekularströmung, also für  $\text{Kn} > 0.1$  durchzuführen.

### 3.3.2 Gültigkeit der quasistatischen Näherung

Fluidmechanische Probleme werden oft als statisch bzw. quasistatisch betrachtet. Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die Randbedingungen der Strömung im Verhältnis zu den Einschwingvorgängen des Fluids nur langsam verändern. Da sich die Strömungsverhältnisse innerhalb eines Mikroscannerspiegels aufgrund der oszillierenden Bewegung andauernd verändern, muss untersucht werden, ob die Fluidströmungen als quasistatisch betrachtet werden können. Ist dies nicht der Fall, müssen dynamische Vorgänge berücksichtigt werden.

Die Untersuchung des Einschwingverhaltens kann beispielsweise mithilfe eines fluidmechanischen *FE*-Modells erfolgen. Da sich die Strömungsverhältnisse am äußeren Rand des Scanners während einer Schwingung am stärksten ändern, müssen die Einschwingvorgänge in diesem Bereich, also innerhalb der Kammelektrode untersucht werden. Aufgrund der periodischen Struktur der Elektrodenanordnung kann das Modell mithilfe symmetrischer Randbedingungen entsprechend Abb. 3.20a,b stark vereinfacht werden. Dabei werden



**Abb. 3.20:** Fluidmechanisches FE-Modell einer Kammelektrode. Bei der Modellierung der Strömungsverhältnisse innerhalb eines *Out-of-plane-combs* kann dessen geometrische Periodizität ausgenutzt werden. a) das realisierte FE-Modell mit symmetrischen Randbedingungen im Kontext der Kammelektrode, Draufsicht; b) Seitenansicht; c) zeitliche Konvergenz des Strömungsproblems mit  $\tau \approx 7 \mu s$ .

Effekte am Rand der Kammelektrode bzw. der Versatz von Fingerelektroden zueinander (beispielsweise an runden Spiegelplatten) nicht berücksichtigt. Untersuchungen und Vergleiche mit komplexeren FE-Modellen haben jedoch gezeigt, dass ein solches, mithilfe symmetrischer Randbedingungen vereinfachtes Modell eine gute Näherung darstellt.

Mit einer dynamischen (zeitabhängigen) Simulation der Strömung kann nun die Größenordnung der Einschwingzeit des Fluids bestimmt werden. Dazu wird für die Geschwindigkeit einer Fingerelektrode der Verlauf einer Sprungfunktion angenommen. Als Kriterium für die zeitliche Konvergenz der Strömungsverhältnisse gegen den eingeschwungenen Zustand können die an den Seitenflächen der Elektrode wirkenden Scherkräfte genutzt werden. Sie ergeben sich entsprechend Gl. (3.93). In Abbildung 3.20c ist der sich auf diese Weise ergebende normierte Kraftverlauf für eine typischen Fingerelektrode dargestellt. Nimmt man als relatives Konvergenzkriterium einen Wert von 99% an, ergeben sich Werte für die Einschwingzeit  $\tau$  im Bereich von wenigen Mikrosekunden.

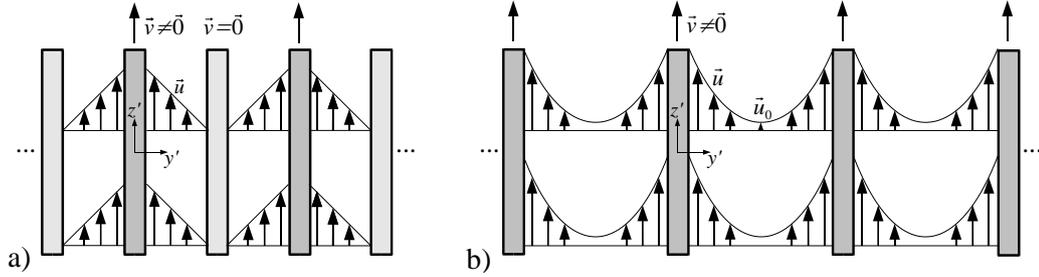
Die Änderungen der fluidmechanischen Randbedingungen folgen für einen schwingenden Mikroscoannerspiegel direkt aus dessen Bewegungsgleichung (2.12). Geht man von einem sinusförmigen zeitlichen Verlauf des Auslenkwinkels aus, findet die maximale Geschwindigkeitsänderung während einer halben Periodendauer statt. Damit das fluidmechanische Problem als quasistatisch betrachtet werden kann, muss also die Periodendauer wesentlich größer sein als die zweifache Einschwingzeit. Es ergibt sich folgende Bedingung für die Gültigkeit der quasistatischen Näherung bezüglich der Schwingfrequenz  $f_i$  eines Mikroscoannerspiegels:

$$f_{cr} \approx \frac{1}{2\tau} > f_i \quad (3.101)$$

Geht man von einer Einschwingdauer  $\tau = 10 \mu s$  aus, ergibt sich die maximale Schwingfrequenz  $f_{cr}$  für die die quasistatische Näherung als gültig angesehen werden kann zu 50 kHz. Die Strömungsverhältnisse innerhalb eines typischen Mikroscoannerspiegels können also in guter Näherung als quasistatisch betrachtet werden.

### 3.3.3 Dämpfungsmechanismen innerhalb der Kammstruktur

Die Dämpfung in Mikroscoannerspiegeln wird zu einem großen Teil von der bewegten Kammstruktur des *Out-of-plane-comb*-Antriebs verursacht. Dies konnte mithilfe experi-



**Abb. 3.21:** Fluidströmungen innerhalb der Kammstruktur. a) Im eingeschwenkten Zustand verläuft das Strömungsprofil zwischen den Fingerelektroden und den Gegenelektroden in guter Näherung linear (COUETTE-Strömung); b) Sind die Fingerelektroden ausgeschwenkt bildet sich zwischen ihnen ein Strömungsprofil mit parabolischem Verlauf aus (POISEUILLE-Strömung).

menteller Untersuchungen an vergleichbaren Teststrukturen mit variiertem Elektrodengeometrie in [44] gezeigt werden. Als maßgeblicher Einfluss auf die Dämpfung hat sich dabei vor allem der Abstand der Elektroden herausgestellt.

Zur Beschreibung der Dämpfungsmechanismen innerhalb der Kammstruktur lassen sich in Abhängigkeit von der Auslenkung des Spiegels bzw. des beweglichen Rahmens  $\theta_i|_{i \in \{x,y\}}$  drei verschiedene Zustände unterscheiden:

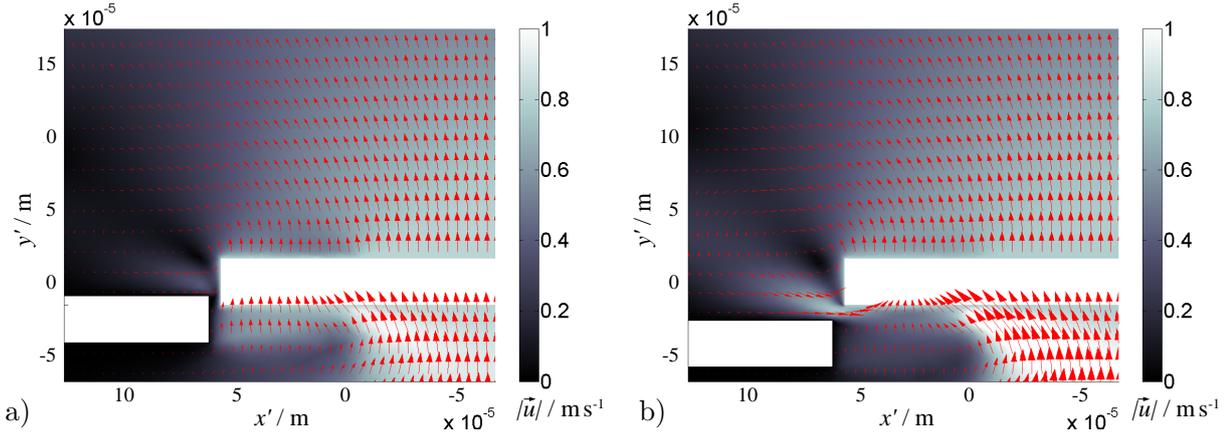
$\theta_i \approx 0$  Die Kammelektrode befindet sich im eingeschwenkten Zustand (Abb. 3.21a). Die Seitenflächen der Fingerelektroden bzw. Gegenelektroden stehen sich gegenüber. Aufgrund des im Vergleich zur Länge und Höhe der Elektroden geringen Abstands kann die sich ausbildende Strömung als ebene COUETTE-Strömung betrachtet werden [5, 44]. Diese spezielle Lösung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen zeichnet sich durch einen linearen Verlauf des Geschwindigkeitsprofils zwischen den bewegten Strukturen aus. Der Druck im Fluid ist dabei konstant. Die Dämpfungskraft ergibt sich dann entsprechend Gl. (3.93) näherungsweise zu

$$\vec{F}_d \approx \vec{F}_{\text{Couette}} = -\eta_{\text{eff}} \frac{A_s}{d} \vec{v} \quad (3.102)$$

mit  $A_s$  als Seitenfläche der Elektroden (Grenzfläche) und  $\vec{v}$  als Geschwindigkeit dieser Seitenfläche.

$|\theta_i| > \theta_{c,i}$  Die Kammelektrode ist vollständig aus den Gegenelektroden ausgeschwenkt (Abb. 3.21b). Das Fluid strömt zwischen den bewegten Elektroden hindurch. Da der Abstand der Seitenwände des so entstandenen Strömungskanals noch immer gering ist im Vergleich zur Höhe der Elektroden, kann die sich ausbildende Strömung mithilfe des Gesetzes von HAGEN-POISEUILLE beschrieben werden [44, 66]. Dabei handelt es sich um eine spezielle Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichungen für laminare Strömungen innerhalb von geraden Strömungskanälen. Sie ist durch ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil senkrecht zur Strömungsrichtung entsprechend Abb. 3.21b gekennzeichnet. Die Dämpfungskraft ergibt sich wieder entsprechend Gl. (3.93) [44, 83]:

$$\vec{F}_d \approx \vec{F}_{\text{Poiseuille}} = -4\eta_{\text{eff}} \frac{A_s}{d_h} \vec{v} \xi \quad \text{mit} \quad \xi = \left(1 - \frac{|\vec{u}_0|}{|\vec{v}|}\right) \quad (3.103)$$



**Abb. 3.22:** *Strömungen innerhalb einer Kammelektrode.* Es wird die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u} = f(x', y', z', t)|_{y'=3.25 \mu\text{m}}$  um eine Fingerelektrode eines schwingenden Mikros scannerspiegels dargestellt. Es gilt  $R = 750 \mu\text{m}$ ,  $f_x = 1 \text{ kHz}$ ,  $\hat{\theta}_x = 10^\circ$ . a)  $t = 30 \mu\text{s}$ : teilweise eingeschwenkte Elektrode; b)  $t = 50 \mu\text{s}$ : Übergang zum ausgeschwenkten Zustand.

Dabei ist  $A_s$  die Oberfläche der Kanalinnenseite und  $\vec{u}_0$  die Strömungsgeschwindigkeit in der Mitte des Kanalquerschnitts (Abb. 3.21b);  $d_h$  wird als hydraulischer Durchmesser bezeichnet. Er ist definiert zu:

$$d_h = 4 \frac{A}{U} \quad (3.104)$$

Dabei entspricht  $A$  der Querschnittsfläche,  $U$  dem benetzten Umfang des Strömungskanals.

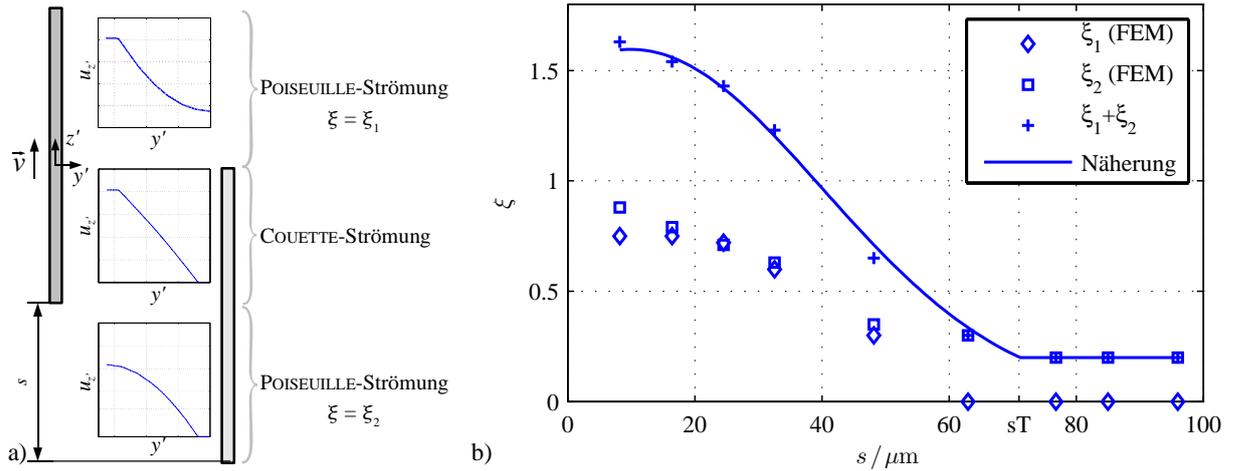
$0 < |\theta_i| < \theta_{c,i}$  Die Kammelektrode ist zum Teil in die Gegenelektroden eingeschwenkt, also im Übergang zwischen den beiden bereits beschriebenen Zuständen. Es tritt sowohl eine COUETTE-, als auch eine POISEUILLE-Strömung auf. Die Dämpfungskraft ergibt sich daher näherungsweise zu:

$$\vec{F}_d \approx \vec{F}_{\text{Couette}} + \vec{F}_{\text{Poiseuille}} \quad (3.105)$$

Eventuell auftretende Randeffekte z.B. an den Enden der Fingerelektroden oder Effekte beim Übergang zwischen COUETTE- und POISEUILLE-Strömungen werden mit den vorgestellten Modellen nicht berücksichtigt. Sie können jedoch mithilfe der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen mit *Slip*-Korrektur (3.92) unter Nutzung numerischer Lösungsverfahren untersucht werden. Ähnliches gilt für die Bestimmung des zum Berechnen von  $\vec{F}_{\text{Poiseuille}}$  benötigten Parameters  $\xi$ . Dieser kann zumindest näherungsweise auch mithilfe experimenteller Untersuchungen bestimmt werden.

Das in Abschnitt 3.3.2 eingeführte fluidmechanische *FE*-Modell kann zur weiteren Untersuchung des Strömungsproblems genutzt werden. Dazu wird dieses für verschiedene Auslenkungen und Geschwindigkeiten der Fingerelektroden gelöst. Anhand der sich zwischen den Elektroden ergebenden Strömungsfelder (vgl. Abb. 3.22) können einerseits die Annahmen bezüglich der Strömungsprofile überprüft werden. Andererseits kann der für eine konkrete Elektrodengeometrie gültige Verlauf des Parameters  $\xi$  bestimmt werden.

Es zeigt sich, dass die für die Geschwindigkeitsprofile der Strömungen getroffenen Annahmen berechtigt sind. Zwischen eingeschwenkten Elektroden bildet sich ein nahezu



**Abb. 3.23:** Ergebnisse des FE-Dämpfungsmodells. a) Die mithilfe der *FEM* ermittelten Strömungsprofile stimmen gut mit den für die analytischen Betrachtungen getroffenen Annahmen überein. Im Übergang zwischen ein- und ausgeschwenktem Zustand entsteht eine zweite POISEUILLE-Strömung zwischen den Gegenelektroden. b) Verlauf des Parameters  $\xi$  im Vergleich zu Näherung (3.108) für  $30 \mu\text{m}$  hohe Elektroden mit einem Abstand von  $5 \mu\text{m}$ .

linearer Verlauf heraus. Zwischen ausgeschwenkten Elektroden verläuft das Geschwindigkeitsprofil parabelförmig.

Ein interessanter Effekt ergibt sich für den Übergang zwischen dem ein- und ausgeschwenkten Zustand. Dabei bildet sich eine POISEUILLE-Strömung auch zwischen den stationären Gegenelektroden aus. Abbildung 3.23a verdeutlicht dies. Die dadurch an den Seitenwänden der Gegenelektroden angreifenden, zusätzlichen Scherkräfte müssen von der bewegten Struktur aufgebracht werden und tragen somit zur Dämpfung des Scanner spiegels bei. Um beide POISEUILLE-Strömungen berücksichtigen zu können, werden zwei Strömungsparameter  $\xi_1$  und  $\xi_2$  benötigt. Da Finger- und Gegenelektroden die gleiche Höhe besitzen, sind die Oberflächen der Kanalinnenseiten beider Strömungen gleich. Es gilt daher:

$$\vec{F}_{\text{Poiseuille}} = -4\eta_{\text{eff}} \frac{A_s}{d_h} \vec{v} \xi_1 - 4\eta_{\text{eff}} \frac{A_s}{d_h} \vec{v} \xi_2 \quad \text{mit} \quad A_s = s(2d + w + 2l) \quad (3.106)$$

Dabei ist  $s$  die Auslenkung der Fingerelektrode in  $z'$ -Richtung;  $d$  ist der Elektrodenabstand,  $l$  und  $w$  sind Elektrodenlänge und -breite.

Fasst man nun  $\xi_1$  und  $\xi_2$  zu einem Parameter zusammen:

$$\xi_{\text{eff}} := \xi_1 + \xi_2 \quad (3.107)$$

ergibt sich mit  $\xi \rightarrow \xi_{\text{eff}}$  für die aus den POISEUILLE-Strömungen resultierende Dämpfungskraft wieder Gl. (3.103). Es ist allerdings zu beachten, dass  $\xi_{\text{eff}}$  im Gegensatz zu  $\xi$  Werte größer eins annehmen kann.

Der sich für eine typische Elektrodengeometrie ergebende Verlauf der Parameter  $\xi_1$  und  $\xi_2$  ist in Abb. 3.23b enthalten. Es wird deutlich, dass die POISEUILLE-Strömung vor allem im Bereich kleiner Auslenkungen eine große Rolle spielt. Bei großen Auslenkungen strömt das Fluid kaum noch zwischen den Elektroden hindurch. Es wird aufgrund seiner Viskosität mitgezogen; die Dämpfung verringert sich. Außerdem ist  $\xi$  nahezu konstant. Da bei kleinen Auslenkungen zusätzlich zur POISEUILLE-Strömung die COUETTE-Strömung

zwischen Fingerelektroden und Gegenelektroden einen Beitrag zur Dämpfung liefert, ist zu erwarten, dass die Dämpfung insgesamt auslenkungsabhängig ist und für große Auslenkungen abnimmt.

Damit die an einer Fingerelektrode angreifenden Dämpfungskräfte zumindest näherungsweise mithilfe der analytischen Zusammenhänge in Gl. (3.102) bzw. Gl. (3.103) bestimmt werden können, muss der sich für eine bestimmte Geometrie ergebende Verlauf des Strömungsparameters  $\xi$  mit einem analytischen Ausdruck angenähert werden. Dies kann beispielsweise mithilfe einer GAUSS-Funktion geschehen. Dabei muss jedoch sichergestellt werden, dass  $\xi_{\text{eff}}$  für große Auslenkungen nahezu konstant verläuft:

$$\xi_{\text{eff}} = \begin{cases} c_1 e^{-\frac{2(s-c_2)^2}{c_3}} & : s \leq s_T \\ \xi_T & : s > s_T \end{cases} \quad (3.108)$$

Die Werte für die Parameter  $c_1, c_2, c_3$  bzw.  $s_T$  und  $\xi_T$  ergeben sich aus einer Kurvenanpassung an die Ergebnisse des *FE*-Modells. Für  $1.5 \mu\text{m}$  breite Fingerelektroden mit einer Höhe von  $30 \mu\text{m}$  und einem Elektrodenabstand von  $5 \mu\text{m}$  ergibt sich auf diese Weise die folgende Näherung:

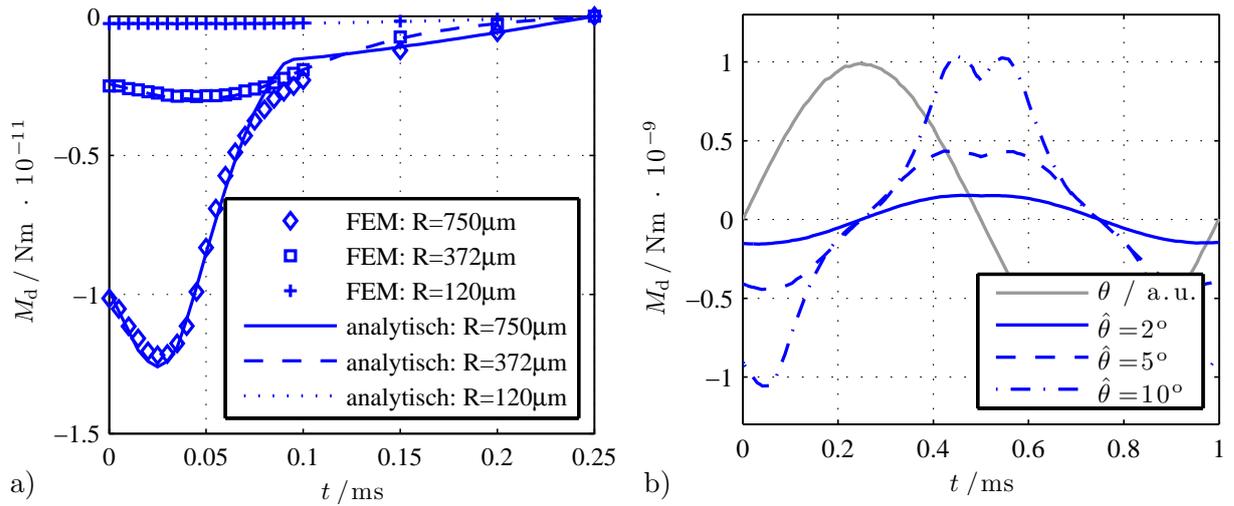
$$\xi_{\text{eff}} = \begin{cases} 1.6 e^{-\frac{2(s-10^{-5}\text{m})^2}{3.6 \cdot 10^{-9}\text{m}}} & : s \leq 7.1 \cdot 10^{-5}\text{m} \\ 0.2 & : s > 7.1 \cdot 10^{-5}\text{m} \end{cases} \quad (3.109)$$

Der entsprechende Verlauf für  $\xi_{\text{eff}}$  ist in Abb. 3.23b dargestellt. Mithilfe dieser Näherung und den Gln. (3.102) und (3.103) lassen sich die Dämpfungskräfte für nahezu beliebige Anordnungen von  $1.5 \mu\text{m}$  breiten Fingerelektroden mit einer Höhe von  $30 \mu\text{m}$  und einem Elektrodenabstand von  $5 \mu\text{m}$  bestimmen. Es muss lediglich beachtet werden, dass bei der Bestimmung der Kräfte nicht von einer Rotation, sondern von einer Translation in  $z'$ -Richtung ausgegangen wird. Diese Näherung führt zu einer zunehmenden relativen Abweichung des analytischen Modells für Fingerelektroden mit geringen Abständen zur Drehachse. Da jedoch in einer Kammelektrode die außen liegenden Fingerelektroden aufgrund der höheren Bahngeschwindigkeit und der größeren Hebelwirkung die Dämpfungseffekte dominieren (Abb. 3.24a), ist diese Eigenschaft des Modells in der Regel von geringer Bedeutung.

Es soll an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen werden, dass die in Gl. (3.109) vorgestellte Näherung für den Verlauf von  $\xi_{\text{eff}}$  nur für die in dem zugrunde liegenden *FE*-Modell gewählten Breite, Höhe und Abstand der Fingerelektroden gültig ist. Wird einer der Parameter verändert, müssen die Parameter der Näherung neu bestimmt werden. Dazu muss das *FE*-Modell entsprechend angepasst werden.

In Abbildung 3.24a sind die sich mit den Gln. (3.102), (3.103) und (3.94) ergebenden Drehmomente für drei Fingerelektroden mit unterschiedlichen Abständen zur Drehachse  $R$  dargestellt. Zum Vergleich enthält die Darstellung ebenfalls die mithilfe von *FEM*-Rechnungen ermittelten Momentenverläufe. Es ist erkennbar, dass beide Modelle eine gute Übereinstimmung zeigen.

Das für die Simulation eines Mikrosannerspiegels relevante, gesamte Dämpfungsmoment einer Kammelektrode ergibt sich durch Summation der Beiträge aller Fingerelektroden. Das Resultat entspricht typischerweise dem in Abb. 3.24b dargestellten Verlauf. Für kleine Auslenkungen ergibt sich ein um  $T/4$  bezüglich der Auslenkung phasenverschobener, näherungsweise sinusförmiger Verlauf für  $M_d$ . Der Dämpfungsfaktor  $\alpha_i$  kann dann als konstant betrachtet werden.



**Abb. 3.24:** Verlauf des von einer Kammelektrode verursachten Dämpfungsmoments. Als Beispiel dient die in [44] vorgestellte Teststruktur ( $f_x = 1 \text{ kHz}$ ,  $D = 1.5 \text{ mm}$ ). a) Vergleich des analytischen Modells mit einem fluidmechanischen *FE*-Modell anhand drei Fingerelektroden mit unterschiedlichem Abstand zur Drehachse  $R$  ( $\hat{\theta} = 10^\circ$ ); b) Verlauf der von der gesamten Kammelektrode verursachten Dämpfungsmomente bei verschiedenen Amplituden.

Mit Erhöhung der Amplitude verändert sich der Verlauf zunehmend. Es bilden sich signifikante lokale Maxima des Dämpfungsmoments bei Auslenkungen mit  $|\theta_i| \approx \theta_{c,i}$ , also beim Übergang vom eingeschwenkten in den ausgeschwenkten Zustand der Kammelektrode. Es gilt dann  $\alpha_i \neq \text{const}$  bzw.  $M_d \not\propto \dot{\theta}_i$ . Wie bereits in Abschnitt 2.3 erwähnt wurde, können die aus dieser Eigenschaft eines *Out-of-plane-comb*-Antriebs folgenden Nichtlinearitäten das Verhalten eines Mikros scannerspiegels relevant beeinflussen. So muss beispielsweise die aus dem Verlauf des Dämpfungsmoments resultierende Abweichung von einer sinusförmigen Schwingung beachtet werden (siehe dazu auch Abschnitt 5.3.4).

### 3.3.4 Dämpfungsmechanismen der bewegten Spiegelplatte

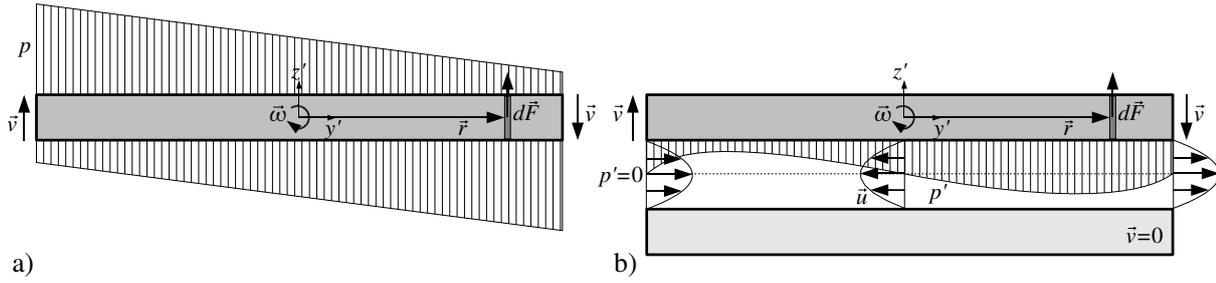
Neben den Antriebselektroden des Mikros scannerspiegels wechselwirken auch die bewegte Spiegelplatte bzw. im Fall von 2D-Scannern ebenfalls der bewegliche Rahmen mit dem umgebenden Fluid. Dabei lassen sich zwei Phänomene unterscheiden:

**Der Druckwiderstand** (auch Formwiderstand, Abb. 3.25a) ist für alle in einem Fluid bewegten Strukturen wirksam. Er resultiert aus den sich entsprechend den Lösungen der NAVIER-STOKES-Gleichungen ergebenden Druckunterschieden zwischen Vorder- und Rückseite der Struktur. Die resultierende Dämpfungskraft ergibt sich durch Integration über die Druckkomponenten entsprechend Gl. (3.93) [66]:

$$\vec{F}_{\text{Druck}} = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} c_d \rho_m |\vec{v}|^2 \frac{A_p}{2} \quad (3.110)$$

Dabei ist  $A_p$  die Projektionsfläche der Struktur auf die  $x'$ - $y'$ -Ebene;  $c_d$  ist ein experimentell oder mithilfe der *FEM* zu bestimmender, geometrieabhängiger Beiwert.

Für eine kippende Bewegung wirkt der Druckwiderstand nicht als Kraft, sondern als bremsendes Drehmoment. Dieses ergibt sich ebenfalls durch Integration über die Druck-



**Abb. 3.25:** Dämpfungsmechanismen kipper Platten. a) Druckwiderstand: Die Bewegung der Platte resultiert in einer Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite. b) *Squeeze-film*-Dämpfung: Wird die Platte nahebei einer weiteren Struktur – beispielsweise einer *Plan-Platten*-Elektrode (siehe Abschnitt 2.2.2) – verkippt, entsteht ein komplexer Druckverlauf unter der Platte. Außerdem treten laterale Strömungen unter der Platte auf.

komponenten. Es lässt sich jedoch auch entsprechend Gl. (3.94) mithilfe einer differentiellen Dämpfungskraft  $d\vec{F}_{\text{Druck}}$  darstellen:

$$\vec{M}_{\text{Druck}} = \iint_{(A_p)} \vec{r} \times d\vec{F}_{\text{Druck}} \quad (3.111)$$

Mit Gl. (3.110) und dem Zusammenhang zwischen Winkel- und Bahngeschwindigkeit  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  ergibt sich das durch den Druckwiderstand erzeugte Drehmoment einer dünnen, kippenden Platte näherungsweise zu:

$$\vec{M}_{\text{Druck}} \approx -\frac{c_d \rho_m}{2} \vec{\omega} |\vec{\omega}| \iint_{(A_p)} |\vec{r}|^3 dA \quad \text{mit} \quad \vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}} \quad (3.112)$$

Eine bemerkenswerte Eigenschaft des Druckwiderstands ist dessen quadratische Abhängigkeit von der Geschwindigkeit bzw. Winkelgeschwindigkeit. Da alle anderen Dämpfungseffekte linear mit der Geschwindigkeit ansteigen, ist aufgrund des Zusammenhangs  $|\vec{\omega}| \sim f\dot{\theta}$  mit einem steigenden Einfluss des Druckwiderstands für Mikros Scanner mit großen Frequenzen bzw. Auslenkwinkeln zu rechnen.

**Die *Squeeze-film*-Dämpfung** (auch Quetschströmung) entsteht bei der Bewegung einer Plattenstruktur nahebei einer weiteren Struktur entsprechend Abb. 3.25b. Dabei verändert sich der Spaltabstand zwischen den Strukturen, was zu einem Druckverlauf und folglich zu einer Strömung des Fluids führt. Dabei wird kinetische Energie der bewegten Platte in Strömungsenergie und thermische Energie umgewandelt. Für nahezu parallele Platten und im Verhältnis zu den Plattenabmessungen  $w$  und  $l$  kleine Spaltabstände  $d$  lässt sich die *Squeeze-film*-Dämpfung mithilfe analytischer Ausdrücke näherungsweise beschreiben [5, 84]. Dazu wird die REYNOLDSSche Schmierfilmgleichung, eine spezielle Form der NAVIER-STOKES-Gleichungen gelöst:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y'^2} = 12 \frac{\eta_{\text{eff}}}{d^3} v_{z'} \quad \text{mit der Randbedingung} \quad p'_{\text{Rand}} = 0 \quad (3.113)$$

Für diese POISSONSche Differentialgleichung mit  $v_{z'} = f(x', y')$  als Geschwindigkeit der Platte in Richtung der Plattennormalen und  $p' = p - p_0$  als Druckänderung existieren

**Tabelle 3.4:** *Einfluss der Squeeze-film-Dämpfung.* Die sich für eine Höhe der Rückseitengrube von  $d = 390 \mu\text{m}$  (vgl. Abb. 2.4, S. 11) ergebenden, aus der *Squeeze-film*-Dämpfung resultierenden mittleren Dämpfungsfaktoren liegen immer wenigstens eine Größenordnung unterhalb der experimentell ermittelten Werte.

Design-name	Apertur $D/\text{mm}$	Frequenz $f_x/\text{kHz}$	Amplitude $\hat{\theta}_x/^\circ$	mittlere Dämpfungsfaktoren $/\text{Nm}\cdot\text{s}$	
				$\bar{\alpha}_x$ (experimentell)	$\alpha_{\text{Sq}} = -M_{\text{Sq},x}/\dot{\theta}_x$
<i>EO</i>	0.5	16.00	28	$7.87 \cdot 10^{-14}$	$1.26 \cdot 10^{-19}$
<i>SINUS</i>	1.5	0.25	15	$1.25 \cdot 10^{-12}$	$1.09 \cdot 10^{-14}$
<i>S30150</i>	3.0	0.15	12	$3.12 \cdot 10^{-11}$	$2.81 \cdot 10^{-12}$

zahlreiche analytische Lösungen. Die Dämpfungskraft ergibt sich, entsprechend Gl. (3.93), durch Integration über den Druck entlang der Plattenunterseite  $A_p$ . Das auf eine um die  $x'$ -Achse kippende Platte wirkende Drehmoment  $M_{\text{Sq},x'}$  lässt sich dann analog zu Gl. (3.111) bestimmen. Es ergibt sich zu:

$$M_{\text{Sq},x'} = \iint_{(A_p)} p' y' dA \quad (3.114)$$

Da es sich bei Gl. (3.113) um eine lineare Differentialgleichung handelt, gilt unter den Annahmen  $\eta_{\text{eff}} \approx \text{const}$  und  $d \approx \text{const}$ :

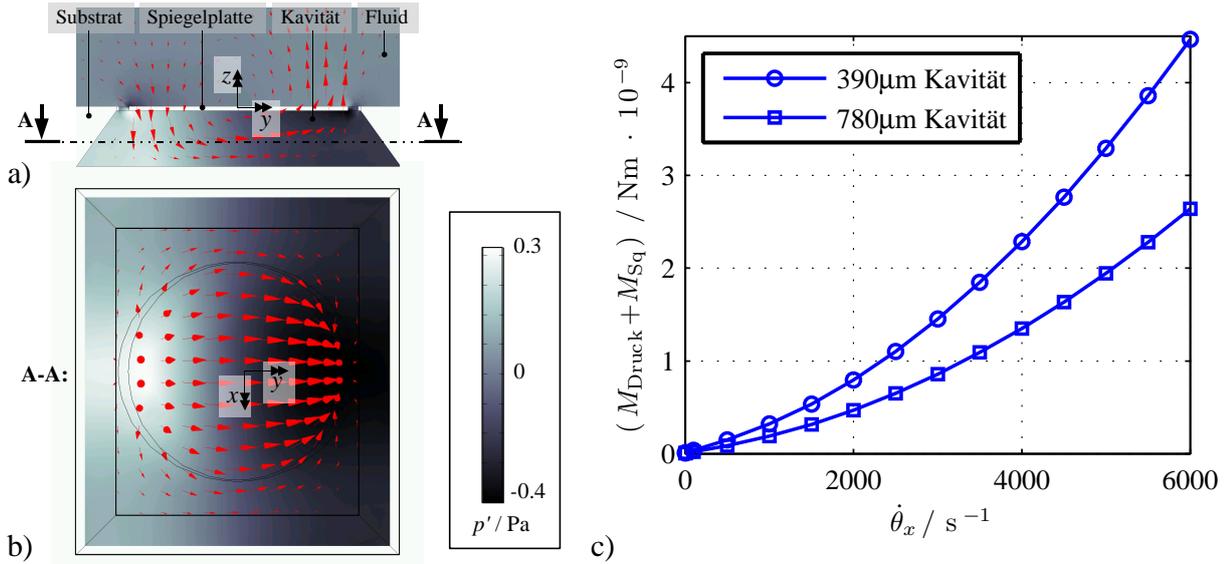
$$M_{\text{Sq},x'} \sim v_{z'} \quad \text{und damit} \quad M_{\text{Sq},x'} \sim f_x \hat{\theta}_x \quad (3.115)$$

Die durch die *Squeeze-film*-Dämpfung hervorgerufenen Momente steigen also im Gegensatz zu den aus dem Druckwiderstand entstehenden Momenten linear mit der Frequenz und Amplitude des Scanners an.

Typische Beispiele für durch den *Squeeze-film*-Effekt hervorgerufene Druckverläufe und daraus resultierende Dämpfungsfaktoren für einfache Plattengeometrien finden sich in [5]. Mithilfe numerischer Methoden kann der Einfluss der *Squeeze-film*-Dämpfung für beliebig komplexe Strukturen bestimmt werden. Dazu wird die REYNOLDSSche Schmierfilmgleichung (3.113) mit den entsprechenden Randbedingungen gelöst [84]. In Anhang D.2 sind die sich auf diese Weise ergebenden Druckverläufe für zwei typische Mikroscooperspiegel dargestellt. Die resultierenden Dämpfungsfaktoren sind in Tabelle 3.4 enthalten. Lediglich für sehr große Spiegelplatten mit  $D > 3 \text{mm}$  erreicht der Einfluss des *Squeeze-film*-Effekts demnach 10 % der gesamten Dämpfung.

Wie aus den in Tabelle 3.4 enthaltenen Werten hervorgeht, spielt die *Squeeze-film*-Dämpfung für Mikroscooperspiegel mit einer Höhe der Rückseitengrube von mindestens  $390 \mu\text{m}$  eine untergeordnete Rolle. Es kann daher angenommen werden, dass die Dämpfung vor allem von der viskosen Strömung in den Kammelektroden und von dem Druckwiderstand der Spiegelplatte bzw. des beweglichen Rahmens bestimmt wird. Dabei ist für den Druckwiderstand bei Bauelementen mit hohen Frequenzen bzw. Amplituden mit einem steigenden Einfluss zu rechnen.

Wie anhand von Experimenten oder numerischen Berechnungen nachvollzogen werden kann, wird der für die Bestimmung des Druckwiderstands benötigte Beiwert  $c_d$  stark von



**Abb. 3.26:** Einfluss der Rückseitengrube auf die Dämpfung. Ergebnisse der fluidmechanischen *FE*-Analyse eines Mikrosannerspiegels beim Nulldurchgang der Auslenkung ( $D = 1.5 \text{ mm}$ ,  $\dot{\theta}_x = 500 \text{ rad/s}$ ). a) Schnitt durch das Strömungsprofil in der Mitte des Scanners (Seitenansicht); b) Schnitt durch das Strömungsprofil innerhalb der Kavität (Draufsicht); c) resultierende Dämpfungsmomente.

der Geometrie der Rückseitengrube (Kavität) des Mikrosannerspiegels beeinflusst. Stellt die Dämpfung für eine Anwendung einen besonders kritischen Punkt dar, kann sie anhand nichtlinearer *FE*-Analysen bestimmt bzw. optimiert werden. Entsprechende Ergebnisse sind beispielhaft in Abb. 3.26 enthalten. Die in Abb. 3.26c enthaltenen Momentenverläufe ergeben sich dabei entsprechend Gl. (3.93) bzw. Gl. (3.94) aus den Druckverhältnissen an der Oberfläche der bewegten Struktur. Bei der Interpretation muss allerdings beachtet werden, dass sowohl die Beiträge der Druck- als auch der *Squeeze-film*-Dämpfung in den Verläufen enthalten sind. Nach einer Kurvenanpassung mithilfe eines Polynoms zweiter Ordnung lässt sich anhand des quadratischen Koeffizienten der Beiwert  $c_d$  ermitteln.

Wie ebenfalls anhand Abb. 3.26c deutlich wird, kann der Einfluss der Plattendämpfung durch Vergrößerung der Rückseitengrube signifikant verringert werden. Dies ist vor allem für große, schnelle Spiegel interessant. Für diese kann die Gesamtdämpfung auf diese Weise durchaus um 25 % verringert werden. Entsprechend Gl. (2.21) entspricht das einer Erhöhung der Amplitude von ca. 10 %.

Für typische Rückseitengruben mit einer Höhe von  $390 \mu\text{m}$  ergeben sich für runde oder leicht elliptische Spiegelplatten Werte in einem Bereich von  $c_d \approx 5 \dots 10$ . Für rechteckige Spiegelplatten mit  $w \approx l$  gilt  $c_d \approx 30 \dots 40$ . Die von einer rechteckförmigen Spiegelplatte verursachten Dämpfungsmomente sind also im Vergleich zu runden Spiegelplatten erheblich größer. Dies muss beim Entwurf beachtet werden.

Die gegenseitige, wechselseitige Beeinflussung der Dämpfungsmechanismen einer schwingenden Spiegelplatte bei gleichzeitiger Oszillation des beweglichen Rahmens wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht näher untersucht. Anhand von experimentell ermittelten Werten lässt sich jedoch darauf schließen, dass zumindest für  $f_x \gg f_y$  nur eine geringfügige Einflussnahme zu erwarten ist. Beim Entwurf können daher beide Achsen getrennt voneinander untersucht werden. Der bewegliche Rahmen wird dabei als Spiegelplatte von entsprechender Form und Größe betrachtet.

### 3.4 Randbedingungen der Elektrik bzw. Elektrostatik

Aufgrund des in *Fraunhofer IPMS* Mikroscooperspiegeln zum Einsatz kommenden elektrostatischen Antriebsprinzips müssen beim Entwurf eine Reihe von elektrischen bzw. elektrostatischen Randbedingungen berücksichtigt werden. Diese betreffen sowohl Effekte, die die Betriebssicherheit bzw. die Zuverlässigkeit der Bauelemente beeinflussen als auch weniger harte Kriterien wie Spannungsbedarf oder Leistungsaufnahme. Letztere stellen zwar nicht die Funktionsfähigkeit des Bauelements in Frage, können jedoch ebenfalls zur Folge haben, dass für eine bestimmte Anwendung alternative Technologien den Vorzug erhalten. So spielt beispielsweise die Leistungsaufnahme für mobile Anwendungen eine entscheidende Rolle.

Zur Bestimmung der elektrostatischen Kraft- bzw. Momentenverläufe wird im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich der auslenkungsabhängige Kapazitätsverlauf, also die im elektrischen Feld gespeicherte Energie bzw. deren Änderung betrachtet. Dazu sind, um den Anstieg des Verlaufs zu ermitteln, zumindest in numerischen Modellen wenigstens zwei Rechenschritte notwendig. Prinzipiell ist es mithilfe des MAXWELLSchen-Spannungstensors auch möglich, die in einer Elektrodenanordnung wirkende elektrostatische Kraft direkt zu berechnen [63, 85]. Es hat sich jedoch gezeigt, dass diese Methode vergleichsweise stark von der Wahl der Unterteilungen z.B. eines *FE*-Netzes abhängig ist und daher selbst in Netzen mit sehr geringen Diskretisierungsabständen noch große Abweichungen bzw. schlechte Konvergenzeigenschaften (siehe auch Abschnitt 5.1.2) auftreten können [86]. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass der MAXWELLSche Spannungstensor an Ecken und Kanten einer Modellgeometrie nicht definiert ist. Die Bestimmung der elektrostatischen Kräfte mithilfe von Energiebetrachtungen weist diese Nachteile nicht auf.

#### 3.4.1 Antriebskapazitäten und Randfelder

Die sich für den *Out-of-plane-comb*-Antrieb ergebende, auslenkungsabhängige Charakteristik der Antriebskapazität ist entscheidend für die dynamischen Eigenschaften der Bauelemente. Wie aus Abschnitt 2.3.2 bzw. dem folgenden Kapitel 4 hervorgeht, ist der Verlauf des sich daraus ergebenden elektrostatischen Moments in der Nähe der Ruhelage des Mikroscoopers außerdem entscheidend für die Größe und Gestalt der instabilen Region des Bauelements und damit für das Schwingverhalten. Die in Abschnitt 2.2.2 bzw. Abschnitt 2.3.1 vorgestellten analytischen Modelle zur Bestimmung des Verlaufs der Kapazität bzw. der resultierenden elektrostatischen Kraft (vgl. Abb. 2.6 auf S. 15) werden dem nicht ausreichend gerecht. Der sich daraus ergebende Verlauf der Antriebsmomente weist einen Sprung genau bei der Ruhelage des Bauelements auf. Folglich würde der für das Anschwingen eines Bauelements entscheidende Anstieg des elektrostatischen Moments in der Ruhelage unendlich. Dies ist physikalisch nicht sinnvoll und führt zu falschen Ergebnissen.

Der Grund für die Abweichung des analytischen Modells nahe der Ruhelage liegt in der Vernachlässigung von Randeffekten innerhalb des elektrischen Felds. Diese lassen sich für komplexe Geometrien nur mithilfe numerischer Analysen ausreichend genau beschreiben. Dabei werden die MAXWELLSchen Gleichungen [87] unter Beachtung der entsprechenden Randbedingungen gelöst. Mit dem Ansatz

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \tag{3.116}$$

ergibt sich die folgende POISSONSche Differentialgleichung als Bedingung für die Erfüllung der MAXWELLSchen Gleichungen im elektrostatischen Feld [85, 87]:

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi - \vec{P}) = \rho \quad \text{mit der Randbedingung} \quad \varphi_{\text{Rand},i} = \varphi_i \quad (3.117)$$

Dabei sind die elektrische Polarisierung  $\vec{P}$  und die Raumladungsdichte  $\rho$  für den betrachteten Fall gleich null. Die Randbedingung  $\varphi_{\text{Rand},i}$  legt die elektrischen Potentiale an den Randflächen der Elektroden fest. Aus dem sich für  $\varphi$  ergebenden, räumlichen Verlauf kann die elektrische Kapazität einer beliebigen Elektrodenanordnung bestimmt werden. Sie ergibt sich für zwei Elektroden mit den voneinander verschiedenen elektrischen Potentialen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zu

$$C = \left| \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \right| \quad (3.118)$$

mit  $q$  als elektrischer Ladung der kapazitiven Anordnung. Unter Berücksichtigung von Gl. (3.116) und dem Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und der dielektrischen Verschiebung  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  ergibt sich die Kapazität zu:

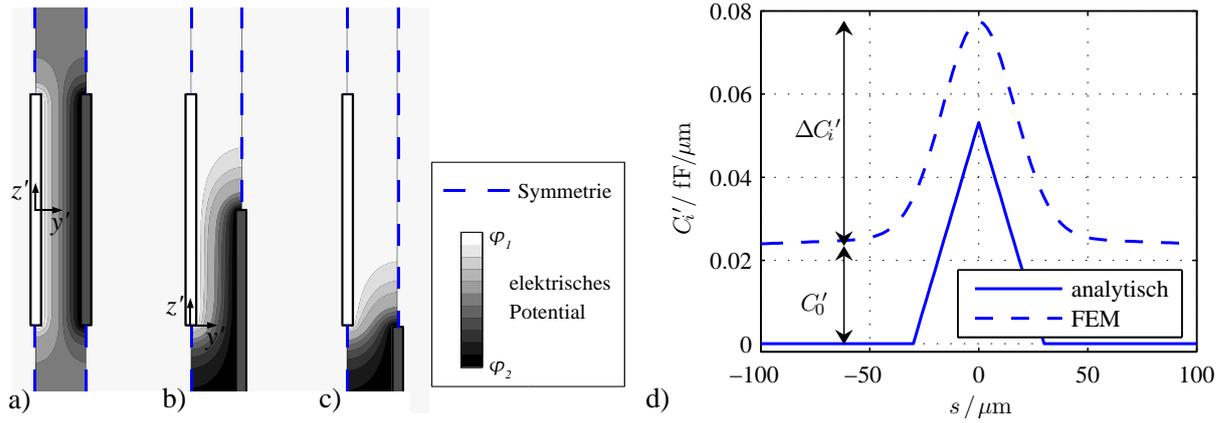
$$C = \left| \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_2} \iint_{(A)} \vec{D} d\vec{A} \right| = \left| \frac{\varepsilon}{\varphi_1 - \varphi_2} \iint_{(A)} \nabla \varphi d\vec{A} \right| \quad (3.119)$$

Dabei ist  $A$  eine beliebige, alle Feldlinien umfassende Fläche im Feldraum (beispielsweise die Oberfläche einer der beiden Elektroden).

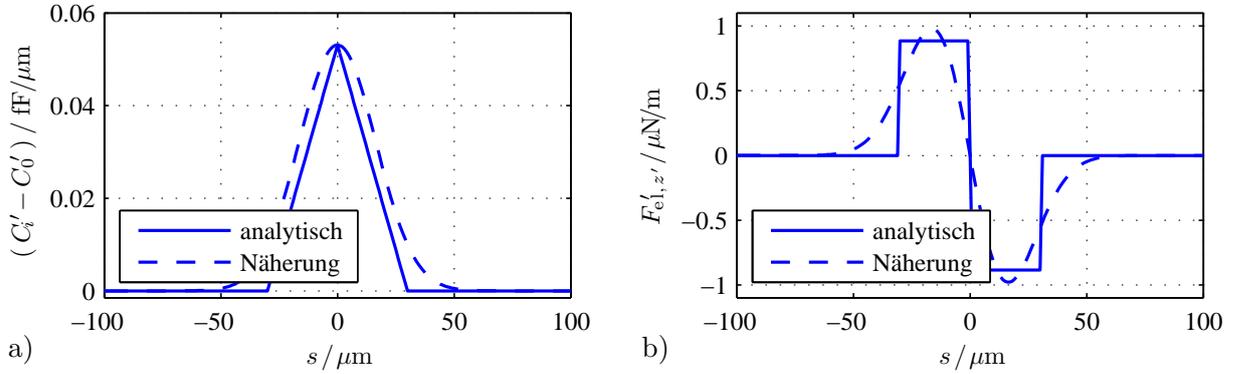
Entsprechende Untersuchungen mithilfe der *FEM* wurden bereits in [3] für 20  $\mu\text{m}$  hohe Elektrodenstrukturen vorgestellt. Die Ergebnisse wurden jedoch ausschließlich zur Überprüfung des vorgestellten analytischen Modells genutzt. In den Arbeiten von ATAMAN et al. [18, 48] wurden ähnliche Untersuchungen an 30  $\mu\text{m}$  hohen Strukturen durchgeführt. Dabei wurde der auslenkungsabhängige Kapazitätsverlauf einer Fingerelektrode mithilfe eines dreidimensionalen *FE*-Modells bestimmt. Dieser Ansatz hat den Nachteil, dass sich die auf diese Weise ermittelten Ergebnisse nur schwer verallgemeinern lassen. Ändert sich die Geometrie der Fingerelektroden, müssen die vergleichsweise aufwändigen 3D-Simulationen wiederholt werden.

Da der qualitative Verlauf des elektrischen Felds auch bei veränderter Geometrie der Fingerelektroden erhalten bleibt, liegt die Möglichkeit nahe, basierend auf den Ergebnissen von *FE*-Rechnungen, eine Größengleichung zu erstellen. Vernachlässigt man zunächst Randeffekte an der Basis und am Ende der Fingerelektroden sowie deren Verkippung, lassen sich die dafür benötigten Charakteristika anhand von zweidimensionalen Feldmodellen bestimmen. Diese sind wesentlich weniger rechenaufwändig. Es ergibt sich ein auslenkungsabhängiger Kapazitätsbelag  $C'_i$  (Kapazität pro Grabenlänge). Die sich mit einem solchen *FE*-Modell ergebenden Feldverläufe sind in Abb. 3.27a-c für verschiedene Auslenkungen dargestellt. Abbildung 3.27d enthält den sich ergebenden Verlauf des Kapazitätsbelags für eine 30  $\mu\text{m}$  hohe Struktur. Er ähnelt dem des analytischen Modells. Erwartungsgemäß ist der Kapazitätsverlauf im Bereich kleiner Auslenkungen stetig differenzierbar. Die resultierenden Momente weisen demnach keinen Sprung auf. Auch ist der gesamte Verlauf zu größeren Werten hin verschoben. Wie anhand von Untersuchungen bei Variation der Geometrie gezeigt werden kann, lässt sich der Verlauf des Kapazitätsbelags, zumindest für Elektroden mit einer im Verhältnis zum Abstand großen Höhe ( $h \gg d$ ), mit der folgenden Funktion annähern:

$$C'_i \approx \Delta C'_i e^{-1.665(s/h)^2} + C'_0 \quad \text{mit} \quad \Delta C'_i = \varepsilon \frac{h}{s}, \quad C'_0 \approx \text{const} \quad (3.120)$$



**Abb. 3.27:** Einfluss der Randeffekte des elektrischen Felds. Mithilfe der *FEM* kann der Kapazitätsverlauf der Antriebselektroden unter Berücksichtigung der Randfelder ermittelt werden. Dargestellt sind die Potentialverläufe für  $30 \mu\text{m}$  hohe Elektroden mit  $5 \mu\text{m}$  Abstand und drei verschiedene Auslenkungen: a)  $s = 0 \mu\text{m}$ ; b)  $s = 15 \mu\text{m}$ ; c)  $s = 30 \mu\text{m}$ ; d) resultierender Verlauf des Kapazitätsbelags.



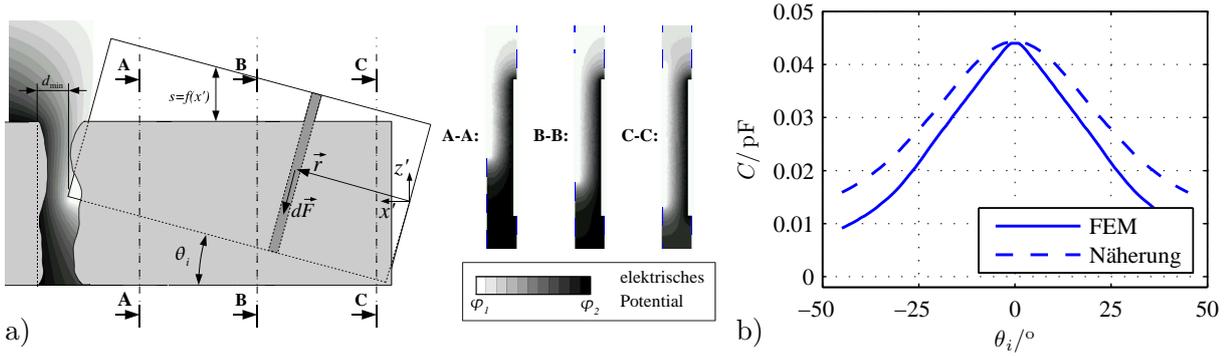
**Abb. 3.28:** Näherung für den Kapazitätsverlauf. a) Verlauf des auslenkungsabhängigen Kapazitätsbelags, entsprechend Gl. (3.120), für eine  $30 \mu\text{m}$  hohe Struktur mit  $5 \mu\text{m}$  Elektrodenabstand; b) resultierender Verlauf der Kraft pro Grabenlänge.

Damit steht ein geschlossen differenzierbarer Ausdruck für den auslenkungsabhängigen Verlauf der Kapazität zur Verfügung. Entsprechend dem Zusammenhang zwischen elektrostatischer Kraft und Kapazitätsänderung (Gl. (2.5) auf S. 13) ergibt sich für die Kraft pro Grabenlänge näherungsweise der folgende Ausdruck:

$$F'_{\text{el},z'} \approx -1.665 \Delta C'_i U^2 \frac{s}{h^2} 0.1891^{(s/h)^2} \quad (3.121)$$

Erwartungsgemäß ist die elektrostatische Kraft nicht abhängig von dem aus den Randfeldern resultierenden Kapazitätsbelag  $C'_0$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dieser daher zu null gesetzt werden.

Der sich aus der Näherung (3.120) ergebende Verlauf ist in Abb. 3.28a dargestellt. Abbildung 3.28b enthält die resultierende Kraft pro Grabenlänge. Zum Vergleich sind die Verläufe der in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten analytischen Modelle ebenfalls enthalten. Es wird deutlich, dass die gesamte Änderung der Kapazität  $\Delta C_i$  für ausreichend große Auslenkungen mit der des analytischen Modells identisch ist. Die sich ergebende einkoppelbare Energie ist demnach gleich. Der auf Basis des analytisch bestimmten Kapazitätsverlaufs ermittelte Zusammenhang zwischen Antriebsspannung und Amplitude der Auslenkung (Gl. (2.21) auf S. 21) bleibt daher gültig.



**Abb. 3.29:** Grenzen der Näherung für den Kapazitätsverlauf. a) Bei einer Anordnung der Elektroden nahe der Drehachse verkippen diese noch im aktiven (eingeschwenkten) Zustand stark. b) mithilfe der *FEM* bestimmter Kapazitätsverlauf einer achsnahen, orthogonal ausgerichteten Fingerelektrode ( $l = 180 \mu\text{m}$ ,  $w = 3 \mu\text{m}$ ,  $h = 80 \mu\text{m}$ ) im Vergleich zur Näherung (3.120).

Die sich mithilfe der Näherungen (3.120) und (3.121) ergebenden Verläufe der Kapazität bzw. der elektrostatischen Kraft können genutzt werden, um die Eigenschaften beliebiger *Out-of-plane*-Elektrodenanordnungen zu ermitteln. Die absoluten Größen ergeben sich dabei jeweils durch Integration über den Verlauf der offenen Strukturgräben:

$$C_i = \int_{(K_{\text{Tr}})} C'_i d\xi \quad \text{mit} \quad C'_i = f(\xi) \quad (3.122)$$

$$\vec{F}_{\text{el}} = \int_{(K_{\text{Tr}})} \vec{F}'_{\text{el}} d\xi \quad \text{mit} \quad \vec{F}'_{\text{el}} = f(\xi) \quad (3.123)$$

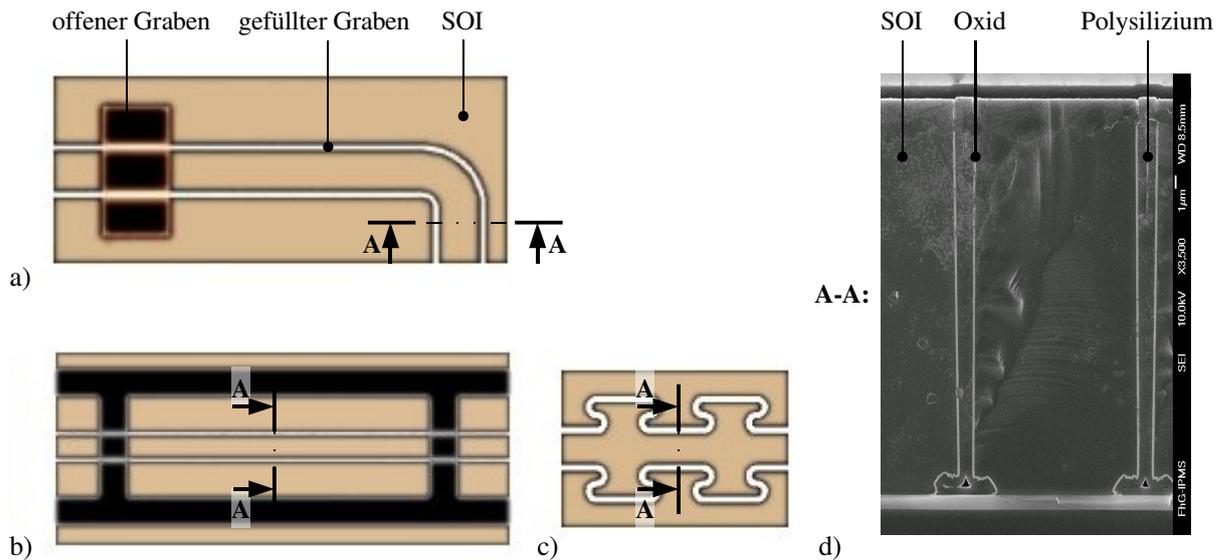
Dabei entspricht  $(K_{\text{Tr}})$  dem mit  $\xi$  parametrisierten Verlauf der relevanten offenen Strukturgräben. Das elektrostatische Drehmoment ergibt sich dann zu

$$\vec{M}_{\text{el}} = \int_{(K_{\text{Tr}})} \vec{r} \times \vec{F}'_{\text{el}} d\xi \approx \int_{(K_{\text{Tr}})} y' \vec{e}_{x'} \times F'_{\text{el},z'} \vec{e}_{z'} d\xi \quad (3.124)$$

mit  $\vec{r} = f(\xi)$  als zur Drehachse orthogonalem Ortsvektor, entsprechend Abb. 3.29.

Bei der Anwendung der in diesem Abschnitt vorgestellten Zusammenhänge ist zu beachten, dass die genutzten Vereinfachungen für geringe Abstände der Elektroden zur Drehachse an Gültigkeit verlieren. Der Grund dafür liegt in der zunehmenden Verkipfung der Anordnung innerhalb des Auslenkungsbereichs mit relevanter Kapazitätsänderung. Abbildung 3.29 verdeutlicht dies. Es ist erkennbar, dass zumindest für orthogonal zur Drehachse ausgerichtete Gräben der in Abb. 3.27 dargestellte qualitative Verlauf des elektrischen Potentials weitgehend erhalten bleibt. In achsnahen, parallel zur Drehachse angeordneten Gräben ändert sich der Feldverlauf jedoch stark. Näherung (3.120) ist dann nicht mehr anwendbar.

Abbildung 3.29b enthält den mithilfe eines dreidimensionalen *FE*-Modells ermittelten Kapazitätsverlauf einer achsnahen Fingerelektrode. Es wird deutlich, dass die Verkipfung der Elektrode einen signifikanten Einfluss auf die Kapazität hat. Selbst bei großen Auslenkungen ergeben sich im Vergleich zur Näherung erhebliche Unterschiede bezüglich der Absolutwerte und des Anstiegs der Kapazität. Für kleine Auslenkungen resultieren vor allem Abweichungen bezüglich des Anstiegs.



**Abb. 3.30:** Isolationsstrukturen in Fraunhofer IPMS Mikroscooperspiegeln. a) gefüllter Isolationsgraben; b) Kombination aus gefüllten Gräben und offenen Gräben zur Verringerung der parasitären Kapazität; c) gefüllter Isolationsgraben mit erhöhter mechanischer Stabilität [31]; d) REM-Aufnahme einer gefüllten Isolationsstruktur im Profil.

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Näherung kann demnach ausschließlich zur Bestimmung der Charakteristika von Elektrodenanordnungen mit ausreichend großem Abstand zur Drehachse ( $r \gg h$ ) genutzt werden. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, müssen weitere Untersuchungen durchgeführt werden. Für Fraunhofer IPMS Mikroscooperspiegel stellt dies jedoch in der Regel kein Problem dar, da hier der Mindestabstand der Elektroden für  $30 \mu\text{m}$  hohes SOI standardmäßig  $120 \mu\text{m}$  beträgt. Der Grund dafür liegt in der Einhaltung von Mindestabständen zwischen Strukturen mit unterschiedlichen elektrischen Potentialen.

### 3.4.2 Spannungsfestigkeit

Die Trennung der für den Antrieb bzw. für integrierte Sensoren [27] benötigten elektrischen Potentiale wird mithilfe von geätzten Gräben in der SOI-Schicht des Bauelements realisiert. Bezüglich der Spannungsfestigkeit müssen dabei zumindest zwei Mechanismen berücksichtigt werden. Zum einen weisen die in den gefüllten Gräben (Abschnitt 2.1 bzw. Abb. 3.30) zum Einsatz kommenden Isolatormaterialien nur eine begrenzte Spannungsfestigkeit auf, zum anderen muss die Gefahr eines elektrischen Durchschlags in einem offenen Graben, beispielsweise zwischen den Antriebselektroden, in Betracht gezogen werden.

**Gefüllte Isolationsgräben** (Abb. 3.30a-c) realisieren zusätzlich zu einer elektrischen Isolation eine mechanische Verbindung<sup>14</sup>. Sie bestehen aus geätzten Gräben, deren Seitenwände mit einer elektrisch isolierenden Schicht, beispielsweise Siliziumdioxid oder Siliziumnitrid, versehen werden. Die mechanische Verbindung wird durch eine Füllung mit polykristallinem Silizium realisiert. Durch Ausbildung einer Mäanderstruktur (Abb. 3.30c) kann dabei die mechanische Belastbarkeit erhöht werden [31].

<sup>14</sup>Die in Abb. 3.30b dargestellte Variante kommt nicht in freistehenden SOI-Schichten zum Einsatz. Das darunterliegende Substrat realisiert somit eine mechanische Verbindung trotz offener Gräben.

**Tabelle 3.5:** *Elektrische Eigenschaften der Isolationsstrukturen.* Die Spannungsfestigkeiten beziehen sich auf Teststrukturen mit einer Kombination aus Siliziumdioxid ( $\approx 180$  nm) und Siliziumnitrid ( $\approx 135$  nm) als Isolator [31, 88].

Eigenschaft	doppelt, gefüllt Abb. 3.30a	gefüllt und offen Abb. 3.30b	Mäanderstruktur Abb. 3.30c
Spannungsfestigkeit $\max \hat{U}_i$	250 V (230 V) <sup>‡</sup>	$\approx 400$ V	230 V
typ. Ableitungsbelag $G'$	50 pS/mm	$\rightarrow \infty$ <sup>§</sup>	109 pS/mm
typ. Kapazitätsbelag $C'$	1.4 pF/mm	13 fF/mm	3.1 pF/mm

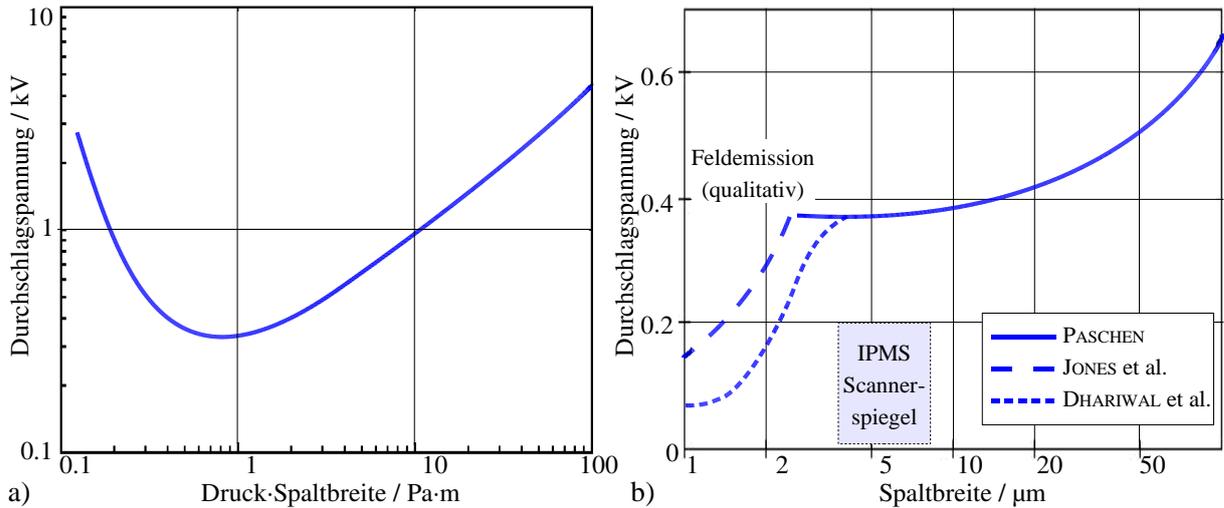
<sup>‡</sup>Für Isolationsgräben mit Übergang vom Randbereich des Chips (mit Substrat unter *SOI*) zur Mitte (ohne Substrat unter *SOI*, vgl. Abb. 2.4 auf S. 11) reduziert sich die Spannungsfestigkeit.

<sup>§</sup>elektrischer Widerstand größer als der verfügbare Messbereich

Die Spannungsfestigkeit der gefüllten Gräben wird nicht ausschließlich von der Durchschlagsfestigkeit des Isolatormaterials bestimmt. Diese liegt für Siliziumdioxid in einer Größenordnung von  $1000 \text{ V}/\mu\text{m}$ . Bei einer Dicke der Isolation von ca. 200 nm ergibt sich eine Spannungsfestigkeit von ca. 200 V je Grabenwand. Für eine idealisierte Isolationsstruktur, bestehend aus zwei parallelen Isolationsgräben (Abb. 3.30a), ergibt sich demnach eine theoretische Spannungsfestigkeit in der Größenordnung von 800 V. Die experimentell ermittelten Spannungsfestigkeiten liegen deutlich unterhalb dieses theoretischen Maximums [88]. Selbst für Isolationsstrukturen mit einer zusätzlichen isolierenden Schicht aus Siliziumnitrid an den Grabenwänden ergeben sich lediglich Werte in der Größenordnung von 200 V (vgl. Tabelle 3.5). Die Gründe für die großen Abweichungen der experimentell bestimmten Durchbruchspannung vom theoretischen Maximum liegen in Fertigungstoleranzen bei der Ätzung der Gräben und bei der Abscheidung der Isolatormaterialien. Diese resultieren in Abweichungen der Isolationswiderstände. Da innerhalb einer Struktur mehrere Isolationswiderstände in Reihe angeordnet sind, entsteht über der Isolation mit dem jeweils höchsten Widerstand der größte Spannungsfall, was zu einem früheren Ausfall bei Erhöhung der Spannung führt. Die Spannungsfestigkeit steigt daher nicht proportional mit der Anzahl der in Reihe geschalteten Isolationen.

**Offene Isolationsgräben** (Abb. 3.30b bzw. Abb. 2.7b auf S. 18) kommen hauptsächlich zur Definition der beweglichen Teile bzw. der Antriebselektroden eines Mikroscoopers zum Einsatz. Das umgebende Fluid wirkt dabei als Isolator. Die Spannungsfestigkeit wird daher von der maximalen Feldstärke innerhalb der Grabenstruktur bzw. der Durchschlagfeldstärke des Fluids bestimmt.

Als Durchschlagfeldstärke wird diejenige Feldstärke bezeichnet, ab der eine statistisch auftretende Ionisation zu einer Ionenlawine führt. Da ein solcher Vorgang stark von der freien Weglänge  $\mathcal{L}$  innerhalb des Fluids bestimmt wird, besteht eine Abhängigkeit von der Temperatur und dem Druck des Fluids (vgl. Gl. (3.84) auf S. 64). Nimmt die freie Weglänge Werte in der Größenordnung des Elektrodenabstands  $d$  an (oder umgekehrt), treten zusätzliche Effekte auf. Mit steigendem Verhältnis  $\mathcal{L}/d$  wächst die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ion mit der benötigten Ionisierungsenergie eine Elektrode erreicht, bevor ein ionisierender Stoß mit einem anderen Teilchen stattfinden kann [3, 89]. Die Durchschlagfeldstärke steigt daher mit geringer werdendem Elektrodenabstand an. Dieser Zusam-

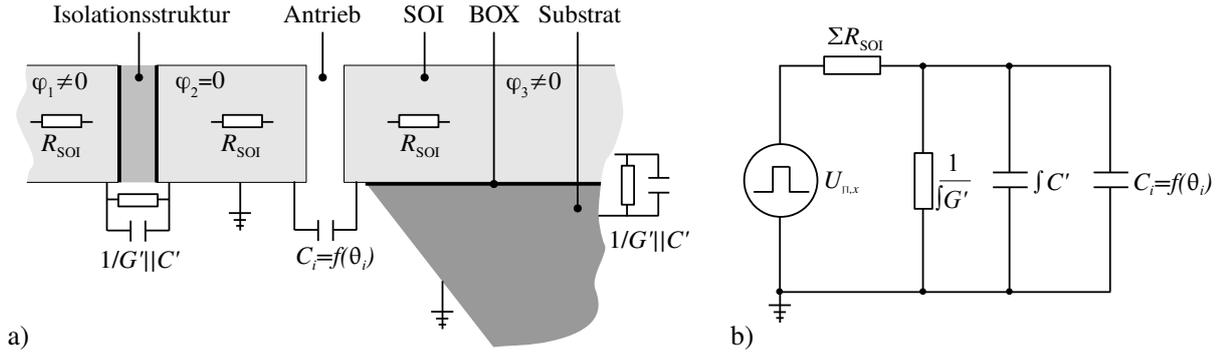


**Abb. 3.31:** Durchschlagsspannungen für Mikrostrukturen in Luft. a) PASCHEN-Kurve für Luft [3]; b) modifizierte PASCHEN-Kurve unter Berücksichtigung der Feldemission in Luft bei konstantem Druck  $p = p_0$  [90].

menhang wird üblicherweise mithilfe des PASCHEN-Gesetzes beschrieben. Es besagt, dass in einem homogenen Feld die Durchschlagsspannung eine Funktion des Produkts aus Gasdruck und freier Weglänge (Schlagweite) ist. Es ergibt sich der in Abb. 3.31a dargestellte Verlauf.

Für sehr geringe Elektrodenabstände  $d < 4 \mu\text{m}$  kann ein von der PASCHEN-Kurve abweichender Verlauf der Durchschlagsspannung beobachtet werden [89, 90]. Es wird angenommen, dass es aufgrund von minimalen Oberflächenrauigkeiten der Elektroden zu starken lokalen Überhöhungen der elektrischen Feldstärke kommt. Wird dabei eine Größenordnung von  $10^9 \text{ V/m}$  erreicht, können Elektronen aus dem Kathodenmaterial austreten. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Feldemission (FOWLER-NORDHEIM-Tunneling, Theorie nach STRATTON, [91]). Die resultierenden Durchschlagsspannungen und Stromdichten sind stark vom lokalen elektrischen Feld und von der Beschaffenheit des Kathodenmaterials abhängig. Die Größenordnung der Durchschlagsspannung für eine bestimmte Elektrodenanordnung lässt sich daher nur anhand experimenteller Untersuchungen bestimmen. In Abbildung 3.31b sind die Resultate der Arbeitsgruppen um JONES (Silizium-Kathoden, [90]) und DHARIWAL (Metall-Kathoden, [89]) dargestellt. Es wird deutlich, dass Feldemissionseffekte für *Fraunhofer IPMS* Mikros scannerspiegel mit Elektrodenabständen bzw. Grabenbreiten von typischerweise  $3 - 8 \mu\text{m}$  keine entscheidende Rolle spielen. Erst bei einem Elektrodenabstand von ca.  $2 \mu\text{m}$  erreicht die Durchbruchspannung den Bereich der genutzten Pulsspannungen.

Es soll an dieser Stelle noch darauf hingewiesen werden, dass sich die tatsächlichen Abstände der Elektroden im ausgelenkten Zustand des Bauelements erheblich verringern können (vgl. Abb. 3.29). Dies gilt vor allem für Isolationsgräben, welche parallel und nahe zur Drehachse angeordnet sind. Diese Tatsache muss beim Entwurf unbedingt beachtet werden. Als Gegenmaßnahmen können beispielsweise die Breiten der betroffenen Gräben erhöht werden.



**Abb. 3.32:** Ersatzschaltbild eines Fraunhofer IPMS Mikrosannerspiegels. a) Ursachen für parasitäre Widerstände und Kapazitäten; b) stark vereinfachtes Ersatzschaltbild eines 1D-Mikrosannerspiegels.

### 3.4.3 Leistungsaufnahme

Wie bereits erwähnt wurde, spielt die Leistungsaufnahme der Mikrosannerspiegel für viele Anwendungen eine wichtige Rolle. Grundsätzlich ist das zum Einsatz kommende resonante Antriebsprinzip sehr gut geeignet, um Bauelemente mit sehr geringem Leistungsbedarf zu realisieren. Zum einen muss aufgrund der resonanten Arbeitsweise lediglich die durch Dämpfungseffekte entzogene Energie ersetzt werden. Außerdem fließen während des Betriebs prinzipbedingt nur vergleichsweise geringe (Verschiebungs-) Ströme, sodass der Verlust aufgrund des ohmschen Widerstands gering ist. Dies ist vor allem ein Vorteil gegenüber Bauelementen mit magnetischem Antriebsprinzip, welche typischerweise einen mehrfach höheren Leistungsbedarf aufweisen.

Die Leistungsaufnahme wird sowohl bei synchronisierter als auch bei parametrischer Anregung (Abschnitt 2.3) vor allem von der Größe der Kapazität bestimmt, welche beim Umschalten der Potentiale geladen bzw. entladen werden muss. Diese setzt sich aus der Antriebskapazität und den parasitären Kapazitäten des Bauelements zusammen. In Abbildung 3.32 sind die Ursachen parasitärer Kapazitäten und Widerstände sowie ein vereinfachtes Ersatzschaltbild eines 1D-Mikrosannerspiegels dargestellt. Die sich aus dem Ableitungsbelag der Isolationen ergebenden Parallelwiderstände  $1/fG'$  liegen typischerweise in einem Bereich von mehreren Gigaohm (vgl. Tabelle 3.5) und können vernachlässigt werden. Geht man davon aus, dass die Kapazitäten des Bauelements bei jedem Schaltvorgang vollständig geladen bzw. entladen werden, ergibt sich die mittlere Leistungsaufnahme eines Mikrosannerspiegels zu

$$\bar{P}_i = (\Delta C_i + fC') f_i \hat{U}_i^2 \quad \text{mit} \quad f_i = \frac{1}{2} f_{\square,i} \quad (3.125)$$

Dabei wird die nicht in Bewegungsenergie umgewandelte elektrische Energie an den ohmschen Widerständen der Zuleitungen  $R_{\text{SOI}}$  in Wärme umgewandelt. Vernachlässigt man zunächst die parasitären Kapazitäten  $fC'$  und geht von einer Größenordnung der Antriebskapazität von 1 pF aus, ergibt sich ein theoretisches Minimum des Leistungsbedarfs im Bereich von einigen 100 pW (*SINUS*-Scanner) bis zu maximal 1 mW (hochfrequenter Scanner z.B. zur Bildprojektion).

Wie aus Tabelle 3.5 entnommen werden kann, liegt die sich aus einer 1 mm langen Isolationsstruktur ergebende, parasitäre Kapazität durchaus in der Größenordnung der Antriebskapazität. Kommen Mäanderstrukturen (Abb. 3.30c) zum Einsatz, kann sie sogar um ein Vielfaches höher sein als die Kapazität der Antriebselektroden. Da die Ge-

samtlänge der in einem Mikroscoanerspiegel zum Einsatz kommenden Isolationsstrukturen typischerweise mehrere Millimeter beträgt, sind die parasitären Kapazitäten entscheidend für die Leistungsaufnahme eines Bauelements. Für hochfrequente Scanner können daher Werte von 50 mW durchaus überschritten werden.

Um die Leistungsaufnahme entscheidend zu senken, müssen demnach vor allem die parasitären Kapazitäten verringert werden. Dazu können mehrfach parallele Strukturen oder Kombinationen mit offenen Gräben (Abb. 3.30b) zum Einsatz kommen. Letzterer Ansatz ist besonders effektiv, beeinflusst jedoch die mechanischen Eigenschaften des Bauelements. Dies muss beim Entwurf berücksichtigt werden.

Es sei noch angemerkt, dass die zum Betrieb eines Mikroscoanerspiegels benötigte Treiberschaltung typischerweise einen größeren Einfluss auf die gesamte Leistungsaufnahme hat als das Bauelement selbst. Der Grund dafür liegt vor allem in den zur Bereitstellung der Antriebsspannungen benötigten Verstärkerstufen bzw. Hochsetzstellern [52]. Diese arbeiten mit steigender Ausgangsspannung immer weniger effizient.

Aufgrund des großen Einflusses der parasitären Kapazitäten und der Treiberschaltung bzw. deren Abhängigkeiten von der Antriebsspannung ergibt sich ein wichtiger Gesichtspunkt beim Entwurf: Es muss ein primäres Ziel sein, die Antriebsspannung der Bauelemente zu verringern. Dabei kann sogar eine erhöhte Dämpfung in Kauf genommen werden.

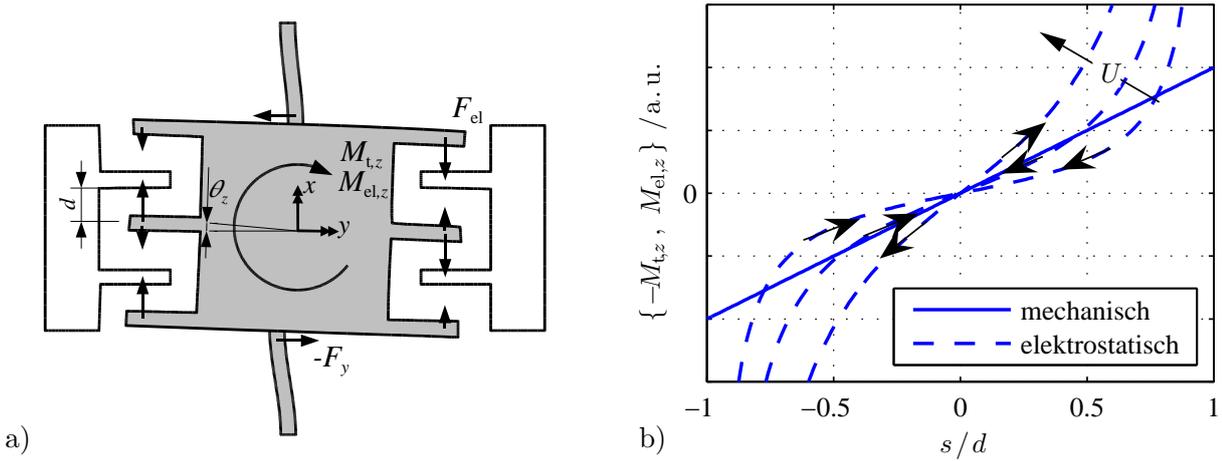
#### 3.4.4 Elektromechanische Stabilität

Eine wichtige Besonderheit elektrostatischer Antriebsprinzipien ist das mögliche Auftreten elektromechanischer Instabilitäten. Diese können sowohl beim Normalbetrieb einer Elektrodenanordnung [5, 32] als auch bei unerwünschten Auslenkungen aufgrund von parasitären elektrostatischen Kräften und Drehmomenten auftreten [3]. Voraussetzung für ein elektromechanisch instabiles Verhalten ist ein elektrostatisches Moment, welches in einer Auslenkungsrichtung schneller ansteigt als die mechanischen Rückstellmomente. Das Resultat einer solchen Konstellation ist der sogenannte *Pull-in*-Effekt. Er führt zu einem unkontrollierten Anstieg der Auslenkung. Wird dies nicht durch geeignete Strukturen begrenzt (beispielsweise durch definierte Anschläge), führt dieses Verhalten zu einer Kollision der Elektroden. Dies kann zur Zerstörung des Bauelements führen und muss unbedingt vermieden werden.

##### ***Pull-in*-Effekte der Kammelektroden**

Aufgrund der Arbeitsweise des in *Fraunhofer IPMS* Mikroscoanerspiegeln zum Einsatz kommenden elektrostatischen Antriebs (Abschnitt 2.3) können *Pull-in*-Effekte bei der Verkippung der Spiegelplatte bzw. des beweglichen Rahmens nicht auftreten. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass die genutzten elektrostatischen Momente immer in Richtung der mechanischen Rückstellmomente (in Richtung der Ruhelage) wirksam sind. Die in einer *Out-of-plane*-Elektrodenanordnungen wirksamen, parasitären elektrostatischen Momente können jedoch durchaus zu einer unerwünschten Auslenkung und auch zu einem *Pull-in*-Effekt führen. Dieser Fall kann eintreten, wenn ein solches Moment in Richtung eines mechanischen Freiheitsgrads (siehe Abschnitt 3.2.4) wirkt.

Die parasitären elektrostatischen Momente eines Mikroscoanerspiegels resultieren aus der Tatsache, dass sich die Kapazität der Elektrodenanordnung nicht ausschließlich bei Auslenkungen in den genutzten Freiheitsgraden (Rotation um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse) ändern. So führt beispielsweise auch eine Rotation um die  $z$ -Achse (Abb. 3.33) oder



**Abb. 3.33:** Wirkung parasitärer elektrostatischer Momente. a) Beispiel für einen Freiheitsgrad mit möglichem *Pull-in*-Verhalten; b) qualitativer Verlauf von parasitären elektrostatischen Momenten. Wird der Anstieg der elektrostatischen Kraft größer als der Anstieg der mechanische Rückstellkraft, so wird das System instabil (*Pull-in*).

eine Translation in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung zu einer Änderung der Kapazität. Entsprechend Gl. (2.5) bzw. Gl. (2.17) folgt daraus eine elektrostatische Kraft bzw. ein elektrostatisches Drehmoment.

Die allgemeine Bedingung für elektromechanische Stabilität eines Mikros scannerspiegels kann folgendermaßen formuliert werden:

$$-\frac{d}{d\vec{s}} \vec{F}_{\text{mech}} \Big|_{\vec{s}=0} > \frac{d}{d\vec{s}} \vec{F}_{\text{el}} \Big|_{\vec{s}=0} \quad \text{und} \quad -\frac{d}{d\vec{\theta}} \vec{M}_{\text{mech}} \Big|_{\vec{\theta}=0} > \frac{d}{d\vec{\theta}} \vec{M}_{\text{el}} \Big|_{\vec{\theta}=0} \quad (3.126)$$

Der Anstieg der rückstellenden mechanischen Momente (Kräfte) in der Ruhelage des Scanners muss also betragsmäßig größer sein als der des elektrostatischen Moments. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird das Gleichgewicht in der Ruhelage instabil. Beliebige kleine Störungen führen zu einem Anstieg der Auslenkung und damit zu einem *Pull-in*. Abbildung 3.33b verdeutlicht diese Zusammenhänge am Beispiel des parasitären Drehmoments um die  $z$ -Achse und des dazugehörigen mechanischen Freiheitsgrads.

Mithilfe der Zusammenhänge zwischen Spannung, Kapazität und elektrostatischen Momenten Gl. (2.5) bzw. Gl. (2.17) resultiert aus Gl. (3.126) die folgende Bedingung für die maximalen, für den Antrieb eines Mikros scannerspiegels nutzbaren elektrischen Spannungen:

$$\max \hat{U}_i < \min \left\{ \sqrt{2 \frac{d}{d\vec{s}} \vec{F}_{\text{mech}} / \frac{d^2}{d\vec{s}^2} C_i} \Big|_{\vec{s}=0}, \sqrt{2 \frac{d}{d\vec{\theta}} \vec{M}_{\text{mech}} / \frac{d^2}{d\vec{\theta}^2} C_i} \Big|_{\vec{\theta}=0} \right\} \quad (3.127)$$

Die Spannung, bei der das Momentengleichgewicht gerade instabil wird (rechtsseitiger Ausdruck der Ungleichung), wird als *Stabilitätsspannung* oder *Pull-in-Spannung*  $U_{\text{pi}}$  bezeichnet. Sie ist ein wichtiger Betriebsparameter eines Mikros scannerspiegels. Neben der Spannungsfestigkeit der Isolationen ist die Stabilitätsspannung eines Bauelements begrenzend für die Antriebsspannung und damit für die Auslenkung.

In der Ruhelage ( $\vec{s} = 0$  bzw.  $\vec{\theta} = 0$ ) sind geometrische Nichtlinearitäten vernachlässigbar. Der Anstieg der mechanischen Rückstellkräfte lässt sich daher für einfache Federgeometrien wie gerade Torsionsfedern mithilfe der linearen BERNOULLI-EULER-Theorie

sehr genau bestimmen. Sie ergeben sich für die drei relevanten Freiheitsgrade einer Spiegelplatte zu [3, 66]

$$\frac{d}{ds_x} F_{\text{mech},x} \Big|_{s_x=0} = -2 E_{xx} \frac{h w}{l} \quad (\text{Translation in } x\text{-Richtung}) \quad (3.128)$$

$$\frac{d}{ds_y} F_{\text{mech},y} \Big|_{s_y=0} = -2 E_{xx} \frac{h w^3}{l^3} \quad (\text{Translation in } y\text{-Richtung}) \quad (3.129)$$

$$\frac{d}{d\theta_z} M_{\text{mech},z} \Big|_{\theta_z=0} = -E_{xx} \frac{h w^3}{2l} \left( \frac{4}{3} + \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) \quad (\text{Rotation um } z\text{-Achse}) \quad (3.130)$$

mit  $l, w, h$  als Dimensionen der geraden Torsionsfedern und  $a$  als Abstand der Aufhängungen (Länge der Spiegelplatte).

Alternativ können die mechanischen Rückstellmomente mithilfe einer numerischen Eigenwertanalyse (siehe Abschnitt 3.2.4) bestimmt werden. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass sowohl die Eigenschaften beliebig komplexer Federgeometrien als auch die Einflüsse der nur endlich steifen Spiegelplatten und Federaufhängungen berücksichtigt werden können. Dabei wird ausgenutzt, dass die Ableitung der mechanischen Rückstellkraft einer als linear angenommenen Feder (Aufhängung) betragsmäßig der Federkonstante entspricht. Es werden die sich für die relevanten Freiheitsgrade ergebenden, Eigenfrequenzen  $f_i$  und die dazugehörigen Massen bzw. Massenträgheiten  $M_i$  bestimmt. Mit dem Zusammenhang zwischen Eigenresonanzfrequenz und Federkonstante eines linearen Oszillators  $f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_i/M_i}$  ergeben sich daraus die Ableitungen der rückstellenden Momente:

$$\frac{d}{ds_x} F_{\text{mech},x} \Big|_{s_x=0} = -4 \pi^2 f_i^2 m \quad \text{mit} \quad \vec{X}_i \parallel \vec{e}_x \quad (3.131)$$

$$\frac{d}{ds_y} F_{\text{mech},y} \Big|_{s_y=0} = -4 \pi^2 f_i^2 m \quad \text{mit} \quad \vec{X}_i \parallel \vec{e}_y \quad (3.132)$$

$$\frac{d}{d\theta_z} M_{\text{mech},z} \Big|_{\theta_z=0} = -4 \pi^2 f_i^2 J_{zz} \quad \text{mit} \quad \vec{X}_i \parallel \vec{e}_{\theta_z} \quad (3.133)$$

Dabei ist  $m$  die Masse und  $\mathbf{J}$  das Massenträgheitsmoment der Spiegelplatte. Diese Größen müssen analytisch oder numerisch anhand der konkreten Geometrie bestimmt werden.

Die Rückstellmomente eines beweglichen Rahmens lassen sich analog dazu bestimmen. Es müssen lediglich die sich für  $\frac{d}{dx} F_{\text{mech},x}$  und  $\frac{d}{dy} F_{\text{mech},y}$  ergebenden Ausdrücke vertauscht und der E-Modul in  $y$ -Richtung  $E_{yy}$  anstelle von  $E_{xx}$  eingesetzt werden. In den Gln. (3.131-3.133) muss gegebenenfalls für die Masse bzw. für das Massenträgheitsmoment der Spiegelplatte die entsprechende Größe des beweglichen Rahmens (inklusive Spiegel) eingesetzt werden.

Die gegenseitige Beeinflussung der beiden Achsen eines 2D-Mikroscanners bezüglich der elektromechanischen Stabilität kann vernachlässigt werden. Es wirkt zwar aufgrund des Kreiselphänomens ein zusätzliches Drehmoment  $\vec{M}_k$  auf die Spiegelplatte, welches vom beweglichen Rahmen aufgebracht werden muss. Dieses hat jedoch einen vernachlässigbar geringen Einfluss auf die Stabilitätsspannung:

Das betragsmäßig maximale Kreiselmoment wirkt beim gleichzeitigen Nulldurchgang der Schwingung beider Achsen (jeweils maximaler Drehimpuls) in Richtung der  $z$ -Achse. Es ergibt sich aus der Massenträgheit der Spiegelplatte und den Winkelgeschwindigkeiten [3]:

$$\max |M_{k,z}| = J_{xx} \max |\dot{\theta}_x| \max |\dot{\theta}_y| = 4 \pi^2 J_{xx} f_x \hat{\theta}_x f_y \hat{\theta}_y \quad (3.134)$$

Dieses maximale Kreiselmoment wirkt in Richtung des parasitären elektrostatischen Drehmoments bzw. des mechanischen Rückstellmoments, führt also zu einer Verschiebung des Gleichgewichts. Vernachlässigt man zunächst den Einfluss des elektrostatischen Moments, so erhält man für den neuen Gleichgewichtspunkt die folgende Auslenkung:

$$\theta_0 = \frac{M_{k,z}}{k_{t,z}} \quad \text{mit} \quad k_{t,z} \approx -\frac{d}{d\theta_z} M_{\text{mech},z} \Big|_{\theta_z=0} \quad (3.135)$$

Es ergibt sich somit entsprechend Gl. (3.126) für die elektromechanische Stabilität bezüglich der Rotation um die  $z$ -Achse näherungsweise die folgende Bedingung:

$$k_{t,z} > \frac{d}{d\theta_z} M_{\text{el},z} \Big|_{\theta_z=\theta_0} \quad (3.136)$$

Bestimmt man die vom Kreiselpänomen verursachten Vorauslenkungen exemplarisch für einen Mikroscooperspiegel mit extremen Parametern (hochfrequente, große Spiegelplatte mit  $D = 2 \text{ mm}$ ,  $h = 80 \mu\text{m}$ ,  $f_x = 40 \text{ kHz}$ , beweglicher Rahmen mit sehr weicher Aufhängung,  $f_y = 150 \text{ Hz}$ ), ergeben sich Werte in der Größenordnung von  $\theta_0 \approx 0.01^\circ$ . Die sich daraus ergebende Verringerung der Stabilitätsspannung des beweglichen Rahmens beträgt weniger als  $0.1 \text{ V}$  (weniger als  $0.3\%$ ). Der Einfluss des Kreiselpänomens kann daher beim Entwurf von Mikroscooperspiegeln vernachlässigt werden.

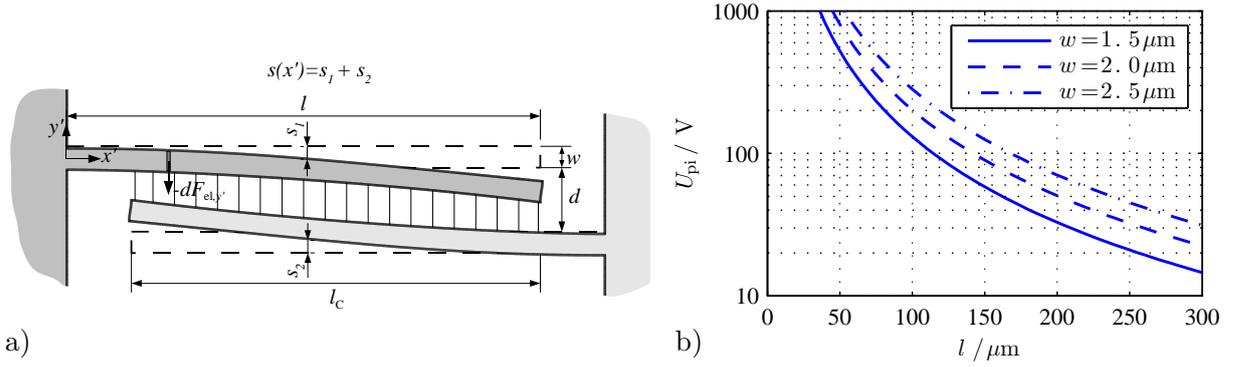
Der entsprechend Gl. (3.127) zur Bestimmung der Stabilitätsspannung ebenfalls benötigte Ausdruck  $\frac{d^2}{ds^2} C_i$  ist stark von der konkreten Anordnung und Geometrie der Fingerelektroden des Antriebs abhängig. Für geometrisch einfache Anordnungen gerader Fingerelektroden von einheitlicher Gestalt können analytische Näherungen dazu in [3] gefunden werden. Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Methode zur Bestimmung von Kapazitätsverläufen bei Auslenkungen in Richtungen parasitärer Freiheitsgrade ist wesentlich flexibler. Sie wird in Anhang F.5 eingehend beschrieben (siehe dazu auch Kapitel 5).

**Pull-in-Effekte der Fingerelektroden** können zu einer zusätzlichen Begrenzung der Antriebsspannung führen. Sie resultieren aus der endlichen Steifigkeit der Elektroden selbst. Übersteigen die elektrostatischen Kräfte die mechanische Widerstandsfähigkeit einer Fingerelektrode bzw. der Gegenelektrode, beginnen diese sich zu verbiegen; es kommt zu einem *Pull-in*. Abbildung 3.34a verdeutlicht diesen Mechanismus.

Eine Fingerelektrode kann als einseitig eingespannter Biegebalken mit auslenkungsabhängiger Flächenlast betrachtet werden. In den Arbeiten von PAMIDIGHANTAM [92, 93] wird ein ähnlicher Fall untersucht. Es werden unter anderem die Bedingungen für den *Pull-in* einer einseitig eingespannten Plattenelektrode über einer festen, massiven Gegenelektrode bestimmt. Dazu werden die elektrostatischen und mechanischen Eigenschaften der Elektroden zunächst auf eine stark vereinfachte Anordnung, bestehend aus einer linearen Feder und einem idealen Plattenkondensator übertragen. Für eine solche Anordnung können vergleichsweise einfache analytische Zusammenhänge genutzt werden, um eine Bedingung für Stabilität zu ermitteln. Es ergibt sich für die Spannung über den Elektroden des Plattenkondensators [94]

$$U < U_{\text{pi}} = \sqrt{\frac{8 k d^3}{27 \varepsilon A}} \quad (3.137)$$

mit  $k$  als konstanter Federhärte (Federkonstante),  $d$  als Elektrodenabstand und  $A$  als Flächeninhalt einer Elektrode des Plattenkondensators.



**Abb. 3.34:** Pull-in-Effekt einer Fingerelektrode. a) Übersteigen die elektrostatischen Kräfte die Widerstandsfähigkeit einer Fingerelektrode kommt es zum *Pull-in*. b) Verlauf der Stabilitätsspannung gerader Fingerelektroden in Abhängigkeit von der Länge und Breite ( $d = 5 \mu\text{m}$ ). Die Höhe hat keinen Einfluss auf die Stabilitätsspannung.

Der erste Schritt zur Abbildung der beim *Pull-in* einer Fingerelektrode wirksamen Mechanismen auf die vereinfachte Anordnung ist die Bestimmung der Fläche eines idealisierten Plattenkondensators mit vergleichbaren Eigenschaften. Vernachlässigt man Randeffekte des elektrischen Felds und setzt für die Biegelinie einer Fingerelektrode eine Kosinusfunktion an, ergibt sich für die effektive Elektrodenfläche eines einseitig eingespannten Balkens über einer unendlich ausgedehnten, massiven Gegenelektrode die folgende Näherung [92]:

$$A_{\text{eff}} \approx h \int_{l-l_c}^l \frac{d - s_{\text{pi}}}{d - f(x')s_{\text{pi}}} dx' \quad \text{mit} \quad f(x') = 1 - \cos \frac{x'\pi}{2l} \quad (3.138)$$

Dabei ist  $l_c$  die Überlappungslänge der Fingerelektrode mit der Gegenelektrode (Abb. 3.34) und  $f(x')$  die Ansatzfunktion für die Biegelinie des Balkens;  $s_{\text{pi}}$  ist die Auslenkung am Ende der Fingerelektrode beim *Pull-in*.

Um diesen Zusammenhang auf die Eigenschaften einer *Out-of-plane-comb*-Elektrode übertragen zu können, muss berücksichtigt werden, dass sich die Gegenelektrode im Fall eines *Pull-ins* ebenfalls verbiegt. Dies kann durch eine Modifikation der Ansatzfunktion  $f(x')$  geschehen. Setzt man für die Biegung der Gegenelektrode ebenfalls einem kosinusförmigen Verlauf an, ergibt sich der folgende Ausdruck für die effektive Biegelinie eines Balkens über einer massiven Gegenelektrode:

$$f(x') := 2 - \cos \frac{x'\pi}{2l} - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x'\pi}{2l} \right) \quad (3.139)$$

Nimmt man an, dass die effektive Federhärte eines einseitig eingespannten Balkens als Quotient der elektrostatischen Flächenlast  $F_{y'} \approx l_c dF_{\text{el},y'}$  und der Auslenkung am Ende der Elektrode definiert ist, ergibt sich der folgende Ausdruck [92]:

$$k_{\text{b,eff}} \approx \frac{l_c dF_{\text{el},y'}}{s_{\text{pi}}} = \frac{2}{3} \frac{E_{x'x'} h w^3}{l^3} \left( \frac{3}{\lambda_c^3 - 6\lambda_c + 8} \right) \quad \text{mit} \quad \lambda_c = \frac{l_c}{l} \quad (3.140)$$

Setzt man nun die Ausdrücke (3.138) und (3.140) zusammen mit der effektiven Biegelinie (3.139) in Gl. (3.137) ein, ergibt sich der folgende Ausdruck für die Stabilitätsspannung einer Fingerelektrode:

$$U_{\text{pi}} = \sqrt{\frac{4\pi d^3 E_{x'x'} w^3 \Gamma}{27 \varepsilon l^4 (d - s_{\text{pi}}) (\lambda_c^3 - 6\lambda_c + 8)}} \left( \text{Artanh} \frac{s_{\text{pi}}}{\Gamma} - \text{Artanh} \frac{d - 2s_{\text{pi}}}{\Gamma} \right)^{-1}$$

mit  $\Gamma = \sqrt{-d^2 + 4s_{\text{pi}} d - 2s_{\text{pi}}^2}$  (3.141)

Der Wert für  $s_{\text{pi}}$  ist zunächst unbestimmt, kann aber mithilfe numerischer Methoden oder experimentell bestimmt werden. Geht man wieder von einer geraden Elektrode aus, welche sich parallel auf eine Gegenelektrode zubewegt, ergibt sich für die Auslenkung beim *Pull-in* ein Wert von  $d/3$  [5]. Es hat sich gezeigt, dass Gl. (3.141) bei Nutzung dieser Näherung eine gute Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Werten der Stabilitätsspannung aufweist bzw. diese leicht unterschätzt. Es gilt daher

$$s_{\text{pi}} \approx \frac{d}{3} \quad (3.142)$$

Die sich für in [110]-Richtung erstreckenden Elektroden mit verschiedenen Breiten  $w$  ergebenden Verläufe der Stabilitätsspannung in Abhängigkeit von der Länge  $l$  sind in Abb. 3.34b dargestellt. Geht man davon aus, dass die Antriebsspannung 200 V nicht überschreitet und die Mindestbreite einer Fingerelektrode  $1.5 \mu\text{m}$  beträgt, kann die Stabilitätsspannung beliebig orientierter Fingerelektroden mit  $d = 5 \mu\text{m}$  bis zu einer Länge von  $75 \mu\text{m}$  vernachlässigt werden. Kommen längere Elektroden zum Einsatz muss der vorgestellte Zusammenhang berücksichtigt werden.

Wie anhand Gl. (3.141) deutlich wird, kann die Länge der Fingerelektroden  $l$  nicht beliebig erhöht werden, ohne dass die für eine gleichbleibende Stabilitätsspannung benötigte Breite  $w$  überproportional ansteigt ( $U_{\text{pi}} \sim \sqrt{w^3/l^4}$ ). Damit verringert sich jedoch bei gleichbleibender Breite der gesamten Elektrodenanordnung die Anzahl der realisierbaren Fingerelektroden. Eine Möglichkeit, diesem Trend entgegenzuwirken besteht darin, sowohl die Elektroden als auch die Gegenelektroden trapezförmig auszuführen (Abb. 3.35a). Dabei wird der Tatsache Rechnung getragen, dass das wirksame Biegemoment in der Nähe der Einspannung am größten ist.

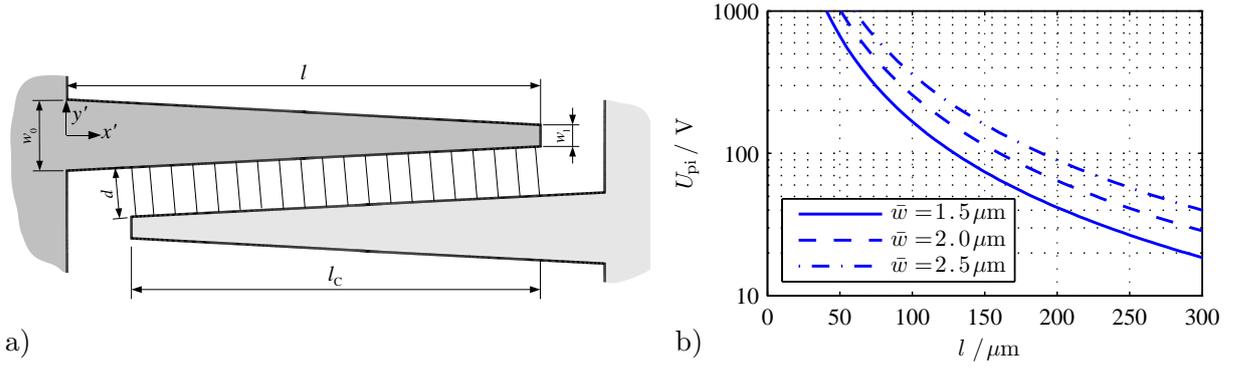
Die Federhärte einer solchen Struktur kann mithilfe der *Methode der virtuellen Arbeit* ermittelt werden. Mit der Auslenkung  $s_{y'}$  bei Angriff einer Kraft  $F_{y'}$  am freien Ende der Elektrode

$$s_{y'} = 12 \int_0^l \frac{F_{y'} (l - x')^2}{E_{x'x'} h w^3} dx' \quad \text{mit} \quad w = f(x') = w_0 + \frac{w_1 - w_0}{l} x' \quad (3.143)$$

ergibt sie sich zu:

$$k_{\text{b},z'} = \frac{F_{y'}}{s_{y'}} = \frac{E_{x'x'} h w_0^2 (w_0 - w_1)^3}{6 l^3 (3w_0 - w_1) (w_1 - w_0) + 2 w_0^2 \ln \frac{w_0}{w_1}} \quad (3.144)$$

Wird nun mithilfe dieses Ausdrucks wieder die effektive Federhärte für eine vereinfachte Elektrodenanordnung ermittelt und diese zusammen mit der effektiven Biegelinie (3.139)



**Abb. 3.35:** Erhöhung der Pull-in-Spannung durch trapezförmig ausgeführte Fingerelektroden. a) Durch den Einsatz trapezförmiger Fingerelektroden kann die mechanische Widerstandsfähigkeit und damit die Pull-in-Spannung erhöht werden. b) Verlauf der Stabilitätsspannung trapezförmiger Fingerelektroden in Abhängigkeit von der Länge und mittleren Breite ( $d = 5 \mu\text{m}$ ) bei  $w_0/w_1 = 4.2$ .

in Gl. (3.137) eingesetzt, ergibt sich die Stabilitätsspannung für eine trapezförmige Fingerelektrode:

$$U_{\text{pi}} = \sqrt{\frac{4\pi d^3 E_{x'x'} \Theta \Gamma}{27\epsilon l^4 (d - s_{\text{pi}}) (\lambda_c^3 - 6\lambda_c + 8)} \left( \text{Artanh} \frac{s_{\text{pi}}}{\Gamma} - \text{Artanh} \frac{d - 2s_{\text{pi}}}{\Gamma} \right)^{-1}} \quad (3.145)$$

$$\text{mit } \Gamma = \sqrt{-d^2 + 4s_{\text{pi}} d - 2s_{\text{pi}}^2}, \quad \Theta = \frac{2w_0^2 (w_0 - w_1)^3}{3(3w_0 - w_1)(w_1 - w_0) + 6w_0^2 \ln \frac{w_0}{w_1}}$$

Dies entspricht dem Ausdruck für die Stabilitätsspannung gerader Fingerelektroden, wobei  $w^3$  durch  $\Theta = f(w_0, w_1)$  ersetzt wird.

Dividiert man die rechtsseitigen Ausdrücke der Gln. (3.145) und (3.141), erhält man ein Maß für die relative Änderung der Stabilitätsspannung beim Übergang von geraden auf trapezförmige Fingerelektroden:

$$\Delta U_{\text{rel}} = \sqrt{\frac{2w_0^2 (w_0 - w_1)^3}{3w^3 (3w_0 - w_1)(w_1 - w_0) + 6w^3 w_0^2 \ln \frac{w_0}{w_1}}} \quad (3.146)$$

Soll sich bei gleicher Breite der gesamten Elektrodenanordnung die Anzahl der Finger nicht verändern, muss die mittlere Breite einer trapezförmigen Fingerelektrode gleich der Breite einer geraden Vergleichselektrode sein:

$$w = \bar{w} = \frac{w_0 + w_1}{2} \quad (3.147)$$

Führt man nun eine dimensionslose Größe  $k = w_0/w_1$  ein, ergibt sich aus Gl. (3.146) der folgende Ausdruck:

$$\Delta U_{\text{rel}} = \sqrt{\frac{16(k-1)^3 k^2}{3(k+1)^3 (4k - 3k^2 - 1 + 2k^2 \ln k)}} \quad (3.148)$$

Die durch den Einsatz trapezförmiger Fingerelektroden erreichbare Erhöhung der Stabilitätsspannung hängt demnach bei gleichbleibender Länge und Anzahl der Elektroden ausschließlich von dem gewählten Breitenverhältnis  $w_0/w_1$  ab. Der optimale Wert für  $k$

wird vom Maximum des Verlaufs für  $\Delta U_{\text{rel}}$  bestimmt. Dieses lässt sich näherungsweise numerisch bestimmen. Es ergibt sich zu:

$$\max_{k>0} \Delta U_{\text{rel}} \approx \Delta U_{\text{rel}}|_{k=4.2} = 1.27 \quad (3.149)$$

Unabhängig von der Länge, Höhe und mittleren Breite einer trapezförmigen Fingerelektrode ergibt sich demnach eine maximale Stabilität für trapezförmige Fingerelektroden, welche an der Einspannung um den Faktor 4.2 breiter sind als an ihrem freien Ende. Die relative Erhöhung der Stabilitätsspannung beträgt dann 27 % (vgl. Abb. 3.34b und Abb. 3.35b).

Trapezförmige Fingerelektroden stellen also eine sehr effektive, einfach zu realisierende Möglichkeit dar, im Bedarfsfall die Stabilitätsspannung der Elektroden zu erhöhen.

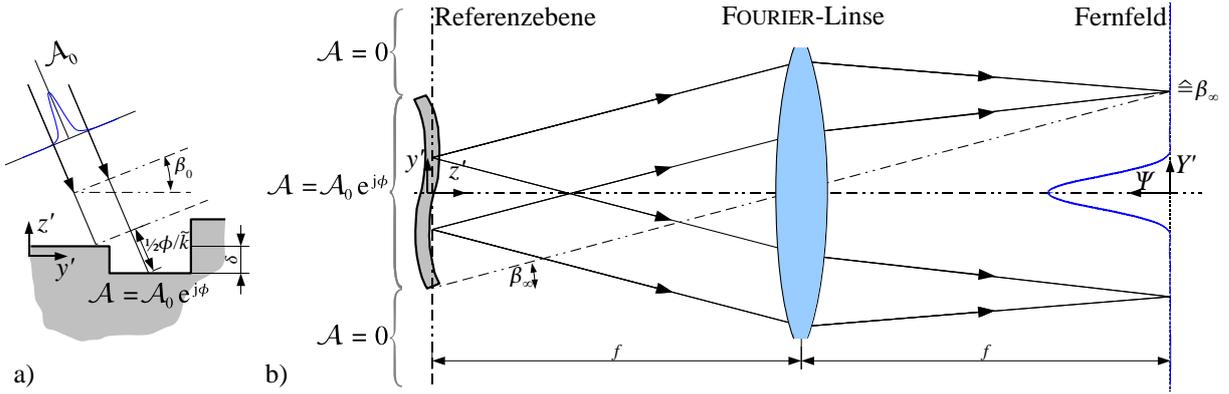
### 3.5 Optische Randbedingungen

Für *Fraunhofer IPMS* Mikroscooperspiegel als optische *MEMS*-Bauelemente spielen optische Eigenschaften bzw. Phänomene eine wichtige Rolle. Im einfachsten Fall wird dabei die spiegelnde Oberfläche als ideal eben angesehen. Werden dann noch Beugungseffekte am Spiegelrand und die Divergenz des abgelenkten Laserstrahls vernachlässigt, kann das optische Verhalten mithilfe der Strahlenoptik beschrieben werden.

Für viele Anwendungen ist es allerdings notwendig, sowohl die Beugung am Spiegelrand, als auch die inhärenten Eigenschaften des Laserlichts zu berücksichtigen. Das kann beispielsweise mit der GAUSS-Optik [95] geschehen. Diese verbindet die Methoden der Wellen- und Strahlenoptik und ist insbesondere zur Beschreibung des Ausbreitungsverhaltens von Laserlicht geeignet. Eine sich aus der Beugung am Plattenrand ergebende wichtige Eigenschaft eines Mikrospeiegels ist dessen öffnungsbegrenzende Wirkung auf Laserstrahlen. Kleinere Aperturen  $D$  führen zu einer größeren Divergenz und einer Beeinflussung des Strahlprofils. Dieser Zusammenhang kann mithilfe des RAYLEIGH-Kriteriums (2.34) beschrieben werden (siehe Abschnitt 2.3.3). Das Resultat ist eine sich aus der jeweiligen Anwendung ergebende Mindestgröße der Spiegelplatte. Dies muss beim Entwurf beachtet werden.

Für große, schnelle Spiegel genügen die Methoden der GAUSS-Optik oft nicht mehr. Die dynamische Deformation der Spiegelplatte (Abschnitt 3.2.6) kann dann Größenordnungen erreichen, die der Wellenlänge des Lichts entsprechen. Phasenfrontfehler innerhalb des reflektierten Lichts sind dann nicht mehr vernachlässigbar. Reflektierte Wellenzüge können miteinander interferieren. Dies führt zu einer Modulation der Leistungsdichte innerhalb des reflektierten Laserstrahls. Es können sogar signifikante Nebenmaxima der Intensitätsverteilung entstehen. Diese wirken sich auf die meisten Anwendungen extrem störend aus. Da die dynamische Deformation von der Auslenkung des Mikrospeiegels abhängt, entspricht die daraus resultierende Störung einer zeitlichen und räumlichen Modulation der Wellenfront des reflektierten Lichts. Anders als eine statische Störung lässt sie sich daher nicht ohne Weiteres im optischen System kompensieren.

Die sich aus einem gegebenen Deformationsprofil  $\delta = f(x', y')$  ergebende Störung des reflektierten Laserstrahls lässt sich mithilfe wellenoptischer Methoden untersuchen. Entsprechend der skalaren Beugungstheorie von KIRCHHOFF [60] kann die Spiegelfläche eines Mikroscoopers dann als eine mit Punktquellen bedeckte Oberfläche betrachtet werden (Prinzip von FRESNEL-HUYGENS). Interpretiert man nun die von der Auslenkung und Deformation des Mikrospeiegels hervorgerufenen Phasendifferenzen innerhalb der gebeugten (reflektierten) Welle als Eigenschaft dieser Punktquellen, lässt sich die Spiegelfläche



**Abb. 3.36:** Fernfeld-Näherung der Wellenoptik. a) Entstehung der ortsabhängigen Phasenverschiebung in der Blendenöffnungsfunktion; b) Die FOURIER-Transformierte der Blendenöffnungsfunktion  $\mathcal{A}$  kann als deren Abbildung aus der objektseitigen Brennebene einer Sammellinse ins Unendliche betrachtet werden. Dabei wird vom Objekt ausgehendes paralleles Licht in einen Punkt der Bildebene abgebildet.

mithilfe einer sogenannten Blendenöffnungsfunktion darstellen. Diese beschreibt den Zustand der ausfallenden Welle bezüglich einer Referenzebene (siehe Abb. 3.36).

Die Referenzebene des Mikrospiegels soll der  $x'$ - $y'$ -Ebene eines lokalen Koordinatensystems entsprechen, welches so orientiert ist, dass die  $x'$ - $y'$ -Ebene um die Auslenkwinkel des Spiegels  $\theta_x$  und  $\theta_y$  verkippt ist, sodass sie parallel zur Oberfläche der Spiegelplatte liegt. Zusätzlich ist dieses lokale Koordinatensystem um die Normale der Spiegelplatte rotiert, sodass die Einfallsebene des Lichts mit der  $y'$ - $z'$ -Ebene übereinstimmt. Für einen Scannerspiegel mit einem über der gesamten Spiegelfläche konstanten Reflexionsgrad  $\rho_r$  ergibt sich die Blendenöffnungsfunktion für die Reflexion von monochromatischem, kohärentem Licht dann zu:

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \sqrt{\rho_r} \mathcal{A}_0 e^{j\phi} & : (x', y')^T \in A_p \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \phi = -2\tilde{k} \left( y' \sin \beta_0 + \frac{\delta}{\cos \beta_0} \right) \quad (3.150)$$

Dabei ist  $\mathcal{A}_0 = f(x', y')$  die Amplitude der auf dem Objekt auftreffenden Welle,  $\delta = f(x', y')$  ist die Deformation der Oberfläche;  $\tilde{k}$  ist die sich aus der Wellenlänge  $\lambda$  ergebende Kreiswellenzahl mit:

$$\tilde{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.151)$$

Die ortsabhängige Amplitude der auftreffenden Welle  $\mathcal{A}$  berücksichtigt das Strahlprofil des auf den Mikrospiegel gerichteten Laserlichts. Dieses besitzt typischerweise eine GAUSS-förmige Intensitätsverteilung [96]. Der Verlauf der Amplitude auf der Oberfläche eines Mikrospiegels entsprechend der Anordnung in Abb. 3.36 lässt sich dann folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathcal{A}_0 = \hat{\mathcal{A}} e^{-\frac{4}{D_L^2} (x'^2 + y'^2 \cos^2 \beta_0)} \quad (3.152)$$

Dabei ist  $\hat{\mathcal{A}}$  die Amplitude in der Mitte des Laserstrahls,  $D_L$  ist der Strahldurchmesser. Dieser ist so definiert, dass die Intensität bei einem Abstand  $D_L/2$  vom Zentrum des Strahls auf den relativen Wert  $e^{-2}$  abgesunken ist.

Der Mikroscoannerspiegel kann nun als flächenhafter, ebener Emitter einer Lichtwelle mit der ortsabhängigen Amplitudenfunktion  $\mathcal{A}$  interpretiert werden. Das von einer solchen Lichtquelle erzeugte komplexe Amplitudenfeld kann mit den Methoden der Wellentheorie untersucht werden. Geht man davon aus, dass die lateralen Dimensionen des beugenden Elements (Spiegelplatte) klein sind im Verhältnis zu der Entfernung des Beobachtungspunkts, genügen Untersuchungen im Fernfeld (FRAUNHOFER-Näherung). Dabei werden die aus der Geometrie des beugenden Elements resultierenden nichtlinearen Effekte bezüglich der Wellenausbreitung vernachlässigt [60]. Das KIRCHHOFFSche Beugungsintegral, dessen Lösung  $\psi$  (komplexe Amplitudendichte) das Beugungsfeld einer beliebigen Struktur beschreibt, vereinfacht sich dann zu dem folgenden Zusammenhang [60, 95]:

$$\psi \sim \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A} e^{j\tilde{k}(X'x'+Y'y')/R} dx' dy' \quad \text{mit} \quad \psi = f(X', Y') \quad (3.153)$$

Dabei ist  $R \rightarrow \infty$  der Abstand einer zur Referenzebene parallel verlaufenden Beobachtungsebene mit den Ebenenkoordinaten  $X'$  und  $Y'$  (Abb. 3.36). Führt man nun zwei Ortsfrequenzen  $\tilde{k}_{X'}$  und  $\tilde{k}_{Y'}$  mit

$$\tilde{k}_{X'} := \frac{\tilde{k} X'}{R} \quad \text{und} \quad \tilde{k}_{Y'} := \frac{\tilde{k} Y'}{R} \quad (3.154)$$

ein [60], kann Gl. (3.153) folgendermaßen neu geschrieben werden:

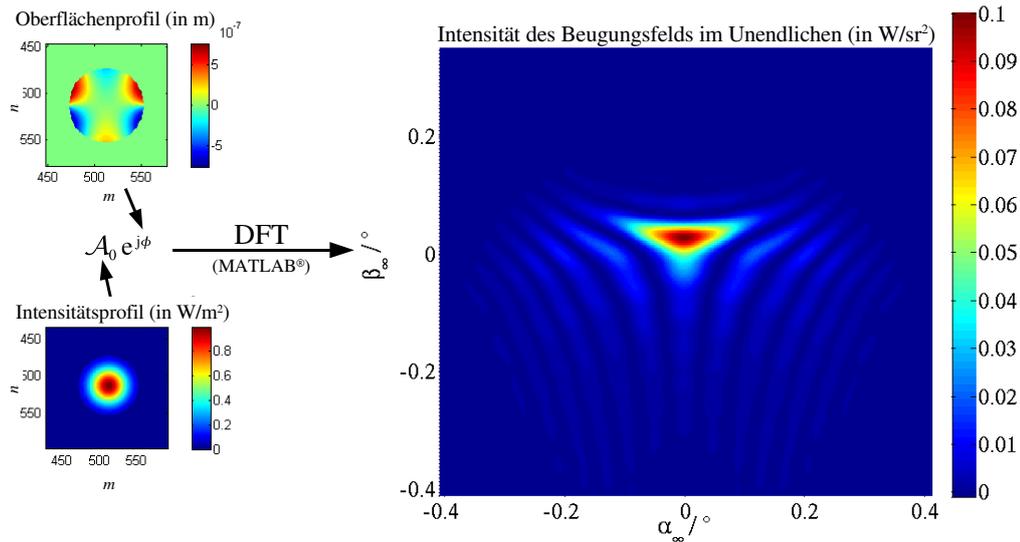
$$\psi \sim \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A} e^{j(\tilde{k}_{X'} x' + \tilde{k}_{Y'} y')} dx' dy' =: \mathcal{F}\{\mathcal{A}\} \quad \text{mit} \quad \psi = f(\tilde{k}_{X'}, \tilde{k}_{Y'}) \quad (3.155)$$

Der qualitative Verlauf des Amplitudenfelds im FRAUNHOFERSchen Beugungsmuster entspricht also der FOURIER-Transformierten der Blendenöffnungsfunktion  $\mathcal{A}$ . Abbildung 3.36 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Dabei wird die FOURIER-Transformation mithilfe einer Sammellinse dargestellt, welche ein in der Brennebene platziertes, beugendes Objekt auf eine Projektionsfläche in der zweiten Brennebene abbildet [95]. Es wird deutlich, dass dabei jeweils parallel verlaufende, von dem beugenden Objekt ausgehende Wellen in einen Punkt der Abbildung gebrochen werden. Dies entspricht der Interferenz im Unendlichen, also der Fernfeldnäherung.

Mithilfe des Zusammenhangs (3.155) kann das Beugungsmuster in einer beliebigen, zur Referenzebene parallelen Beobachtungsebene mit dem Abstand  $R \gg D$  in guter Näherung bestimmt werden. Anhand der Gln. (3.154) und (3.155) wird deutlich, dass der qualitative Verlauf des Beugungsmusters nicht von  $R$  abhängt. Eine Veränderung des Abstands führt lediglich zu dessen Streckung bzw. Stauchung. Es ist daher sinnvoll, eine andere Darstellung als die in den Ebenenkoordinaten  $(X', Y')$  zu wählen. Mithilfe geometrischer Betrachtungen anhand Abb. 3.36 bzw. der Zusammenhänge zwischen der Wellenlänge des gebrochenen Lichts und der angenommenen Brennweite der FOURIER-Linse, kann folgender Zusammenhang zwischen den Ortsfrequenzen und den Austrittswinkeln der interferierenden Wellen gefunden werden [95]:

$$\alpha_\infty = -\arctan \lambda \tilde{k}_{X'} \quad \text{bzw.} \quad \beta_\infty = -\arctan \lambda \tilde{k}_{Y'} \quad (3.156)$$

Dies entspricht einer Transformation des Beugungsfelds  $\psi$  aus dem kartesischen Koordinatensystem  $(X', Y', R)$  in die Kugelkoordinaten  $(\alpha_\infty, \beta_\infty, r)$ , wobei der Radius  $r$  beliebig



**Abb. 3.37:** Anwendung der DFT zur Bestimmung des Beugungsmusters im Fernfeld. Mithilfe der FOURIER-Transformation können die Einflüsse der dynamischen Deformation untersucht werden. Das dargestellte Muster ergibt sich für  $D = 1.2 \text{ mm}$ ,  $\text{rms } \delta = 375 \text{ nm}$ ,  $D_L = 1 \text{ mm}$ ,  $\beta_0 = 0^\circ$ ,  $N = M = 1024$ ,  $\Delta x' = \Delta y' = 3.4 \mu\text{m}$ .

gewählt werden kann. Es ergibt sich ein ausschließlich von den Winkeln  $\alpha_\infty$  und  $\beta_\infty$  abhängiges Beugungsmuster (Abb. 3.37).

Da das FOURIER-Integral nur für wenige Sonderfälle analytisch gelöst werden kann, wird im Rahmen dieser Arbeit die diskrete FOURIER-Transformation (*DFT*) genutzt. Diese stellt einen Sonderfall der FOURIER-Transformation dar, bei der ein zeit- oder ortsdiskreter, periodischer Verlauf transformiert wird. Um diese Bedingungen zu erfüllen, muss die Blendenöffnungsfunktion  $\mathcal{A}$  zunächst diskretisiert werden:

$$\mathcal{A}_{m,n} = \mathcal{A} \Big|_{\substack{x'=x'_m \\ y'=y'_n}} \quad \text{mit} \quad x'_m = \left(m - \frac{M}{2}\right) \Delta x', \quad y'_n = \left(n - \frac{N}{2}\right) \Delta y' \quad (3.157)$$

$$m = (0, \dots, M-1) \quad \text{und} \quad n = (0, \dots, N-1)$$

Dabei legen  $\Delta x'$  und  $\Delta y'$  die Diskretisierungsweiten in  $x'$ - und  $y'$ -Richtung fest;  $M$  und  $N$  sind die Anzahl der Stützstellen pro Periode. Die Werte für  $M, N$  bzw.  $\Delta x', \Delta y'$  müssen so gewählt werden, dass bei der Diskretisierung von  $\mathcal{A}$  möglichst keine relevante Information verloren geht. Dazu muss das WKS-Sampling-Theorem (nach WHITTAKER-KOTELNIKOW-SHANNON) berücksichtigt werden [97]. Es besagt, dass die (Orts-) Diskretisierungsfrequenz  $1/\Delta x'$  bzw.  $1/\Delta y'$  zumindest zweifach größer sein muss als die jeweils größte relevante (Orts-) Frequenz des zu diskretisierenden Verlaufs. Da mit steigender Zahl der Stützstellen der Rechenaufwand stark ansteigt, muss in der Praxis ein Kompromiss zwischen hoher Genauigkeit und langen Rechenzeiten bzw. hohem Speicherbedarf gefunden werden.

Der Vorteil der *DFT* ist, dass sie für beliebige diskrete Verläufe mit beliebiger Genauigkeit lösbar ist. Außerdem stehen sehr leistungsfähige, effiziente Algorithmen wie beispielsweise die *Fast-FOURIER-Transformation (FFT)* zur Verfügung. Die *DFT* der Blendenöffnungsfunktion ergibt sich zu [97]:

$$\psi_{k,l} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{A}_{m,n} e^{2\pi j \frac{mk}{M}} e^{2\pi j \frac{nl}{N}} =: \mathcal{F}\{\mathcal{A}_{m,n}\} \quad k = (0, \dots, M-1), l = (0, \dots, N-1) \quad (3.158)$$

Dies ist allerdings noch nicht das Beugungsmuster im Unendlichen;  $\psi_{k,l}$  entspricht in seinem Verlauf vielmehr dem Ortsspektrum der diskretisierten und periodisch fortgesetzten Blendenöffnungsfunktion in Abhängigkeit von den diskreten Ortsfrequenzen  $\tilde{k}_{X'k}$  und  $\tilde{k}_{Y'l}$ . Diese ergeben sich zu:

$$\tilde{k}_{X'k} = \left( \frac{k}{M-1} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\Delta x'} \quad \text{und} \quad \tilde{k}_{Y'l} = \left( \frac{l}{N-1} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\Delta y'} \quad (3.159)$$

Mithilfe der Zusammenhänge in Gl. (3.156) lässt sich der qualitative Amplitudenverlauf eines Beugungsmusters im Fernfeld aus Gl. (3.158) bestimmen:

$$\psi_{\infty k,l} \sim \mathcal{F}\{\mathcal{A}_{m,n}\} \quad \text{mit} \quad \psi_{\infty k,l} = f(\alpha_k, \beta_l) \Big|_{\substack{\alpha_k = -\arctan \lambda \tilde{k}_{X'k} \\ \beta_l = -\arctan \lambda \tilde{k}_{Y'l}}} \quad (3.160)$$

In der Literatur wird oftmals nur der qualitative Verlauf der Intensität im Fernfeld betrachtet. Dieser wird dann auf den maximalen Wert normiert dargestellt. Diese Handhabung ist für viele Anwendungen ausreichend. Sie genügt beispielsweise, um das optische Übersprechen eines mit einem Laser-Projektor projizierten Bildpunktes auf seinen Nachbarn zu untersuchen (Pixel-Kontrast). In anderen potentiellen Anwendungsbereichen für Mikroscooperspiegel wie beispielsweise der Laser-Direktbelichtung können die absoluten Werte der Leistungsdichte im abgelenkten Licht durchaus eine wichtige Rolle spielen. Aus diesem Grund wird eine Normierung der Intensitätsverteilung benötigt.

Die winkelbezogene Intensität (Leistung je Steradian) im Fernfeld ergibt sich aus der komplexen Amplitude des Beugungsmusters  $\psi_{\infty k,l}$ . Die zur Bestimmung des absoluten Verlaufs benötigte Normierung kann mithilfe einer Leistungsbilanz ermittelt werden. Dabei wird die von der Oberfläche abgestrahlte Leistung mit der Leistung im Ortsspektrum gleichgesetzt:

$$\Delta x' \Delta y' \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{A}_{m,n} \mathcal{A}_{m,n}^* = \frac{1}{\Delta x'(M-1)} \frac{1}{\Delta y'(N-1)} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_{k,l} \psi_{k,l}^* \quad (3.161)$$

Für die winkelbezogene Intensität ergibt sich aus dieser Leistungsbilanz und Gl. (3.160) für  $M, N \gg 1$  in guter Näherung:

$$\Psi_{\infty k,l} \approx \frac{\Delta x' \Delta y'}{(\alpha_{M-1} - \alpha_0)(\beta_{N-1} - \beta_0)} \psi_{k,l} \psi_{k,l}^* \quad (3.162)$$

Der sich auf diese Weise ergebende diskrete Verlauf der winkelbezogenen Leistungsdichte im Fernfeld  $\Psi_{\infty k,l}$  spiegelt den tatsächlichen (kontinuierlichen) Verlauf der Leistungsdichte wider. Mithilfe des Zusammenhangs (3.162) besteht daher die Möglichkeit, alle für die Anwendung eines Mikroscooperspiegels relevanten und insbesondere die aus der (dynamischen) Deformation des Spiegels resultierenden Probleme zu untersuchen.

## 4 Nichtlineare Dynamik

In Kapitel 2 dieser Arbeit wurden bereits die von ATAMAN et al. durchgeführten und veröffentlichten Untersuchungen [18, 48, 49] zu den dynamischen Eigenschaften der *Fraunhofer IPMS*-Mikroscannerspiegel ausführlich vorgestellt. Sie basieren auf dem Ansatz, die Bewegungsgleichung (2.12) mithilfe einer linearen MATHIEU-Gleichung (2.30) anzunähern. Mit den diesem Gleichungstyp eigenen, parametrischen Resonanzen [47] lässt sich jedoch ausschließlich das Anschwingen der Bauelemente erklären. Weder die innerhalb der Frequenz-Antwortkurven auftretenden Hysteresen (siehe Abb. 2.13 auf S. 26), noch das Abbrechen der Schwingung in der Nähe der mechanischen Eigenresonanz kann mithilfe der linearen Näherung erklärt werden.

Da *Fraunhofer IPMS*-Mikroscannerspiegel im Normalfall nahe der mechanischen Eigenresonanz, also im Bereich der Hysterese der Antwortkurve betrieben werden, erscheint es sinnvoll, weitere Untersuchungen zur Dynamik der Bauelemente durchzuführen. Zu diesem Zweck wird die in Abschnitt 2.3.2 vorgestellte nichtlineare Bewegungsgleichung (2.29) weitergehend untersucht. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird dabei im folgenden Text auf mathematische Vollständigkeit verzichtet. Es sei jedoch an dieser Stelle auf Anhang E dieser Arbeit bzw. das in den Anlagen enthaltene *Mathematica*<sup>®</sup>-Notebook *stabilitaetsanalyse.nb* verwiesen. Diese enthalten die vollständigen Herleitungen sowie weitere Erklärungen zu den in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnissen.

Zur Verdeutlichung der sich aus den Analysen ergebenden Zusammenhänge und Erkenntnisse werden einige konkrete Beispiele benötigt. Zu diesem Zweck wird im Folgenden der *SINUS*-Scanner herangezogen. Tabelle 4.1 enthält die dabei gültigen, sich aus den Eigenschaften des Bauelements ergebenden Zusammenhänge zwischen den normierten und physikalischen Parametern, entsprechend der Substitutionsvorschrift (2.28). Werden die darin enthaltenen Ausdrücke in Gl. (2.29) eingesetzt, ergibt sich die nichtlineare Bewegungsgleichung des *SINUS*-Scanners.

Es soll an dieser Stelle noch erwähnt werden, dass eine ähnliche Analyse in den Arbeiten von TURNER et al. [98, 99] bereits am Beispiel eines *MEMS*-Sensors durchgeführt wurde. Dabei wurden jedoch ebenfalls nur die parametrischen Resonanzen des Systems betrachtet. Weder das Hystereseverhalten, noch die ebenfalls auftretenden Schwingungsabbrüche wurden näher untersucht oder erklärt.

### 4.1 Stabilitätsanalyse

Zur Untersuchung der dynamischen Eigenschaften der nichtlinearen Bewegungs-Dgl. eines Mikroscannerspiegels wird im Folgenden die *zwei-Zeiten-Methode* (*two variable expansion*, [47]) genutzt. Diese gehört zu den Standardwerkzeugen der *Störungstheorie*. Die Störungstheorie wird genutzt, um Näherungslösungen für nicht geschlossen lösbare

**Tabelle 4.1:** *Zusammenhang normierter und physikalischer Parameter des SINUS-Scanners.*  
Die Darstellung erfolgt in Abhängigkeit von den Parametern  $\hat{U}_x$  und  $f_{\square,x}$ .

$x$	$\tau$	$c$	$\delta_1$	$\delta'_1$	$\delta_3$	$\delta'_3$
$\theta_x$	$\pi f_{\square,x} t$	$\frac{70}{\pi f_{\square,x} \cdot s}$	$\frac{2.50 \cdot 10^5 + 3.63 \cdot 10^3 \bar{U}^2 / v^2}{f_{\square,x}^2 \cdot s^2}$	$1.82 \cdot 10^3 \frac{\bar{U}^2 / v^2}{f_{\square,x}^2 \cdot s^2}$	$-2.20 \cdot 10^6 \frac{\bar{U}^2 / v^2}{f_{\square,x}^2 \cdot s^2}$	$\delta_3$

mathematische Problemstellungen zu finden. Sie führt im Allgemeinen zu einem Ausdruck in Form einer Potenzreihe, welche das Problem innerhalb des Konvergenzradius exakt beschreibt. Durch Vernachlässigen von Termen höherer Ordnung können dann die strukturellen Eigenschaften untersucht werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Terme nullter und erster Ordnung berücksichtigt. Dies genügt, um die Eigenschaften der Bauelemente in der Nähe der parametrischen Resonanz erster Ordnung (Abschnitt 2.3.2) zu untersuchen. Um sub- und superharmonische Resonanzen in die Untersuchungen einzubeziehen, müssen zusätzliche Terme höherer Ordnung berücksichtigt werden<sup>17</sup>.

Im ersten Schritt wird die normierte Bewegungsgleichung (2.29) in eine zur Anwendung der Störungstheorie geeignete Form gebracht. Dazu wird ein dimensionsloser Störparameter  $\epsilon$  eingeführt. Durch Substitution von

$$\delta_1 = \beta = \beta_0 + \epsilon \beta_1, \quad \delta'_1 = \epsilon, \quad \delta_3 = \epsilon \gamma_3, \quad \delta'_3 = \epsilon \gamma'_3, \quad c = \epsilon \mu \quad (4.1)$$

erhält man eine *gestörte* lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung [47, 99]:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \beta_0 x = \epsilon \left( -(\beta_1 + 2 \cos 2\tau) x - (\gamma_3 + \gamma'_3 \cos 2\tau) x^3 - \mu \frac{dx}{d\tau} \right) \quad (4.2)$$

Entsprechend der *zwei-Zeiten-Methode* werden im nächsten Schritt zwei Zeitskalen eingeführt [47]. Diese werden auch als *schnelle Zeit*  $\xi$  und *langsame Zeit*  $\eta$  bezeichnet. Dabei ist  $\xi$  mit der periodischen Lösung der linken Seite von Gl. (4.2) verknüpft. Die *langsame Zeit*  $\eta$  bezieht sich auf die Modulation der Amplitude dieser Schwingung. Es ergibt sich folgender Zusammenhang mit der physikalischen Zeit  $t$ :

$$\xi := \omega t \quad \text{und} \quad \eta := \epsilon t \quad (4.3)$$

$\omega = \sqrt{\beta_0}$  entspricht dabei der Kreisfrequenz im Entwicklungspunkt, also der mechanischen Eigenkreisfrequenz des Scanners. Für die parametrische Resonanz erster Ordnung gilt  $\beta_0 = 1$ . Die normierten Größen ergeben sich daher zu:

$$\xi = \tau \quad \text{und} \quad \eta = \epsilon \tau \quad (4.4)$$

Im folgenden Schritt wird die normierte Auslenkung  $x$  in eine Potenzreihe nach  $\epsilon$  entwickelt und in Gl. (4.2) eingesetzt (Anhang E.1). Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung  $\Omega(\epsilon^2)$  ergibt sich ein gekoppeltes System, bestehend aus einer linearen und einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} + x_0 = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} - \mu \frac{\partial x_0}{\partial \xi} - (\beta_1 + 2 \cos 2\xi) x_0 - (\gamma_3 + \gamma'_3 \cos 2\xi) x_0^3 \quad (4.6)$$

Die allgemeine Lösung der linearen Gleichung lässt sich bestimmen. Sie entspricht der eines ungedämpften, harmonischen Oszillators. Infolgedessen gilt:

$$x \approx x_0 = A \cos \xi + B \sin \xi \quad \text{mit} \quad A = f(\eta), \quad B = f(\eta) \quad (4.7)$$

<sup>17</sup>Alternativ kann auch der Entwicklungspunkt der Reihenentwicklung in die Nähe einer sub- oder superharmonischen Resonanz gelegt werden. In der gleichen Analyse kann jedoch die parametrische Resonanz erster Ordnung nicht berücksichtigt werden.

Die normierte Auslenkung ist also erwartungsgemäß eine Oszillation bezüglich der *schnellen Zeit*  $\xi$ , welche in Abhängigkeit von der *langsamen Zeit*  $\eta$  in ihrer Amplitude moduliert wird. Als Bedingungen für eine stabile Lösung von Gl. (4.7) ergibt sich ein System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dA}{d\eta} = -\frac{\mu}{2}A + \frac{1}{2}(\beta_1 - 1)B + \frac{3}{8}\gamma_3 B(A^2 + B^2) - \frac{1}{4}\gamma_3' B^3 \quad (4.8)$$

$$\frac{dB}{d\eta} = -\frac{\mu}{2}B - \frac{1}{2}(\beta_1 + 1)A - \frac{3}{8}\gamma_3 A(A^2 + B^2) - \frac{1}{4}\gamma_3' A^3 \quad (4.9)$$

Anhand dieses, in der Literatur auch allgemein als *Slow-flow* [47, 99] bezeichneten Systems können die Eigenschaften der nichtlinearen Bewegungsgleichung bzw. deren Lösungen untersucht werden.

#### 4.1.1 Fixpunkte und Grenzyklen

Zur Bestimmung der strukturellen Eigenschaften der Bewegungsgleichung (2.29) wird die Tatsache genutzt, dass stabile Lösungen des *Slow-flow*-Systems (4.8, 4.9) aufgrund des Zusammenhangs (4.7) zu stationären Zuständen der nichtlinearen Bewegungsgleichung führen. Betrachtet man die sich daraus ergebenden Zusammenhänge innerhalb des Phasenraums [50, 65] der beiden Systeme, wird deutlich, dass ein Fixpunkt des *Slow-flows* im Allgemeinen mit einem *Grenzyklus* (d.h. einer geschlossenen Trajektorie) der Bewegungsgleichung mit einem Radius  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$  korrespondiert. Es ergeben sich die folgenden Zusammenhänge der strukturellen Eigenschaften:

1. Stabile Fixpunkte des *Slow-flow*-Systems bei  $R \neq 0$  korrespondieren mit stabilen Grenzyklen der Bewegungsgleichung.
2. Instabile Fixpunkte des *Slow-flow*-Systems bei  $R \neq 0$  korrespondieren mit instabilen Grenzyklen der Bewegungsgleichung.
3. Ein Fixpunkt bei  $R = 0$  korrespondiert mit einem degenerierten Grenzyklus (mit Radius null), also einem Punktattraktor (stabil) oder Sattelpunkt (instabil) der Bewegungsgleichung. Die Stabilitätseigenschaften bleiben dabei erhalten.

Die sich für eine Lösung entsprechend Gl. (4.7) ergebenden Fixpunkte  $\{A_s, B_s\}$  bestimmen demnach die stationären Zustände eines Mikros scannerspiegels (Schwingung mit stabiler Amplitude). Ein solcher Arbeitspunkt ist zusätzlich zur Amplitude durch eine Phasenlage  $\phi$  gekennzeichnet, welcher sich nach Gl. (4.7) ebenfalls aus den Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  ergibt. Es ist daher zweckmäßig, das *Slow-flow*-System in polare Koordinaten  $(R, \phi)$  zu transformieren [47]. In Übereinstimmung mit der bereits genutzten Definition für  $R$  gilt dann:

$$A = R \cos \varphi \quad \text{und} \quad B = R \sin \varphi \quad \text{mit} \quad R = f(\eta), \quad \varphi = f(\eta) \quad (4.10)$$

Dabei entspricht  $\varphi$  der Phasenverschiebung  $\phi_x$  der Aktorschwingung entsprechend Gl. (2.14);  $R$  ist die normierte Amplitude der Schwingung.

Wie anhand Anhang E.2 nachvollzogen werden kann, ergeben sich die folgenden Bedingungen für Fixpunkte des *Slow-flow*-Systems in polaren Koordinaten:

$$\varphi_{s,1} = -\frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{4\mu}{4 + R_s^2 \gamma_3'} \right) \quad \text{oder} \quad \varphi_{s,2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{4\mu}{4 + R_s^2 \gamma_3'} \right) \quad (4.11)$$

und

$$R_{s,1} = 0 \quad \text{oder} \quad R_{s,2\dots 9}^2 = -\frac{4(\beta_1 \pm \Gamma)}{2\gamma_3' \Gamma \pm 3\gamma_3} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \sqrt{1 - \frac{16\mu^2}{(4 + \gamma_3' R_s^2)^2}} \quad (4.12)$$

Es existieren also 17 Fixpunkte, von denen jedoch nur fünf von einander verschieden und für die Eigenschaften eines Scannerspiegels relevant sind:

$$\{R = R_{s,1}\}, \quad \{R = \pm R_{s,2}, \varphi = \varphi_{s,1}\} \quad \text{und} \quad \{R = \pm R_{s,3}, \varphi = \varphi_{s,2}\} \quad (4.13)$$

#### 4.1.2 Stabilität

Im nächsten Schritt werden die Stabilitätseigenschaften der fünf relevanten Fixpunkte des *Slow-flow*-Systems untersucht (Anhang E.2). Dazu werden die Eigenwerte  $\lambda_i$  der JACOBI-Matrix des Differentialgleichungssystems (4.8, 4.9) bestimmt. Entsprechend dem Satz von HARTMAN-GROBMAN [50] ist ein Fixpunkt stabil, wenn die Realteile beider Eigenwerte an dieser Stelle negativ sind. Die Bedingung für Stabilität ergibt sich entsprechend Gl. (E.24). Ein überschaubarer Ausdruck lässt sich ausschließlich für den Fixpunkt bei  $R = R_{s,1}$  angeben. Die Bedingung für dessen Stabilität lautet:

$$\beta < 1 - \epsilon \sqrt{1 - \mu^2} \quad \text{oder} \quad \beta > 1 + \epsilon \sqrt{1 - \mu^2} \quad (4.14)$$

Dies stimmt im Wesentlichen mit den Ergebnissen der linearen Analyse (Abschnitt 2.3.2, [18, 47]) überein. Die Bereiche in denen der Fixpunkt bei  $R = R_{s,1}$  instabil wird, entsprechen demnach den parametrischen Resonanzen des Systems, beschreiben also das Anschwingverhalten.

Für die Fixpunkte bei  $R = \pm R_{s,2\dots 3}$  ergeben sich sehr komplexe analytische Ausdrücke als Bedingungen für Stabilität (siehe Anlage *stabilitaetsanalyse.nb*). Der Verlauf der Eigenwerte kann jedoch numerisch bestimmt werden. Abbildung E.2 auf S. 203 enthält die sich ergebenden Verläufe der Realteile der Eigenwerte für die Parameter des SINUS-Scanners. Es wird deutlich, dass die Fixpunkte bei  $R = \pm R_{s,2}$  immer stabil sind. Bei  $R = \pm R_{s,3}$  ist genau ein Realteil positiv. Es handelt sich daher um Sattelpunkte.

#### 4.1.3 Bifurkationen

Im letzten Schritt der Stabilitätsanalyse werden die Bifurkationen [47, 50] der nichtlinearen Bewegungsgleichung untersucht (Anhang E.3). Von einer *Bifurkation* spricht man, wenn sich aufgrund der quasistatischen Variation eines Parameters (*Kontrollparameter*) die topologischen Eigenschaften des Systems plötzlich ändern. Dabei können Fixpunkte verschwinden, entstehen oder ihre Stabilitätseigenschaften verändern. Diejenigen Werte eines Kontrollparameters bei denen Bifurkationen auftreten, werden als *Verzweigungswerte* bezeichnet. Es lassen sich zwei verschiedene Arten von Bifurkationen unterscheiden [50]:

1. *Lokale Bifurkationen* ergeben sich aus den Eigenschaften des dynamischen Systems in der Nähe eines (degenerierten) Fixpunktes. Die entsprechenden Verzweigungswerte können mithilfe der Funktionaldeterminante des Systems bestimmt werden.
2. *Globale Bifurkationen* sind parameterabhängige, globale Änderungen der dynamischen Eigenschaften. Sie lassen sich im Unterschied zu lokalen Bifurkationen nicht aus lokalen Informationen ableiten.

Wie in Anhang E.3 näher ausgeführt wird, sind globale Bifurkationen im Fall der Bewegungsgleichung eines Scannerspiegels nur theoretisch von Bedeutung (nämlich beim Übergang  $\alpha \rightarrow +0$ ). Sie werden daher nicht weiter berücksichtigt.

Hinreichende und notwendige Bedingung für eine lokale Bifurkation ist ein Nulldurchgang der zugehörigen Funktionaldeterminante [50]:

$$\det \mathbf{D} \Big|_{\substack{R=R_s \\ \varphi=\varphi_s}} = 0 \quad (4.15)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{D}$  die JACOBI-Matrix des *Slow-flow*-Systems, entsprechend Gl. (E.22) bzw. Gl. (E.28). Wie anhand Anhang E.3 deutlich wird, ergeben sich die folgenden Verzweigungswerte für den Kontrollparameter  $\beta$  bezüglich einer Bifurkation des Fixpunktes bei  $R = \pm R_{s,1}$ :

$$\beta_{\text{cr}1,2} = 1 \mp \epsilon \sqrt{1 - \mu^2} \quad (4.16)$$

Für die Bifurkation der Fixpunkte bei  $R = \pm R_{s,2\dots3}$  kann ein geschlossener mathematischer Ausdruck für die Verzweigungswerte nur näherungsweise angegeben werden. Unter Annahme von  $\mu \approx 0$  gilt dann:

$$\beta_{\text{cr}3} \approx 1 + 2\epsilon \quad (4.17)$$

Aus der Normierung (2.28) und der Substitutionsvorschrift (4.1) folgt ein direkter, linearer Zusammenhang zwischen dem Parameter  $\mu$  und dem Dämpfungsfaktor  $\alpha_x$ . Die Näherung entspricht also einer Vernachlässigung der Dämpfung.

Für  $\alpha_x \neq 0$  bzw.  $\mu \neq 0$  können die Verzweigungswerte numerisch ermittelt werden. Entsprechende Ergebnisse für den *SINUS*-Scanner sind in Abb. E.4b in Form eines Bifurkationsdiagramms [50] dargestellt. Daraus wird deutlich, dass zumindest die qualitativen Eigenschaften des Systems bei Anwendung der Näherung  $\mu \approx 0$  erhalten bleiben.

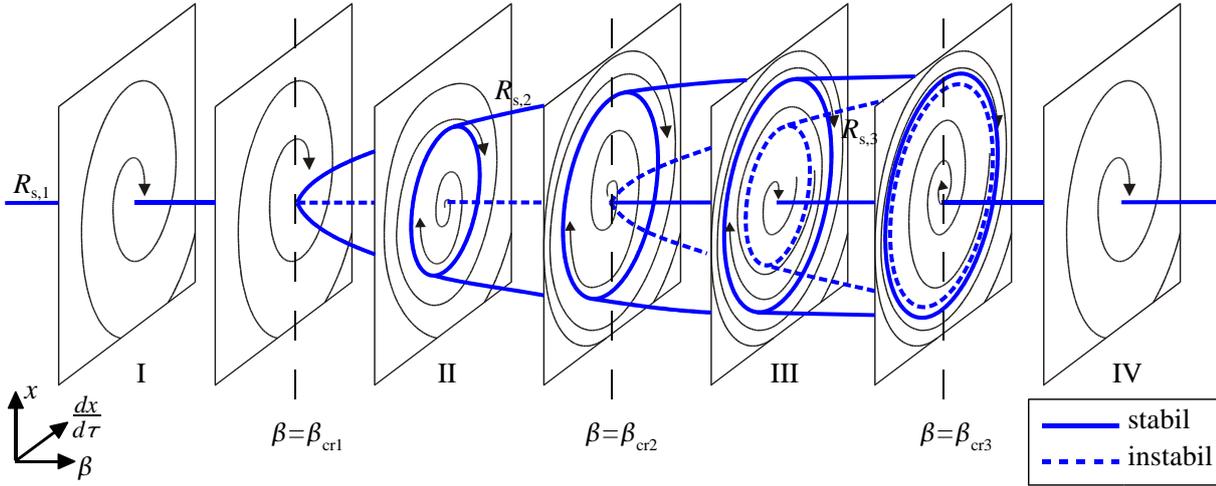
Für gegebene Parameter  $\epsilon$  und  $\mu$  treten Bifurkationen immer dann auf, wenn für den (quasistatisch) variierten Kontrollparameter  $\beta$  eine der Bedingungen  $\beta = \beta_{\text{cri}}$  erfüllt ist. Die resultierenden topologischen Eigenschaften sind schematisch in Abb. 4.1 dargestellt. Es ergeben sich nahe der mechanischen Eigenresonanz drei relevante Bifurkationen bzw. vier Regionen mit unterschiedlichen Stabilitätseigenschaften:

#### Region I: $\beta < \beta_{\text{cr}1}$

Es existiert ein *Punktattraktor* bei  $R = 0$  bzw. bei  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$ . Alle relevanten Lösungen der nichtlinearen Bewegungsgleichung (2.29) verlaufen asymptotisch gegen null. Aufgrund des Zusammenhangs  $\theta_x = x$  (siehe Normierung (2.28)) gilt  $\theta_x|_{t \rightarrow \infty} = 0$ . Der Scannerspiegel schwingt nicht.

#### Übergang $\beta \rightarrow \beta_{\text{cr}1} - 0$

Entsprechend Abschnitt E.2 wird der Fixpunkt bei  $R = 0$  instabil. Außerdem entsteht ein stabiler Fixpunkt bei  $R = \pm R_{s,2}$ . Eine solche Verzweigung wird als *superkritische Gabelverzweigung* bezeichnet [50]. Für die Bewegungsgleichung (2.29) bedeutet dies den Übergang von einem Punktattraktor zu einem Sattelpunkt bei  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$  und zu einem asymptotisch stabilen Grenzzyklus bei  $\hat{x} = \pm R_{s,2}$ . Dieser Verzweigungstyp wird als *superkritische HOPF-Verzweigung* bezeichnet.



**Abb. 4.1:** Stabilitätseigenschaften eines Mikrosannerspiegels bei parametrischer Anregung. Die qualitativen Eigenschaften des Systems ändern sich aufgrund von Bifurkationen bei quasistatischer Variation des Kontrollparameters  $\beta$ .

### Region II: $\beta_{cr1} < \beta < \beta_{cr2}$

Es existiert ein Sattelpunkt bei  $R = 0$  bzw. bei  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$ . Alle relevanten Lösungen der nichtlinearen Bewegungsgleichung verlaufen asymptotisch gegen einen Grenzyklus mit dem Radius  $\pm R_{s,2}$ . Es gilt  $\hat{\theta}_x|_{t \rightarrow \infty} = \pm R_{s,2}$ . Der Scannerspiegel schwingt in parametrischer Resonanz (Abschnitt 2.3.2).

### Übergang $\beta \rightarrow \beta_{cr2} - 0$

Der Fixpunkt bei  $R = 0$  wird wieder stabil. Zusätzlich entsteht ein instabiler Fixpunkt bei  $R = \pm R_{s,3}$ . Es handelt sich demnach um eine *subkritische Gabelverzweigung* [50]. Für Gl. (2.29) entspricht das dem Übergang von einem Sattelpunkt zu einem Punktattraktor bei  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$ . Gleichzeitig entsteht ein instabiler Grenzyklus bei  $\hat{x} = \pm R_{s,3}$ . Dies wird als *subkritische HOPF-Verzweigung* bezeichnet.

### Region III: $\beta_{cr2} < \beta < \beta_{cr3}$

Es existiert ein stabiler Fixpunkt bei  $R = 0$  (Punktattraktor bei  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$ ), ein stabiler Fixpunkt bei  $R = \pm R_{s,2}$  (stabiler Grenzyklus bei  $\hat{x} = \pm R_{s,2}$ ) und ein instabiler Fixpunkt bei  $R = \pm R_{s,3}$  (instabiler Grenzyklus bei  $\hat{x} = \pm R_{s,3}$ ).

Es gilt  $\hat{\theta}_x|_{t \rightarrow \infty} = \{\pm R_{s,2}, 0\}$ . Der Scannerspiegel wird im Bereich der Hysterese der Frequenz-Antwortkurve betrieben (Abschnitt 2.3.2).

### Übergang $\beta \rightarrow \beta_{cr3} - 0$

Entsprechend Abschnitt E.2 treffen die stabilen Fixpunkte  $\pm R_{s,2}$  auf die instabilen Fixpunkte  $\pm R_{s,3}$ . Sie fließen ineinander und heben sich gegenseitig auf. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *Falte* bzw. *Sattel-Knoten-Verzweigung* [50]. Für die Bewegungsgleichung (2.29) entspricht dies einer Kollision des stabilen Grenzyklus bei  $\hat{x} = \pm R_{s,2}$  mit dem instabilen Grenzyklus bei  $\hat{x} = \pm R_{s,3}$ , wobei sich beide gegenseitig aufheben. Dies wird auch als *Annihilation* bezeichnet.

### Region IV: $\beta_{cr3} < \beta$

Es existiert ein Punktattraktor bei  $R = 0$  bzw. bei  $(x, \frac{dx}{d\tau}) = (0, 0)$ . Alle relevanten

Lösungen der nichtlinearen Bewegungsgleichung verlaufen asymptotisch gegen null. Es gilt  $\theta_x|_{t \rightarrow \infty} = 0$ . Der Scannerspiegel schwingt nicht.

Zur Verifikation bzw. weiteren Veranschaulichung der Ergebnisse der Stabilitätsanalyse wurden am Beispiel des *SINUS*-Scanners Phasenportraits [50] des *Slow-flow*-Systems bzw. der nichtlinearen Bewegungsgleichung (2.29) für die verschiedenen Stabilitätsregionen erstellt. Diese sind in Anhang E.4 enthalten.

#### 4.1.4 Diskussion

Anhand der Normierungs- und Substitutionsvorschriften (2.28) bzw. (4.1) ist es möglich, die ermittelten Zusammenhänge auf die physikalischen Eigenschaften eines Mikroscannerspiegels zu übertragen. Dabei beschränken sich die folgenden Betrachtungen auf die Anregung bzw. Auslenkung der Spiegelplatte. Die gewonnenen Erkenntnisse können jedoch in guter Näherung auch auf die Eigenschaften des beweglichen Rahmens eines 2D-Scanners übertragen werden.

Da Systemparameter wie Massenträgheitsmoment oder Dämpfung für kleine Auslenkungen als konstant angesehen werden können, sind ausschließlich die Pulsspannung  $\hat{U}_x$  und die Pulsfolgefrequenz  $f_{\square,x}$  der Antriebsspannung als veränderliche Parameter zu betrachten. Sowohl die Stabilitätsregionen, als auch die Verzweigungswerte können dann in der  $\hat{U}_x$ - $f_{\square,x}$ -Ebene eines Mikroscannerspiegels, ähnlich Abb. 2.12, übertragen werden. Es ergeben sich die folgenden, stark nichtlinearen Zusammenhänge:

$$\hat{U}_x = 2 \sqrt{\frac{2 k_{t,x} \epsilon}{2 r_1 \epsilon - r_1 \beta}} \quad \text{und} \quad f_{\square,x} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_{t,x}}{J_{xx} (\beta - 2\epsilon)}} \quad (4.18)$$

Mithilfe dieser Transformationsvorschrift können nun die Verzweigungswerte mit der Pulsfolgefrequenz als Kontrollparameter anstelle von  $\beta$  bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass sich die Richtungen der Bifurkationen aufgrund des resultierenden Zusammenhangs

$$\beta \sim \frac{1}{f^2} + C \quad \text{für} \quad \epsilon \approx \text{const} \quad (4.19)$$

umkehren. Die Verzweigungswerte für die Pulsfolgefrequenz ergeben sich zu:

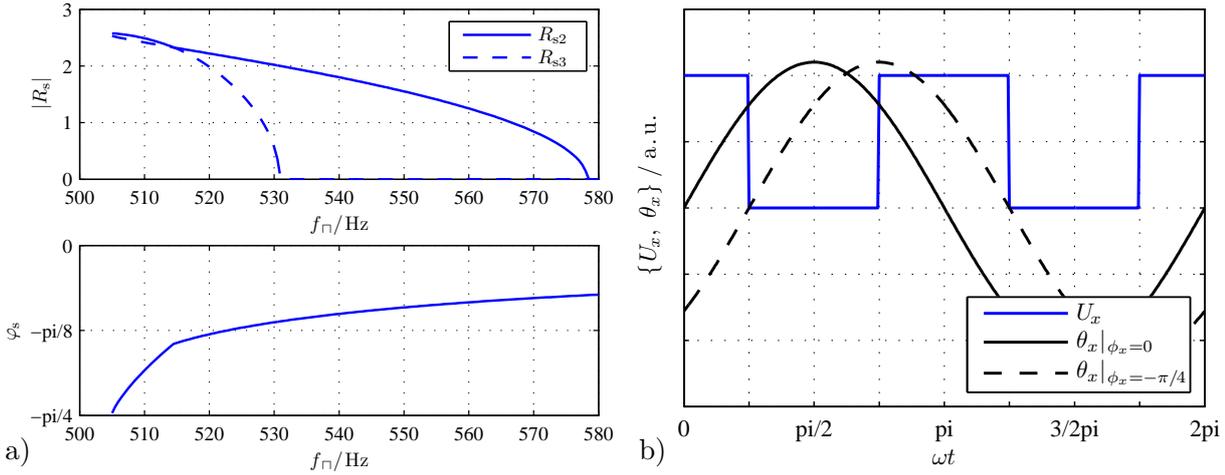
$$f_{\text{cr}1,2} = \frac{\sqrt{2 J_{xx} (4 k_{t,x} - r_1 \hat{U}_x^2) - 4 \alpha_x^2 \mp \sqrt{J_{xx}^2 r_1^2 \hat{U}_x^4 + 16 \alpha_x^4 + 16 J_{xx} (r_1 \hat{U}_x^2 - 4 k_{t,x}) \alpha_x^2}}}{2\pi\sqrt{2} J_{xx}} \quad (4.20)$$

bzw.

$$f_{\text{cr}3} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_{t,x}}{J_{xx}}} \quad \text{mit} \quad \alpha_x \approx 0 \quad (4.21)$$

Entsprechend Gl. (4.19) gilt dabei:

$$f_{\text{cr}1} \geq f_{\text{cr}2} \geq f_{\text{cr}3} \quad \text{für} \quad \hat{U}_x = \text{const} \quad (4.22)$$

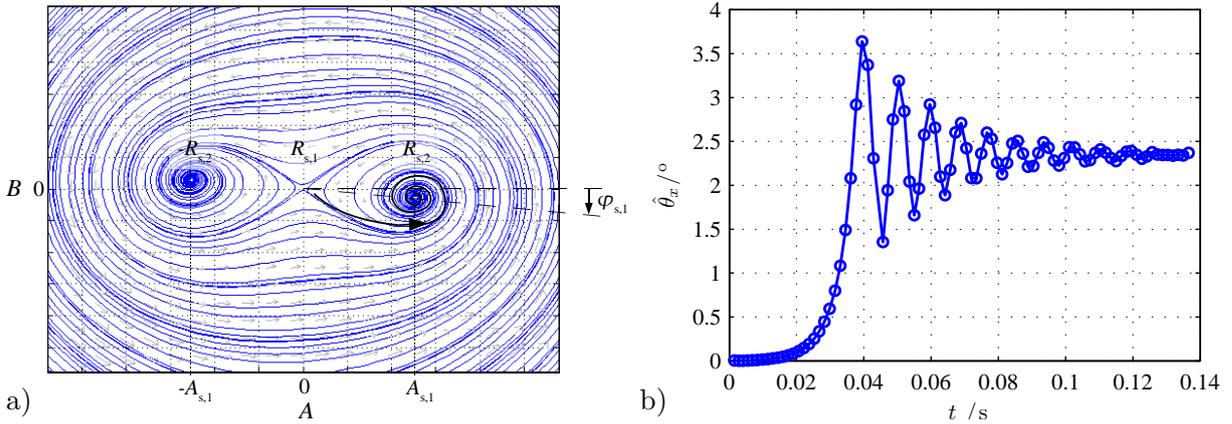


**Abb. 4.2:** Amplituden- und Phasengang bei parametrischer Anregung. a) Verlauf des Radius und der Phasenlage der Grenzzyklen bei  $R_{s,2}$  bzw.  $R_{s,3}$  entsprechen den Gln. (4.11) und (4.12) (SINUS-Scanner,  $\hat{U}_x = 4 \text{ V}$ ); b) Die Phasenlage der Schwingung bezieht sich auf den Verlauf der Antriebsspannung entsprechend Gl. (2.27).

Das für einen SINUS-Scanner resultierende Bifurkationsdiagramm mit der Pulsfolgefrequenz  $f_{\square,x}$  als Kontrollparameter und der Pulsspannung  $\hat{U}_x$  als Störparameter ist in Abb. E.5 dargestellt. Zum Vergleich ist zusätzlich der sich für  $\alpha_x \neq 0$  ergebende, numerisch ermittelte Verlauf enthalten.

Wie bereits aus Abschnitt 4.1.1 deutlich wird, können aus den Bedingungen für Fixpunkte des *Slow-flow*-Systems (4.8, 4.9) direkte Schlussfolgerungen bezüglich der Phasenlage und Amplitude der Schwingung eines Mikroscoannerspiegels gezogen werden. Die Phasenbedingung  $\varphi_{s,i}$  entsprechend Gl. (4.11) legt demnach die Phasenlagen der sich ergebenden stabilen und instabilen Grenzzyklen, und damit die Phasenlage der Spiegelschwingung  $\phi_x$  fest. Die Amplitudenbedingungen  $\pm R_{s,i}$  bestimmen die Amplituden der Grenzzyklen und damit die Amplitude im eingeschwungenen Zustand  $\hat{\theta}_x|_{t \rightarrow \infty}$ . Wendet man die Substitutionsvorschrift (4.1) auf die Gln. (4.11) und (4.12) an und führt anschließend eine Entnormierung entsprechend (2.28) durch, kann der Amplituden- und Phasengang eines Mikroscoannerspiegels bezüglich der Pulsfolgefrequenz  $f_{\square,x}$  ermittelt werden. Abbildung 4.2a enthält den sich für den SINUS-Scanner ergebenden Verlauf. Der sich in der dritten Stabilitätsregion (Abb. 4.1) ausbildende instabile Grenzzyklus bei  $\pm R_{s,3}$  ist dabei gestrichelt dargestellt. Er kann in einem realen System aufgrund seiner Instabilität nicht beobachtet werden.

Betrachtet man den Verlauf der Amplitude des stabilen Grenzzyklus bei  $\pm R_{s,2}$ , wird deutlich, dass der sich aus der Stabilitätsanalyse ergebende Amplitudengang qualitativ gut mit dem Verlauf der Frequenz-Antwortkurve eines Scannerspiegels übereinstimmt (vgl. Abb. 2.13 auf S. 26). Neben den bereits in Abschnitt 2.3.2 beschriebenen instabilen Regionen, in denen die Oszillation des Bauelements startet, ergibt sich eine Begrenzung der Amplitude auf endliche Werte. Wie anhand des in Abb. 4.3a enthaltenen Phasenportraits des *Slow-flow*-Systems (E.12, E.13) eines SINUS-Scanners erkennbar ist, laufen die Trajektorien dabei spiralförmig auf die stabilen Zustände bei  $\pm R_{s,2}$  zu. Bezüglich der Schwingungsamplitude entspricht das einer abklingenden Schwingung um  $\hat{\theta}_x|_{t \rightarrow \infty}$  (siehe Abb. 4.3b). Dieses Verhalten der Bauelemente wurde bereits in [3] beschrieben und kann bei allen in parametrischer Resonanz gestarteten Scannerspiegeln beobachtet werden.



**Abb. 4.3:** *Anschwingen in parametrischer Resonanz.* a) Phasenportrait des *Slow-flow*-Systems für die Parameter des *SINUS*-Scanners,  $\epsilon = 0.2$ ,  $\beta_{cr1} < \beta < \beta_{cr2}$  (Region II in Abb. 4.1) ; b) typisches Anschwingverhalten des *SINUS*-Scanners in parametrischer Resonanz,  $\hat{U}_x = 10$  V,  $f_{\square,x} = 650$  Hz.

Auch die Hysterese und der plötzliche Zusammenbruch der Schwingung nahe der mechanischen Eigenresonanz werden im Modell berücksichtigt. Sie entsprechen der Annihilation der Grenzzyklen bei  $\beta = \beta_{cr,3}$  bzw.  $f_{\square} = f_{cr3}$ .

Interessant ist außerdem der sich entsprechend Gl. (4.11) ergebende Phasengang im Bereich der Stabilitätsregionen II und III (Abb. 4.1). Er stimmt gut mit experimentell ermittelten Verläufen [3] überein<sup>18</sup>. Wie anhand Abbildung 4.2a deutlich wird, verringert sich die Phasenlage mit fallender Pulsfolgefrequenz. Bei einer Phasenverschiebung  $\phi_x = -\pi/4$  kommt es zur Annihilation der Grenzzyklen und folglich zum Abbruch der Schwingung.

Bemerkenswert ist der sich an dieser Stelle ergebende Zusammenhang mit der synchronisierten Anregung eines Mikrosannerspiegels (Abschnitt 2.3.1). Betrachtet man die Schwingung in Abb. 4.2b für  $\phi_x = -\pi/4$  wird deutlich, dass der sich ergebende Verlauf identisch ist mit dem bei synchronisierter Anregung genutzten Antriebsregime (vgl. Abb. 2.9 auf S. 21). Die synchronisierte Anregung kann folglich als Spezialfall der parametrischen Anregung mit  $f_{\square} = f_{cr3}$  betrachtet werden.

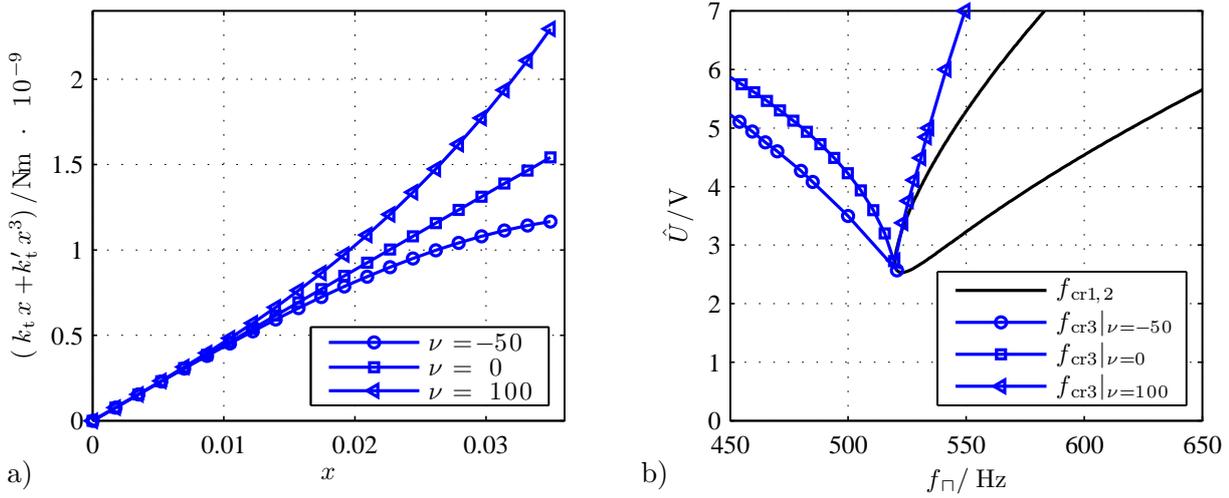
## 4.2 Geometrische Nichtlinearitäten

Neben den aus dem *Out-of-plane-comb*-Antrieb eines Mikrosannerspiegels resultierenden Nichtlinearitäten können auch kubische geometrische Nichtlinearitäten in der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden. Die Federcharakteristik wird dazu mit einem Polynom der folgenden Form angenähert:

$$M_{\text{mech},x} = -\left(k_{t,x}\theta_x + k'_{t,x}\theta_x^3\right) \quad \text{mit} \quad [k'_{t,x}] = \text{Nm} \quad (4.23)$$

Der Wert für  $k'_{t,x}$  kann beispielsweise mithilfe einer nichtlinearen Kurvenanpassung an eine mit der *FEM* ermittelten Federkennlinie bestimmt werden. Alternativ können auch experimentell ermittelte Verläufe genutzt werden.

<sup>18</sup>Bei einem Vergleich der Verläufe mit den in [3] ermittelten experimentellen Daten muss allerdings beachtet werden, dass sich die Phasenlagen um  $\pi/4$  unterscheiden. Der Grund dafür liegt in einer von Gl. (2.27) abweichenden Definition der Phase  $\phi_x$ .



**Abb. 4.4:** Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten auf die dynamischen Eigenschaften.  
 a) Denkbare nichtlineare Federkennlinien des *SINUS*-Scanners. Der Parameter  $\nu \sim k'_{t,x}$  beschreibt dabei die Nichtlinearität. b) Bifurkationsdiagramm des *SINUS*-Scanners für verschiedene nichtlineare Federkennlinien.

#### 4.2.1 Einfluss auf die Dynamik

Werden geometrische Nichtlinearitäten in der Bewegungsgleichung (2.29) berücksichtigt, gilt der Zusammenhang  $\delta_3 = \delta'_3$  (vgl. mit Normierung (2.28) auf S. 24) nicht. Stattdessen setzt sich  $\delta_3$  aus zwei Termen zusammen:

$$\delta_3 = \underbrace{-\frac{r_3 \hat{U}_x^2}{J_{xx} \omega^2}}_{\text{elektrisch}} + \underbrace{\frac{4 k'_{t,x}}{J_{xx} \omega^2}}_{\text{mechanisch}} \quad (4.24)$$

Der erste Anteil spiegelt dabei die sich aus den Eigenschaften der Antriebselektroden ergebenden Nichtlinearitäten dritter Ordnung wider und wird dementsprechend von dem Parameter  $r_3$  dominiert (siehe Abb. 2.11 auf S. 24).

Für den Parameter  $\gamma_3$  der gestörten Differentialgleichung (4.2) folgt dann aus der Substitutionsvorschrift (4.1):

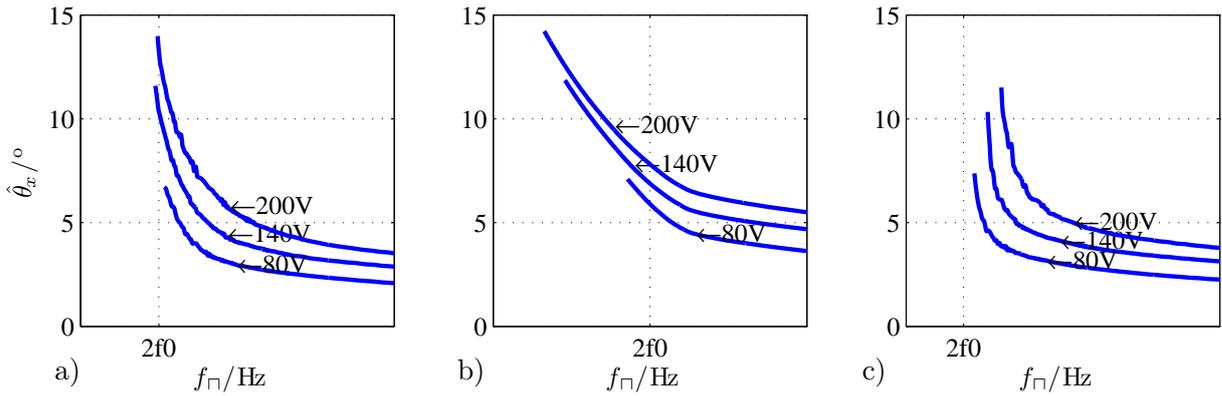
$$\gamma_3 = -\frac{r_3 \hat{U}_x^2}{J_{xx} \omega^2 \epsilon} + \frac{\nu}{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{4 k'_{t,x}}{J_{xx} \omega^2} \quad (4.25)$$

Dabei charakterisiert der dimensionslose Parameter  $\nu$  die Art der geometrischen Nichtlinearität (siehe auch Abb. 4.4a):

$\nu < 0$  Die Federhärte nimmt mit steigender Auslenkung  $\theta_x$  ab. Es gilt  $k'_{t,x} < 0$ ; die Torsionsfeder ist *degressiv*.

$\nu = 0$  Die Federhärte ist konstant. Es gilt  $k'_{t,x} = 0$ ; die Torsionsfeder ist *linear*.

$\nu > 0$  Die Federhärte nimmt mit steigender Auslenkung zu. Es gilt  $k'_{t,x} > 0$ ; die Torsionsfeder ist *progressiv*.



**Abb. 4.5:** Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten auf das Bauelementverhalten. Die Darstellungen enthalten die Frequenz-Antwortkurven eines Scannerspiegels mit den Parametern  $f_x \approx 5.5 \text{ kHz}$ ,  $D = 2 \text{ mm}$  bei parametrischer Anregung.  $f_0$  ist die mechanische Eigenresonanzfrequenz des linearen Systems. a) näherungsweise lineare Federcharakteristik; b) degressive Federcharakteristik; c) progressive Federcharakteristik.

### 4.2.2 Diskussion

Untersucht man die Bedingungen für parametrische Resonanz (Region II in Abb. 4.1) eines Mikrosanners entsprechend Gl. (4.16) bzw. Gl. (4.20) wird deutlich, dass geometrische Nichtlinearitäten keinen Einfluss auf das Anschwingverhalten der Bauelemente haben. Es gilt  $\beta_{\text{cr}1,2} \neq f(\nu)$  bzw.  $f_{\text{cr}1,2} \neq f(k'_{t,x})$ . Gleiches gilt für  $\mu = 0$  (also  $\alpha_x = 0$ ) bezüglich des Verzweigungswerts  $\beta_{\text{cr}3}$  und damit auch  $f_{\text{cr}3}$  (siehe Gl. (4.17) bzw. Gl. (4.21)).

Für ein reales Bauelement gilt jedoch  $\alpha_x > 0$  und damit  $\mu > 0$ . Wie bereits in Abschnitt 4.1.3 angemerkt wurde, kann der Verlauf der Verzweigungswerte  $\beta_{\text{cr}3}$  bzw.  $f_{\text{cr}3}$  für diesen Fall numerisch bestimmt werden. Abbildung 4.4b enthält die sich für drei verschiedene Federtypen (linear, degressiv, progressiv) ergebenden Bifurkationsdiagramme. Es wird deutlich, dass geometrische Nichtlinearitäten das Verhalten der Bauelemente im Bereich der Hysterese der Antwortkurve (Region III in Abb. 4.1) stark beeinflussen. Nimmt die Federhärte mit steigender Auslenkung ab (degressiv), vergrößert sich der Bereich der Hysterese. Progressive Federn resultieren in einer Verringerung der Hysteresebreite.

Die geometrischen Nichtlinearitäten beeinflussen also das Verhalten der Bauelemente nahe der Eigenresonanz, also im Arbeitspunkt:

- Bauelemente mit nahezu *linearer Federcharakteristik* (Abb. 4.5a) sind durch einen hohen Anstieg der Frequenz-Antwortkurven in der Nähe der mechanischen Eigenresonanz gekennzeichnet. Es können große mechanische Auslenkungen sowohl bei synchronisierter, als auch bei parametrischer Anregung erreicht werden. Dabei ist die Resonanzfrequenz im Arbeitspunkt kaum von der Amplitude der Schwingung abhängig. Der Bereich der Frequenz-Antwortkurven, in dem große Auslenkungen erreicht werden können (Bandbreite), ist vergleichsweise schmal.
- Bauelemente mit *degressiver Federcharakteristik* (Abb. 4.5b) weisen einen vergleichsweise geringen Anstieg der Frequenz-Antwortkurven in der Nähe der mechanischen Eigenresonanz auf. Es können große mechanische Auslenkungen sowohl bei synchronisierter, als auch bei parametrischer Anregung erreicht werden. Aufgrund des geringeren Anstiegs der Frequenz-Antwortkurven im Arbeitspunkt ist dieser vergleichsweise stabil gegenüber Änderungen der Pulsfolgefrequenz  $f_{\square}$ . Allerdings ist

die Resonanzfrequenz im Arbeitspunkt von der Auslenkung abhängig. Im Gegenzug ist die Bandbreite bei großen Auslenkungen vergleichsweise groß.

- Bauelemente mit *progressiver Federcharakteristik* (Abb. 4.5c) weisen einen sehr großen Anstieg der Frequenz-Antwortkurven in der Nähe der mechanischen Eigenresonanz auf. Große mechanische Auslenkungen können nur im synchronisierten Betrieb erreicht werden. Bei parametrischer Anregung kommt es aufgrund der verringerten Breite der Hysterese (vgl. Abb. 4.4) zum Abbruch der Schwingung bei vergleichsweise geringen Auslenkungen. Ein solches Verhalten wurde beispielsweise in [100] experimentell untersucht. Aufgrund des großen Anstiegs der Frequenz-Antwortkurven im Arbeitspunkt ist dieser außerdem empfindlich bezüglich Änderungen der Pulsfolgefrequenz  $f_{\square}$ . Die Resonanzfrequenz im Arbeitspunkt ist wie bei Bauelementen mit *degressiver Federcharakteristik* von der Auslenkung abhängig.

Es wird deutlich, dass die Charakteristik eines Mikrosannerspiegels stark von geometrischen Nichtlinearitäten beeinflusst wird. Dies muss beim Entwurf berücksichtigt werden.

### 4.2.3 Möglichkeiten zur Beeinflussung

Wie in Abschnitt 3.2.2 dieser Arbeit bereits erläutert wurde, weisen die als Federn zum Einsatz kommenden, beidseitig eingespannten Torsionsstäbe grundsätzlich progressive Kennlinienverläufe auf. Wie aus den vorangegangenen Abschnitten hervorgeht, wirkt sich eine solche Charakteristik eher ungünstig auf die dynamischen Eigenschaften eines Sannerspiegels aus. Es ist daher oft sinnvoll, die Progressivität der Aufhängung zu verringern. Für bestimmte Anwendungen ist sogar eine degressive Federcharakteristik sinnvoll oder notwendig.

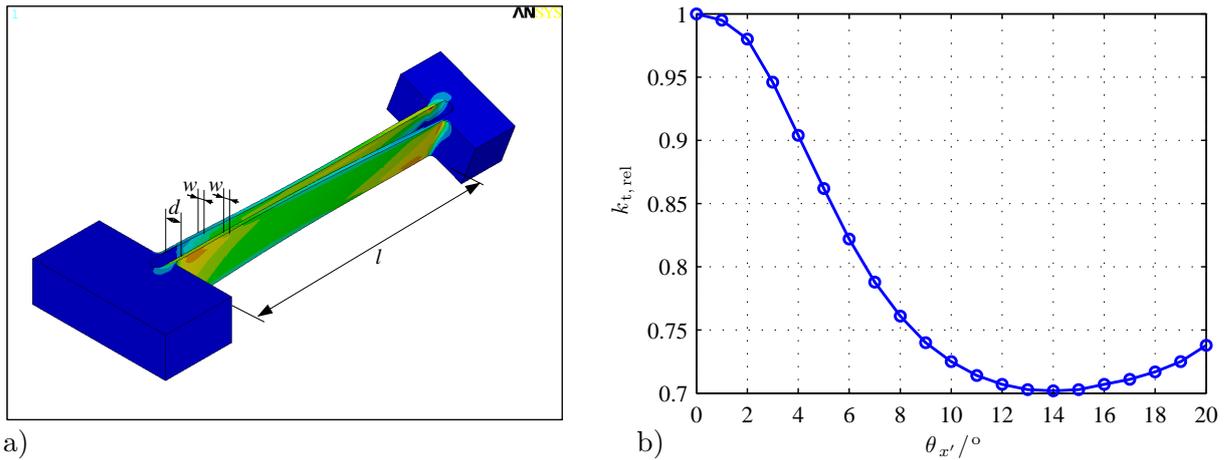
Grundsätzlich bestehen zwei Möglichkeiten, durch Maßnahmen beim Entwurf die Progressivität eines beidseitig eingespannten, geraden Torsionsstabs zu verringern:

1. Wird die Steifigkeit der Einspannungen des Torsionsstabs durch konstruktive Maßnahmen verringert, wird eine Verwölbung der Stabenden in einem gewissen Rahmen ermöglicht (Abschnitt 3.2.2). Infolgedessen verringert sich die Progressivität der Federcharakteristik. Zusätzlich werden die mechanischen Normalspannungen in der Nähe der Einspannung verringert (siehe Abschnitt 3.2.3).

Eine Möglichkeit, die Steifigkeit der Einspannungen zu verringern besteht darin, die Federn an den Enden T-förmig auszuführen [5]. Ein Beispiel für die Realisierung einer solchen Feder findet sich in [100].

In Kombination mit dem *Out-of-plane-comb*-Antrieb ergibt sich allerdings ein Nachteil für dieses Konzept: Die Verringerung der Steifigkeit der Einspannungen resultiert in einer Verringerung der elektromechanischen Stabilität (Abschnitt 3.4.4) der Bauelemente.

2. Alternativ kann die Federgeometrie so gewählt werden, dass die Verwölbung der Querschnittsflächen (Abschnitt 3.2.2) möglichst gering wird. Untersucht man den Verlauf der Verwölbungsfunktion  $\psi$  entsprechend Gl. (3.30), ergibt sich ein Minimum der Verwölbung für den Fall, dass Höhe und Breite des Torsionsstabs gleich sind ( $h = w$ ). Dies entspricht erwartungsgemäß einem Entwurfspunkt mit minimalen Normalspannungen an den Einspannungen (siehe Abb. 3.12).



**Abb. 4.6:** Beispiel für eine degressive Torsionsfeder. a) Modell einer Torsionsfeder mit Parallelstruktur ( $h = 30 \mu\text{m}$ ,  $w = 2 \mu\text{m}$ ,  $d = 8 \mu\text{m}$ ,  $l = 200 \mu\text{m}$ ,  $\theta_{x'} = 20^\circ$ ); b) Verlauf der relativen Torsionsfederhärte in Abhängigkeit von der Auslenkung.

Untersuchungen mithilfe der *FEM* führen zu einem abweichenden Ergebnis. Für einen beidseitig eingespannten Torsionsstab mit möglichst geringer Progressivität gilt dann  $w/h \approx 0.8$ . Der Grund für diese Abweichung liegt in der Tatsache, dass die Anisotropie des Siliziums in der analytischen Beschreibung der Querschnittsverwölbung (3.30) im Gegensatz zu den genutzten *FE*-Modellen nicht berücksichtigt wird. Dementsprechend gilt das Verhältnis  $w/h \approx 0.8$  nur für Torsionsfedern mit Orientierung in einer der  $\langle 110 \rangle$ -Richtungen des Silizium-Einkristalls.

Da es in der Regel nicht möglich ist, das Verhältnis  $w/h$  beim Entwurf frei zu wählen, ist dieser Ansatz nur von eingeschränktem Nutzen. Oft genügt es jedoch, sehr große bzw. sehr kleine Aspektverhältnisse  $w/h$  zu vermeiden, um die Charakteristik der Feder ausreichend zu beeinflussen.

Es besteht zusätzlich die Möglichkeit, beide Ansätze zu kombinieren. Es können auf diese Weise Torsionsfedern mit nahezu ideal linearer Federcharakteristik realisiert werden.

Werden Torsionsfedern mit degressiver Charakteristik benötigt, ist der Einsatz gerader Torsionsstäbe nicht sinnvoll. Es können jedoch mithilfe geeigneter Geometrien durchaus Federn mit degressiver Charakteristik realisiert werden. Eine Möglichkeit stellen Parallelstrukturen entsprechend Abb. 4.6a dar. Diese zeichnen sich bei geeigneter Wahl der Parameter  $w$ ,  $d$  und  $l$  durch eine stark abfallende Federhärte im Bereich kleiner Auslenkungen aus (Abb. 4.6b). Bedingung dafür ist, dass die laterale Biegesteifigkeit der Parallelstrukturen gering ist, sodass sie sich bei Torsion im mittleren Bereich der Feder zur Torsionsachse hin verbiegen können. Auf diese Weise wird das effektive Torsionsflächenmoment verringert; die Federhärte nimmt ab. Bei größeren Auslenkungen entstehen überproportional mit der Auslenkung ansteigende Normaldehnungen innerhalb der Parallelstruktur. Die Federhärte nimmt folglich wieder zu; die Charakteristik der Kennlinie ändert sich von degressiv zu progressiv (Abb. 4.6b).

Für kleine Auslenkungen lässt sich die Federhärte einer Parallelstruktur entsprechend Abb. 4.6a mit der Balkentheorie nach BERNOULLI-EULER bestimmen. Aus der Überla-

gerung der Torsions- und Biegehärtigkeit [66] ergibt sich (vgl. mit Abschnitt 3.2.1 und Abschnitt 3.2.2):

$$k_{t,x'} = \underbrace{2 \frac{G_m I_t}{l_{\text{eff}}}}_{\text{Torsion}} + \underbrace{2 \frac{12 E_{x'x'} I_b \left(\frac{d}{2} + \frac{w}{2}\right)^2}{l^3}}_{\text{Biegung}} \quad (4.26)$$

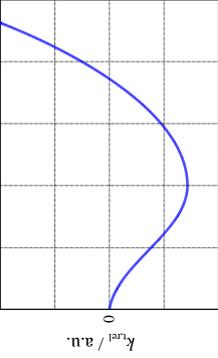
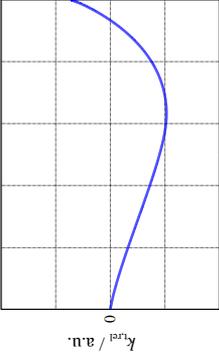
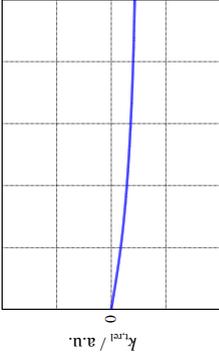
Die nichtlinearen Eigenschaften und die mechanischen Spannungen können mithilfe geeigneter *FE*-Modelle untersucht werden.

Durch Kombination einer oder mehrerer Parallelstrukturen mit geraden Torsionsstäben besteht außerdem die Möglichkeit, eine Vielzahl verschiedener Federcharakteristiken zu realisieren. Dabei sind Parallel- oder Reihenanordnungen der verschiedenen Federtypen möglich. Tabelle 4.2 enthält eine Übersicht mit einigen Beispielen solcher Torsionsfedern und den sich ergebenden qualitativen Eigenschaften. Durch Kombination verschiedener Federtypen (degressiv, progressiv) können die folgenden Ziele erreicht werden:

- „Linearisierung“ von Federelementen mit nichtlinearer Charakteristik durch spezielle, kompensierend wirkende Strukturen,
- Erhöhung des Auslenkungsbereichs einer Feder mit einer bestimmten nichtlinearen Charakteristik (z.B. zur Realisierung degressiver Federn für große Auslenkungen),
- Verringerung von kritischen mechanischen Spannungen in Parallelstrukturen bei großen Auslenkungen durch zusätzliche, in Reihe oder parallel angeordnete Strukturen.

Durch die Berücksichtigung der nichtlinearen Dynamik ergeben sich also eine Reihe neuer Möglichkeiten zum Beeinflussen und Optimieren des Bauelementverhaltens. Im Gegenzug steigt der Aufwand in der Simulation und beim Entwurf stark an. Dies wird deutlich, wenn man beispielhaft die sich für eine  $\Psi$ -Feder (Tabelle 4.2) ergebende Anzahl der Entwurfsfreiheitsgrade betrachtet. Werden alle in der realen Geometrie enthaltenen Radian vernachlässigt, ergeben sich für eine zur Torsionsachse symmetrische Struktur acht Entwurfsfreiheitsgrade (Breiten, Längen, Abstände, Höhe). Ein gerader Torsionsstab besitzt im Vergleich dazu lediglich drei Parameter (Breite, Länge, Höhe).

Tabelle 4.2: Beeinflussung der Nichtlinearitäten mittels Federgeometrien.

Designname	Form	Federkennlinie (qualitativ)	$k_{t,x'} _{\theta=0}$	Eigenschaften
Torsionsstab			$\underbrace{\frac{GI_t}{l}}_{k_t}$ vgl. Gl. (3.25)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- progressiv bis stark progressiv</li> <li>- große Verdrillungen möglich</li> <li>- geringe mechanische Spannungen</li> </ul>
Parallel-Feder			$k_t + \underbrace{\frac{24EI_b(\frac{d}{2} + \frac{w}{2})^2}{l^3}}_{k_b}$ (4.27)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- stark degressiv bei kleinen Auslenkungen</li> <li>- stark progressiv bei großen Auslenkungen</li> <li>- geringe Verdrillungen möglich</li> <li>- hohe mechanische Normalspannungen</li> </ul>
Y-Feder			$\frac{1}{\frac{1}{k_{t,1}} + \frac{1}{k_{b,2} + k_{t,2}}}$ (4.28)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- degressiv bei kleinen und mittleren Auslenkungen</li> <li>- stark progressiv bei großen Auslenkungen</li> <li>- große Verdrillungen möglich</li> <li>- mittlere mechanische Normalspannungen</li> </ul>
$\Psi$ -Feder			$\frac{1}{\frac{1}{k_{t,1}} + \frac{1}{k_{b,2} + k_{t,2} + k_{t,3}}}$ (4.29)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- leicht degressiv bis zu großen Auslenkungen</li> <li>- große Verdrillungen möglich</li> <li>- mittlere mechanische Normalspannungen</li> </ul>



## 5 Werkzeuge für den Entwurf

Wie vor allem in Kapitel 3 deutlich wird, spielen Simulationswerkzeuge, beispielsweise *FEM*-Programme eine zentrale Rolle beim Entwurf von *MEMS*-Bauelementen. Ein wichtiges Merkmal ist dabei die oftmals benötigte Kopplung verschiedener physikalischer Domänen. Es sind eine Reihe von Simulations-Programmen und andere Softwarewerkzeuge verfügbar, die den Anforderungen des *MEMS*-Entwurfs gerecht werden. In diesem Kapitel werden die Bedingungen erarbeitet und formuliert, die beim Entwurf resonanter Aktoren mit elektrostatischem Antrieb erfüllt werden müssen. Anschließend werden die verwendeten Simulationswerkzeuge vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf einer im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Klassenbibliothek für die Programmumgebung *MATLAB*<sup>®</sup>. Diese ermöglicht vollständig gekoppelte Simulationen resonanter Bauelemente mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb unter Berücksichtigung aller relevanten nichtlinearen Effekte.

### 5.1 Anforderungen an Entwurfswerkzeuge

Aus den erweiterten Anforderungen an *Fraunhofer IPMS* Mikroscooperspiegel, welche aus der Erschließung neuer Anwendungsbereiche (Kapitel 2) folgen und den genutzten physikalischen Prinzipien bzw. den daraus folgenden Randbedingungen (Kapitel 3) ergeben sich konkrete Voraussetzungen, die Entwurfswerkzeuge erfüllen müssen. Diese werden im folgenden Abschnitt erläutert.

#### 5.1.1 Kopplung physikalischer Domänen

Viele im *MEMS*-Entwurf genutzte Wirkprinzipien bzw. zu berücksichtigende Effekte beinhalten verschiedene, miteinander wechselwirkende, also gekoppelte physikalische Domänen. Man unterscheidet zwei Arten einer solchen Kopplung:

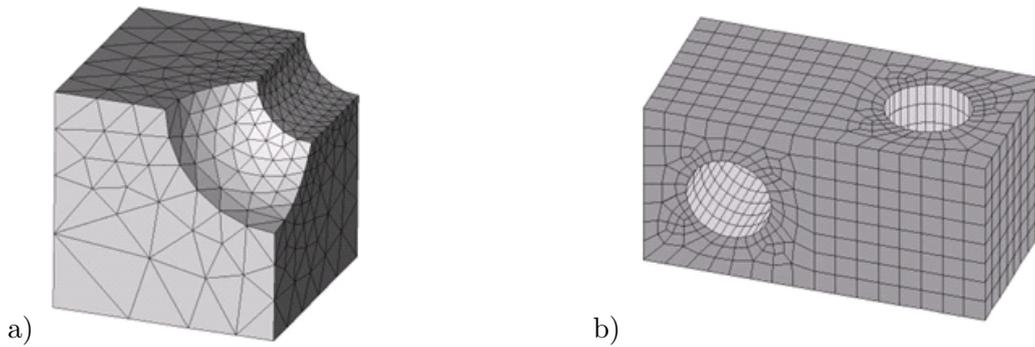
1. Die *explizite Kopplung* (auch schwache Kopplung, *loose coupling*, [101]) ist dadurch gekennzeichnet, dass die Wechselwirkungen zwischen physikalischen Domänen vor allem in einer Richtung stattfinden, also das Einwirken einer physikalischen Domäne auf eine andere ohne bzw. mit vernachlässigbar geringen Rückwirkungen auf die erste Domäne verbunden ist.

Typische Beispiele für explizite Kopplungen sind piezoresistive Wandler [27]. Hier wirken sich die mechanischen Spannungen eines Volumenkörpers (strukturmechanische Domäne) auf dessen Leitfähigkeit aus (elektrische Domäne). Vernachlässigt man die aus den Änderungen der elektrischen Stromdichte resultierenden thermischen Effekte und deren Auswirkungen auf die elastischen Eigenschaften des Volumenkörpers, kann die Kopplung als rückwirkungsfrei (einseitig) betrachtet werden.

2. Die *implizite Kopplung* (auch starke Kopplung, *strong coupling*) zeichnet sich im Gegensatz zur expliziten Kopplung durch eine *relevante gegenseitige* Wechselwirkung zwischen den beteiligten physikalischen Domänen aus. Das Einwirken einer physikalischen Domäne auf eine andere führt zu Rückwirkungen auf die erste Domäne und damit wieder auf die zweite usw.

Typische Beispiele für implizit gekoppelte Systeme sind elektrostatische Antriebe in *MEMS*-Bauelementen mit *Plan-Platten*-Elektroden (Abschnitt 2.2.2, [32]): Die vom Antrieb aufgebrachte Kraft (elektrostatische Domäne) resultiert in einer Auslenkung





**Abb. 5.2:** Beispiele für 3D-FE-Netze. a) Tetraeder-Netz; b) Hexaeder-Netz. [63]

zu lösenden Differentialgleichung bzw. der Randbedingungen mit einer Testfunktion und numerischer Integration über das Lösungsgebiet wird das Problem näherungsweise gelöst.

Aus dieser Methodik ergeben sich eine Reihe von Problemen. So ist die Genauigkeit der Näherungslösung nicht nur von der Art und Anzahl der finiten Elemente oder den gewählten Ansatzfunktionen abhängig. Auch der Verlauf der anzunähernden (exakten) Lösung beeinflusst die Abweichungen der *FEM*-Näherung. Vor allem der Gradient der Ergebnisgröße spielt dabei eine entscheidende Rolle. Diese Eigenschaft der *FEM* ist für den Entwurf von Mikroscooperspiegeln vor allem im Bereich der strukturmechanischen Domäne relevant. Am Beispiel des Verlaufs der mechanischen Dehnung bzw. Spannung in einer Torsionsfeder nahe der Einspannung (Abschnitt 3.2.3) wird dies besonders deutlich. Maximum und Minimum der Dehnung liegen nur wenige Mikrometer voneinander entfernt. In Kombination mit der hohen Zugfestigkeit von einkristallinem Silizium in der Größenordnung von 1 GPa können daher sehr große Gradienten im Dehnungsverlauf auftreten.

### Konvergenz verschiedener *FE*-Netztypen

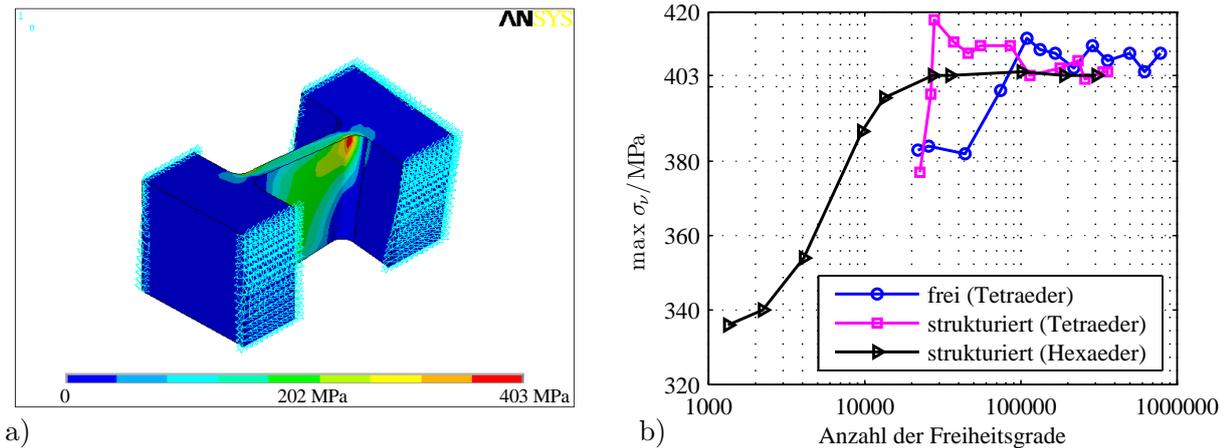
Um beispielsweise die in einem ausgelenkten Mikroscooperspiegel auftretenden mechanischen Spannungen mit ausreichender Genauigkeit bestimmen zu können, wird im Bereich der Torsionsfedern eine vergleichsweise feine Diskretisierung (geringe Diskretisierungslänge) benötigt. Ob eine konkret gewählte Diskretisierung ausreichend ist, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen, kann mithilfe einer Konvergenzanalyse untersucht werden.

Konvergenzanalysen sind wichtige Werkzeuge beim Einsatz der *FEM*. Mit ihrer Hilfe kann die Qualität eines *FE*-Netzes (Diskretisierungsgitter des Lösungsgebiets) untersucht werden. Dazu wird eine für das konkrete Problem relevante Ergebnisgröße in Abhängigkeit von der Anzahl der sich ergebenden Freiheitsgrade eines *FE*-Netzes betrachtet. Es wird dabei ausgenutzt, dass die Lösung eines *FE*-Problems mit abnehmender Diskretisierungslänge gegen die anzunähernde (exakte) Lösung konvergiert<sup>19</sup>.

In Abbildung 5.3 sind die Ergebnisse von Konvergenzanalysen an *FE*-Netzen einer ausgelenkten Torsionsfeder dargestellt. Dabei werden die Eigenschaften einiger wichtiger 3D-Netztypen [63, 85] deutlich (siehe dazu auch Abb. 5.2 bzw. Anhang C.6):

- *Freie Tetraeder-Netze* bestehen aus tetraederförmigen finiten Elementen. Diese eignen sich besonders gut für eine automatisierte Netz-Generierung. Die typischen Diskretisierungslängen, also die Elementgrößen werden dabei entweder automatisch

<sup>19</sup>Dies gilt nicht, wenn die anzunähernde (exakte) Lösung Singularitäten aufweist.



**Abb. 5.3:** Konvergenzverhalten verschiedener FE-Netze (vgl. Anhang C.6). a) Modell zur Untersuchung des Konvergenz-Verhaltens; b) Konvergenzverhalten bei Nutzung unterschiedlicher Vernetzungsstrategien bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade.

gewählt oder durch den Entwerfer vorgegeben. Die freie Vernetzung stellt die für den Entwerfer einfachste Möglichkeit dar, ein *FE*-Netz zu erstellen. Sie resultiert jedoch oft in Netzen mit sehr vielen Elementen (Freiheitsgraden) und damit in einem hohen Rechenaufwand.

- *Strukturierte Tetraeder-Netze* bestehen ebenfalls aus tetraederförmigen finiten Elementen und werden ähnlich den freien Tetraeder-Netzen weitgehend automatisch generiert. Zusätzlich zur Festlegung einer typischen Diskretisierungslänge besteht für den Entwerfer jedoch die Möglichkeit, für bestimmte Bereiche (Kanten, Flächen, Volumen) eine Diskretisierung vorzugeben. Auf diese Weise können bestimmte Eigenschaften eines *FE*-Netzes gezielt beeinflusst bzw. verbessert werden (beispielsweise durch eine feinere Vernetzung in Regionen mit großem Gradienten der Ergebnisgröße). Die Nutzung von strukturierten Tetraeder-Netzen führt zu einem erhöhten Aufwand in der Modellgenerierung<sup>20</sup> bei einem (im Vergleich zu freien Tetraeder-Netzen) verringerten Rechenaufwand bei vergleichbarer Genauigkeit.
- *Strukturierte Hexaeder-Netze* bestehen aus hexaederförmigen finiten Elementen. Da sich dieser Element-Typ nicht für eine automatische Netz-Generierung innerhalb komplexen Geometrien eignet, müssen Hexaeder-Netze zumeist manuell erstellt werden. Dazu wird die Diskretisierung des Lösungsgebiets durch den Entwerfer vorgegeben. Strukturierte Hexaeder-Netze sind dementsprechend aufwändig in der Generierung. Im Gegenzug zeichnen sie sich durch eine hohe Effizienz (vergleichsweise hohe Genauigkeit bei geringer Elementzahl) und ein gutes Konvergenz-Verhalten (Abb. 5.3b) aus.

Die Konvergenzeigenschaften der vorgestellten 3D-Netztypen werden anhand der in Abb. 5.3b dargestellten Verläufe deutlich. Für den Vergleich wurde die Geometrie einer Torsionsfeder (Abb. 5.3a) auf verschiedene Arten vernetzt. Beispiele für typische resultierende Netz-Topologien sind in Anhang C.6 enthalten. Für die Konvergenzanalyse

<sup>20</sup>Moderne *FEM*-Programme bieten alternativ die Möglichkeit einer automatischen, adaptiven Netz-Verbesserung (*Adaptive Meshing*, [63, 85]). Dabei wird das Problem zunächst auf einem automatisch generierten Netz (freies Tetraeder-Netz) gelöst. Im nächsten Schritt werden die Bereiche mit dem größten Gradienten der Ergebnisgröße automatisch feiner vernetzt (strukturiertes Tetraeder-Netz).

wurde die kritische (höchste) Hauptnormalspannung  $\sigma_1$  bei einer Verdrillung von  $5^\circ$  (siehe Abschnitt 3.2.3) gewählt. Erwartungsgemäß konvergiert die Lösung im Fall des strukturierten Hexaeder-Netzes am besten. Bereits ab einer Anzahl der Freiheitsgrade von ca. 30 000 zeigt der Spannungsverlauf eine gute Konvergenz gegen  $\max \sigma_1 \approx 403$  MPa. Die strukturierten Tetraeder-Netze weisen ein wesentlich schlechteres Konvergenzverhalten auf. Eine akzeptable relative Konvergenz von 5 % ergibt sich erst für Netze ab ca. 40 000 Freiheitsgraden. Eine mit den strukturierten Hexaeder-Netzen vergleichbare Konvergenz wird erst ab ca. 400 000 Freiheitsgraden erreicht. Wie ebenfalls erwartet, konvergiert die Lösung bei Nutzung eines freien Tetraeder-Netzes noch wesentlich schlechter. Erst ab ca. 100 000 Freiheitsgraden kann eine relative Konvergenz von 5 % erzielt werden. Das Konvergenzniveau des strukturierten Hexaeder-Netzes wird selbst mit 800 000 Freiheitsgraden nicht erreicht.

Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass der Bedarf an Ressourcen zur Lösung von *FEM*-Problemen im Allgemeinen überproportional mit der Zahl der Freiheitsgrade ansteigt<sup>21</sup>. Es muss also ein Kompromiss zwischen Aufwand bei der Erstellung des Modells, Ressourcenbedarf und Genauigkeit gefunden werden.

### Hybrid-Netze

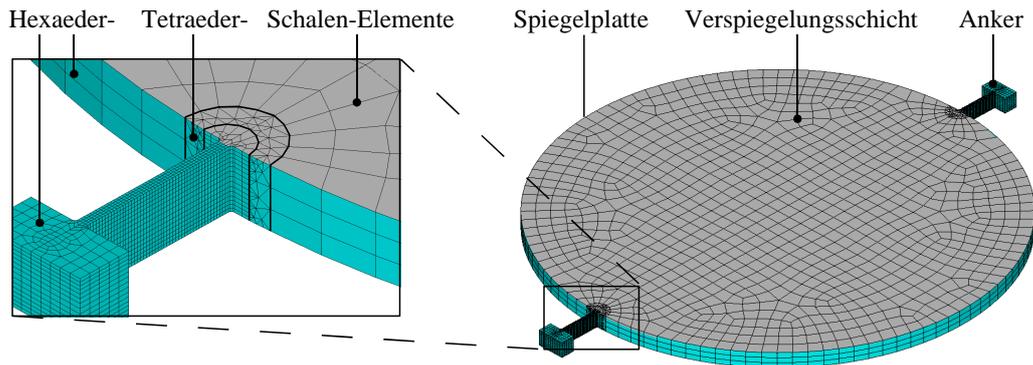
Eine Besonderheit die beim Einsatz der *FEM* im Bereich des *MEMS*-Entwurf beachtet werden muss, sind die auftretenden, zum Teil extremen Aspektverhältnisse der untersuchten Geometrien bzw. extremen Unterschiede der Aspektverhältnisse einzelner Teilgeometrien. So kann eine Torsionsfeder ein Verhältnis der Höhe zur Breite  $h/w$  von 15 aufweisen; die damit verbundene Spiegelplatte dagegen ein Verhältnis von 0.02 (*SINUS*-Scanner). Noch extremer sind die Verhältnisse in Schichtsystemen. Hier sind Werte für  $h/w$  in der Größenordnung von  $10^{-4}$  keine Seltenheit [104].

Da die Genauigkeit eines *FE*-Modells sehr stark von der geometrischen Form (vor allem vom Aspektverhältnis) der finiten Elemente abhängt<sup>22</sup>, resultiert ein großes Aspektverhältnis der zu vernetzenden Geometrie in einer großen Anzahl der benötigten finiten Elemente. Dadurch steigt die Anzahl der Freiheitsgrade des Problems und der Ressourcenbedarf für dessen Lösung. Zusätzlich verschärft wird diese Problematik, zumindest beim Einsatz von strukturierten Hexaeder-Netzen, wenn sich das Aspektverhältnis und der Gradient der Ergebnisgröße beim Übergang zwischen Teilgeometrien (z.B. Torsionsfeder und Spiegelplatte) sehr stark ändert. So wird für eine ausreichend genaue Berechnung der mechanischen Spannungen innerhalb einer Torsionsfeder eine wesentlich feinere Unterteilung in finite Elemente benötigt als innerhalb der angrenzenden Spiegelplatte. Letzere wird kaum deformiert; der Gradient der Ergebnisgröße (also die mechanische Dehnung) nimmt nur geringe Werte an. Um dieser Tatsache gerecht zu werden bzw. um die Effizienz der zum Einsatz kommenden *FE*-Netze zu erhöhen (Erhöhung der Genauigkeit bei möglichst wenigen Freiheitsgraden), können sogenannte Hybrid-Netze genutzt werden. Von Hybrid-Netzen spricht man, wenn verschiedene Element-Typen (Tetraeder-, Hexaeder-Elemente usw.) kombiniert vorkommen. Zur Realisierung von Hybrid-Netzen werden zwei verschiedene Ansätze verfolgt:

---

<sup>21</sup>Dies gilt nicht bei der Anwendung sogenannter *Mehrgitter-Lösungsverfahren* [85, 103]. Diese weisen eine nahezu proportionale Abhängigkeit des Ressourcenbedarfs (Speicher, Rechenzeit) von der Anzahl der Freiheitsgrade auf, sind allerdings für Probleme mit einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden ineffizient.

<sup>22</sup>Es wird beispielsweise für den 3D-Elementtyp *SOLID45* (strukturmechanische Domäne, lineare Ansatzfunktion) des *FEM*-Programms *ANSYS*<sup>®</sup> ein Aspektverhältnis von höchstens 1 : 30 empfohlen [63].



**Abb. 5.4:** *Hybrid-Netze in FE-Modellen.* Mithilfe von hybriden *FE*-Netzen können u.a. strukturelle Probleme im *MEMS*-Entwurf mit großer Genauigkeit bei verringertem Rechenaufwand gelöst werden. Der Aufwand für die Erstellung des Netzes ist jedoch vergleichsweise hoch. Die Darstellung enthält ein Hybrid-Netz, bestehend aus *ANSYS*<sup>®</sup>-Elementen des Typs *SOLID45*, *SOLID95* und *SHELL281* [63].

- Mithilfe der *direkten Elementkopplung* werden verschiedene Element-Typen in einem *FE*-Netz integriert. Aus diesem Ansatz erwachsen zum Teil neue Anforderungen an die Eigenschaften der finiten Elemente; für einen Übergang von tetraederförmigen auf hexaederförmige Elemente werden beispielsweise Elemente mit Pyramiden-Option benötigt [63]. Eine weitere Möglichkeit, die sich aus dieser Technik ergibt, ist die Nutzung ordnungsreduzierter Elemente zur Verringerung der Freiheitsgrade eines Problems. So können beispielsweise komplexe Schichtsysteme mithilfe spezieller Schalenelemente (*SOLID SHELL* [105]) in ein 3D-Problem integriert werden. Weitere Beispiele für ordnungsreduzierte Elemente sind Massenpunkte oder Federelemente.
- Durch eine *implizite Kopplung von Teilnetzen* lassen sich ebenfalls Hybrid-Netze realisieren. Dabei ergeben sich die diskreten Randbedingungen des Lösungsgebiets an den Schnittstellen durch Interpolation aus den Ergebnisgrößen des jeweils anderen Netzes. Durch die implizite Kopplung innerhalb des Problems erhöht sich der Rechenaufwand im Vergleich zur direkten Elementkopplung zum Teil beträchtlich.

Zur Verdeutlichung der Problematik ist in Abb. 5.4 ein typisches, bei der Simulation von Mikroscooperspiegeln zum Einsatz kommendes Hybrid-Netz auf Basis der direkten Elementkopplung dargestellt. Um den großen, innerhalb der Torsionsfedern stattfindenden Dehnungen gerecht werden zu können, müssen diese mit einem vergleichsweise feinen *FE*-Netz diskretisiert werden. Um einen Übergang auf das wesentlich gröbere Netz der Spiegelplatte zu realisieren, kommen tetraeder- und pyramidenförmige Elemente zum Einsatz. Es muss allerdings beachtet werden, dass die auf diese Weise erreichte Erhöhung der Effizienz mit einem vergleichsweise hohen Aufwand bei der Generierung des Modells erkauft wird. Dies lässt sich jedoch durch eine (Teil-) Automatisierung der Netz-Erzeugung, z.B. mithilfe der Skript-Schnittstelle des jeweiligen *FEM*-Programms zumindest teilweise kompensieren.

### 5.1.3 Ordnungsreduktion

Neben der Nutzung von Symmetrien innerhalb eines Entwurfsproblems ist die Ordnungsreduktion ein wichtiges Hilfsmittel zur Verringerung des Rechenaufwands im *MEMS*-Entwurf. Im Allgemeinen realisiert eine Ordnungsreduktion die Transformation eines zu lösenden Problems mit einer großen Zahl an Freiheitsgraden in eine Beschreibung mit wenigen, für das Problem wesentlichen (dominanten) Freiheitsgraden [106]. Im Folgenden werden einige Verfahren zur Ordnungsreduktion von Bewegungsgleichungen kurz benannt. Auf das im Rahmen dieser Arbeit genutzte, auf der *Orthogonalprojektion* bzw. *modalen Superpositionsmethode* beruhende Prinzip der *modalen Zerlegung* wird in Abschnitt 5.3.3 gesondert eingegangen.

Die Bewegungsgleichung eines strukturmechanischen *FE*-Modells kann mithilfe des folgenden Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung beschrieben werden [86]:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{U}} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\vec{U}} + \mathbf{K} \cdot \vec{U} = \mathbf{B} \cdot \vec{P} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}, \mathbf{K}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \vec{U} \in \mathbb{R}^m \quad (5.1)$$

und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{P} \in \mathbb{R}^n, m > n$

Dabei entspricht  $m$  der Anzahl der Freiheitsgrade des *FEM*-Problems<sup>23</sup>;  $\vec{U}$  enthält die Verschiebungskomponenten aller Knoten des *FE*-Netzes;  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  und  $\mathbf{K}$  sind die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen der untersuchten Geometrie, ebenfalls bezogen auf die Knoten. Die Matrix  $\mathbf{B}$  wird als *Inzidenzmatrix* bezeichnet. Sie definiert, an welchen Knoten des *FE*-Netzes bzw. in welche Richtungen die mithilfe des Vektors  $\vec{P}$  beschriebenen Lasten wirksam sind. Mithilfe einer zweiten Inzidenzmatrix  $\mathbf{L}$  ergibt sich ein Zusammenhang mit der in Abschnitt 3.2.4 eingeführten allgemeinen Bewegungsgleichung (3.56) eines Mikrosensorspiegels mit  $n$  Bewegungsfreiheitsgraden:

$$\vec{X} = \mathbf{L}^T \cdot \vec{U} \quad \text{mit} \quad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{X} \in \mathbb{R}^n \quad (5.2)$$

Hier legt  $\mathbf{L}$  den Zusammenhang zwischen den Knotenfreiheitsgraden des *FEM*-Problems und den Bewegungsfreiheitsgraden des Systems  $\vec{X}$  (vgl. Abb. 3.15, S. 56) fest. Das Ziel der Ordnungsreduktion ist es nun, ein Modell der Form

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\vec{q}} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\vec{q}} + \tilde{\mathbf{K}} \cdot \vec{q} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \vec{P} \quad \text{bzw.} \quad \vec{X} = \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot \vec{q} \quad (5.3)$$

mit  $q \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$  als Verschiebungen (Auslenkungen) und  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times \tilde{m}}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times n}$  zu erhalten. Dabei ist  $\tilde{m} \ll m$  die Anzahl der Freiheitsgrade nach der Ordnungsreduktion. Ein solches Modell wird auch als *Makromodell* bezeichnet.

**Die Matrixkondensationstechnik** (Substrukturtechnik, GUYAN-Verfahren) gehört zu den Standardverfahren der *FEM*. Es basiert auf der sukzessiven Elimination von Zeilen und Spalten einer Matrix [107]. Dabei werden die Gleichungen jedoch nicht vollständig aufgelöst. Es verbleibt eine definierte Anzahl sogenannter Masterfreiheitsgrade, welche zur Beschreibung des Makromodells genutzt werden.

Ein mithilfe der Matrixkondensationstechnik erstelltes Makromodell beschreibt das zugrunde liegende (statische) Ausgangssystem exakt. Da jedoch bei der Auswahl der Masterfreiheitsgrade keine dynamischen Eigenschaften wie Geschwindigkeit oder Beschleunigung berücksichtigt werden können, treten in dynamischen Systemen typischerweise größere Abweichungen auf. Die Methode ist daher zur Modellierung von Systemen dieser Art nur bedingt geeignet [86].

<sup>23</sup>Unter Annahme von linearen Ansatzfunktionen der Elemente [63].

**Die Approximation der Systemfunktion** basiert auf der Idee, die Systemfunktion  $H = f(s)$  eines Originalsystems mithilfe einer Ansatzfunktion anzunähern [86]. Dazu wird das zu reduzierende System in den LAPLACE-Raum transformiert und um einen Entwicklungspunkt  $s_0$  in eine Reihe entwickelt. Die Anzahl der berücksichtigten Koeffizienten legt dabei die Ordnung  $\tilde{m}$  des resultierenden Makromodells fest.

Die Ordnungsreduktion mithilfe der Approximation der Systemfunktion ist für lineare Probleme der Art von Gl. (5.1) gut geeignet. Es kann jedoch in der approximierten Systemfunktion zu großen Abweichungen von der originalen Systemfunktion bzw. zu Unstetigkeiten und Polstellen kommen.

**Die Orthogonalprojektion** wird auch als GALERKIN-Ansatz bezeichnet [86]. Sie basiert auf der Projektion eines linearen Systems in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  auf einen geeigneten, niedrigdimensionalen Unterraum  $\mathbb{R}^{\tilde{m} \times \tilde{m}}$ . Dies wird mithilfe einer orthogonalen, regulären Projektionsmatrix  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times \tilde{m}}$  realisiert. Ein Makromodell entsprechend Gl. (5.3) ergibt sich dann anhand der folgenden Zusammenhänge:

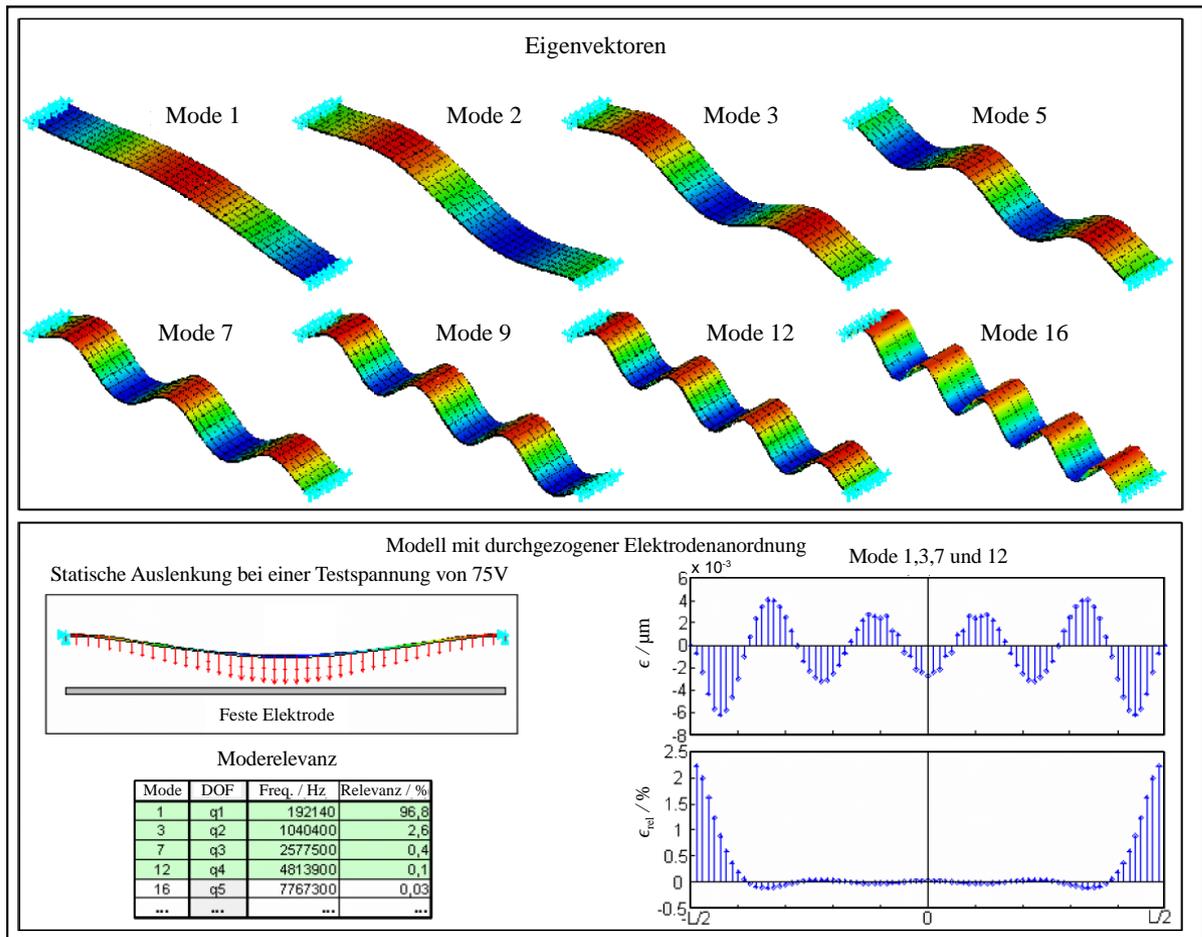
$$\tilde{\mathbf{M}} = \Phi^T \cdot \mathbf{M} \cdot \Phi, \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \Phi^T \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \Phi, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \Phi^T \cdot \mathbf{K} \cdot \Phi \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{B}} = \Phi^T \cdot \mathbf{B} \cdot \Phi \quad (5.4)$$

Aus physikalischer Sicht entsprechen die Spalten der Projektionsmatrix  $\Phi$  jeweils einem Vektor  $\vec{\Phi}_i$ , der einen bestimmten Deformationszustand bzw. eine bestimmte Auslenkung der modellierten Struktur beschreibt. Diese Vektoren werden auch als Formfunktionen bezeichnet. In der Orthogonalprojektion werden sie durch Gewichtungsfaktoren  $q_i$  so skaliert, dass sich bezüglich der Lösung des Originalsystems eine minimale Abweichung der Strukturdeformation ergibt. Die Anzahl der genutzten Vektoren  $\vec{\Phi}_i$  bzw. Faktoren  $q_i$  bestimmen daher die Anzahl der Freiheitsgrade des Makromodells. Es gilt also  $\vec{q} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$  (vgl. Gl. (5.3)).

Der Deformationszustand einer Struktur wird in der Orthogonalprojektion nicht mehr durch einzelne Knotenverschiebungen eines *FE*-Netzes, sondern durch die Linearkombination von  $\tilde{m}$  Vektoren dargestellt. Dabei wird die Qualität der Lösungen entscheidend von der Wahl der Formfunktionen  $\vec{\Phi}_i$  beeinflusst. Zum Aufbau eines Satzes von Formfunktionen (Orthogonalbasis) können verschiedene Verfahren genutzt werden.

Eine Möglichkeit, eine Orthogonalbasis aufzubauen besteht in der Nutzung eines sogenannten KRYLOV-Unterraum-Verfahrens. Ein Beispiel dafür ist das ARNOLDI-Verfahren, mit dessen Hilfe Makromodelle beliebiger Ordnung und Genauigkeit iterativ aufgebaut werden können [86, 108]. KRYLOV-Unterraum-Verfahren sind Standardverfahren der *FEM*.

Ein im Bereich des *MEMS*-Entwurfs oft zum Einsatz kommendes, weiteres Verfahren ist die modale Superpositionsmethode. Dabei wird die Projektionsmatrix  $\Phi$  aus  $\tilde{m}$  Eigenvektoren des Systems aufgebaut [5, 86]. Diese sind per Definition bereits orthogonal zueinander. Der Grundgedanke ist dabei, dass jede Auslenkung einer Struktur durch eine Linearkombination der Eigenvektoren beschrieben werden kann. Werden dabei diejenigen Eigenvektoren mit einer, bezogen auf die untersuchte Belastung, geringen Relevanz vernachlässigt, kann die Ordnung des zu lösenden Problems stark reduziert werden. Zur Verdeutlichung der Methodik ist in Abb. 5.5 ein Beispiel für ein typisches *FEM*-Problem des *MEMS*-Entwurfs mit einigen hundert Freiheitsgraden dargestellt, welches mithilfe der modalen Superposition auf ein Makromodell mit lediglich vier Freiheitsgraden reduziert werden kann. Dabei wird deutlich, dass die konkrete Wahl bzw. Relevanz der für das Makromodell nutzbaren Eigenvektoren stark von der auf die Struktur wirkenden Last abhängig ist.



**Abb. 5.5:** *Orthogonalprojektion auf Basis der modalen Superposition.* Mithilfe einer *FEM*-Modalanalyse werden die ersten 16 Eigenvektoren des Systems bestimmt. Die für eine bestimmte Belastung relevanten Eigenvektoren bilden die Orthogonalbasis des resultierenden Makromodells [86].

Ebenso wie die Matrixkondensationstechnik und die Approximation der Systemfunktion kann die Orthogonalprojektion ausschließlich zur Ordnungsreduktion linearer Systeme genutzt werden. Sie ist daher ohne Modifikationen nur bedingt für den Entwurf von *Fraunhofer IPMS*-Mikroscannerspiegeln geeignet.

**Zur Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme** existieren bis heute keine allgemeingültigen Ansätze. Vielmehr findet man in der Literatur zu diesem Thema eine Auswahl an heuristischen, iterativen und auf Linearisierung beruhenden Ansätzen mit verschiedenen Eigenschaften und Anwendungsbereichen [86, 106, 109].

Um die bei der Simulation von Mikroscannerspiegeln auftretenden Nichtlinearitäten berücksichtigen zu können, muss Gl. (5.1) um nichtlineare Terme erweitert werden:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{U}} + (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}') \dot{\vec{U}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}') \vec{U} = \mathbf{B} \cdot \vec{P} + \vec{P}' \quad (5.5)$$

Dabei repräsentieren die Ausdrücke  $\boldsymbol{\alpha}' = f(\vec{U}, \dot{\vec{U}})$ ,  $\mathbf{K}' = f(\vec{U})$  und  $\vec{P}' = f(\vec{U})$  die aus der Dämpfung (Abschnitt 3.3), den geometrischen Effekten (Abschnitt 3.2.2) und den Eigenschaften des *Out-of-plane-comb*-Antriebs (Abschnitt 3.4.1) resultierenden Nichtlinea-

ritäten. Das Makromodell eines Mikroscoanerspiegels hat dann entsprechend Gl. (5.3) die folgende Form:

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\vec{q}} + (\tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}') \dot{\vec{q}} + (\tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{K}}') \vec{q} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \vec{P} + \vec{P}' \quad \text{mit} \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}}', \tilde{\mathbf{K}}' \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times \tilde{m}} \quad (5.6)$$

Ein Beispiel für ein Verfahren zur Ordnungsreduktion eines solchen Systems ist das KARHUNEN-LOÈVE-Verfahren [86]. Es basiert auf der Beschreibung einer nichtlinearen Deformation mithilfe einer Reihe von gewichteten linearen Formfunktionen. Diese werden aus gekoppelten Feldanalysen für verschiedene Deformationszustände (*Snapshots*) gewonnen und in einem Makromodell miteinander kombiniert. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, dass zur Erstellung des Makromodells zunächst vollständig gekoppelte Analysen des Originalsystems durchgeführt werden müssen. Da eine solche Analyse eines Mikroscoanerspiegels unter gleichzeitiger Berücksichtigung der strukturmechanischen, fluidmechanischen und elektrostatischen Domäne sowie deren Kopplungen extrem aufwändig bzw. nicht möglich ist, wird die Methode an dieser Stelle nicht weiter betrachtet.

Besser geeignet für den Entwurf von Mikroscoanerspiegeln ist die Ordnungsreduktion auf Basis der *modalen Zerlegung*. Dieses Verfahren zur Generierung nichtlinearer Makromodelle wurde erstmalig in [110] vorgestellt und eignet sich sehr gut für nichtlineare Systeme, welche nahe einer Eigenresonanz betrieben werden. Eine ausführliche Beschreibung des Verfahrens und ein Beispiel für die Umsetzung in einem Modellgenerator kann auch in [86] gefunden werden.

Das Prinzip der modalen Zerlegung basiert auf dem der modalen Superposition. Es wird aus den Eigenvektoren des linearisierten Systems eine Orthogonalbasis  $\Phi$  aufgebaut. Anschließend wird das nichtlineare System in diese Basis projiziert. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, dass nichtlineare Eigenformen im Allgemeinen invariant sind, d.h. eine Strukturschwingung zu jedem Zeitpunkt in nur einer nichtlinearen Eigenform eingeschlossen ist, ohne andere nichtlineare Eigenschwingungen anzuregen [86]. Das Ergebnis einer Ordnungsreduktion nach dem Prinzip der modalen Zerlegung ist ein gekoppeltes System entsprechend Gl. (5.6), bestehend aus  $\tilde{m}$  nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

#### 5.1.4 Spezielle Anforderungen an Optimierungswerkzeuge

Ein weiteres wichtiges Thema beim Entwurf von *MEMS*-Bauelementen ist die Optimierung. Dabei werden oft ein oder mehrere Teilaspekte gesondert betrachtet. Da jedoch, wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten deutlich wurde, im *MEMS*-Entwurf physikalische Phänomene oftmals stark wechselwirken, ergeben sich zumeist Randbedingungen bzw. Einschränkungen. So muss beispielsweise bei der Optimierung (Minimierung) der mechanischen Spannungen innerhalb eines Federelements berücksichtigt werden, dass sich die für eine bestimmte Federgeometrie ergebende Federhärte auf die mechanische Resonanzfrequenz des Bauelements und damit auf dessen dynamische Eigenschaften auswirkt.

In einigen Fällen ist eine Optimierung nur möglich, wenn verschiedene Phänomene gekoppelt betrachtet werden. So kann die Effizienz eines *Out-of-plane-comb*-Antriebs nur dann sinnvoll beurteilt werden, wenn die sich aus der elektrostatischen Domäne ergebenden Eigenschaften im Kontext der fluidmechanischen Dämpfung betrachtet werden.

Für den Entwurf von Mikroscoanerspiegeln werden demnach Optimierungswerkzeuge mit folgenden Eigenschaften benötigt:

- Um den Parameterraum eines Optimierungsproblems eingrenzen bzw. die aus den Kopplungen zwischen den Phänomenen resultierenden Einschränkungen berücksich-

tigen zu können, werden Verfahren benötigt, die für die Lösung von (nichtlinearen) Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen geeignet sind. Dabei sollten neben einer Begrenzung des Wertebereichs der einzelnen Optimierungsparameter auch zusätzliche Einschränkungen (*Constraints*, [65]) berücksichtigt werden können.

- Es muss die Möglichkeit bestehen, Optimierungsprobleme so zu formulieren, dass die Wechselwirkungen zwischen verschiedenen physikalischen Phänomenen berücksichtigt werden können. Dabei sollte sowohl eine explizite als auch eine implizite Kopplung der relevanten physikalischen Domänen realisierbar sein.

Ein weiterer Aspekt der Optimierung ergibt sich aus der Tatsache, dass ein großer Teil der Probleme beim *MEMS*-Entwurf nur mithilfe der *FEM* gelöst werden kann. Da, wie in den vorangegangenen Abschnitten bereits erwähnt worden ist, die Lösung eines *FEM*-Problems unter anderem von der Wahl der Diskretisierungspunkte, also von der Gestalt des *FE*-Netzes abhängig ist, ergeben sich einige Besonderheiten. Es muss sichergestellt sein, dass das Lösungsgebiet auf solche Weise diskretisiert wird, dass sich für alle zulässigen Parameterkombinationen Lösungen mit vergleichbarer, ausreichender Genauigkeit ergeben. Ist dies nicht der Fall besteht die Gefahr, dass anstelle des eigentlichen physikalischen Problems die Diskretisierung des Lösungsgebiets optimiert wird oder zumindest die Optimierung negativ beeinflusst wird (z.B. durch große, von numerischen Ungenauigkeiten verursachte Sprünge im Verlauf der Zielfunktion).

## 5.2 Relevante Entwurfswerkzeuge

Im folgenden Abschnitt werden die im Rahmen dieser Arbeit genutzten Werkzeuge kurz vorgestellt. Es handelt sich dabei um das am *Fraunhofer IIS-EAS* in Dresden entwickelte Optimierungswerkzeug *MOSCITO* [111, 112]. Außerdem wird auf das Simulationsprogramm *MATLAB*<sup>®</sup> [113] eingegangen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der an der Universität *Berkley* entwickelten freien *MATLAB*<sup>®</sup>-Toolbox *SUGAR*.

Für eine Übersicht zu den am *Fraunhofer IPMS* bzw. im Rahmen dieser Arbeit außerdem genutzten kommerziellen *FEM*-Programme *ANSYS*<sup>®</sup> und *COMSOL Multiphysics*<sup>TM</sup> sei an dieser Stelle auf Anhang C.1 verwiesen. Bezogen auf den *MEMS*-Entwurf wird hier auf einige zurzeit bestehende Möglichkeiten und Einschränkungen eingegangen.

### 5.2.1 *MOSCITO* Optimierungsumgebung

Die *MOSCITO*-Umgebung realisiert ein internetbasiertes, verteiltes Simulations-Optimierungs-System [111, 112]. Es wird am *Fraunhofer IIS*, Institutsteil *Entwurfsautomatisierung* in Dresden seit 1997 entwickelt und steht dem *Fraunhofer IPMS* als Testversion zur Verfügung. Das Ziel der Entwicklung ist es, kommerziell verfügbare Simulatoren mit frei verfügbaren Optimierungsalgorithmen zu koppeln und damit die Designoptimierung für Mikrosysteme zu unterstützen [114]. Dabei wird die Kommunikation der einzelnen Systemkomponenten konsequent über das Internet-Protokoll realisiert. Die Implementation der Programmkomponenten erfolgt ausschließlich in der plattformunabhängigen Programmiersprache *Java*<sup>®</sup>. Es ist daher möglich, Rechner an unterschiedlichen Standorten mit verschiedenen Betriebssystemen in ein Optimierungsproblem einzubinden. Voraussetzung ist lediglich eine Internetverbindung und eine *Java*<sup>®</sup>-Laufzeitumgebung.

Die *MOSCITO*-Umgebung stellt Komponenten bzw. sogenannte Agenten für die folgenden Aufgaben bereit [114]:

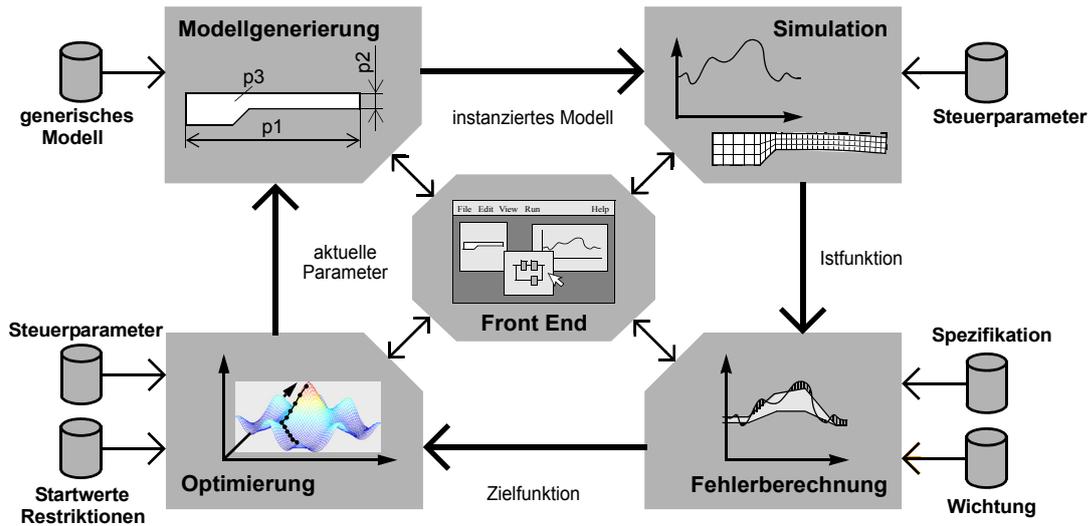


Abb. 5.6: Beispiel für einen typischen MOSCITO-Workflow. Mithilfe des Optimierungssystems *MOSCITO* können mehrere Simulatoren bzw. Optimierungsmodule gekoppelt werden. Das Schema enthält die einfachstmögliche Variante mit einem Simulator und einem Optimierungsmodul [114].

- Kapselung von Entwurfsprogrammen, sodass diese über das Internet gesteuert bzw. genutzt werden können,
- Schnittstellen für den einheitlichen Datenaustausch (Modellbeschreibungen, Simulationsergebnisse usw.) zwischen den Programmen,
- Ablaufsteuerung und Ergebnisvisualisierung und -speicherung von Entwurfsprozessen über eine grafische Benutzeroberfläche.

An Simulationswerkzeugen werden unter anderem *ANSYS*<sup>®</sup>, *MATLAB*<sup>®</sup> und *SPICE* unterstützt. Eine Erweiterung um Schnittstellen für zusätzliche Simulatoren ist dabei problemlos möglich; Voraussetzung ist lediglich, dass das Simulationsprogramm im *Batch-Betrieb* gestartet werden kann. Für die Optimierung stehen sowohl direkte Algorithmen (z.B. *NELDER-MEAD-Simplex*, *POWELL*) als auch globale Suchverfahren (z.B. *Simulated Annealing*, *BTRK*) zur Verfügung. Alle Verfahren sind für nichtlineare Optimierungsprobleme geeignet. Außerdem können für den größten Teil der implementierten Algorithmen zusätzliche Einschränkungen des Optimierungsraums in Form von Nebenbedingungen (*Constraints*) angegeben werden. Eine Übersicht zu den verfügbaren Suchverfahren und deren Eigenschaften findet sich in [111].

Abbildung 5.6 enthält eine schematische Darstellung des einfachstmöglichen *MOSCITO*-Optimierungs-Zyklus (*Workflow*). Es besteht aus vier Modulen, sogenannten *Software-Agenten*:

1. Im Modul *Modellgenerierung* wird ein, dem Optimierungsproblem entsprechendes, parametrisiertes Modell erzeugt (z.B. *FE-Netz*, *SPICE-Netzliste*). Dazu muss vom Entwerfer ein Skript bzw. Makro (generisches Modell) erstellt worden sein, welches einer von *MOSCITO* vorgegebenen Schnittstelle zur Übergabe der Optimierungsparameter gerecht wird.

2. Im Modul *Simulation* erfolgt die Übergabe des erzeugten Modells an den jeweiligen Simulator. Die vom Entwerfer festgelegten Ergebnisgrößen werden als Wert der Istfunktion zurückgegeben.
3. Das Modul *Fehlerberechnung* kombiniert bzw. bewertet die Ergebnisgrößen der Simulation. Das Resultat ist ein Skalar als Istwert der Zielfunktion<sup>24</sup>.
4. Im Modul *Optimierung* wird der Istwert bzw. der Verlauf der Zielfunktion genutzt, um mithilfe des gewählten Algorithmus, gegebenenfalls unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen, den Parametersatz für den nächsten Optimierungsschritt zu bestimmen. Zusätzlich wird die Konvergenz des Problems überwacht. Beim Unterschreiten eines vorgegebenen Konvergenzniveaus (Abbruch-Kriterium) wird die Optimierung beendet.

Prinzipiell lassen sich mithilfe der *MOSCITO*-Umgebung auch wesentlich komplexere Optimierungs-Szenarien realisieren. Dazu können beispielsweise verschiedene Simulatoren kombiniert werden, um implizit oder explizit gekoppelte physikalische Problemstellungen zu berücksichtigen [115].

Zur Auswahl des für das jeweilige Problem geeigneten *Workflows* bzw. zur Verwaltung der *MOSCITO*-Module und deren Eigenschaften und Parameter steht eine grafische Benutzerschnittstelle zur Verfügung. Diese dient außerdem der Visualisierung bzw. Überwachung des Optimierungsverlaufs sowie zum Zugriff auf dessen Ergebnisse.

Aufgrund des hohen Grads an Flexibilität und der Eignung der zur Verfügung stehenden Optimierungsalgorithmen für nichtlineare Probleme mit Nebenbedingungen ist das *MOSCITO*-System gut für den Entwurf bzw. die Optimierung von Mikroschnittspiegeln geeignet (vgl. mit Abschnitt 5.1.4).

### 5.2.2 *MATLAB*<sup>®</sup>-Toolbox *SUGAR*

Bei der *SUGAR*-Toolbox handelt es sich um eine an der Universität *Berkley* entwickelte Softwarebibliothek, bestehend aus einer Sammlung von *MATLAB*<sup>®</sup>-Algorithmen zur effizienten Simulation von *MEMS*-Bauelementen. Diese werden, bestehend aus primitiven Elementen wie Stäbe (Platten) und Ankerpunkte, mithilfe von Netzlisten beschrieben. Parallelen zu dem sehr verbreiteten, ebenfalls auf Netzlisten basierenden Netzwerksimulator *SPICE* sind dabei durchaus beabsichtigt [8, 116].

Die Grundidee der *SUGAR*-Toolbox basiert darauf, die physikalischen Eigenschaften der primitiven Elemente bezüglich weniger Freiheitsgrade analytisch zu beschreiben. So wird beispielsweise der Zustand eines Stabelements mithilfe von nur zwei Punkten (Knoten) festgelegt. Diese besitzen jeweils sechs mechanische Freiheitsgrade (Translation und Rotation). Die dazugehörigen Steifigkeiten sowie die Masse bzw. Massenträgheit des Elements ergeben sich aus den in der Netzliste hinterlegten Material- und Geometrie-Daten. Die Interpretation einer Netzliste resultiert demnach in einem Gleichungssystem, ähnlich Gl. (5.1) mit  $m = 6N$ , wobei  $N$  der Gesamtzahl der in der Geometrie enthaltenen Knoten entspricht.

Im Allgemeinen erhält man durch Kombination der zur Verfügung stehenden primitiven Elemente ein Modell mit nur eingeschränkter geometrischer Genauigkeit. Auch führt

<sup>24</sup>In der zurzeit am *Fraunhofer IPMS* verfügbaren Version ist das Modul bzw. der Agent zur Fehlerberechnung noch ohne Funktion. Die Bewertung eines Istwerts, also die Realisierung der Zielfunktion erfolgt daher im Simulationsschritt.

**Listing 1:** *SUGAR*-Netzliste eines Mikrospiegels.

```

use("ame1.net");
use("stdlib.net");

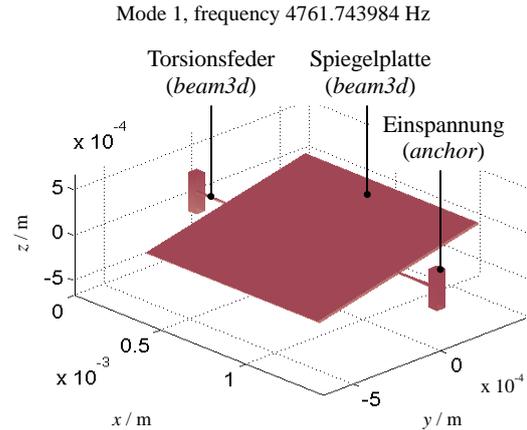
l = l or 200u;    d = d or 10u;
5 a = a or 1000u; b = b or 1000u;

A = node{0,0,0; name = "A"};

anchor{A; material=p2,l=50u,w=50u};
10 beam3d{A,      node "B"; material=p1,l=l,w=d};
beam3d{node "B", node "C"; material=p1,l=b,w=a};
beam3d{node "C", node "D"; material=p1,l=l,w=d};
anchor{node "D"; material=p2,l=50u,w=50u};

15 relpos_treewalk();

```

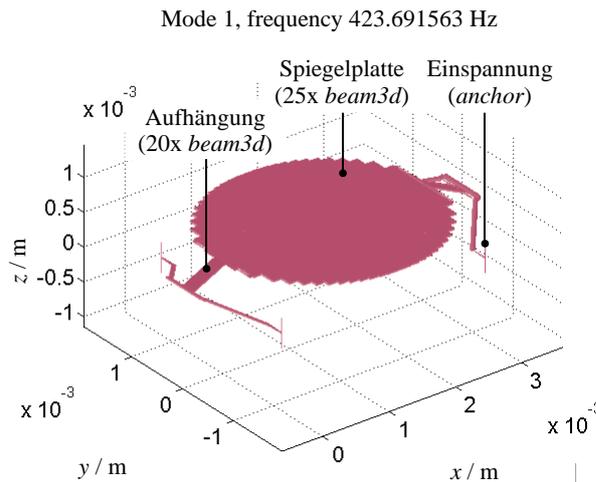


**Abb. 5.7:** *SUGAR-Modell eines Mikrospiegels.* Dargestellt ist die erste Eigenform der mithilfe von Listing 1 beschriebenen Geometrie (Spiegelplatte:  $1\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ , Torsionsfedern:  $200\text{ }\mu\text{m} \times 10\text{ }\mu\text{m}$ , Strukturhöhe:  $30\text{ }\mu\text{m}$ ). Die Materialeigenschaften sind innerhalb der Netzliste *ame1.net* (siehe Anlagen) definiert. Die Grafik wurde mithilfe der *SUGAR*-Funktion `cho_modeshape()` erzeugt [117].

die Tatsache, dass die Schnittstellen der Elemente auf Punkte (Knoten) abgebildet werden zu zusätzlichen Abweichungen. Andererseits ist der Aufwand zur Lösung der auf diese Weise formulierten Probleme extrem gering. So besitzt das in Abb. 5.7 dargestellte Modell eines Mikros scannerspiegels ohne Fingerelektroden lediglich 24 mechanische Freiheitsgrade von denen 12 bereits von den Randbedingungen (Einspannungen) festgelegt sind.

Neben rein strukturmechanischen Problemen lassen sich mithilfe der *SUGAR*-Toolbox auch einfache elektrostatische Antriebe und in eingeschränktem Umfang Problemstellungen innerhalb der thermischen Domäne untersuchen. Es steht allerdings kein primitives Element zur Verfügung, mit dessen Hilfe sich der in *Fraunhofer IPMS* Mikros scannerspiegeln zum Einsatz kommende *Out-of-plane-comb*-Antrieb abbilden lässt. Lediglich *Plan-Platten*-Elektroden und *In-plane*-Fingerelektroden (siehe Abschnitt 2.2.2) können realisiert werden. Dabei werden auch nichtlineare Eigenschaften und daraus resultierende *Pull-in*-Effekte berücksichtigt. Aufgrund der Tatsache, dass die Verbindung zwischen primitiven Elementen innerhalb eines *SUGAR*-Modells aus lediglich einem Knoten besteht und dieser nur sechs Freiheitsgrade aufweist, können weder Aussagen über mechanischen Spannungen, noch über die dynamische Deformation einer Struktur getroffen werden. Es können jedoch statische Auslenkungen ermittelt werden. Externe Kräfte können dabei allerdings nur an den wenigen Knoten eines *SUGAR*-Modells definiert sein. Nichtlineare geometrische Effekte und anisotrope Materialeigenschaften werden nicht berücksichtigt.

Aufgrund der genannten Einschränkungen ist die *SUGAR*-Toolbox nur bedingt für den Entwurf von Mikros scannerspiegeln geeignet. Sie kann jedoch zur geometrischen Vorauslegung verwendet werden. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, dass eine Eigenwertanalyse aufgrund der geringen Anzahl der berücksichtigten Freiheitsgrade nur einen Bruchteil der für eine *FEM*-Modalanalyse benötigten Rechenzeit in Anspruch nimmt. Die *SUGAR*-Toolbox eignet sich daher vor allem zur Untersuchung der Eigenschwingungen komplexer resonanter Strukturen bzw. zur Optimierung der dynamischen Eigenschaften durch Variation der Geometrie. Abbildung 5.8 zeigt die erste Eigenform einer vergleichsweise komplexen geometrischen Struktur, die mithilfe der *SUGAR*-Toolbox optimiert wurde. Sie dient der Realisierung von Translationsschwingern, welche für die Weglängenmodulation



**Tabelle 5.1:** Die relativen Abweichungen des *SUGAR*-Modells liegen trotz Vereinfachungen bezüglich Geometrie und Materialeigenschaften in der Größenordnung von lediglich 10 %.

Eigenfrequenz	<i>SUGAR</i> -Modell	<i>FEM</i> -Modell	rel. Abweichung
$f_1$	424 Hz	473 Hz	-10 %
$f_2$	881 Hz	910 Hz	-3 %
$f_3$	1200 Hz	1241 Hz	-3 %
$f_4$	1775 Hz	1955 Hz	-9 %
$f_5$	2430 Hz	2525 Hz	-4 %
$f_6$	2626 Hz	2642 Hz	-1 %

**Abb. 5.8:** *SUGAR*-Modell eines Translationsspiegels. Mithilfe der *SUGAR*-Toolbox können auch vergleichsweise komplexe Geometrien realisiert werden. Die mit der *SUGAR*-Funktion `cho_modshape()` dargestellte Netzliste besteht aus 65 *beam3d*-Elementen. Das resultierende Modell besitzt nur 396 mechanische Freiheitsgrade.

von Licht, beispielsweise in FOURIER-Transform-Spektrometern genutzt werden können [118, 119].

Bevor eine auf diese Weise ermittelte Geometrie in einem Bauelement realisiert werden kann, müssen in jedem Fall weitere Untersuchungen bezüglich der auftretenden strukturellen Spannungen und Nichtlinearitäten durchgeführt werden. Dazu muss oftmals noch ein zusätzliches *FE*-Modell der Geometrie erstellt werden. In diesem können dann ebenfalls geometrische Details wie Rundungen und Richtungsabhängigkeiten der Materialeigenschaften berücksichtigt werden. Die grundlegenden geometrischen Eigenschaften stehen jedoch aufgrund der durchgeführten Vorauslegung bereits fest, was die Erstellung des *FE*-Modells erheblich vereinfacht.

Mit dem auf diese Weise realisierten, wesentlich detailreicheren *FE*-Modell des Translationsschwingers ergeben sich vergleichbare Eigenfrequenzen bzw. -Vektoren (Tabelle 5.1). Die relativen Abweichungen des *SUGAR*-Modells liegen demnach in einer Größenordnung von lediglich 10 %. Die für die dynamischen Eigenschaften von Mikroscooperspiegeln besonders relevanten relativen Abstände der Eigenfrequenzen weisen noch geringere Abweichungen auf.

### 5.3 Klassenbibliothek *IMtk*

Bei der *IMtk*-Klassenbibliothek (*IPMS MEMS Toolkit*) handelt es sich um eine objektorientierte Skript-Bibliothek für die Simulationsumgebung *MATLAB*<sup>®</sup>. Sie wurde im Rahmen dieser Arbeit entwickelt. Die Motivation war dabei, ein Entwurfswerkzeug zu schaffen, mit dem eine vollständig gekoppelte Simulation resonanter Aktoren mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb unter Berücksichtigung aller relevanten Nichtlinearitäten ermöglicht wird. Besonderer Wert wurde dabei auf Flexibilität und Erweiterbarkeit gelegt. Mithilfe des *IMtk* lassen sich sehr effiziente, ordnungsreduzierte Modelle von Mikroscooperspiegeln erstellen, mit denen sowohl statische als auch zeitabhängige (dynamische bzw. transiente) Simulationen des Bauelementverhaltens durchgeführt werden können. Ein Großteil der in den Kapiteln 3 und 4 behandelten physikalischen Randbedingungen bzw. Erkenntnisse

spiegelt sich in der Funktionalität der Bibliothek wieder. Sie realisiert somit die praktische Umsetzung der im Rahmen dieser Arbeit erarbeiteten, theoretischen Erkenntnisse in einem komfortablen und mächtigen Entwurfswerkzeug.

Der folgende Abschnitt soll dazu dienen, das Grundkonzept der *IMtk*-Klassenbibliothek zu erklären und deren Möglichkeiten aufzuzeigen. Dazu werden einige Beispiele behandelt. Eine Übersicht zu den innerhalb der *IMtk*-Bibliothek realisierten Klassen und Funktionen sowie Erklärungen zur Implementation finden sich in Anhang F. Hier können auch weitere Skript-Beispiele gefunden werden.

Funktionsaufrufe oder Variablenamen bzw. Methoden und Eigenschaften werden im Folgenden durch einen *Typewriter*-Satz gekennzeichnet. Schlüsselworte der *MATLAB*<sup>®</sup>-Sprache können dabei fett gedruckt erscheinen. Funktions- bzw. Methodennamen werden im Text in verkürzter Schreibweise verwendet. Argumente und Format des Rückgabewerts werden dabei nicht berücksichtigt. So entspricht beispielsweise der Ausdruck

```
transient()
```

der Methode

```
[t,Y] = transient(ms, vs, tspan, y0, varargin)
```

der Klasse *imtk\_microscanner*. Erklärungen zu den Bedeutungen der einzelnen Parameter und Rückgabewerte können in Anhang F.5 bzw. im *Online-Manual* des *IMtk* (siehe dazu auch Anhang F.6) gefunden werden.

### 5.3.1 Programmierparadigmen

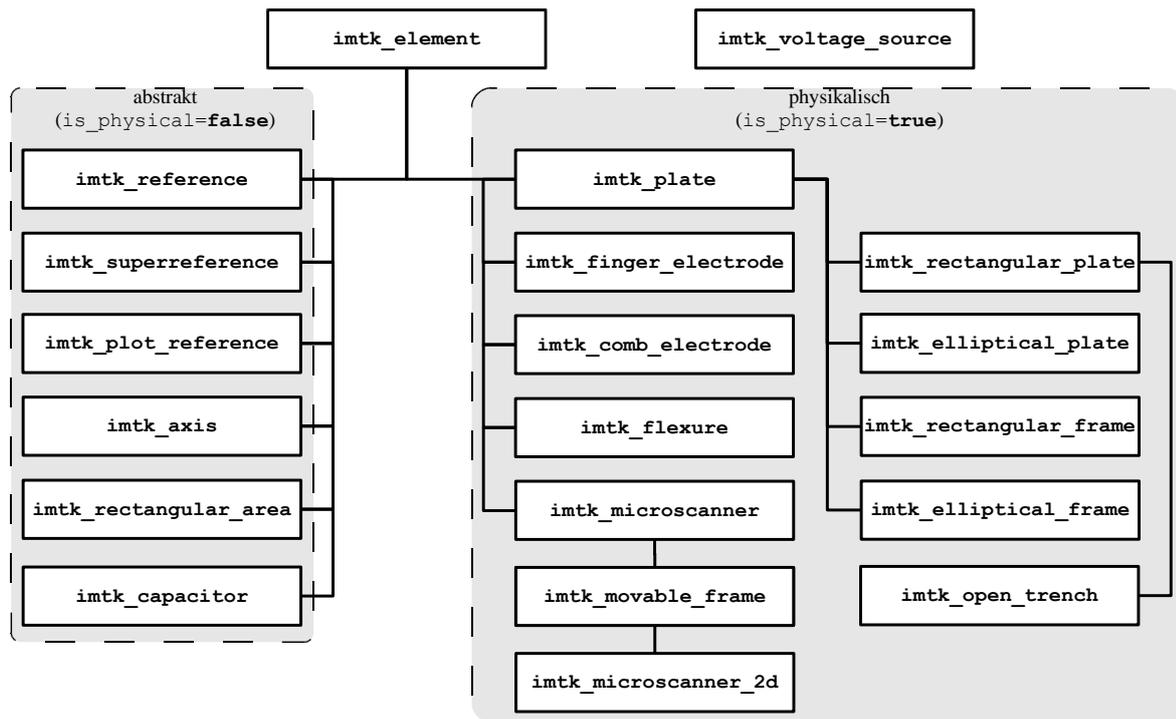
Bei der Realisierung der *IMtk*-Klassenbibliothek wurden die Paradigmen der objektorientierten Programmierung [120, 121] umgesetzt. Die Grundidee ist dabei, dass die zu verarbeitenden Daten anhand ihrer Eigenschaften und der möglichen Operationen klassifiziert werden können. Im Gegensatz zu Ansätzen, die Attribute und Funktionen nicht gemeinsam betrachten (z.B. prozedurale oder modulare Programmiertechniken), werden durch die objektorientierte Programmierung die menschlichen Abstraktionsmethoden zum Verstehen der realen Welt besser unterstützt. So kann ein komplexes Gebilde wie ein Mikros scannerspiegel aus verschiedenen, vergleichsweise einfachen Objekten mit überschaubaren Eigenschaften wie Torsionsfedern, Spiegelplatten oder Fingerelektroden zusammengesetzt werden.

Dem Prinzip der objektorientierten Programmierung liegt die Aufteilung der zu beschreibenden Zusammenhänge in sogenannte *Objekte* mit Attributen und Operationen zugrunde. Die Beschreibung eines solchen Objekts erfolgt dabei mithilfe einer *Klasse*. Diese legt durch ihre Definition die *Eigenschaften* (Attribute) und *Methoden* (Operationen) des Objekts fest. Eine Klasse ist demnach ein instanzierbares Modul, deren Instanzen (Objekte) die zu verarbeitenden Daten und die darauf anwendbaren Operationen zusammenfassen. Tabelle F.1 auf S. 211 enthält eine Übersicht zu den zurzeit in der *IMtk*-Bibliothek implementierten Klassen. Weitere Informationen über die dazugehörigen Eigenschaften und Methoden finden sich ebenfalls in Anhang F.

Die Syntax der *IMtk*-Bibliothek orientiert sich weitestgehend an den Konventionen der *MATLAB*<sup>®</sup>-Sprache bzw. an den bereits in der Standardbibliothek verfügbaren Klassen [120]. Tabelle 5.2 enthält einige Beispiele zum Erzeugen von Objekten bzw. zum Umgang mit Eigenschaften und Methoden. Des Weiteren sei an dieser Stelle auf die Beispiele in Anhang F.6 und auf die *Online*-Dokumentation des *IMtk* verwiesen.

**Tabelle 5.2:** Objektorientierte Programmierung mit dem IMtk. Zur Verdeutlichung der zugrunde liegenden Programmierparadigmen wird der Zugriff auf Eigenschaften und Methoden anhand der *IMtk*-Klasse `imtk_flexure` demonstriert.

Skript-Beispiel	Kommentar
Erzeugen einer Instanz (Objekt) der Klasse <code>imtk_flexure</code> mit Namen <code>f1</code> :	
<pre>f1 = imtk_flexure('length', 200e-6, ...                 'width', 10e-6, ...                 'height', 30e-6);</pre>	Es müssen beim Aufruf eines Konstruktors [121] nicht zwingend alle Eigenschaften festgelegt werden. Oft können die Standardwerte der Klassen (siehe <i>IMtk-Online-Manual</i> ) genutzt werden.
Auf die Eigenschaften eines Objekts wird entsprechend den <i>MATLAB</i> <sup>®</sup> -Konventionen [120] mithilfe der Methoden <code>get()</code> und <code>set()</code> zugegriffen:	
<pre>l = get(f1, 'length'); kt = get(f1, 'kt'); theta = get(f1, 'deflection');</pre>	Lesen der Länge $l$ , der Federhärte $k_t$ und Momentanauslenkung $\theta$ der Torsionsfeder <code>f1</code> .
Es können mehrere Eigenschaften mit einem Aufruf von <code>set()</code> gleichzeitig gesetzt werden:	
<pre>f1 = set(f1, 'width', 15e-6); f1 = set(f1, 'length', 250e-6, ...         'displacement', [0;0;10e-6]);</pre>	Setzen der Breite $w$ , der Länge $l$ und der Verschiebung im globalen Koordinatensystem.
Bei Methodenaufrufen wird entsprechend den <i>MATLAB</i> <sup>®</sup> -Konventionen [120] das Objekt als erster Parameter übergeben:	
<pre>sii = tensile_stress(f1, 20);</pre>	Zugspannung bei einer Auslenkung von $20^\circ$ .
Viele Methoden sind als <i>überladene Funktionen</i> [121] implementiert. Sie können also mit unterschiedlichen Parameterzahlen bzw. -typen aufgerufen werden:	
<pre>m1 = mass(f1); m2 = mass(f1, rho);</pre>	Masse bei Standard-Massendichte; Masse bei Massendichte $\rho_m = \text{rho}$ .
Einigen Methoden können optional mehrere Objekte oder <i>Arrays</i> [120] übergeben werden:	
<pre>f12 = imtk_flexure(); plot(f1, f12); flexures = {f1, f12}; plot(flexures);</pre>	Es wird eine Instanz der Klasse <code>imtk_flexure</code> erzeugt. Die Methoden <code>plot()</code> , <code>mass()</code> usw. können mit mehreren Objekten oder einem <i>Array</i> als Parameter aufgerufen werden.
Wie in <i>MATLAB</i> <sup>®</sup> üblich, können Mehrfach-Aufrufe von Methoden durch die Übergabe einer Matrix bzw. eines Vektors anstelle eines skalaren Parameters vermieden werden:	
<pre>sij = shear_stress(f1, 1:10);</pre>	Scherspannungen für die Auslenkungen von $1^\circ$ bis $10^\circ$ in Einerschritten als Vektor.



**Abb. 5.9:** Vererbungshierarchie der IMtk-Klassenbibliothek. Mit Ausnahme der Klasse `imtk_voltage_source` stammen alle Klassen von der Basisklasse `imtk_element` ab und erben somit deren Eigenschaften und Methoden.

Innerhalb eines objektorientierten Programms besteht die Möglichkeit, eine Klasse von einer beliebigen anderen Klasse (*Basisklasse*) abzuleiten. Die auf diese Weise entstandene neue Klasse (*Subklasse*) enthält dann zunächst alle Eigenschaften und Methoden der Basisklasse (*Vererbung*). Diese können anschließend durch zusätzliche Eigenschaften und Methoden erweitert werden; außerdem besteht die Möglichkeit, vorhandene Eigenschaften oder Methoden zu überschreiben und somit zu entfernen oder zu modifizieren. Der Vorteil dieses Konzepts liegt darin, dass wiederkehrende Eigenschaften oder Methoden nur einmal in einer Basisklasse implementiert werden müssen. Dies erhöht die Effizienz bei der Erstellung, vor allem jedoch bei der Wartung des Programmcodes.

Im folgenden Abschnitt wird die innerhalb der *IMtk*-Klassenbibliothek realisierte Vererbungsstrategie anhand der Basisklasse `imtk_element` erklärt. Diese repräsentiert selbst keinen konkreten Bestandteil eines Mikroscoannerspiegels. Sie definiert vielmehr die Schnittmenge der in der *IMtk*-Bibliothek realisierten Klassen. Nahezu alle implementierten Klassen sind daher Subklassen von `imtk_element`.

### 5.3.2 Vererbungsstrategie

Die innerhalb der *IMtk*-Klassenbibliothek umgesetzte Vererbungsstrategie basiert auf der Tatsache, dass alle Komponenten (ausgenommen die Spannungsquelle `imtk_voltage_source`) eines Mikroscoannerspiegels bestimmte Eigenschaften teilen. Diese werden ausschließlich innerhalb der abstrakten Basisklasse `imtk_element` realisiert. Die aus diesem Ansatz resultierende *Vererbungshierarchie* ist in Abb. 5.9 schematisch dargestellt. Im Folgenden wird detaillierter auf die implementierten Eigenschaften und Methoden, also die Schnittmenge der verfügbaren Klassen bzw. Objekte eingegangen. Eine Übersicht dazu findet sich außerdem in Tabelle F.4.

Jeder Bestandteil (Objekt) eines Mikros scannerspiegels besitzt ein eigenes lokales Koordinatensystem  $(x', y', z')$  entsprechend Abschnitt 3.1.2. Ein solches Koordinatensystem ist durch eine Verschiebung und Rotation bezüglich des globalen Koordinatensystems gekennzeichnet. Es werden demnach jeweils ein Verschiebungsvektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , sowie eine Rotationsmatrix  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  als gemeinsame Eigenschaften aller Bestandteile eines Mikros scannerspiegels benötigt (Eigenschaften `displacement`, `rotation`; Tabelle F.4).

Aus den auf diese gemeinsamen Daten anwendbaren Operationen ergeben sich zumindest zwei gemeinsame Methoden, die auf alle Bestandteile eines Mikros scannerspiegels angewandt werden können:

- Eine Manipulation des Verschiebungsvektors entspricht einer Verschiebung des Objekts innerhalb des globalen Koordinatensystems (Methode `displace()`),
- eine Manipulation der Rotationsmatrix entspricht einer Rotation des Bestandteils (Methode `rotate()`).

Beide Operationen benötigen als Parameter einen *gebundenen Vektor*<sup>25</sup> (Translations- bzw. Rotationsvektor). Ein solcher wird mit der Klasse `imtk_axis` beschrieben (vgl. dazu Listing 3, S. 135). Diese ist wiederum eine Subklasse von `imtk_element`. Mithilfe der Eigenschaften `displacement` und `rotation` bzw. den dazugehörigen Methoden `displace()` und `rotate()` können alle denkbaren Anordnungen oder Auslenkungen einer instanziierten *IMtk*-Klasse realisiert werden.

Als weitere allgemeine Operationen werden für alle Bestandteile (Objekte) eines Mikros scannerspiegels Vektor- und Matrixtransformationen vom globalen in das jeweilige lokale Koordinatensystem und umgekehrt benötigt. Diese werden in den Methoden `local_coords()` und `global_coords()` realisiert.

Zusätzlich können die Operationen zur Bestimmung der Masse bzw. Massenträgheit der Objekte bis zu einem gewissen Grad verallgemeinert werden (Methoden `mass()`, `moment_of_inertia()`). Zu diesem Zweck muss allerdings zwischen abstrakten Objekten und physikalischen Objekten unterschieden werden. Diesem Zweck dient die Eigenschaft `is_physical` (Typ `logical`  $\in \{\text{true}, \text{false}\}$ , [120]). Ist diese zu `false` gesetzt, ist das Objekt abstrakt; es wird beim Aufruf von `mass()` bzw. `moment_of_inertia()` ein Wert von null zurückgegeben.

Zur Bestimmung der Masse bzw. Massenträgheit von Objekten, welche aus weiteren Objekten bestehen (Superobjekte), müssen die Methoden `mass()` bzw. `moment_of_inertia()` mehrfach aufgerufen werden. Dies geschieht mit rekursiven Methodenaufrufen. Abbildung 5.10 verdeutlicht dies am Beispiel der Masse eines 1D-Mikros scannerspiegels. Die eigentliche Berechnung der Masse ist dabei von der jeweiligen Geometrie des Objekts abhängig und wird in der *Lowlevel*-Methode `mass_helper()` durchgeführt. Diese muss für jede Klasse, mit der ein physikalisches Objekt beschrieben werden soll, implementiert werden.

Eine weitere verallgemeinerbare Operation ist die grafische Darstellung der Objekte. Sie erfolgt innerhalb der `plot()`-Methode. Diese ruft in ähnlicher Weise wie `mass()` (bei Bedarf rekursiv) spezielle, in den Klassen implementierte *Lowlevel*-Funktionen auf, die in einem *MATLAB*<sup>®</sup>-*Figure* (grafische Ausgabeschnittstelle der *MATLAB*<sup>®</sup>-Umbgebung, [120]) Flächen erzeugen. Auf diese Weise entsteht eine grafische Repräsentation des jeweiligen Objekts. Dabei werden sowohl allgemeine Eigenschaften wie Verschiebung und Rotation innerhalb des globalen Koordinatensystems, als auch spezielle Eigenschaften wie

<sup>25</sup>Vektor, der an einen bestimmten Anfangspunkt gebunden ist [65].

**Listing 2:** Prinzipielle Implementation der Methode zur Berechnung der Masse.

```

function m = mass(e, rho)

if e.is_super

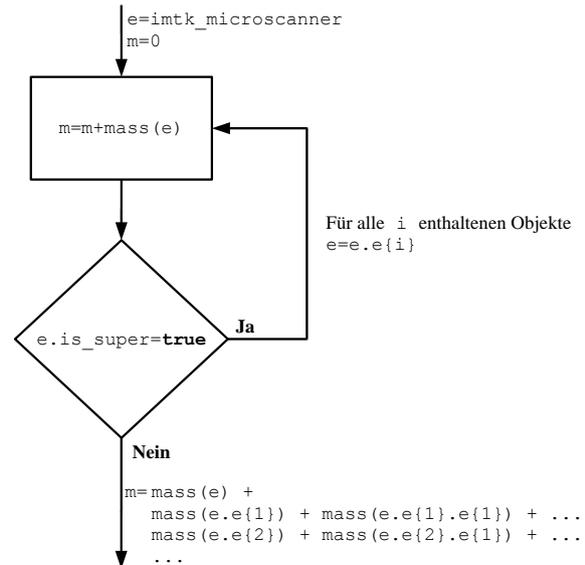
5  % das Objekt enthält weitere Objekte
   m = 0;

   % Rekursion für enthaltenen Objekte
10  for i = 1:length(e.e)
       m = m + mass(e.e{i}, rho);
   end

   % Beenden der aktuellen Rekursion
   return;
15 end

% Delegation an spezielle Methode
m = mass_helper(e, rho);
return;

```



**Abb. 5.10:** Nutzung rekursiver Methodenaufrufe im IMtk. Besteht ein Objekt aus weiteren Objekten, wird die Masse bzw. die Massenträgheit durch rekursive Aufrufe der Methoden berechnet. Die Darstellung des Konzepts erfolgt beispielhaft für `mass()`, gilt jedoch prinzipiell auch für andere Methoden der Klasse `imtk_element`.

die geometrische Form und die jeweiligen Parameterwerte (Länge, Breite usw.) berücksichtigt. Ein Beispiel für eine mit der `plot()`-Methode erzeugte grafische Repräsentation einer Torsionsfeder ist in Abb. 5.11 enthalten. Es lassen sich auf diese Weise Darstellungen von nahezu beliebig komplexen geometrischen Anordnungen erzeugen (siehe auch Abb. 5.12).

### 5.3.3 Ordnungsreduktion

Die nichtlinearen Eigenschaften von Mikroscoanerspiegeln mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb schränken die Wahl der zum Einsatz kommenden Techniken zur Ordnungsreduktion ein. Bei der Implementation der `transient()`- bzw. `transient_2d()`-Methode der Klassen `imtk_microscanner` bzw. `imtk_microscanner_2d` wurde das auf S. 124 dieser Arbeit vorgestellte Verfahren der *modalen Zerlegung* realisiert. Voraussetzung für die Anwendung diese Verfahrens ist, dass das zu beschreibende nichtlineare System in der Nähe einer Eigenresonanz betrieben wird. Diese Bedingung ist erfüllt.

Bei der Anwendung der *modalen Zerlegung* muss die folgende, in Abb. 5.13 schematisch dargestellte Prozedur abgearbeitet werden. Sie verläuft in drei Phasen [86]:

1. *Generation Pass*: Es werden Schritte zur Parameterextraktion aus *FE*-Modellen durchgeführt. Dazu werden zunächst die Eigenvektoren  $\vec{X}_i$  der untersuchten Geometrie innerhalb der strukturmechanischen Domäne bestimmt (Abschnitt 3.2.4). Anschließend werden den für das jeweilige Problem relevanten Eigenvektoren Bewegungsfreiheitsgrade innerhalb einer modal generalisierten Basis zugeordnet. Die Anzahl der berücksichtigten Freiheitsgrade legt dabei die Anzahl der Freiheitsgrade des resultierenden Makromodells fest. Anschließend werden durch statische, nicht-lineare Analysen Wertetabellen für relevante physikalische Größen in Abhängigkeit von den modalen Auslenkungen  $q_i$  aufgebaut. Außerdem werden die modalen Massen der Struktur ermittelt.

**Listing 3:** Beispiel für einen Aufruf der `plot()`-Methode eines Objekts (`imtk_flexure`).

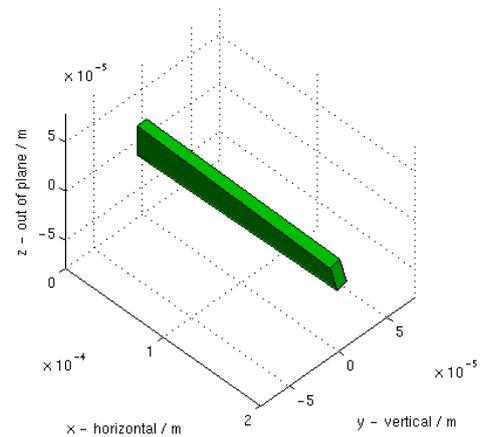
```

% Aufruf des Konstruktors für Torsionsfeder
fl = imtk_flexure('length', 200e-6, ...
                 'width', 10e-6, ...
                 'height', 30e-6);

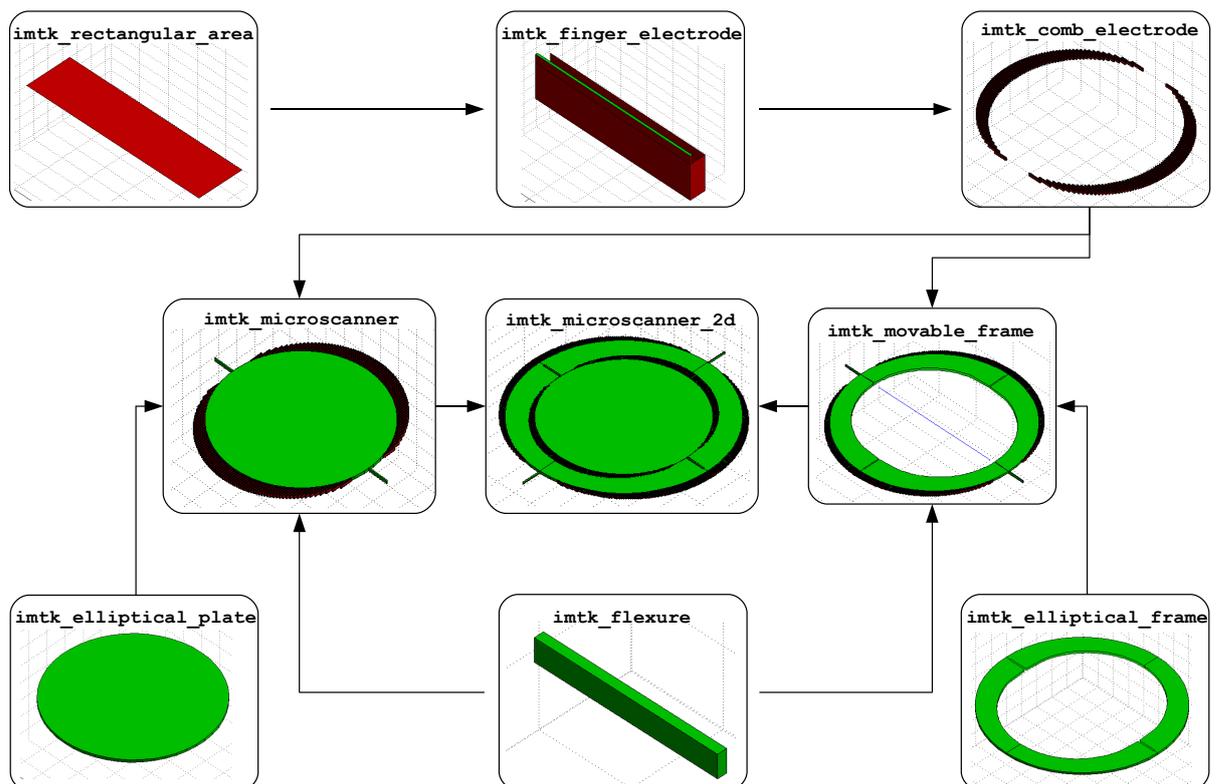
5
% rotiert Torsionsfeder (15° um x-Achse)
ra = imtk_axis('x');
fl = rotate(fl, ra, 15);

10 % grafische Repräsentation
plot(fl);

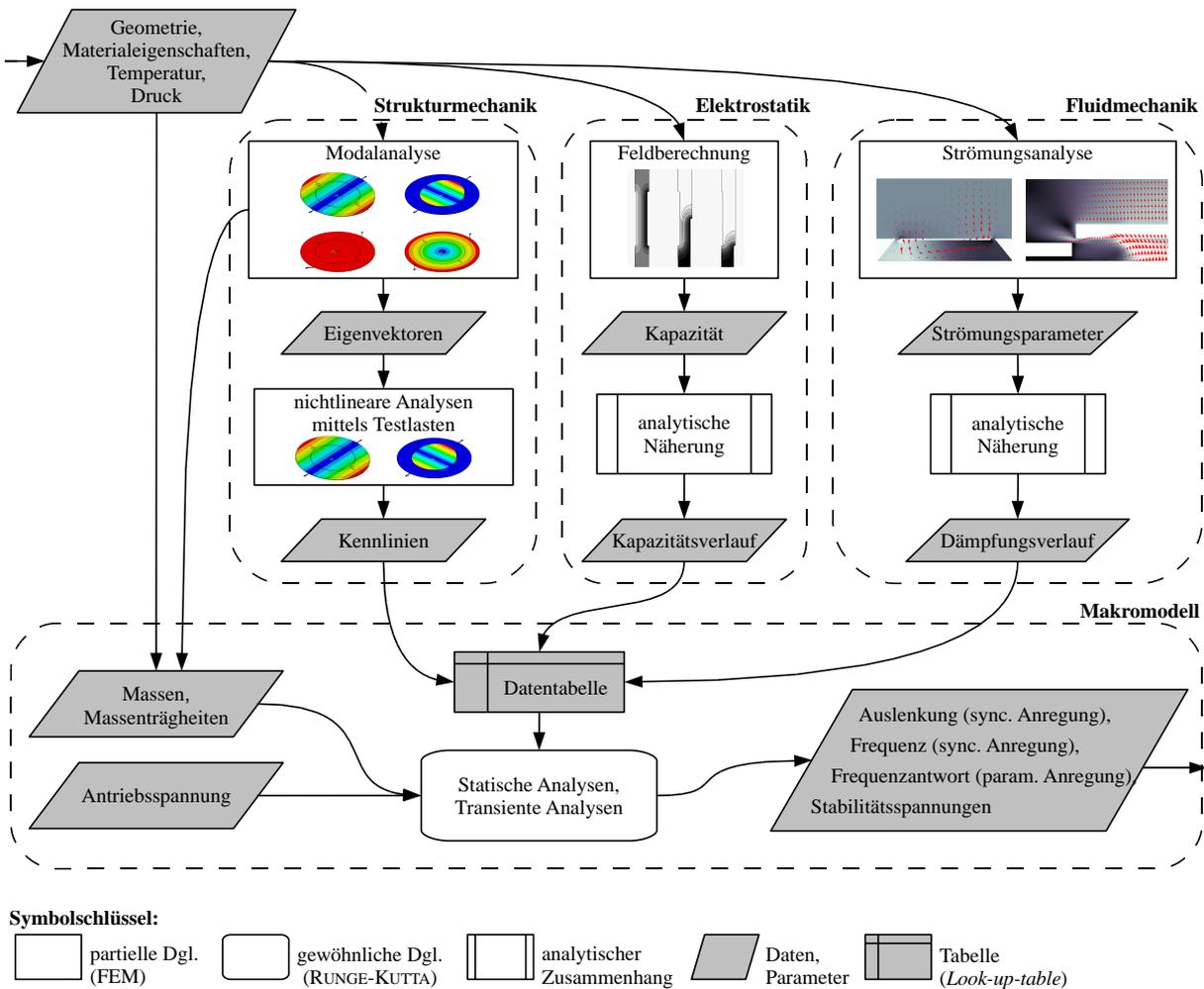
```



**Abb. 5.11:** Erzeugen der grafischen Repräsentation eines Objekts mit dem IMtk. Der Aufruf der `plot()`-Methode der Basisklassen `imtk_element` führt dazu, dass die spezielle `plot_helper()`-Methode des `imtk_flexure`-Objekts ausgeführt wird. Objekte mit Masse und Massenträgheit werden standardmäßig grün dargestellt, Objekte vom Typ `rectangular_area` rot, Referenzen und Achsen blau.



**Abb. 5.12:** Abhängigkeiten zwischen IMtk-Klassen. Die Superklassen `imtk_microscanner` und `imtk_microscanner_2d` enthalten Instanzen anderer *IMtk*-Klassen (z.B. `imtk_flexure`) bzw. Superklassen (z.B. `imtk_comb_electrode`). Ebenfalls instanziierte Klassen vom Typ `imtk_axis`, `imtk_reference` und `imtk_superreference` werden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt.



**Abb. 5.13:** Ordnungsreduktion auf Basis der modalen Zerlegung. Bei dem im *IMtk* umgesetzten Verfahren zur Ordnungsreduktion werden implizit gekoppelte, multiphysikalische Probleme mit sehr vielen Freiheitsgraden auf Differentialgleichungssysteme mit lediglich zwei oder vier Freiheitsgraden abgebildet.

2. *Use Pass*: Das Makromodell wird in eine sogenannte *Blackbox*-Form gebracht. Anhand von einfachen parametrisierten Schnittstellen können anschließend Simulationen durchgeführt werden. Die Ergebnisse werden innerhalb der modal generalisierten Basis dargestellt.
3. *Expansion Pass*: Die Ergebnisse werden aus der modal generalisierten Basis auf die Knoten des *FE*-Modells zurücktransformiert.

Es folgt die Beschreibung der konkreten Umsetzung der Prozedur zur Simulation resonanter Mikroschaltkreise mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb:

**Im Generation Pass** werden strukturmechanische *FE*-Modelle erstellt. Anschließend wird eine Modalanalyse durchgeführt (vgl. Anhang C.3). Dabei muss durch Variation der Geometrie sichergestellt werden, dass der Frequenzabstand der Eigenschwingungen ausreichend groß ist, um bei einer parametrischen Anregung (siehe dazu Abschnitt 2.3.2) keine zusätzlichen parametrischen Resonanzen in Richtung parasitärer Freiheitsgrade anzuregen. Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn die nächsthöhere, über der genutzten

Resonanz liegende Eigenfrequenz zumindest um den Faktor 2.5 größer ist. Auf diese Weise wird die Anregung einer ungewünschten Schwingung in parametrischer Resonanz 2. Ordnung (siehe Abb. 2.12 bzw. Abb. 2.13 auf S. 26) sicher vermieden. Resonanzen höherer Ordnung stellen im Allgemeinen kein Problem dar.

Ist also durch einen ausreichend großen Frequenzabstand der Eigenschwingungen sichergestellt, dass bei einer parametrischen Anregung ausschließlich Auslenkungen in Richtung des gewünschten Bewegungsfreiheitsgrads stattfinden, kann die Anzahl der relevanten Eigenvektoren stark verringert werden. Für einen 1D-Mikroscannerspiegel ergibt sich dann eine modal generalisierte Basis mit der Dimension eins. Die ordnungsreduzierte Bewegungsgleichung eines 1D-Mikroscannerspiegels ist demnach eine gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (vgl. Gl. (5.6) mit  $\tilde{m} = 1$ ). Für die Komponente der generalisierten Basis gilt dann:

$$q = q_1 \equiv \theta_x \quad (5.7)$$

Abgesehen von den nichtlinearen Termen ( $\tilde{\alpha}'$ ,  $\tilde{K}'$ ,  $\tilde{P}'$ ) entspricht die ordnungsreduzierte Beschreibung des Systems damit der in [3] bzw. Abschnitt 2.3 vorgestellten Bewegungsgleichung (2.12).

Für einen 2D-Mikroscannerspiegel ergibt sich eine modal generalisierte Basis mit der Dimension zwei. Die ordnungsreduzierte Bewegungsgleichung ist demnach ein Differentialgleichungssystem, bestehend aus zwei gewöhnlichen, gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen (vgl. Gl. (5.6) mit  $\tilde{m} = 2$ ). Für die Komponenten der Basis gilt dann:

$$q_1 \equiv \theta_x \quad \text{bzw.} \quad q_2 \equiv \theta_y \quad (5.8)$$

Im nächsten Schritt des *Generation Pass* werden die nichtlinearen Eigenschaften des Systems ermittelt. Dazu werden innerhalb der beteiligten physikalischen Domänen statische Analysen durchgeführt und Wertetabellen bzw. *Look-up-tables* aufgebaut (vgl. dazu auch Abb. 5.13):

1. Innerhalb der *strukturmechanischen Domäne* werden auslenkungsabhängige Federhärten (geometrische Nichtlinearitäten, siehe Abschnitt 3.2.2) berücksichtigt. Dazu wird die Formänderungsenergie oder das rückstellende mechanische Drehmoment in Abhängigkeit von der modalen Auslenkung  $\vec{q}$  durch das Aufbringen geeigneter Testlasten bestimmt. Dazu kann dasselbe strukturmechanische *FE*-Modell zum Einsatz kommen, mit dem zuvor die Eigenvektoren bestimmt wurden. Für 1D-Scanner ergeben sich auslenkungsabhängige Kennlinienverläufe  $\tilde{K}' = f(\theta_x)$  entsprechend Anhang C.2. Im Fall eines 2D-Scanners ergibt sich aufgrund der mechanischen Kopplung zwischen den Achsen eine auslenkungsabhängige Matrix  $\tilde{\mathbf{K}}' = f(\theta_x, \theta_y)$  mit  $\tilde{\mathbf{K}}' \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  (Abb. F.8).

Zusätzlich werden die modalen Massen (Massenträgheiten  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ) der Geometrie bestimmt. Im Fall eines 2D-Scanners gilt dabei  $J_{yy} = f(\theta_x)$  (Abb. F.8).

2. Innerhalb der *elektrostatischen Domäne* werden nichtlineare Effekte berücksichtigt, die aus dem auslenkungsabhängigen Momentenverlauf der zum Einsatz kommenden *Out-of-plane*-Fingerelektroden resultieren. Dies kann beispielsweise anhand der in Abschnitt 3.4.1 vorgestellten analytischen Näherung (3.121) geschehen. Für einen 1D-Scanner ergibt sich wieder eine auslenkungsabhängige Kennlinie  $\tilde{P}' = f(\theta_x)$ ;

für einen 2D-Scanner ergibt sich eine auslenkungsabhängige Matrix  $\tilde{\mathbf{P}}'$ , wobei unter Vernachlässigung des elektrischen Übersprechens zwischen den Antriebsspannungen folgendes gilt:

$$\tilde{\mathbf{P}}' = \begin{pmatrix} f(\theta_x) & 0 \\ 0 & f(\theta_y) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

3. Innerhalb der *fluidmechanischen Domäne* werden auslenkungs- und geschwindigkeitsabhängige Dämpfungseffekte berücksichtigt. Dazu können beispielsweise die in Abschnitt 3.3 vorgestellten Zusammenhänge bzw. analytischen Näherungen genutzt werden. Für einen 1D-Scanner ergibt sich ein von der Auslenkung und Winkelgeschwindigkeit abhängiger Verlauf  $\tilde{\alpha}' = f(\theta_x, \dot{\theta}_x)$ ; für einen 2D-Scanner ergibt sich eine auslenkungsabhängige Matrix  $\tilde{\alpha}'$ . Vernachlässigt man die dämpfungsbedingte Kreuzkopplung zwischen den Achsen, gilt näherungsweise:

$$\tilde{\alpha}' \approx \begin{pmatrix} f(\theta_x, \dot{\theta}_x) & 0 \\ 0 & f(\theta_y, \dot{\theta}_y) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Es wird deutlich, dass ein Großteil der im *Generation Pass* benötigten Funktionalität in Form von Eigenschaften oder Methoden innerhalb der *IMtk*-Klassenbibliothek verfügbar ist. Die beim Aufruf der `init()`-Methoden (Anhang F.5) berechneten Kennlinien bzw. Kennlinienfelder entsprechen dabei den zu erstellenden Wertetabellen.

Für viele Entwurfsprobleme genügt es also, ein strukturmechanisches *FE*-Modell des zu simulierenden Bauelements zu erstellen. Sind die geometrischen Nichtlinearitäten nicht relevant (oder sollen sie zunächst vernachlässigt werden), kann selbst auf diesen Schritt verzichtet werden. Wird nämlich einem Scanner-Objekt keine Massenträgheit bzw. Federcharakteristik zugewiesen, werden diese automatisch mithilfe analytischer (linearer) Zusammenhänge bestimmt (Anhang F.5, `torsional_torque()`, `moment_of_inertia()`).

**Der Use Pass** entspricht in seiner Funktionalität der Methode `transient()` (implementiert für die Klassen `imtk_mikroscanner` und `imtk_microscanner_2d`, siehe Anhang F.5). Diese realisiert eine vergleichsweise einfach zu handhabende Schnittstelle zur dynamischen Simulation von Mikroscoanerspiegeln (*Blackbox*-Form).

Innerhalb der `transient()`-Methode werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen der Bauelemente entsprechend Gl. (5.6) unter Berücksichtigung der Gln. (5.7 - 5.10) numerisch gelöst. Die Parameter dieser Gleichungen bzw. Gleichungssysteme werden dabei von dem jeweiligen Scanner-Objekt bestimmt. Der einer Simulation zugrunde liegende Verlauf der elektrischen Spannung wird von einem an die Methode übergebenen Objekt der Klasse `imtk_voltage_source` definiert (siehe Anhang F.5).

**Ein Expansion Pass** wird bei der dynamischen Simulation von Mikroscoanerspiegeln nicht zwingend benötigt. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass das Ergebnis des *Use Pass* (nämlich die Auslenkwinkel des Bauelements) bereits die in den meisten Fällen gesuchte Größe darstellt. Die zu *Expansion Pass* gehörige Funktionalität wird daher im Rahmen dieser Arbeit nicht realisiert.

**Tabelle 5.3:** *Verifikation der Modelle zur Berechnung der Stabilitätsspannung.* Experimentelle Untersuchungen zur elektromechanischen Stabilität zeigen eine gute Übereinstimmung. Die Abweichungen liegen in einer Größenordnung von maximal 15 %.

Designname	<i>SINUS</i>	<i>S30150</i>	<i>EO</i>
Messung	> 24.3 V	> 59.2 V	> 60.5 V
Simulation	21.2 V <sup>¶</sup>	59.0 V	58.7 V
rel. Abweichung	-12.7 %	-0.4 %	-2.9 %

<sup>¶</sup>Steifigkeiten aus analytischen Modellen, entsprechend den Gln. (3.128 - 3.130)

Es steht also mit dem *IMtk* ein effizientes Werkzeug zur dynamischen Simulation von 1D- oder 2D-Mikroscannerspiegeln zur Verfügung. Dabei werden alle relevanten Nichtlinearitäten und impliziten Kopplungen berücksichtigt. Es ist allerdings zu beachten, dass die zugrunde liegenden Ansätze zur Ordnungsreduktion den Anwendungsbereich der Modelle einschränken. Sie besitzen nur Gültigkeit für oszillierende Auslenkungen nahe der mechanischen Eigenresonanz. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, können die parasitären Freiheitsgrade der Bauelemente im Allgemeinen nicht mehr vernachlässigt werden. Es sind dann zusätzliche Untersuchungen nötig.

#### 5.3.4 Verifikation der Modelle

Es wurden im Rahmen dieser Arbeit eine Reihe von experimentellen Untersuchungen durchgeführt mit deren Hilfe die Gültigkeit bzw. die Genauigkeit der vorgestellten Modelle überprüft wurden. Schwerpunkt lag dabei auf der Verifikation der im *IMtk* implementierten Ansätze. Es folgt eine kurze Beschreibung der durchgeführten experimentellen Untersuchungen und ein Vergleich zu den Ergebnissen des jeweiligen Modells:

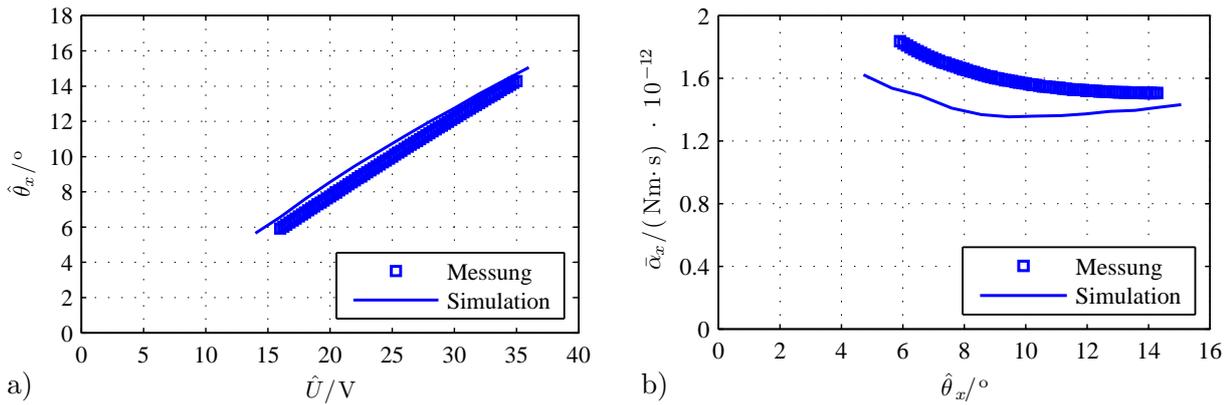
##### Elektromechanische Stabilität

Die Messung der elektromechanischen Stabilitätsspannung (*Pull-in*-Spannung) gehört zu den Standardverfahren zur Charakterisierung von Mikroscannerspiegeln am *Fraunhofer IPMS*. Dazu wird mithilfe einer elektrischen Gleichspannung ein elektrostatisches Feld zwischen den Antriebselektroden erzeugt. Anschließend wird die Spannung solange erhöht, bis es zum *Pull-in* der Elektroden kommt (Abschnitt 3.4.4).

Der Vergleich mit den Ergebnissen der Modelle (Tabelle 5.3; Rückgabewert der Methode `stability_voltage()`, siehe Anhang F.5) zeigt eine gute Übereinstimmung. Es ist zu erkennen, dass die Modelle die Höhe der Stabilitätsspannung im Allgemeinen leicht unterschätzen (-0.4 % bis -13 % relative Abweichung). Außerdem wird deutlich, dass erwartungsgemäß eine höhere Genauigkeit der Vorhersage erreicht werden kann, wenn die Steifigkeiten zur Bestimmung der mechanischen rückstellenden Momente mit einem *FE*-Modell ermittelt werden. Dabei können Details wie Rundungen an den Federenden oder komplexere Aufhängungen berücksichtigt werden.

##### Schwingung bei synchronisierter Anregung

Das Bestimmen der Schwingungsparameter eines Bauelements bei synchronisierter Anregung gehört ebenfalls zu den Standardverfahren der Bauelementcharakterisierung am



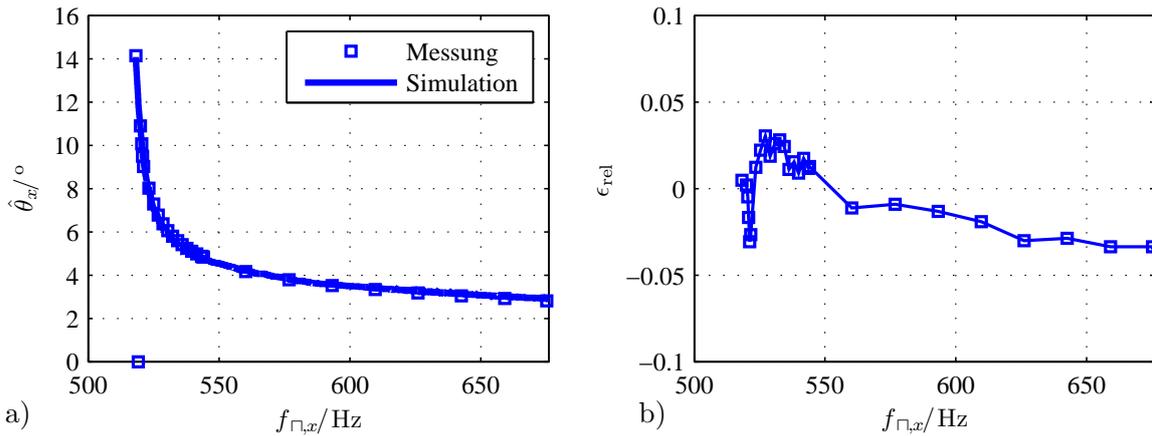
**Abb. 5.14:** Verifikation der Modelle anhand von Dämpfungsmessungen. Die experimentellen Versuche wurden mit einer speziellen Dämpfungsstruktur durchgeführt [44, 83]. a) Schwingungsamplitude über der Pulsspannung bei synchronisiertem Antrieb; b) mittlerer Dämpfungsfaktor in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude.

*Fraunhofer IPMS*. Dabei wird die Auslenkung und Frequenz des Bauelements mit einer Laser-Diode und zwei lichtempfindlichen Detektoren bestimmt [122]. Beim Nulldurchgang der Schwingung wird ein *Trigger*-Signal ausgelöst, mit dessen Hilfe die Antriebsspannung synchronisiert wird. Abbildung 5.14a enthält den typischen Verlauf der Schwingungsamplitude eines Bauelements in Abhängigkeit von der Pulsspannung  $\hat{U}$ . Zusätzlich ist der mithilfe der Methode `closed_loop_equilibrium()` (Anhang F.5) bestimmte Verlauf dargestellt. In Abbildung 5.14b ist der Verlauf des entsprechend Gl. (3.95) bestimmten mittleren Dämpfungsfaktors  $\bar{\alpha}_x$  enthalten. Beide Kurven zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen. Im Allgemeinen lässt sich die im synchronisierten Betrieb erreichbare Amplitude eines Bauelements mit einer maximalen relativen Abweichung von ca.  $\pm 10\%$  vorhersagen. Dies gilt allerdings ausschließlich für Mikroscoannerspiegel mit näherungsweise elliptischer oder rechteckförmiger Spiegelplatte. Komplexere Plattenformen können zurzeit nicht berücksichtigt werden und erfordern weitere Untersuchungen (Abschnitt 3.3.4). Zusätzlich gelten die in Abschnitt 3.3 beschriebenen Einschränkungen bezüglich der Geometrie der Kammelektrode und des Umgebungsdrucks.

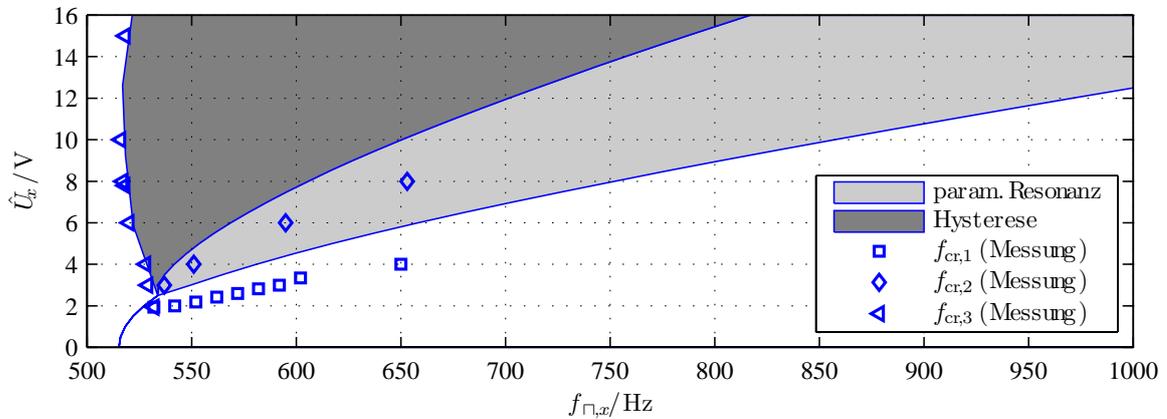
### Schwingung bei parametrischer Anregung

Die Charakterisierung von Mikroscoannerspiegeln bei parametrischer Anregung kann mit dem selben Messaufbau durchgeführt werden, der für die synchronisierte Anregung genutzt wird. Dabei wird allerdings die Antriebsspannung unabhängig von dem ausgegebenen *Trigger*-Signal mit einem Funktionsgenerator erzeugt.

Der Aufbau kann unter anderem zur Charakterisierung der Bauelemente bei variabler Pulsfolgefrequenz oder Pulsspannung (*Sweeps*) genutzt werden. Das Resultat einer Messung ist der Verlauf der Schwingungsamplitude über der variierten Größe. In Abbildung 5.15 ist die experimentell ermittelte Frequenz-Antwortkurve eines *SINUS*-Scanners bei einem *Down-sweep* dargestellt. Zusätzlich enthält die Abbildung den mithilfe der Methode `open_loop_response()` bestimmten Verlauf der Amplitude  $\hat{\theta}_x$ . Es wird deutlich, dass beide Kurven sowohl qualitativ, als auch quantitativ gut übereinstimmen. Dies gilt in gleichem Maße auch für super- und subharmonische Resonanzen und für die Hysterese der Bauelemente (siehe dazu Abschnitt 2.3.2 bzw. Abb. 2.13). Die relative Abweichung der simulierten Amplitudenwerte liegt dabei analog zum synchronisierten Betrieb typischerweise in einer Größenordnung von  $\pm 10\%$ . Dies gilt allerdings auch hier ausschließlich für



**Abb. 5.15:** Verifikation des Bauelementverhaltens bei parametrischer Anregung. a) Frequenz-Antwortkurve eines *SINUS*-Scanners (*Down-sweep*,  $\hat{U}_x = 15$  V); b) relative Abweichung von der experimentell ermittelten Antwortkurve.



**Abb. 5.16:** Verifikation der Stabilitätseigenschaften. Die Darstellung enthält die mit der Methode `stability_regions()` bestimmten Stabilitätsregionen des *SINUS*-Scanners. Für die experimentell ermittelten Verzweigungswerte ergibt sich ein vergleichbarer qualitativer Verlauf.

Mikroscannerspiegel mit näherungsweise elliptischer oder rechteckförmiger Spiegelplatte und unter Beachtung der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Einschränkungen bezüglich der Geometrie der Kammelektrode und des Umgebungsdrucks.

Anhand mehrerer Messungen bei verschiedenen Pulsspannungen  $\hat{U}$  kann die Stabilitätscharakteristik eines Bauelements bestimmt werden. Dazu werden sehr langsame, manuelle Frequenz-*Sweeps* durchgeführt und dabei das Verhalten des Scanners beobachtet. Auf diese Weise können die Verzweigungswerte  $f_{cr,1,2,3}$  (Abschnitt 4.1.3) des Bauelements experimentell bestimmt werden. Abbildung 5.16 enthält neben den Ergebnissen der Methode `stability_regions()` die auf diese Weise experimentell bestimmten Verzweigungswerte eines *SINUS*-Scanners.

Es wird deutlich, dass die mit der Methode `stability_regions()` ermittelten Verläufe der Verzweigungswerte  $f_{cr,1,2,3}$  zumindest qualitativ gut mit den experimentell ermittelten Daten übereinstimmen. Betrachtet man die Ergebnisse quantitativ, fallen zwei Abweichungen auf:

1. Die theoretisch ermittelten Werte für  $f_{cr,1,2}$  erscheinen zu höheren Pulsspannungen  $\hat{U}$  verschoben. Die Abweichung kann mit den genutzten Vereinfachungen bezüglich des

Verlaufs der Antriebsspannung erklärt werden. Entsprechend Gl. (2.26) wird diese mit einer Kosinusfunktion angenähert (Abschnitt 2.3.2). Die in der Realität genutzte Pulsfolge führt bereits bei geringeren Pulsspannungen zu einem Anschwingen des Scanners [18].

2. Die Verläufe der Verzweigungswerte  $f_{cr1,2} = f(f_{\square,x})$  weisen einen geringfügig höheren Anstieg auf. Dies ist ein Indiz dafür, dass der im Modell genutzte, auslenkungsabhängige Kapazitätsverlauf einen zu geringen Anstieg in der Nähe der Ruhelage aufweist. In anderen Worten: Der Parameter  $r_1$  wird als zu gering angenommen.

Die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse sind also nur bedingt geeignet, um eine exakte Aussage über das Anschwingverhalten eines Mikroscoannerspiegels zu treffen. Sie können jedoch genutzt werden, um prinzipielle Einflüsse konstruktiver Änderungen am Bauelement zu untersuchen.

Der berechnete Verlauf für  $f_{cr3}$  stimmt hingegen auch quantitativ gut mit den experimentell ermittelten Werten überein (Abb. 5.16). Die dynamischen Eigenschaften der Bauelemente in der Nähe des Arbeitspunktes können also vergleichsweise genau untersucht bzw. vorhergesagt werden.

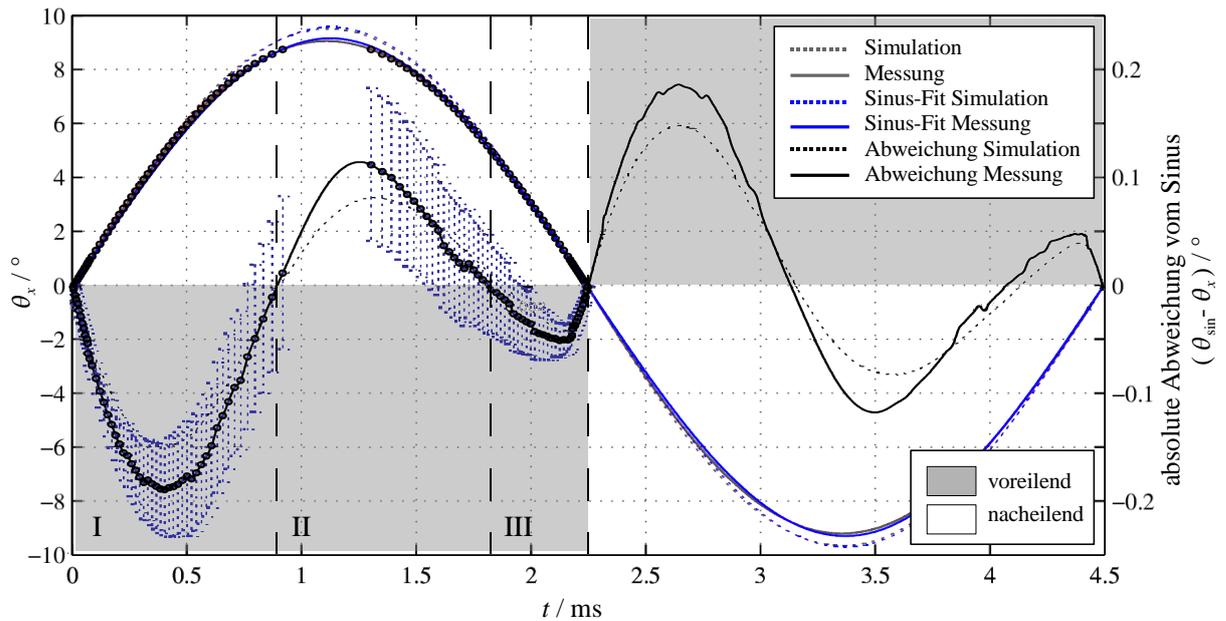
### Zeitlicher Verlauf der Schwingung

Bisher wurde bei Mikroscoannerspiegeln immer von einem ideal sinusförmigen Verlauf der Auslenkung ausgegangen [3, 18]. Aufgrund der zahlreichen Nichtlinearitäten des Systems liegt jedoch der Verdacht nahe, dass diese Annahme nur näherungsweise gilt. Da innerhalb des vorgestellten ordnungsreduzierten Modells alle relevanten nichtlinearen Effekte berücksichtigt werden, kann diese Hypothese mithilfe dynamischer Simulationen überprüft, bzw. die Abweichung der Spiegelbewegung von der idealen Sinus-Schwingung ermittelt werden. Zur Verifikation der Simulationsergebnisse wurde im Rahmen einer Praktikumsarbeit ein Messaufbau entwickelt, mit dem die Möglichkeit besteht, sehr genaue Messungen der Auslenkung eines synchronisiert angeregten Mikroscoannerspiegels mit ausreichend hoher zeitlicher Auflösung durchzuführen [122].

In Abbildung 5.17 ist der simulierte und der messtechnisch ermittelte zeitliche Schwingungsverlauf eines Bauelements vom Typ *S30150* (Tabelle 2.1, S. 18) dargestellt. Um die Abweichung von einer idealen Sinus-Schwingung bestimmen zu können, wurden mithilfe einer nichtlinearen Kurvenanpassung die Parameter einer Sinus-Funktion ermittelt, sodass die Quadratsumme der Differenzen zur Messreihe minimal wird (*Sinus-Fit*). Die sich für die Simulationsergebnisse bzw. Messwerte ergebenden absoluten Abweichungen sind ebenfalls in der Darstellung enthalten. Für die Messwerte ist zusätzlich die aus dem Messaufbau resultierende Mess-Unsicherheit für eine halbe Periodendauer aufgetragen.

Es wird deutlich, dass der Verlauf der Simulationsergebnisse gut mit den experimentell ermittelten absoluten Abweichung übereinstimmt. Er verläuft zyklisch in drei Phasen (vgl. dazu Abb. 5.17):

- I Nach dem Nulldurchgang der Schwingung ist die Winkelgeschwindigkeit aufgrund des bis dahin wirksamen Antriebsmoments höher als bei einer ideal sinusförmigen Bewegung. Die Auslenkung eilt dem Sinus-Verlauf folglich voraus, sie wird aber aufgrund des nun fehlenden Antriebsmoments und der nichtlinear wirkenden Dämpfung zunehmend abgebremst.
- II Es folgt ein Abschnitt in dem die Spiegelbewegung dem ideal sinusförmigen Verlauf naheht. Aufgrund des nach dem Umkehrpunkt der Auslenkung wieder einsetzenden



**Abb. 5.17:** Verifikation der Modelle anhand zeitaufgelöster Amplitudenmessungen. Die Messungen wurden an einem Mikros scannerspiegel vom Typ *S30150* ( $f_x = 150$  Hz) durchgeführt (vgl. Tabelle 2.1, S. 18; [122]). Es ist erkennbar, dass die Simulationsergebnisse gut mit der messtechnisch ermittelten Charakteristik übereinstimmen.

Antriebsmoments erhöht sich die Winkelgeschwindigkeit jedoch zunehmend. Die Abweichung wird geringer.

III Das Antriebsmoment ist voll wirksam. Die Auslenkung eilt dem sinusförmigen Verlauf voraus. Es folgt wieder Phase I.

Zumindest für das untersuchte Beispiel bildet das Modell demnach die Wirklichkeit gut ab. Aufgrund der Tatsache, dass alle nichtlinearen Eigenschaften von Mikros scannerspiegeln (also geometrischer Art, dämpfungsbedingt und aufgrund des elektrostatischen Antriebs) in den Modellen enthalten sind, ist das vorliegende Ergebnis ein Hinweis darauf, dass die Effekte mit ausreichender Genauigkeit berücksichtigt werden.

Zusammenfassend können die Ergebnisse der durchgeführten Verifikation der ordnungsreduzierten Modelle als durchweg positiv angesehen werden. Sie sind somit sowohl für statische Untersuchungen (elektromechanische Stabilität, Schwingung bei synchronisierter Anregung), als auch für dynamische Untersuchungen (Schwingung bei parametrischer Anregung, zeitlicher Verlauf der Schwingung) geeignet. Die Modelle können daher beispielsweise genutzt werden, um zeitliche Schwingungsverläufe von Scannerspiegeln zu untersuchen bzw. vorherzusagen. Auch können Optimierungen der Schwingungsamplitude oder Schwingform durch Änderung der Kammanordnung durchgeführt werden. Dies ist besonders interessant für Anwendungen wie Spektroskopie [119, 123] oder Bildprojektion (Abschnitt 2.3.3).

### 5.3.5 Gültigkeitsbedingungen

Es soll an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen werden, dass die in diesem Abschnitt vorgestellten Makromodelle nur unter bestimmten Bedingungen Gültigkeit besit-

zen. Diese ergeben sich aus den Untersuchungen der vorangegangenen Kapitel und aus den Eigenschaften des genutzten Ansatzes zur Ordnungsreduktion:

1. Das zu modellierende Bauelement wird nahe seiner mechanischen Eigenresonanz betrieben (siehe Abschnitt 5.1.3 bzw. Abschnitt 5.3.3).
2. Der Frequenz-Abstand der genutzten Eigenresonanz zur nächsthöheren Eigenschwingung ist ausreichend groß, sodass keine parasitären parametrische Resonanzen auftreten können (siehe Abschnitt 2.3.2 bzw. Abschnitt 5.3.3).
3. Die Fingerelektroden des Antriebs sind ausreichend weit von der Drehachse entfernt angeordnet, sodass keine relevante Verkippung im noch eingeschwenkten Zustand der Elektroden auftritt (siehe Abschnitt 3.3.3 bzw. Abschnitt 3.4.1).
4. Die Bedingungen für die Gültigkeit der NAVIER-STOKES-Gleichungen mit *Slip*-Randbedingungen sind für die gewählte Elektrodengeometrie bzw. die Umgebungsbedingungen erfüllt (siehe Abschnitt 3.3).

Können diese Bedingungen nicht oder nicht vollständig erfüllt werden, sind zusätzliche Untersuchungen erforderlich. Ein Beispiel für eine solche Untersuchung zu einer Erweiterung des *IMtk* kann in [33] gefunden werden.

## 6 Entwurfsprozess

Im folgenden Kapitel werden nun, basierend auf den bereits vorgestellten Erkenntnissen, Betrachtungen zum Entwurfsablauf der *Fraunhofer IPMS* Mikroscooperspiegel durchgeführt. Es wird der sich aus den Anforderungen (Abschnitt 2.3.3), den Randbedingungen (Kapitel 3, Kapitel 4) und den verfügbaren Entwurfswerkzeugen (Kapitel 5) ergebende Entwurfsprozess vorgestellt. Dieser wird anhand eines konkreten Entwurfsbeispiels veranschaulicht. Die sich für das realisierte Beispiel ergebenden, experimentell ermittelten Eigenschaften werden anschließend den Simulationsergebnissen gegenübergestellt und diskutiert.

### 6.1 Strategie des Bauelemententwurfs

Wie bereits in [5] beschrieben wurde, ist der *MEMS*-Entwurf typischerweise durch ein iteratives Vorgehen gekennzeichnet. Iterativ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass ein geradliniger Entwurfsprozess (idealer *top-down*-Entwurf), ausgehend von der Anforderungsbeschreibung bis zur Prototypenfertigung nicht möglich ist. Stattdessen werden einzelne Entwurfsphasen mehrfach durchlaufen; dabei werden auf Basis der sich aus den Modellen der höheren Abstraktionsebenen (Bauelement-Ebene, System-Ebene; vgl. Abb. 1.1 auf S. 2) ergebenden Simulationsergebnisse einzelne Komponenten des Bauelements angepasst. Die Rückführung von Ergebnissen höherer Abstraktionsebenen bzw. experimenteller Untersuchungen in den Komponentenentwurf wird auch als *bottom-up*-Strategie bezeichnet.

Der sich für den Entwurf von Mikroscooperspiegeln ergebende Entwurfsprozess ist schematisch in Abb. 6.1 dargestellt. Er kann als Kombination aus *top-down*- und *bottom-up*-Strategie angesehen werden. Dies wird auch als *meet-in-the-middle*-Strategie bezeichnet [5]. Der Prozess besteht aus sieben Entwurfsschritten:

1. In der *Vorauslegung* wird ein erster Entwurfspunkt gewählt. Dabei werden die an das Bauelement gestellten Anforderungen und die sich aus der Herstellungstechnologie (Abschnitt 2.1) ergebenden Randbedingungen berücksichtigt. Grundlage der Untersuchungen sind in erster Linie analytische Modelle (Kapitel 3). Das Ergebnis der Vorauslegung sind die Geometrieparameter eines Mikroscooperspiegels.
2. Im nächsten Schritt wird eine *Eigenwertanalyse* (Abschnitt 3.2.4) durchgeführt. Dazu muss ein strukturmechanisches *FE*-Modell (Abschnitt 5.1.2) unter Berücksichtigung der gewählten Geometrieparameter erstellt werden. Das Ergebnis sind die Eigenfrequenzen bzw. Eigenvektoren (Eigenformen) der Struktur.
3. Mithilfe von Testlasten in Richtung der modalen Auslenkungen der Struktur werden *statische nichtlineare Analysen* durchgeführt. Es ergeben sich die nichtlinearen Eigenschaften des Systems. Die aus diesem Schritt resultierenden diskreten Kennlinien werden in Wertetabellen (*Look-up-tables*) hinterlegt. Dieser Schritt entspricht im Wesentlichen dem *Generation Pass* des genutzten Ordnungsreduktionsverfahrens (Abschnitt 5.3.3). Zusätzlich können bei Bedarf die innerhalb des Bauelements auftretenden mechanischen Spannungen bei Nennauslenkung bzw. bei Schockbelastung (Abschnitt 3.2.3) bestimmt werden.
4. Die Ergebnisse der Eigenwertanalyse bilden zusätzlich den Ausgangspunkt einer *Deformationsanalyse*. Dabei wird die dynamische Deformation der Spiegelplatte

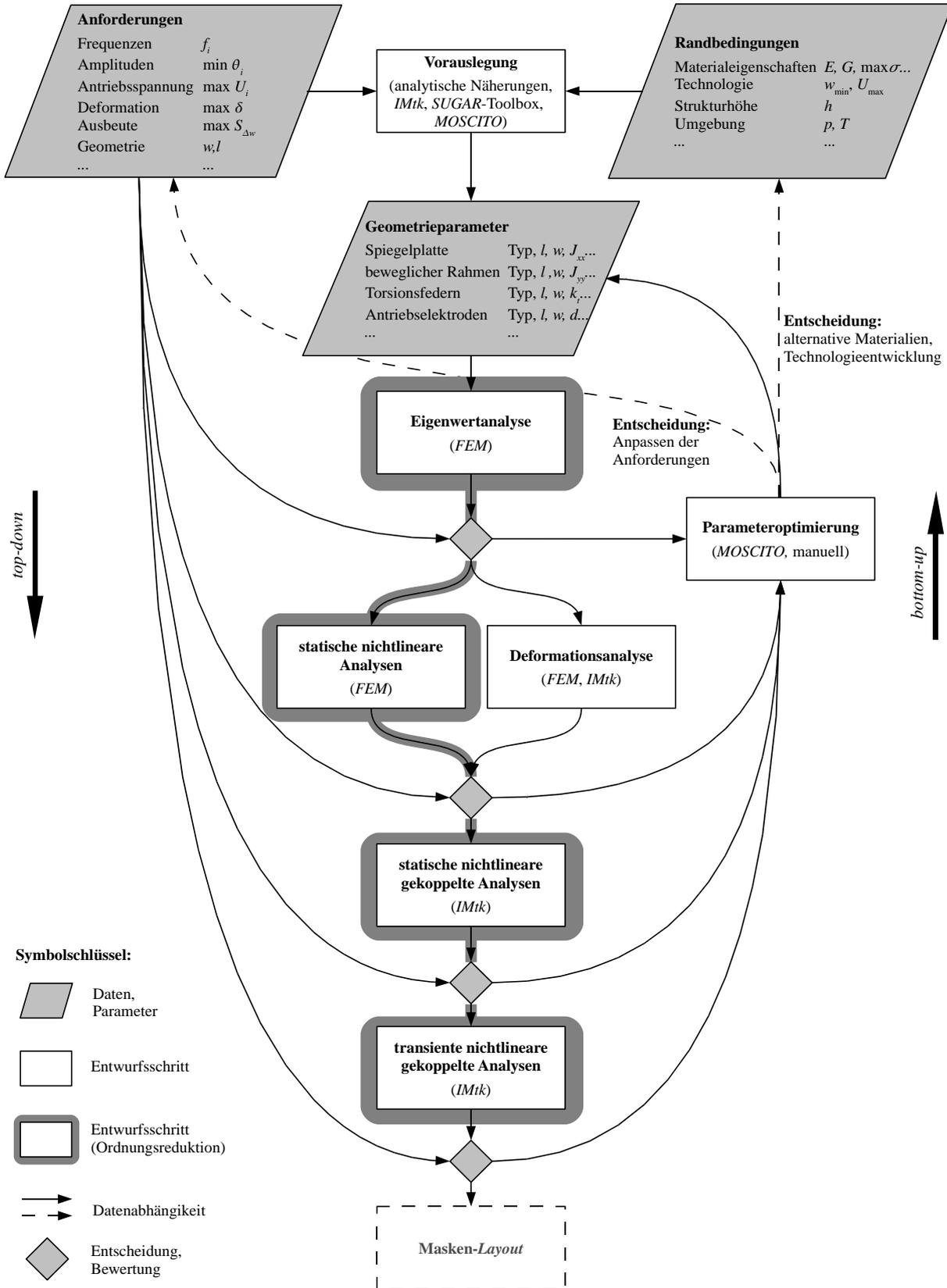


Abb. 6.1: Entwurfsprozess für Fraunhofer IPMS Mikroscoannerspiegel. Es handelt sich um eine Kombination aus top-down- und bottom-up-Strategie (meet-in-the-middle-Strategie).

bei Nennauslenkung mithilfe eines der in Abschnitt 3.2.6 vorgestellten Verfahren ermittelt.

5. Mithilfe von *statischen nichtlinearen gekoppelten Analysen* können im nächsten Schritt die statischen Eigenschaften eines dem jeweiligen Entwurfspunkt entsprechenden Bauelements untersucht werden. Dazu gehört das Verhalten bei synchronisierter Anregung (Abschnitt 2.3.1), die Stabilitätseigenschaften des dynamischen Systems (Kapitel 4) und die elektromechanische Stabilität (Abschnitt 3.4.4). Dazu kann die innerhalb des *IMtk* zur Verfügung gestellte Funktionalität genutzt werden (Methoden `closed_loop_equilibrium()`, `stability_regions()`, `stability_voltage()`; Anhang F.5).
6. Anhand von *dynamischen nichtlinearen gekoppelten Analysen* wird das zu erwartende zeitabhängige Verhalten der Bauelemente untersucht. Dabei können beispielsweise Frequenz-Antwortkurven simuliert und somit die Bandbreite des Arbeitspunktes bestimmt werden (Abschnitte F.5 bzw. 5.3.3).
7. Zwischen den einzelnen Schritten werden die Eigenschaften des Entwurfspunkts bewertet. Können die Anforderungen nicht erfüllt werden, wird eine *Parameteroptimierung* durchgeführt. Dies entspricht einer Iteration innerhalb des Entwurfsprozesses. Die Variation bzw. Korrektur der Parameter kann dabei manuell oder automatisiert erfolgen. Ein Beispiel für ein Werkzeug, welches für die automatisierte Parameteroptimierung genutzt werden kann, ist die in Abschnitt 5.2.1 vorgestellte *MOSCITO* Optimierungsumgebung.

Können die gestellten Anforderungen trotz mehrfacher Iteration nicht erfüllt werden, muss eine Änderung der Anforderungen in Betracht gezogen werden. Ist dies nicht möglich oder sinnvoll, kann die Möglichkeit einer Modifikation der Herstellungstechnologie geprüft werden. Dabei erhöht sich im Allgemeinen die Anzahl der Entwurfsfreiheitsgrade bzw. erweitert sich der nutzbare Parameterraum. Ist ein solcher Schritt nicht möglich oder führt er nicht zur Erfüllung der Anforderungen, muss der Entwurfsprozess ergebnislos abgebrochen werden.

Ist ein Entwurfspunkt gefunden, mit dem alle gestellten Anforderungen erfüllt werden, kann der Entwurfsprozess erfolgreich beendet werden. Die Schnittstelle zum Herstellungsprozess bildet dann das Erstellen des sogenannten Masken-*Layouts*. Es definiert die zur Herstellung benötigten fotolithografischen Masken (Abschnitt 2.1).

## 6.2 Entwurfsbeispiel

Im folgenden Abschnitt wird der vorgestellte Entwurfsprozess anhand eines konkreten Beispiels veranschaulicht. Der dazu genutzte 2D-Mikroscannerspiegel soll bei vergleichsweise großer Spiegelplatte und Auslenkung sowie einer hohen Schwingfrequenz eine geringe dynamische Deformation aufweisen. Der bewegliche Rahmen soll eine geringere Schwingfrequenz aufweisen. Entsprechend Abschnitt 2.3.3 ist ein derartiger Mikroscannerspiegel beispielsweise geeignet um einen miniaturisierten Laser-Projektor mit mittlerer Bildauflösung zu realisieren.

### 6.2.1 Anforderungen und Randbedingungen

Die Anforderungen an das Bauelement ergeben sich aus der Anwendung als Ablenkvorrichtung in einem Laser-Projektor mit einer Bildauflösung entsprechend dem VGA-Standard

**Tabelle 6.1:** Anforderungen an einen 2D-Mikroscannerspiegel (Entwurfsbeispiel).

Spiegelachse	$f_i/\text{kHz}$	$f_x/f_y$	$\hat{\theta}_i/^\circ$	$D/\text{mm}$	rms $\delta/\text{nm}$	$\sigma_1/\text{GPa}$	$\hat{U}_i/\text{V}$
$i = x$	$17.5 \pm 0.8$	6.731	$7.8 + 0.4$	$\geq 1.0$	$\leq 30$	$\leq 1.0$	$\leq 140$
$i = y$	$2.6 \pm 0.1$		$10.4 + 0.6$	-	-		

(Tabelle 2.3 auf S. 29). Dabei soll vor allem auf eine vergleichsweise große optische Apertur  $D$  Wert gelegt werden. Sie soll 1 mm nicht unterschreiten. Auf diese Weise können die Anforderungen an die Optik und Justagegenauigkeit des Projektionssystems auf ein vernünftiges Maß reduziert werden. Entsprechend der Anforderung an  $\theta D$  (Abschnitt 2.3.3) ergeben sich daraus die Bedingungen bezüglich der Mindestamplituden des Scanners. Diese und die weiteren beim Entwurf zu beachtenden Anforderungen bzw. Randbedingungen sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Der Entwurf soll zunächst für eine Strukturhöhe von  $30 \mu\text{m}$  durchgeführt werden. Können die Anforderungen nicht erfüllt werden, besteht jedoch die Möglichkeit diesen Parameter anzupassen.

Die Orientierung der Strukturen im Einkristall wird so gewählt, dass die Längsachsen der Torsionfedern in den  $\langle 110 \rangle$ -Richtungen des Silizium-Einkristalls liegen. Auf diese Weise wird das Verhältnis von Biege- und Torsionssteifigkeit maximal (Abschnitt 3.2.1), wodurch die elektromechanische Stabilität des Bauelements erhöht wird.

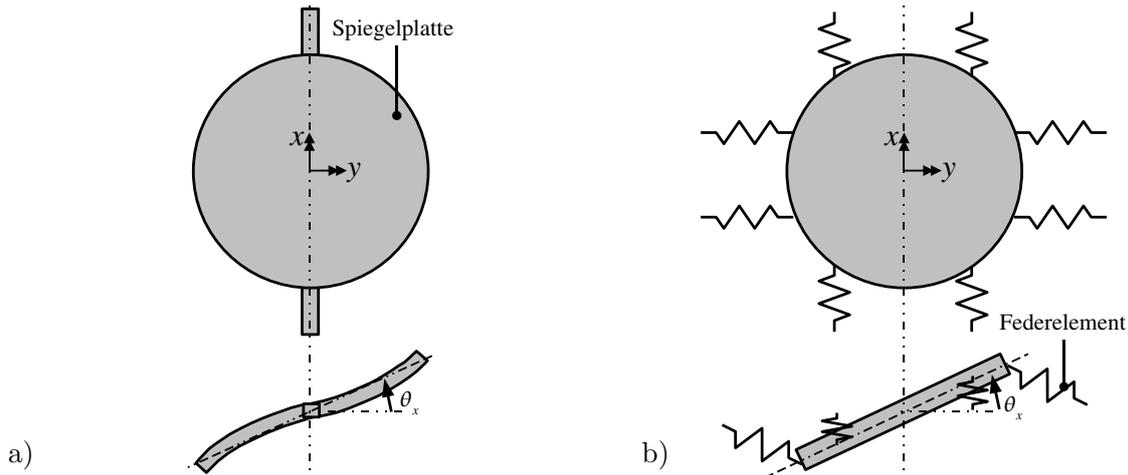
## 6.2.2 Vorauslegung

Im ersten Schritt wird ein Startpunkt für den iterativen Entwurf gewählt. Dabei werden die in Kapitel 3 vorgestellten Zusammenhänge genutzt. Ausgangspunkt ist die Spiegelplatte bzw. deren Aufhängung. Erst wenn deren Größe und Form bekannt sind, kann der bewegliche Rahmen ausgelegt werden.

### Spiegelplatte

Um die erforderliche, vergleichsweise hohe Eigenresonanzfrequenz von ca. 17.5 kHz erreichen zu können, wird eine Spiegelplatte mit möglichst geringem Massenträgheitsmoment  $J_{xx}$  benötigt. Aus diesem Grund wird eine runde Form für die Spiegelplatte gewählt. Entsprechend den in Tabelle 3.3 vorgestellten Zusammenhängen ist außerdem für runde Spiegelplatten mit einer geringeren dynamischen Deformation zu rechnen. Mithilfe von Gl. (3.82) kann die zu erwartende Deformation ermittelt werden. Es ergibt sich ein Wert von 115.4 nm für den quadratischen Mittelwert der dynamischen Deformation rms  $\delta$  bei einer Maximalauslenkung von  $7.8^\circ$ .

Um bei einer Strukturhöhe von  $30 \mu\text{m}$  die geforderte Ebenheit der Spiegelplatte erreichen zu können, stehen verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl. Zum Einen kann die oszillierende Platte durch zusätzliche Strukturen auf der Rückseite verstärkt werden, sodass die Steifigkeit der Platte erhöht wird [124]. Eine weitere Möglichkeit zur Verringerung der dynamischen Deformation wurde bereits in [125] vorgestellt. Sie basiert auf der Idee, die Aufhängung der Spiegelplatte so zu optimieren, dass die rückstellenden mechanischen Momente zu einer möglichst geringen Deformation der Platte führen. Dazu werden jedoch mehr Entwurfsfreiheitsgrade benötigt als von der aus Torsionfedern bestehenden Plattenaufhängung bereitgestellt werden. Infolgedessen muss die Gesamtfederhärte  $k_{t,x}$



**Abb. 6.2:** Verteilte Federn zur Reduzierung der dynamischen Deformation. a) Aufhängung der Spiegelplatte mittels Torsionsfedern (Abschnitt 3.2.6); b) Aufhängung der Spiegelplatte mittels verteilter Federn.

durch mehrere *verteilte Federelemente* zusammengesetzt werden. Abbildung 6.2 verdeutlicht dieses Prinzip.

Geht man davon aus, dass eine aus acht verteilten Federn bestehende Aufhängung doppelt symmetrisch, also immer jeweils vier Federelemente gleich ausgeführt werden, ergibt sich ein Entwurfsproblem mit vier Freiheitsgraden  $\{r_1, k_{z,1}, r_2, k_{z,2}\}$ . Dabei legen die Parameter  $r_i$  den Ort des Angriffspunkts an der Spiegelplatte fest;  $k_{z,i}$  ist die jeweilige Federhärte der Federelemente in Auslenkungsrichtung. Definiert man den Federort entsprechend Abb. 6.3a als Bogenlänge entlang des Plattenrands mit  $r_i \in [0, 1]$ , ergibt sich die effektive Torsionsfederhärte der gesamten Anordnung wie folgt:

$$k_{t,\text{eff}} = 4(k_{z,1} R_1^2 + k_{z,2} R_2^2) \quad \text{mit} \quad R_i = \frac{D}{2} \cos \frac{r_i \pi}{2} \quad (6.1)$$

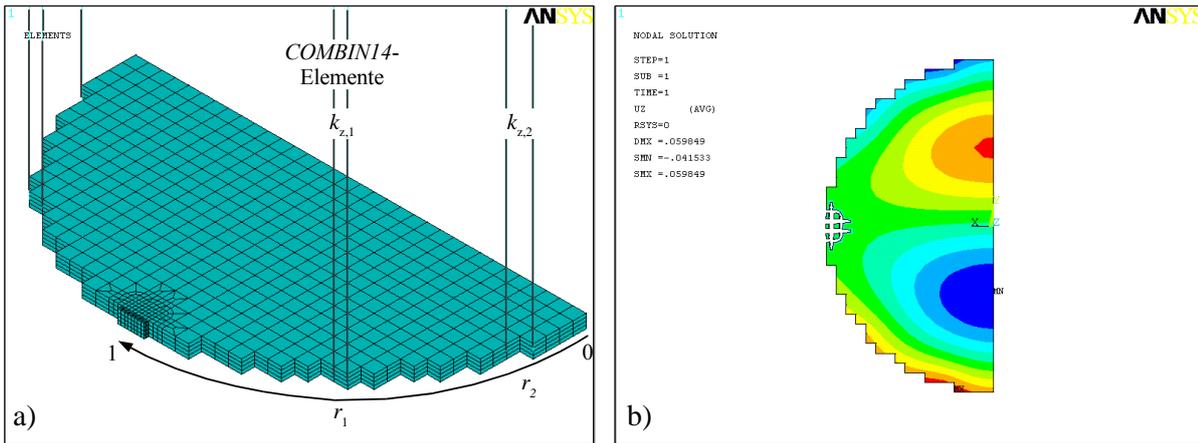
Sind die Eigenresonanzfrequenz und die Geometrie der Platte bzw. deren Massenträgheitsmoment bekannt, kann mithilfe des Zusammenhangs (2.14) ein Entwurfswahlfreiheitsgrad eliminiert werden. So ergibt sich dann beispielsweise eine der Federhärten aus den verbleibenden Parametern:

$$k_{z,2} = \frac{1}{R_2^2} (\pi^2 f_x^2 J_{xx} - k_{z,1} R_1^2) \quad (6.2)$$

Die verbleibenden Freiheitsgrade  $\{r_1, k_{z,1}, r_2\}$  können nun zur Minimierung der dynamischen Deformation genutzt werden.

Grundlage für die Optimierung ist ein stark vereinfachtes, parametrisiertes *FE*-Modell der halben Spiegelplatte (Abb. 6.3a). Es besteht aus einem vergleichsweise einfachen, jedoch sehr regelmäßigen *FE*-Netz mit Symmetrie-Randbedingungen. Dies hat den Vorteil, dass die für eine Optimierung benötigten Iterationen schneller ausgeführt werden. Außerdem ist auf diese Weise sichergestellt, dass Einflüsse des Netzes auf die Abweichung der Lösung für jede Iteration in der gleichen Größenordnung liegen (siehe auch Abschnitt 5.1.4).

Die verteilten Federn werden in der Vorauslegung mithilfe idealisierter HOOKEscher Federn nachgebildet. Dabei kommen *ANSYS*<sup>®</sup>-Elemente des Typs *COMBIN14* [63] zum Einsatz. Sie werden am Plattenrand paarweise so angeordnet, dass jeweils zwei dieser Elemente eine verteilte Feder  $\{r_i, k_{z,i}\}$  nachbilden (Abb. 6.3a).



**Abb. 6.3:** Vorauslegung von verteilten Federn mit ANSYS® und MOSCITO. a) Vereinfachtes FE-Modell zur Optimierung der dynamischen Deformation. Die Freiheitsgrade für die Optimierung ergeben sich aus dem Ort  $r_i$  und der Härte  $k_{z,i}$  der zum Einsatz kommenden COMBIN14-Elemente [63]. b) Beispiel für ein Zwischenergebnis der Optimierung. Dargestellt ist der Verlauf der dynamischen Oberflächen deformation.

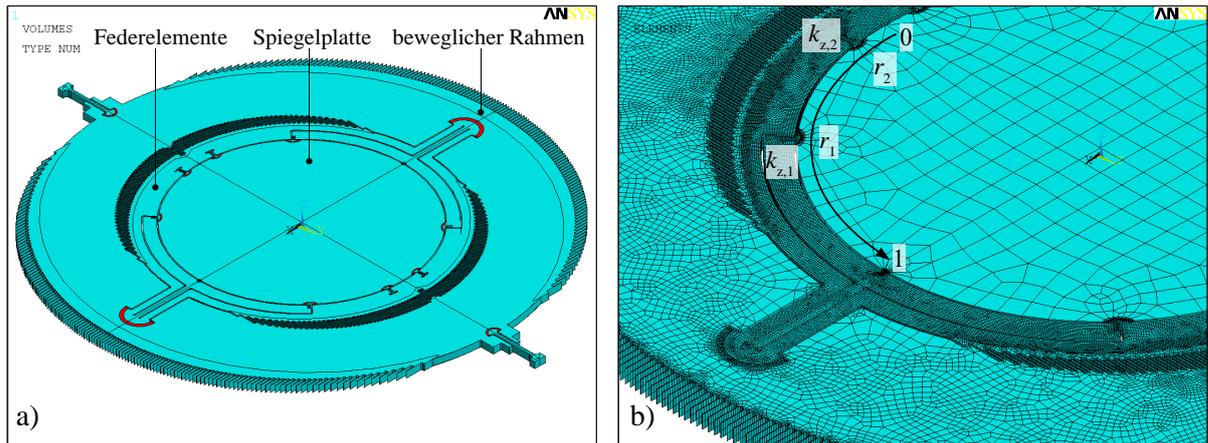
Die eigentliche Optimierung der dynamischen Deformation wird mithilfe der MOSCITO-Umgebung (Abschnitt 5.2.1) durchgeführt. Dazu wird die dynamische Deformation der Platte bei der gewünschten Auslenkung entsprechend den in Abschnitt 3.2.6 vorgestellten Zusammenhängen bestimmt (Abb. 6.3b) und mithilfe einer geeigneten Zielfunktion minimiert. Das Ergebnis eines Optimierungsdurchlaufs ist dann ein Parametersatz  $\{r_1, k_{z,1}, r_2, k_{z,2}\}$ , für den sich bei der gewünschten Eigenresonanzfrequenz des Scannerspiegels eine minimale dynamische Deformation ergibt.

Im konkreten Beispiel ergibt sich für den optimierten Entwurfspunkt einer Spiegelplatte mit verteilten Federn ein quadratischer Mittelwert der dynamischen Deformation von 20 nm. Dies entspricht einer Verringerung um ca. 80 % im Vergleich zu der an geraden Torsionsfedern aufgehängten Spiegelplatte.

### Beweglicher Rahmen

Nachdem ein Konzept zur Realisierung der Spiegelplatte bzw. deren Aufhängung gefunden ist, kann die Geometrie des beweglichen Rahmens festgelegt werden. Kommt das in [125] vorgestellte Konzept zur Realisierung der verteilten Federelemente zum Einsatz, ergibt sich ein zusätzlicher Platzbedarf von 100–200  $\mu\text{m}$ . Für die zur Potentialtrennung benötigten, gefüllten Isolationsgräben innerhalb des beweglichen Rahmens (Abschnitt 2.1) muss erfahrungsgemäß ein Platzbedarf von ca. 200  $\mu\text{m}$  veranschlagt werden. Es ergibt sich also ausgehend vom Rand der Spiegelplatte ein Radius von ca. 400  $\mu\text{m}$ , der die Mindestabmessung des beweglichen Rahmens definiert. Aufgrund der Tatsache, dass die geforderte Schwingfrequenz von 2.6 kHz immer noch vergleichsweise hoch ist, erscheint für den beweglichen Rahmen ebenfalls eine elliptische Form als sinnvoll. Als Entwurfspunkt werden die Maße  $w = l = 1900 \mu\text{m}$  gewählt.

Für die Aufhängung des beweglichen Rahmens werden als Ausgangspunkt gerade Torsionsfedern gewählt. Unter Beachtung der geforderten Schwingfrequenz bzw. der sich daraus ergebenden Federhärte (Abschnitte 2.3.1, 3.2.1) und der mechanischen Spannungen im Betrieb und bei Schockbelastung (Abschnitt 3.2.3) kann die Feder dimensioniert werden. Dabei sollte die Federlänge möglichst gering gehalten werden, sodass die laterale



**Abb. 6.4:** Strukturmechanisches *FE*-Modell eines 2D-Scannerspiegels mit verteilten Federn. a) Volumendarstellung des detaillierten *FE*-Modells; b) Konkrete Umsetzung der verteilten Federn entsprechend Abschnitt 6.2.2 (Elementdarstellung, 3D-*FE*-Netz).

Steifigkeit der Aufhängung und damit die elektromechanische Stabilität des beweglichen Rahmens maximiert wird (Abschnitt 3.4.4, Anhang F.5 bzw. `find_flexure()`). Es gelten die in Tabelle F.6 auf S. 240 dargestellten Zusammenhänge. Für die Aufhängung des beweglichen Rahmens ergibt sich ein günstiger Entwurfsunkt bei  $w = 13 \mu\text{m}$  und  $l = 200.9 \mu\text{m}$ .

### 6.2.3 Eigenwertanalyse

Im nächsten Schritt wird ein strukturmechanisches *FE*-Modell des ermittelten Entwurfspunkts erstellt. Dabei können je nach Anforderung an die Genauigkeit geometrische Details wie Kammelektroden oder Stopper vernachlässigt werden. Bei Bedarf kann mithilfe des *IMtk* der jeweilige Einfluss auf die Massenträgheit und damit auf die zu erwartende Größenordnung der durch eine Vereinfachung verursachten Abweichungen (z.B. der Resonanzfrequenz) untersucht werden.

Für das in diesem Abschnitt behandelte Entwurfsbeispiel wird ein *FE*-Modell mit allen Details – also mit Kammelektroden und Stoppern – erstellt. Prinzipiell können diese im vorliegenden Fall auch vernachlässigt werden. Die dadurch auftretenden Abweichungen der Eigenresonanzfrequenzen liegen in einer Größenordnung von lediglich 1% (vgl. dazu Tabelle 6.1).

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, werden die verteilten Federn mithilfe des in [125] vorgestellten Konzepts realisiert. Dabei werden die außerhalb der Torsionsachse angreifenden Federelemente anhand geeigneter, biegesteifer Hebelstrukturen auf Torsionsfedern abgebildet<sup>27</sup> (Abb. 6.4a). Dieses Konzept weist eine Reihe von Vorteilen im Vergleich zu anderen Ansätzen auf:

- Große Auslenkungen am Angriffspunkt der Federelemente werden mithilfe der Hebelstrukturen auf vergleichsweise geringe Dehnungen abgebildet. Es können daher große Schwingungsamplituden bei akzeptablen mechanischen Spannungen erreicht werden.

<sup>27</sup>Die außen liegenden Deformationskörper (Abb. 6.4) werden aufgrund der Tatsache, dass sie außerhalb der Drehachse angeordnet sind auch auf Biegung beansprucht. Die Torsionsbeanspruchung überwiegt jedoch deutlich.

- Der Platzbedarf der Federstrukturen ist im Vergleich zu Biegefedern (Mäanderstrukturen, [5]) gering.
- Aufgrund der Realisierung der Deformationskörper als Torsionselemente sind die auftretenden geometrischen Nichtlinearitäten vergleichsweise gering. Bei Bedarf können die in Abschnitt 4.2.3 vorgestellten Möglichkeiten zur Realisierung von degressiven bzw. linearisierten Federn integriert werden.

Anhand der Ergebnisse von Eigenwertanalysen werden die Eigenfrequenzen der Geometrie manuell optimiert, sodass die genutzten Eigenformen (Rotation um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse) nahe der gewünschten Frequenzen liegen. Außerdem muss durch geeignete konstruktive Maßnahmen sichergestellt werden, dass kritische parasitäre Eigenfrequenzen ausreichend weit von den genutzten Resonanzen entfernt liegen (modale Trennung). Als zusätzliche Nebenbedingung müssen die Ergebnisse der in der Vorauslegung durchgeführten Optimierung berücksichtigt werden, welche die Angriffspunkte und Härten der verteilten Federn festlegen.

Zur Beeinflussung der modalen Trennung kann neben der Aufhängung (Federlängen und -breiten) auch die Geometrie der Spiegelplatte bzw. des beweglichen Rahmens variiert werden. Dabei wird die Tatsache genutzt, dass die Masse  $m$  und Massenträgheit  $J_{x'x'}$  in unterschiedlicher Weise von der Geometrie des Schwingkörpers abhängig sind. Dies soll am Beispiel der Breite einer elliptischen Platte  $w$  verdeutlicht werden:

$$m = \frac{\pi}{4} \rho_m l w h \quad \text{bzw.} \quad J_{x'x'} = \frac{\pi}{192} \rho_m l w h (3 w^2 + 4 h^2) \quad (6.3)$$

Unter der Annahme, dass  $f_i$  die Eigenfrequenz einer beliebigen Translationsschwingung und  $f_j$  die Eigenfrequenz der Torsionsschwingung um die  $x'$ -Achse der Platte entspricht, gilt aufgrund

$$m \sim w \quad \text{bzw.} \quad J_{x'x'} \sim w^3 \quad \text{folgendes:} \quad f_i \sim \sqrt{w} \quad \text{bzw.} \quad f_j \sim w^{3/2} \quad (6.4)$$

Durch Änderung der Breite  $w$  einer elliptischen Spiegelplatte kann also der relative Frequenzabstand zwischen genutzten und parasitären Eigenresonanzen beeinflusst werden. Ähnliches gilt für andere geometrische Parameter wie die Länge  $l$  und bezüglich der Wahl der Grundform des Schwingkörpers (elliptisch, rechteckförmig).

Das Ergebnis der Eigenwertanalysen bzw. der darauf basierenden Optimierungen ist in Anhang C.3 dargestellt. Die dazugehörigen Eigenfrequenzen sind in Tabelle 6.2 enthalten.

Es wird deutlich, dass die geforderten Schwingfrequenzen der Spiegelplatte bzw. des beweglichen Rahmens problemlos realisiert werden können. Die sich für das in Abb. 6.4 dargestellte Modell ergebenden, für die Eigenschaften des Bauelements relevanten parasitären Resonanzen ( $f_2, f_{4,5}$ , Anhang C.3, Tabelle 6.2) liegen ausreichend weit von den Arbeitspunkten  $f_1$  und  $f_3$  entfernt.

#### 6.2.4 Statische nichtlineare Analysen

Mit dem im vorangegangenen Schritt erstellten  $FE$ -Modell des 2D-Mikroscannerspiegels können nun die Charakteristika der Torsionsfedern bzw. die mechanischen Spannungen untersucht werden. Dazu werden statische Analysen mit geeigneten Testlasten durchgeführt.

**Tabelle 6.2:** *Eigenfrequenzen eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel).* Alle weiteren Eigenfrequenzen ( $f_i$  mit  $i > 6$ ) liegen jenseits des zweieinhalbfachen der Schwingfrequenz der Spiegelplatte  $f_3$  und müssen daher beim Entwurf nicht berücksichtigt werden (Abschnitt 5.3.3).

$i$	$f_i$ /kHz	Eigenform	Bemerkung
<b><math>f_1</math></b>	<b>2.6</b>	Rotation um $y$ -Achse	Auslenkung des beweglichen Rahmens
$f_2$	11.0	Translation in $z$ -Richtung	kritisch bzgl. Antrieb des bewgl. Rahmens
<b><math>f_3</math></b>	<b>17.5</b>	Rotation um $x$ -Achse	Auslenkung der Spiegelplatte
$f_4$	20.0	Translation in $x$ -Richtung	kritisch bzgl. Antrieb des bewgl. Rahmens
$f_5$	30.8	Rotation um $z$ -Achse	kritisch bzgl. Antrieb des bewgl. Rahmens
$f_6$	45.2	Verwölbung	unkritisch

**Federcharakteristika und mechanische Spannungen bei Auslenkung** können mithilfe einer Winkelbeschleunigung  $\vec{\alpha}$  als Testlast bestimmt werden. Diese wird in Richtung der Torsionsachsen definiert, sodass die Auslenkung der Spiegelplatte bzw. des beweglichen Rahmens in Richtung der jeweils untersuchten Eigenform erfolgt. Anhand mehrerer statischer Analysen mit variierten Werten der Winkelbeschleunigung können diskrete Kennlinienverläufe (Federcharakteristika) ermittelt werden. Es gilt:

$$\vec{M}_{t,i} = \mathbf{J} \cdot \vec{\alpha}_i \quad (6.5)$$

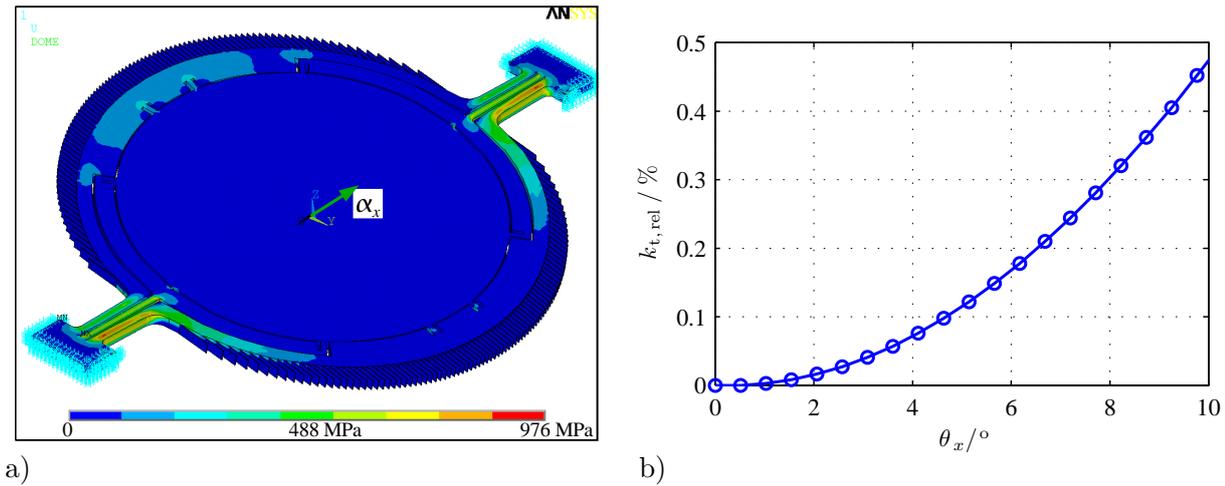
Dabei ist  $\vec{M}_{t,i}$  das für den  $i$ -ten Wert der diskreten Kennlinie gültige Torsionsmoment. Die sich aus den statischen  $FE$ -Analysen ergebenden, dazugehörigen Auslenkungen  $\vec{\theta}_i$  entsprechen den dazugehörigen Winkeln der Kennlinie. Die auslenkungsabhängige Federhärte kann dann näherungsweise durch den folgenden Differenzenquotienten beschrieben werden:

$$k_{t,i} = \left. \frac{d|\vec{M}_t|}{d|\vec{\theta}|} \right|_{\vec{\theta}=\vec{\theta}_i} \approx \frac{|\vec{M}_{t,i}| - |\vec{M}_{t,i-1}|}{|\vec{\theta}_i| - |\vec{\theta}_{i-1}|} \quad (6.6)$$

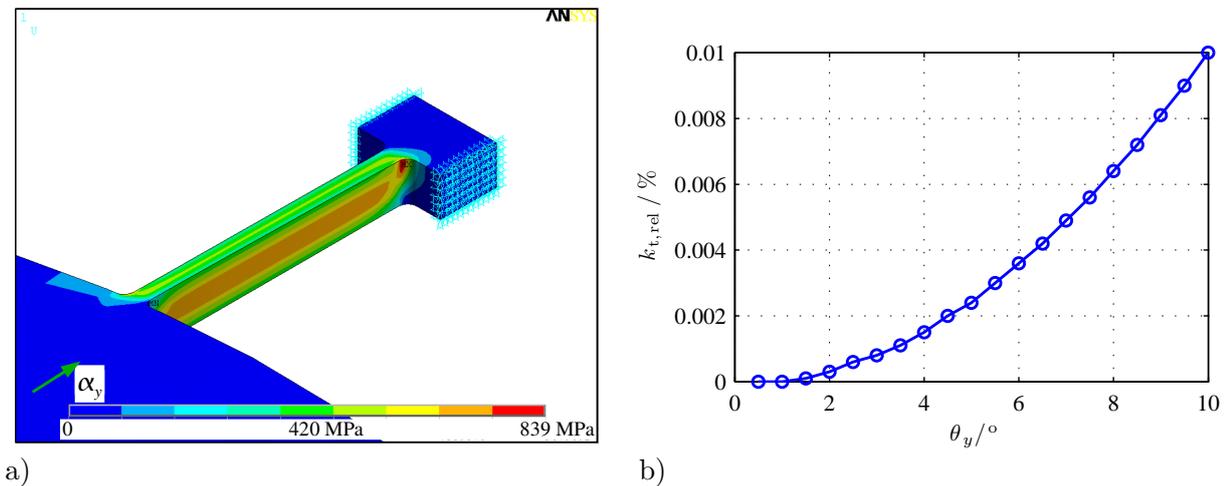
Der Maximalwert der Winkelbeschleunigung sollte so gewählt werden, dass die resultierende Auslenkung den gestellten Anforderungen entspricht. Geht man davon aus, dass sich die Federhärte mit zunehmender Auslenkung nicht übermäßig stark ändert, können zur Bestimmung der Größenordnung die folgenden, sich aus der linearen Bewegungsgleichung (2.12) ergebenden Zusammenhänge genutzt werden:

$$\max \alpha_x = 4\pi^2 f_x^2 \hat{\theta}_x \quad \text{bzw.} \quad \max \alpha_y = 4\pi^2 f_y^2 \hat{\theta}_y \quad (6.7)$$

Anhand der durchgeführten statischen Analysen können gleichzeitig die innerhalb der Geometrie auftretenden mechanischen Spannungen in Abhängigkeit von der jeweiligen Auslenkung untersucht werden. Überschreiten die Werte der maximalen Hauptnormalspannung (Abschnitt 3.2.3) die maximal zulässigen Spannungswerte, müssen geeignete Entwurfsmaßnahmen getroffen werden. Dazu können im ersten Schritt Rundungen oder Entlastungsstrukturen [126] eingebracht werden. Ist dies nicht ausreichend, muss unter Umständen der Entwurfsprozess für einen entsprechend angepassten Entwurfspunkt wiederholt werden (vgl. dazu Abb. 6.1).



**Abb. 6.5:** *Statische FE-Analyse der Spiegelplatte (Entwurfsbeispiel).* a) Verlauf der mechanischen Hauptnormalspannung bei  $\theta_x = 10^\circ$ ; b) Verlauf der relativen Federhärte in Abhängigkeit von der Auslenkung  $\theta_x$ .



**Abb. 6.6:** *Statische FE-Analyse des beweglichen Rahmens (Entwurfsbeispiel).* a) Verlauf der mechanischen Hauptnormalspannung bei  $\theta_y = 11^\circ$ ; b) Verlauf der relativen Federhärte in Abhängigkeit von der Auslenkung  $\theta_y$ .

Die sich für das Entwurfsbeispiel ergebenden Federcharakteristika und Spannungsverläufe sind in den Abbildungen 6.5 und 6.6 dargestellt. Um die Entwurfsrandbedingung  $\max \sigma_1 < 1 \text{ GPa}$  (Tabelle 6.1) erfüllen zu können, müssen dabei einige Radien innerhalb der Geometrie der verteilten Federn vergrößert werden. Die Aufhängung des beweglichen Rahmens stellt erwartungsgemäß kein Problem dar. Hier wurden die mechanischen Spannungen bereits bei der Vorauslegung berücksichtigt (Abschnitt 6.2.2).

Die Federcharakteristik der Spiegelplatte verläuft leicht progressiv. Diese Eigenschaft lässt sich allerdings nicht für Aufhängungen dieser Art verallgemeinern. Für variierte Parameter (Breiten und Längen der Torsionselemente bzw. Hebelstrukturen) können durchaus auch degressive Charakteristika oder Mischformen (abschnittsweise degressiv oder progressiv) auftreten.

Die Aufhängung des beweglichen Rahmens zeigt ein nahezu ideal lineares Verhalten. Mit einer relativen Änderung der Federhärte bei Nennauslenkung von nur einem hundertstel Prozent gilt in guter Näherung  $k_t = \text{const.}$

Anhand von ähnlichen Analysen kann die mechanische Kopplung zwischen der Spiegelplatte und dem beweglichen Rahmen bestimmt werden. Dazu werden die Federkennlinien der Spiegelaufhängung mehrfach, für unterschiedliche Auslenkungen des beweglichen Rahmens berechnet. Anhand des sich ergebenden Kennlinienfeldes kann dann die für die Berücksichtigung der mechanischen Kopplung benötigte Matrix  $\mathbf{M}_{\text{cross}}$  (Anhang F.5) bestimmt werden. Aufgrund der Tatsache, dass im vorliegenden Beispiel die genutzten Schwingfrequenzen vergleichsweise weit voneinander entfernt liegen ( $f_x \gg f_y$ ) können Effekte die aus der mechanischen Kopplung resultieren vernachlässigt werden. Es wird daher auf die aufwändige Bestimmung der Koppelmatrix verzichtet. Dementsprechend gilt  $\mathbf{M}_{\text{cross}} = 0$ .

**Mechanische Spannungen bei Schockbelastung** können mithilfe einer Beschleunigung  $\vec{a}$  als Testlast untersucht werden. Geht man davon aus, dass aufgrund von Stopperstrukturen ausschließlich relevante Auslenkungen in  $z$ -Richtung zur Zerstörung der Bauelemente führen können (Abschnitt 3.2.3), beschränkt sich der Aufwand auf eine statische Analyse mit einer Testlast

$$a_z = \xi g \tag{6.8}$$

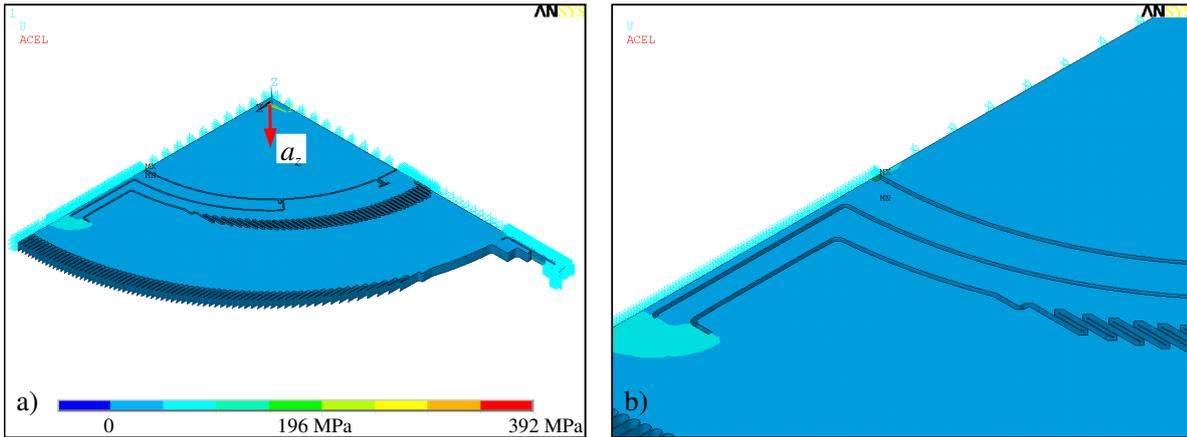
Dabei ist  $g$  die Schwerebeschleunigung der Erde;  $\xi$  ist ein empirischer Faktor, der sich aus den Anforderungen an das Bauelement oder aus den Fertigungsbedingungen (Handling der Wafer bzw. Bauelemente während des Herstellungsprozess) ergibt. Für den Entwurf von Mikroscooperspiegeln am *Fraunhofer IPMS* gilt  $\xi = 2500$ .

Es ist zu beachten, dass in der genutzten statischen Analyse keine dynamischen Vorgänge beim Auftreten eines mechanischen Schocks berücksichtigt werden können. Aufgrund von Überschwing-Effekten können daher bei vergleichbaren Beschleunigungen durchaus höhere mechanische Belastungen im Bauelement auftreten. Dies muss im Zweifelsfall anhand dynamischer Analysen untersucht werden. Dabei kann auch ein bestimmter Verlauf bzw. eine bestimmte Dauer der Schockbelastung berücksichtigt werden. Desweiteren sind auch Analysen unter Berücksichtigung mehrachsiger Lasten denkbar. So kann eine Winkelbeschleunigung entsprechend Gl. (6.7) mit einer statischen oder dynamischen Beschleunigung  $a_z$  kombiniert werden. Auf diese Weise können die mechanischen Spannungen während einer Schockbelastung im Betrieb untersucht werden.

Im vorliegenden Beispiel stellt die Schockfestigkeit des Bauelements erwartungsgemäß kein Problem dar. Eine Beschleunigung von  $2500g$  in  $z$ -Richtung resultiert in einer maximalen Hauptnormalspannung von weniger als  $400 \text{ GPa}$ . Abbildung 6.7 enthält den Verlauf der mechanischen Hauptnormalspannung bei Schockbelastung. Aufgrund der doppelt symmetrischen Geometrie des Bauelements genügt das Modell eines Viertels mit Symmetrie-Randbedingungen [63] zur Untersuchung der mechanischen Spannungen. Auf diese Weise kann der Aufwand zur Lösung des *FE*-Problems ohne Einschränkung der Genauigkeit stark verringert werden.

### 6.2.5 Deformationsanalyse

Im nächsten Schritt wird die dynamische Deformation der Spiegelplatte für die realisierte Plattenaufhängung ermittelt. Dazu kann entsprechend Abschnitt 3.2.6 der auf



**Abb. 6.7:** *Mechanische Spannungen bei Schockbelastung (Entwurfsbeispiel).* a) FE-Modell mit symmetrischen Randbedingungen und Beschleunigung  $a_z = 2500g$  als Testlast; b) die maximale Hauptnormalspannung tritt im Bereich der verteilten Federn auf.

die gewünschte Auslenkung skalierte Eigenvektor der Spiegelschwingung genutzt werden. Alternativ kann mithilfe einer geeigneten Testlast auch eine statische Simulation der ausgelenkten Geometrie durchgeführt werden. Letzteres ermöglicht die Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten der Aufhängung.

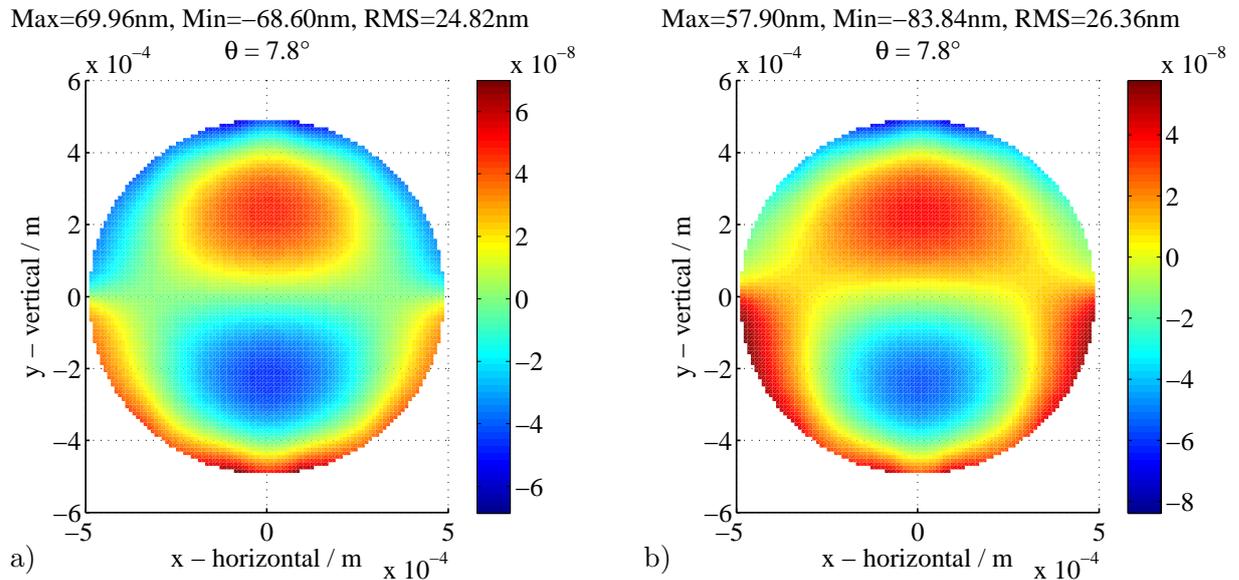
Die sich für das betrachtete Entwurfsbeispiel mit beiden Verfahren ergebenden Deformationsverläufe sind in Abb. 6.8 vergleichend gegenübergestellt. Als Testlast für die statische Analyse wurde dabei eine Winkelbeschleunigung in Richtung der  $x$ -Achse genutzt. Sie wurde entsprechend Gl. (6.7) so gewählt, dass sich in der statischen Analyse eine Auslenkung der Spiegelplatte von näherungsweise  $7.8^\circ$  einstellt:

$$\alpha_x = 4\pi^2 f_x^2 \hat{\theta}_x \approx 1.6 \cdot 10^9 \text{ 1/s}^2 \quad (6.9)$$

Beide in Abbildung 6.8 enthaltenen Diagramme wurden mithilfe der *IMtk*-Funktion `imtk_plot_deformation()` erstellt. Es ergeben sich ähnliche Deformationsprofile mit einer vergleichbaren mittleren dynamischen Deformation von 24.8 nm (Eigenwertanalyse) bzw. 26.4 nm (statische Analyse). Die Maximal- und Minimalwerte der Verläufe weisen größere Unterschiede auf.

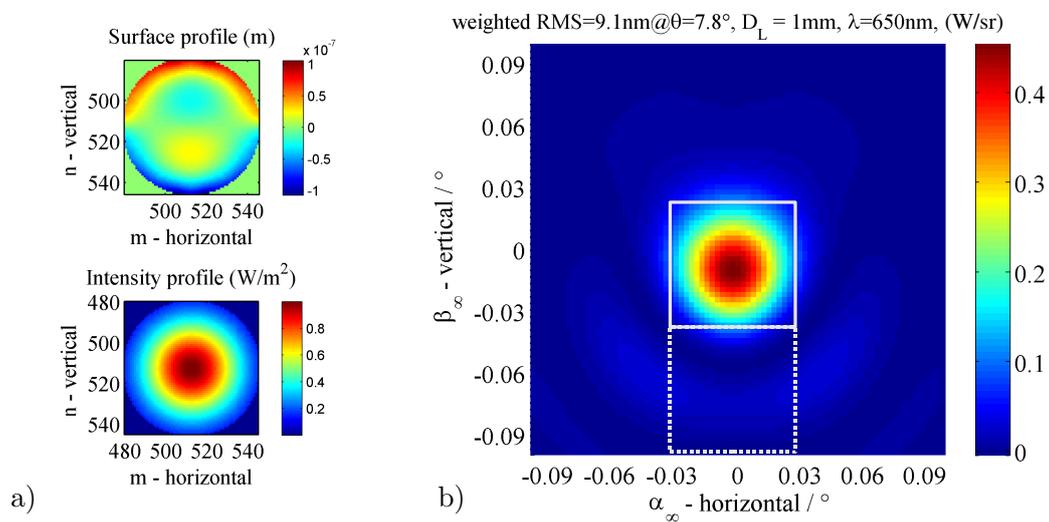
Die Abweichungen zwischen den beiden Verfahren resultieren aus den geometrischen Nichtlinearitäten der Plattenaufhängung. Sie nehmen mit steigender Auslenkung der Spiegelplatte zu. Für Aufhängungen mit höheren Struktur厚ken können noch wesentlich größere Abweichungen der auf der Eigenwertanalyse beruhenden Methode beobachtet werden. Grundsätzlich sollten daher zumindest beim Einsatz verteilter Federn statische Analysen zur Bestimmung der dynamischen Deformation genutzt werden.

Mithilfe der in Abschnitt 3.5 vorgestellten Zusammenhänge kann nun anhand des ermittelten Deformationsprofils der Einfluss auf die Leistungsdichteverteilung eines reflektierten Laserstrahls im Fernfeld untersucht werden. Abbildung 6.9 enthält die mit der Funktion `imtk_plot_phase_picture()` erstellte Darstellung der Leistungsdichteverteilung im Fernfeld für einen senkrecht einfallenden Laserstrahl mit einem Strahldurchmesser  $D_L = 1 \text{ mm}$ . Die Auslenkung des Spiegels beträgt dabei  $7.8^\circ$ . Geht man davon aus, dass 480 Bildpunkte bei einer Auslenkung von  $7.8^\circ$  projiziert werden sollen (VGA-Auflösung), ergibt sich ein Pixelabstand von  $0.065^\circ$ . Integriert man nun die sich entsprechend Abb. 6.9 ergebende Intensität über benachbarten Pixel-Flächen, kann das



**Abb. 6.8:** *Dynamische Deformation eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel).*

a) basierend auf den Ergebnissen der Eigenwertanalyse; b) basierend auf einer statischen Analyse mit einer Winkelbeschleunigung  $\alpha_x$  als Testlast.



**Abb. 6.9:** *Einfluss der Deformation auf die Intensitätsverteilung im Fernfeld.* a) Ausgangsdaten für die Berechnung der Intensitätsverteilung: Phasenverschiebung und Intensitätsverteilung der reflektierten Welle in der optischen Referenzebene des Spiegels (Abschnitt 3.5); b) resultierendes Beugungsbild im Fernfeld; zusätzlich sind die Begrenzungen zweier Bildpunkte eines projizierten Bilds in VGA-Auflösung dargestellt. Das geringstmögliche Pixelkontrastverhältnis für dieses Beispiel ist ca. 1:12.

**Listing 1:** Erzeugen eines 2D-Scanner-Modells mit dem *IMtk* (Entwurfsbeispiel).

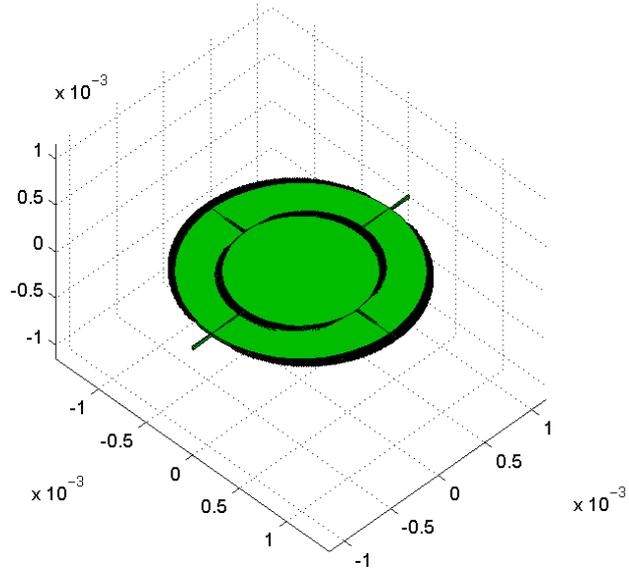
```

ms = imtk_microscanner( ...
    'plate.subtype', 'elliptical', ...
    'plate.length', 1.19e-3, ...
    'plate.width', 1.19e-3, ...
5   'flexure.length', 200e-6, ...
    'flexure.characteristic', cc, ...
    'capacitance_model', 'fem_fit', ...
    'moment_of_inertia', 6.237e-15);

10 ms2d = imtk_microscanner_2d( ...
    ms, ...
    'frame.subtype', 'elliptical', ...
    'frame.length', 1.9e-3, ...
    'frame.width', 1.9e-3, ...
15  'flexure.length', 200.9e-6, ...
    'flexure.width', 13e-6, ...
    'capacitance_model', 'fem_fit');

plot(ms2d);

```



**Abb. 6.10:** Makromodell eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel). Mithilfe der *IMtk*-Klassen *imtk\_microscanner* bzw. *imtk\_microscanner\_2d* kann ein Makromodell des untersuchten Beispiels erzeugt werden. Dabei können die sich aus den Eigenwertanalysen (Abschnitt 6.2.3) bzw. nichtlinearen statischen Simulationen (Abschnitt 6.2.4) ergebenden Eigenschaften berücksichtigt werden.

erreichbare Kontrastverhältnis zwischen benachbarten Punkten des projizierten Bilds bestimmt werden. Es ergibt sich für das vorliegende Beispiel zu 1:12. Dies entspricht in etwa dem mithilfe eines Passiv-Matrix-*LCD* erreichbaren Pixelkontrastverhältnis.

Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass das Pixelkontrastverhältnis kein geeignetes Maß zur Charakterisierung eines durch einen abgelenkten Laser projizierten Bilds ist. Zu diesem Zweck müsste der sich ergebende Bildkontrast bzw. die Modulations-Transferfunktion des abbildenden Systems herangezogen werden.

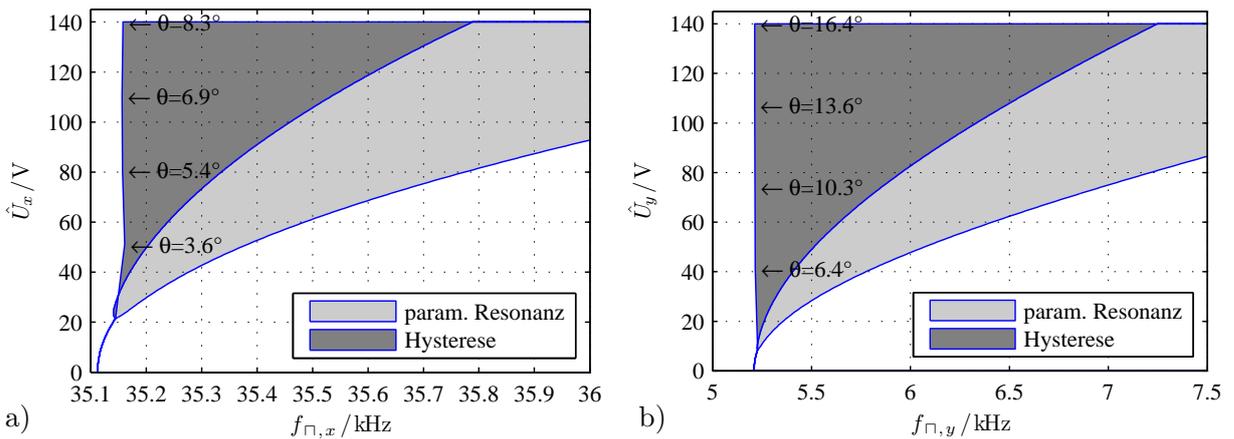
## 6.2.6 Statische nichtlineare gekoppelte Analysen

Bevor die transienten Eigenschaften anhand dynamischer Simulationen untersucht werden, ist es sinnvoll die Stabilitätsregionen (Kapitel 4) und die elektromechanische Stabilität (Abschnitt 3.4.4) des Bauelements zu untersuchen. Die dabei bestimmten Parameter der Antriebsspannung (Pulsfrequenz und Pulsspannung) können dann von Beginn an berücksichtigt werden. Auch können eventuelle Probleme, die sich beispielsweise aus einer zu niedrigen *Pull-in*-Spannungen ergeben, erkannt werden. Dies ermöglicht gegebenenfalls eine Anpassung des Entwurfs bevor die vergleichsweise zeitaufwändigen dynamischen Simulationen ausgeführt werden.

Zur Bestimmung der gesuchten Eigenschaften wird ein Makromodell des Bauelements erstellt. Listing 1 bzw. Abbildung 6.10 enthalten die dazu benötigten Aufrufe der *IMtk*-Klassenbibliothek, sowie die grafische Repräsentation des resultierenden Modells (siehe dazu Anhang F.5). Aufgrund der Tatsache, dass sowohl die Geometrie, als auch die mechanischen Eigenschaften der verteilten Federn mit der Klassen *imtk\_flexure* und *imtk\_elliptical\_plate* nicht nachgebildet werden können, werden die Massenträgheit und die Federcharakteristik der Spiegelplatte beim Erzeugen des Spiegel-Objekts fest-

**Tabelle 6.3:** Stabilitätsspannungen eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel).

Parameter (Richtung)	$U_{\text{pi},x'}/\text{V}$ (Translation $x'$ )	$U_{\text{pi},y'}/\text{V}$ (Translation $y'$ )	$U_{\text{pi},x'y'}/\text{V}$ (Rotation $z'$ )	$\min U_{\text{pi,FE}}/\text{V}$ (Fingerelektroden)
Spiegelplatte	3624	1555	224	375
bewegl. Rahmen	3222	1790	257	375

**Abb. 6.11:** Stabilitätsregionen eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel). a) Bifurkationsdiagramm bezüglich der Oszillation um die  $x$ -Achse (Spiegelplatte); b) bezüglich der Oszillation um die  $y$ -Achse (beweglicher Rahmen).

gelegt (Zeilen sechs und acht in Listing 1). Beide Eigenschaften sind aus den bereits durchgeführten Untersuchungen anhand des erstellten  $FE$ -Modells bereits bekannt (Abschnitt 6.2.3 und 6.2.4). Das vollständige Skript zur Erzeugung und Initialisierung des Modells findet sich als Beispiel in Anhang F.6 (Listing 12).

**Die elektromechanische Stabilität** des Bauelements kann nun mithilfe der Methode `stability_voltage()` (Anhang F.5) bestimmt werden. Die sich für die relevanten Bewegungsfreiheitsgrade der Spiegelplatte und des beweglichen Rahmens ergebenden Werte sind in Tabelle 6.3 enthalten. Da alle *Pull-in*-Spannungen des Bauelements deutlich oberhalb der maximalen Antriebsspannung von 140 V liegen, stellt die elektromechanische Stabilität in diesem Fall kein Problem dar.

**Die Stabilitätsregionen** des Bauelements können ebenfalls mithilfe des Makromodells bestimmt werden. Die sich für  $\max \hat{U} = 140 \text{ V}$  ergebenden Bifurkationsdiagramme sind in Abb. 6.11 dargestellt. Beide Diagramme wurden mit der Methode `stability_regions()` erzeugt (Anhang F.5) und enthalten die sich für die bestimmten Verzweigungswerte  $f_{\text{cr}3}$  ergebenden maximalen Auslenkungen. Es wird deutlich, dass die geforderte Schwingungsamplitude der Spiegelplatte von  $7.8^\circ$  bei einer zur Verfügung stehenden Antriebsspannung von 140 V knapp erreicht werden kann. Für den beweglichen Rahmen ist eine Amplitude von  $10^\circ$  bereits mit einer Antriebsspannung in der Größenordnung von 80 V möglich.

Die entsprechend Tabelle 6.1 gestellten Anforderungen werden also voraussichtlich von dem aktuellen Entwurfspunkt erfüllt. Wäre dies nicht der Fall, müsste der Entwurfsprozess mit einer entsprechend optimierten Bauelementgeometrie wiederholt werden (Abb. 6.1). Dabei kann im Fall einer zu geringen Auslenkung oder eines zu schmalen Bereichs der parametrischen Resonanz die Geometrie der Antriebselektroden variiert werden. Bei zu geringer elektromechanischer Stabilität besteht zusätzlich die Möglichkeit einer Optimierung der mechanische Aufhängung der Spiegelplatte bzw. des beweglichen Rahmens.

### 6.2.7 Dynamische nichtlineare gekoppelte Analysen

Im letzten Entwurfsschritt kann bei Bedarf das transiente bzw. dynamische Verhalten des Bauelements untersucht werden. Die dabei durchgeführten Simulationen sind trotz der zum Einsatz kommenden Makromodelle vergleichsweise aufwändig; sie sollten daher nur genutzt werden, wenn sich eine entsprechende Notwendigkeit aus den gestellten Anforderungen oder der Anwendung des Bauelements ergibt. Dabei können anhand dynamischer Simulationen die folgenden Punkte untersucht werden:

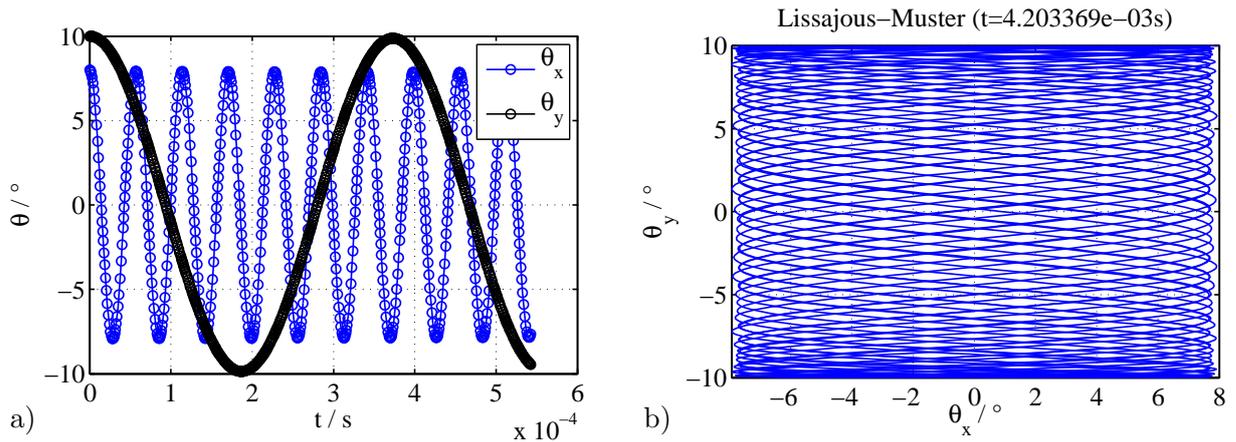
- Anstieg der Frequenz-Antwortkurven im Bereich des Arbeitspunkts bei parametrischer Anregung (Abschnitt 4.1.4),
- Bandbreite der Antwortkurven im Bereich des Arbeitspunkts für einen vorgegebenen Bereich der Antriebsspannung (Abschnitt 4.1.4),
- zeitabhängiger, periodischer Verlauf der Auslenkung bzw. dessen Abweichung von der idealen Sinus-Form (Abschnitt 5.3.4),
- Einfluss der mechanischen Kopplungen zwischen den genutzten Bewegungsfreiheitsgraden eines 2D-Scanners auf den Verlauf der Schwingungen.

Zur Demonstration der Methodik wurden für das Entwurfsbeispiel mithilfe des erstellten Makromodells dynamische Simulationen des transienten Bauelementverhaltens durchgeführt. Dazu wurde die innerhalb der Methoden `transient()` bzw. `transient_2d()` zur Verfügung gestellte Funktionalität genutzt (Anhang F.5 und 5.3.3).

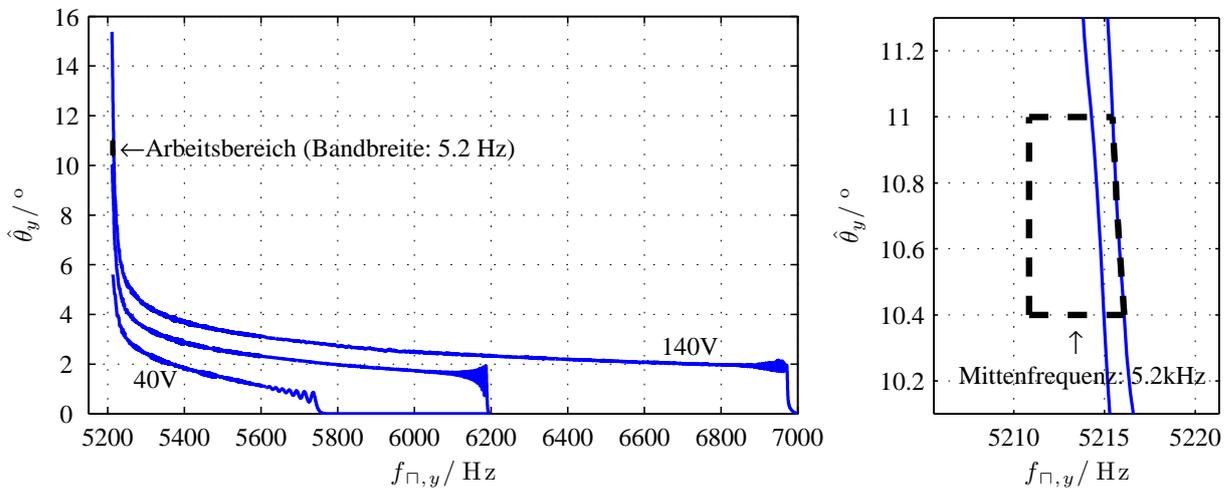
Abbildung 6.12a enthält ein Beispiel für den sich typischerweise ergebenden Verlauf einer gekoppelten dynamischen Simulation des 2D-Mikroscannerspiegels bei synchronisierter Anregung im eingeschwungenen Zustand. Dabei gilt für die Pulsspannungen  $\hat{U}_x = 140 \text{ V}$  und  $\hat{U}_y = 75 \text{ V}$ . Das zur Durchführung der Simulation erstellte *MATLAB*<sup>®</sup>-Skript ist als Beispiel in Anhang F.6 enthalten (Listing 12). Ein Teil des sich für diesen Schwingungsverlauf ergebenden LISSAJOUS-Musters ist in Abb. 6.12b dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass sich die Darstellung nicht auf einen abgelenkten Laserstrahl, sondern auf die mechanischen Auslenkung des Mikroscannerspiegels bezieht.

Anhand des sich ergebenden Musters wird das in Abschnitt 2.3.3 bzw. [56] vorgestellte Prinzip der LISSAJOUS-Bildprojektion deutlich. Die Füllrate und damit die Auflösung und Bildwiederholrate des projizierten Bilds kann dabei durch geringfügige Variation des Frequenz-Verhältnisses  $f_x/f_y$  beeinflusst werden [57].

Die sich für das Bauelement ergebenden Frequenz-Antwortkurven des beweglichen Rahmens sind in Abb. 6.13 dargestellt. Geht man davon aus, dass eine maximale Antriebsspannung von 140 V zur Verfügung steht, ergibt sich für die gestellten Anforderungen (Tabelle 6.1) eine Bandbreiten im Arbeitspunkt von ca. 5 Hz (Abb. 6.13). Die Bandbreite der Spiegelplatte ist relativ zur Resonanzfrequenz noch geringer. Man muss daher



**Abb. 6.12:** *Dynamische Simulation eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel).* a) zeitlicher Verlauf der Schwingung; b) Darstellung als LISSAJOUS-Figur mithilfe der Funktion `imtk_plot_lissajous()` (siehe dazu Listing 12).

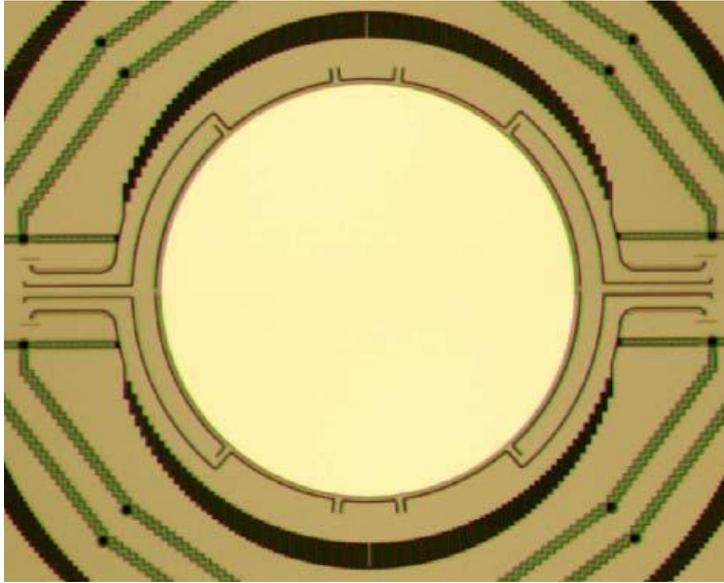


**Abb. 6.13:** *Simulierte Antwortkurven des beweglichen Rahmens (Entwurfsbeispiel).* Zur Berechnung der Verläufe wurde die Methode `open_loop_response()` genutzt. Die Abbildung wurde mit der Funktion `imtk_plot_response_curves()` erstellt. Dabei wird die resultierende Breite des Arbeitsbereichs (Bandbreite) bestimmt und dargestellt.

davon ausgehen, dass die gewünschten Auslenkungen bei der zur Verfügung stehenden Antriebsspannung ausschließlich bei synchronisiertem Antrieb erreicht werden können.

Anhand der Eigenschaften und Toleranzen des zum Einsatz kommenden Fertigungsprozesses (Abschnitt 3.2.5) kann nun die zu erwartende Ausbeute einer Fertigung abgeschätzt werden. Geht man von einer Standardabweichung der gefertigten Strukturbreite  $\sigma = 75$  nm aus, ergibt sich nach Gl. (3.68) eine Standardabweichung der Resonanzfrequenz des beweglichen Rahmens von 23 Hz. Die Empfindlichkeit der Resonanzfrequenz der vergleichsweise komplexen Spiegelplatte bezüglich der auftretenden Fertigungstoleranzen kann mithilfe der *FEM* näherungsweise ermittelt werden. Sie ergibt sich zu  $0.47$  Hz/nm. Die zu erwartende Standardabweichung der Resonanzfrequenz des Spiegels liegt somit in der Größenordnung von 35 Hz.

Geht man davon aus, dass die Strukturkanten aller Federstrukturen innerhalb eines Bauelements nicht gegensätzlich beeinflusst werden, ergibt sich eine relative Abweichung



**Abb. 6.14:** Lichtmikroskopische Aufnahme eines 2D-Scanners (Entwurfsbeispiel). Erkennbar ist die Spiegelplatte und deren Aufhängung (vgl. mit Abb. 6.4); am Rand sind außerdem Teile der äußeren Kammelektrode zu sehen [125].

des Frequenz-Verhältnisses in der Größenordnung von 0.01 %. Da jedoch für die Anwendung ausschließlich Bauelemente mit einem bestimmten Frequenz-Verhältnis genutzt werden können (Tabelle 6.1), muss die Schwingfrequenz des beweglichen Rahmens bei parametrischer Anregung entsprechend angepasst werden. Da jedoch nur eine Bandbreite von ca. 5 Hz zur Verfügung steht (Abb. 6.13), ist mit einer geringen Reproduzierbarkeit zu rechnen. Der Anteil der den Spezifikationen entsprechenden Bauelemente ergibt sich bei einer angenommenen Standardabweichung der Strukturbreiten von 75 nm näherungsweise zu 5 %. Soll das Bauelement in größeren Stückzahlen gefertigt werden, muss der Entwurf daher überarbeitet werden. Dabei können die folgenden Maßnahmen ergriffen werden:

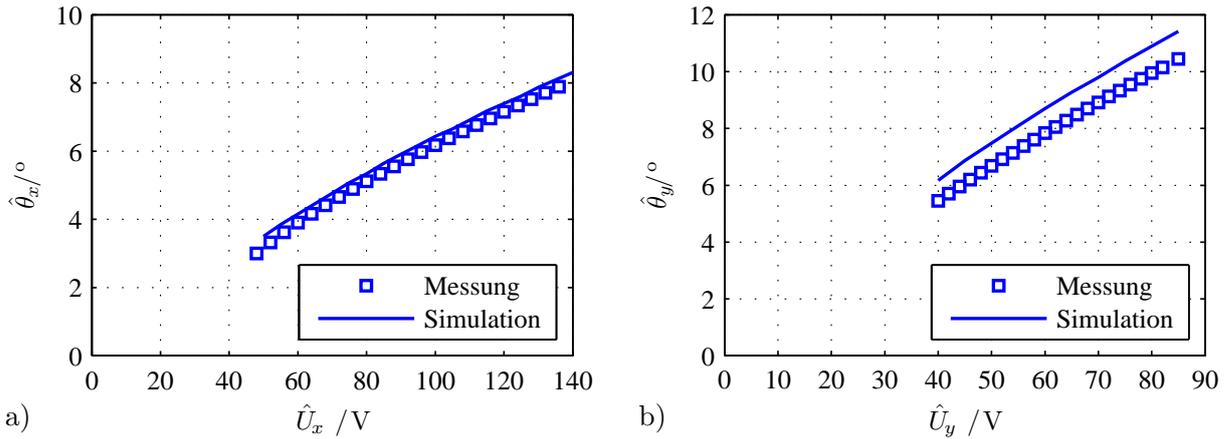
- Verringern der Empfindlichkeit der Resonanzfrequenzen gegenüber Fertigungstoleranzen durch geeignete konstruktive Maßnahmen,
- Erhöhen der Antriebseffizienz und damit der Bandbreite des Bauelements durch Optimierung des elektrostatischen Antriebs,
- Integration einer Vorrichtung zur Beeinflussung der Eigenresonanzfrequenzen (*Frequenz-Tuning*, [35]).

Entsprechend Abbildung 6.1 muss der Entwurfprozess dann erneut durchlaufen werden.

### 6.3 Diskussion

Der im vorangegangenen Abschnitt als Entwurfsbeispiel genutzte Scannerspiegel wurde am *Fraunhofer IPMS* gefertigt und experimentell charakterisiert (Abb. 6.14, [125]). Die aus der Charakterisierung zur Verfügung stehenden Daten können daher genutzt werden um die Ergebnisse des Entwurfs zu diskutieren.

Anhang G.1 enthält die experimentell ermittelten Verläufe der Amplitude der Spiegelplatte und des beweglichen Rahmens sowohl bei synchronisierter, als auch bei parametrischer Anregung des Bauelements. Abbildung 6.15 enthält exemplarisch die Verläufe der



**Abb. 6.15:** Amplitudenkennlinien eines 2D-Scanners bei synchronisiertem Antrieb (Entwurfsbeispiel). a) Schwingung der Spiegelplatte; b) Schwingung des beweglichen Rahmens.

Amplitudenkennlinien bei synchronisierter Anregung. Zusätzlich sind die Ergebnisse der Simulationen dargestellt. Die Abweichung der Modelle liegt mit einer Größenordnung von 10% im erwarteten Bereich (Abschnitt 5.3.4). Aus dem Vergleich mit den Ergebnissen der Modelle lassen sich die folgenden Erkenntnisse gewinnen:

- Die Übereinstimmung mit den simulierten Amplituden-Charakteristiken ist im erwarteten Bereich. Die Abweichung ist typischerweise kleiner als 10%.
- Die Eigenresonanzfrequenz des beweglichen Rahmens stimmt gut mit den Modellen überein. Die Abweichungen liegen im Bereich der Fertigungstoleranzen.
- Die Eigenresonanzfrequenz der Spiegelplatte ist im Mittel um ca. 2% zu gering (Anhang G.1). Der Grund dafür ist unklar. Es wird vermutet, dass aufgrund der komplexen Geometrie der Aufhängung bisher unbekannte Effekte bei der Fertigung zu der Abweichung führen. Dies muss anhand weiterer technologischer Versuche untersucht werden.

Im Rahmen von Untersuchungen zur dynamischen Deformation wurden am *Fraunhofer IPMS* außerdem die Deformationsprofile von Spiegelplatten experimentell ermittelt [125]. Ein entsprechendes Ergebnis für das hier vorgestellte Entwurfsbeispiel ist in Anhang G.2 enthalten. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Modelle (Abb. 6.8). Der quadratische Mittelwert liegt demnach bei Nennauslenkung in der Größenordnung von 20 nm.

Ausgenommen die Eigenresonanzfrequenz der Spiegelplatte  $f_x$  können also die gestellten Anforderungen (Tabelle 6.1) erfüllt werden. Der vorgestellte Entwurfsprozess erscheint daher geeignet für den Entwurf resonanter Mikrospiegel mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb.



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, vorhandene Methoden und Werkzeuge zum Entwurf resonanter mikromechanischer Aktoren mit elektrostatischem Antrieb zu erweitern und zu systematisieren. Der Schwerpunkt lag dabei auf den am *Fraunhofer IPMS* in Dresden entwickelten und gefertigten Mikroscooperspiegeln.

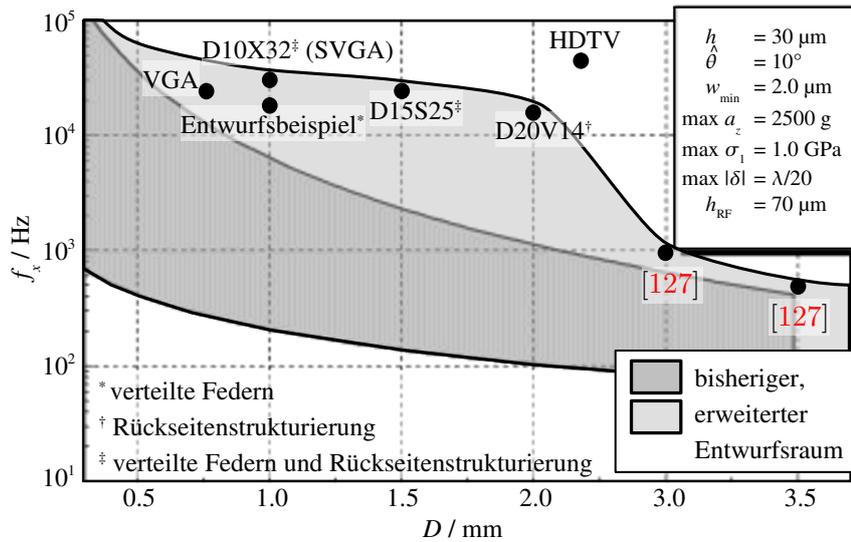
Die beim Entwurf von elektrostatisch resonant angetriebenen *MEMS*-Aktoren relevanten physikalischen Effekte wurden identifiziert, systematisiert und durch geeignete analytische und numerische Modelle beschrieben. Dabei lag im Gegensatz zu vorangegangenen Arbeiten [3, 18] ein Schwerpunkt auf der Berücksichtigung nichtlinearer Effekte. Dazu zählen geometrische Nichtlinearitäten der Torsionsfederaufhängung, auslenkungsabhängige Dämpfungseffekte sowie Nichtlinearitäten des elektrostatischen Antriebs. Soweit dies möglich war, wurden die theoretischen Erkenntnisse mittels experimenteller Untersuchungen verifiziert.

Die Dynamik resonanter Bauelemente mit elektrostatischem Antrieb wurde am Beispiel des *Fraunhofer IPMS*-Mikroscooperspiegels anhand eines analytischen Modells untersucht. Dazu wurde die Bewegungsgleichung auf eine nichtlineare MATHIEU-Gleichung abgebildet. Mithilfe einer Stabilitätsanalyse konnten die typischen dynamischen Eigenschaften der Bauelemente erklärt werden. Dazu zählen das Anschwingen in parametrischer Resonanz mit begrenzter Amplitude, das Auftreten einer Hysterese im Verlauf der Frequenz-Antwortkurven und das abrupte Zusammenbrechen der Schwingung in der Nähe der mechanischen Eigenresonanz. Speziell der letzte Punkt stellt eine wichtige neue Erkenntnis dar und wurde in ähnlichen Dynamik-Analysen [18, 98, 99] bisher nicht berücksichtigt. Aufgrund der Tatsache, dass *Fraunhofer IPMS*-Mikroscooperspiegel nahe der mechanischen Eigenresonanz betrieben werden, konnten mit dieser Erweiterung der vorhandenen Modelle neue Erkenntnisse und Optimierungsansätze gewonnen werden. Dies betrifft im Besonderen die gezielte Nutzung geometrischer Nichtlinearitäten zur Verbesserung von Bauelementeigenschaften, wie z.B. der Bandbreite und dem Verlauf der Frequenz-Antwortkurven.

Mithilfe der gewonnenen Erkenntnisse wurden Anforderungen an Entwurfs- und Optimierungswerkzeuge formuliert. Ein weiteres wichtiges Ergebnis dieser Arbeit ist das daraus resultierende *IPMS MEMS Toolkit (IMtk)*, eine Klassenbibliothek für die Programmumgebung *MATLAB*<sup>®</sup>. Sie entspricht der praktischen Realisierung der erarbeiteten Ansätze und Methoden und stellt ein flexibles Werkzeug zur Simulation bzw. für den Entwurf resonanter *MEMS*-Bauelemente mit elektrostatischem Antrieb dar. Eine wichtige Funktion besteht dabei in der Bereitstellung ordnungsreduzierter Modelle, mit deren Hilfe beliebige Nichtlinearitäten vollständig gekoppelt berücksichtigt werden können.

Als Abschluss der Arbeit wurde auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse und Werkzeuge eine Entwurfsstrategie für resonante Mikroaktoren mit elektrostatischem *Out-of-plane-comb*-Antrieb formuliert. Anhand eines konkreten Entwurfsbeispiels wurde diese veranschaulicht und verifiziert. Die Ergebnisse der im Rahmen dieses Entwurfs durchgeführten Simulationen wurden experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt und diskutiert.

Neuartig sind die umfassenden Untersuchungen zur fluidmechanischen Dämpfung des *Out-of-plane-comb*-Antriebs, zur dynamischen Deformation der Spiegelplatte und zu den elektromechanischen Stabilitätseigenschaften gerader und trapezförmiger Fingerelektroden (Kapitel 3). Dazu wurden sowohl analytische Zusammenhänge, als auch numerische



**Abb. 7.1:** Erweiterter Entwurfsraum für Fraunhofer IPMS Mikroscoannerspiegel. Aus den Ansätzen zur Bauelementoptimierung und zusätzlichen Entwurfsfreiheitsgraden (verteilte Federn, Rückseitenstrukturen usw.) ergibt sich ein erweiterter Entwurfsraum.  $h_{RF}$  entspricht dabei der Höhe der realisierbaren Rückseitenstrukturen [124].

Methoden herangezogen. Die resultierenden Modelle eröffnen neue Möglichkeiten für den Entwurf bzw. für die Optimierung der Bauelemente. So kann beispielsweise die Geometrie einer *Out-of-plane-comb*-Elektrode bezüglich ihrer elektromechanischen Stabilität oder der Antriebseffizienz optimiert werden.

Auch die im Kapitel 4 vorgestellte nichtlineare Analyse der Bewegungsgleichung von *Fraunhofer IPMS*-Mikroscoannerspiegeln wurde im Rahmen dieser Arbeit erstmalig vorgestellt. Die daraus resultierenden Erkenntnisse ermöglichen ein besseres Verständnis und eine Optimierung der Bauelementeigenschaften. Dies betrifft beispielsweise das Anschwingverhalten oder die Dynamik des Bauelements in der Nähe der mechanischen Eigenresonanz, also im Arbeitspunkt. Durch die gezielte Beeinflussung der Nichtlinearitäten können wichtige Eigenschaften der Bauelemente verbessert werden.

Weiterhin stellt die im Kapitel 5 bzw. Anhang F vorgestellte Klassenbibliothek *IMtk* einen wichtigen neuen Beitrag dar. Sie ermöglicht erstmalig dynamische Simulationen des Bauelementverhaltens unter Berücksichtigung aller relevanten Nichtlinearitäten. In Kombination mit der in Kapitel 6 vorgestellten Entwurfsstrategie steht mit dem *IMtk* ein effizientes Werkzeug für den Entwurf zur Verfügung.

Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist schließlich die Erweiterung des verfügbaren Entwurfsraums für *Fraunhofer IPMS*-Mikroscoannerspiegel. Dies wird in Abb. 7.1 veranschaulicht. Sie stellt die in [3] gefundenen, bisherigen Grenzen zusammen mit einigen anhand der vorgestellten Methoden und Werkzeugen am *Fraunhofer IPMS* realisierten neuen Bauelemente dar. Es ist erkennbar, dass vor allem im Bereich hochfrequenter Mikroscoanners mit großer Spiegelplatte Fortschritte erzielt werden konnten. Diese sind für viele aktuelle und zukünftige Anwendungen, wie beispielsweise die Bildprojektion, von großer Bedeutung.

Aufbauend auf den vorgestellten Ansätzen und Methoden zum Entwurf sind zahlreiche zukünftige Entwicklungen denkbar, mit deren Hilfe eine weitere Ausdehnung der Entwurfs Grenzen ermöglicht wird. So können beispielsweise zusätzliche Freiheitsgrade ein-

geführt werden mit deren Hilfe die Bauelemente besser für bestimmte Aufgabenstellungen optimiert werden können. Ein Beispiel für eine solche Weiterentwicklung wird zurzeit am *Fraunhofer IPMS* untersucht. Dabei werden mithilfe eines modifizierten *AME1*-Prozesses versteifende Strukturen auf der Rückseite der Spiegelplatte ausgebildet. Diese führen zu einer Erhöhung der Steifigkeit der Spiegelplatte bei vergleichsweise geringfügig erhöhtem Massenträgheitsmoment. Auf diese Weise lässt sich die dynamische Deformation stark reduzieren [124]. In Kombination mit einer Aufhängung, bestehend aus verteilten Feder, lassen sich auf diese Weise perspektivisch hochfrequente Bauelemente mit vergleichsweise großen Spiegelplatten realisieren.

Weiterführende Untersuchungen finden ebenfalls im Bereich des *Packaging* der Bauelemente statt. Hier ist das Ziel zukünftiger Entwicklungen die Realisierung eines praxistauglichen Vakuum-Gehäuses für Mikroscoannerspiegel. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass die für viele Anwendungen benötigten hochfrequenten Bauelemente aufgrund der Fluid-Dämpfung vergleichsweise hohe Antriebsspannungen benötigen. Da die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten fluidmechanischen Dämpfungsmodelle auf den Gesetzen der Gasdynamik kontinuierlicher Medien beruhen, kann das Verhalten der Bauelemente bei geringen Drücken zurzeit nicht mit ausreichender Genauigkeit simuliert werden. Es sind daher zusätzliche Untersuchungen notwendig. Konkret werden Modelle zur Beschreibung der Dämpfung bei Drücken  $p < 10^4$  Pa benötigt. Dazu können beispielsweise stochastische Modelle herangezogen werden [128].

Eine weitere zukünftige Aufgabe ist die Integration eines Dämpfungsmodells für eine Translation der Spiegelplatte aus der Strukturebene heraus. Einerseits würde auf diese Weise die Nutzung der entwickelten Werkzeuge und Methoden im Entwurf weiterer Bauelemente, beispielsweise resonanter Translationsspiegel [118], ermöglicht. Andererseits könnte mit einer solchen Erweiterung auch der Entwurf resonanter Kippspiegel verbessert werden. So könnten mithilfe der in Kapitel 4 vorgestellten Stabilitätsanalyse die Stabilitätsregionen eines Bauelements bezüglich der parasitären Schwingung in  $z$ -Richtung beim Entwurf berücksichtigt werden und damit das Bauelementverhalten weiter optimiert werden.

Andere Entwicklungen am *Fraunhofer IPMS* beschäftigen sich mit der Weiterentwicklung des elektrostatischen Antriebskonzepts, sodass neben einem resonanten Betrieb auch statische bzw. quasistatische Auslenkungen ermöglicht werden. Dazu werden die Gegenelektroden des Kammantriebs nicht innerhalb der Strukturebene realisiert, sondern nach oben oder nach unten versetzt bzw. verkippt [33]. Auf diese Weise kann ein Drehmoment erzeugt werden, welches nicht in Richtung der Ruhelage des Mikrospiegels wirkt und somit eine statische Auslenkung ermöglicht. Aufgrund der allgemeinen und flexiblen Implementierung des *IMtk* können die aus diesem Ansatz erwachsenden Entwurfsprobleme zum großen Teil mithilfe der in dieser Arbeit vorgestellten Werkzeuge gelöst werden. Auch die Entwurfsstrategie behält prinzipiell Gültigkeit. Es muss allerdings aufgrund des nicht-resonanten Betriebs dieser zukünftigen Bauelemente die Gültigkeit der verfügbaren Methodik zur Ordnungsreduktion geprüft bzw. eine neue Methode implementiert werden. Außerdem müssen die Funktionen zum Bestimmen der elektromechanischen Stabilität eines Bauelements aufgrund der andersartigen Elektrodenanordnungen zumindest überarbeitet werden.



## Literaturverzeichnis

- [1] ANANTHASURESH, G.: *Optimal Synthesis Methods for MEMS*. Kluwer Academic Publishers, New York, 2003
- [2] SENTURIA, S.: *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publishers, New York, 2001
- [3] SCHENK, H.: *Ein neuartiger Mikroaktor zur ein- und zweidimensionalen Ablenkung von Licht*, Gerhard-Mercator-Universität-Gesamthochschule-Duisburg, Dissertation, 2000
- [4] GAD-EL-HAK, M.: *The MEMS Handbook*. CRC Press, Boca Raton/Florida, 2002
- [5] MEHNER, J.: *Entwurf in der Mikrosystemtechnik*. Dresden Univ. Press, 1999
- [6] PELESKO, J. ; BERNSTEIN, D.: *Modeling MEMS and NEMS*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton/Florida, 2003
- [7] ZENG, K. ; LIU, Z. ; KORVINK, J.: A New Methodology for Modeling MEMS Structures / IMTEK, Universität Freiburg. 2003. – Forschungsbericht
- [8] CLARK, J. ; ZHOU, N. ; BINDEL, D. ; SCHENATO, L. ; WU, W. ; DEMMEL, J. ; PISTER, K.: 3D MEMS Simulation Modeling Using Modified Nodal Analysis / Berkeley Sensor and Actuator Center, University of California at Berkeley. 2001. – Forschungsbericht
- [9] VOSSKÄMPER, L. ; SCHMID, R. ; PELZ, G.: Modeling Micro-Mechanical Structures for System Simulations / Dolphin Integration GmbH, Fraunhofer-Institut IMS, Infineon Technologies AG,. 2001. – Forschungsbericht
- [10] VEIJOLA, T. ; KUISMA, H. ; LAHDENPERÄ, J. ; RYHÄNEN, T.: Equivalent-circuit model of the squeezed gas film in a silicon accelerometer. In: *Sensors and Actuators A* 48 (1995), S. 239–248
- [11] WOLTER, A. ; SCHENK, H. ; KORTH, H. ; LAKNER, H.: Torsional stress, fatigue and fracture strength in silicon hinges of a micro scanning mirror. In: *Proc. of SPIE – Reliability, Testing, and Characterization of MEMS/MOEMS III* 5343 (2004), S. 176–185
- [12] ANSYS. *Homepage*. <http://www.ansys.com/>. 2004
- [13] MATHWORKS. *The MathWorks Homepage*. <http://www.mathworks.com/>. 2004
- [14] COMSOL. *Multiphysics Modelling*. <http://www.comsol.com>
- [15] BERKLEY, UC. *SUGAR Simulation Research for MEMS*. <http://www-bsac.eecs.berkeley.edu/cadtools/sugar/sugar/>. 2004
- [16] COVENTOR. *MEMS Software for design of RF, Microfluidics, Sensors, and Optical Devices*. <http://www.coventor.com>
- [17] SOBE, U.: *Anregung und Auswertung von resonanten mikromechanischen Strukturen mit elektrostatischem Antrieb und kapazitivem Detektor in Mikrosystemen*, Technische Universität Dresden, Dissertation, 2001

- [18] ATAMAN, Ç.: *Design, Modeling and Characterization of Electrostatically Actuated Microscanners*, Koç University Istanbul, Diplomarbeit, 2004
- [19] Ç. ATAMAN ; UREY, H.: Modeling and characterization of comb actuated resonant microscanners. In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 16 (2006), S. 9–16
- [20] BOSCH. *The Bosch Group*. <http://www.bosch.com>. 2006
- [21] DIMATIX™. *Piezoelectric Printheads & Micropumps From Dimatix*. <http://www.dimatix.com>. 2006
- [22] WTC. *Wicht Technology Consulting Market Reports*. <http://www.wtc-consult.de>. 2006
- [23] DÖRING, C. ; REIZ, S. ; BASTIAN, J. ; MAUTE, M. ; SCHNEIDER, P. ; SCHWARZ, P.: Verhaltensmodellierung eines Drehratensensors mittels Verfahren der Ordnungsreduktion. In: *Proc. 10. GMM-Workshop, Cottbus* (2004), S. 183–187
- [24] STEVENS, F.: Creating shaped piezo silicon micropumps using MEMS-based manufacturing. In: *Proc. Solid State Technology* 48 (2005)
- [25] TI. *Texas Instruments Homepage*. <http://www.ti.com>. 2006
- [26] WIKIPEDIA. *Streckgrenze — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Streckgrenze&oldid=23423060> [Online; Stand 10. November 2006]. 2006
- [27] CONRAD, H.: *Positionsbestimmung von Mikroscooperspiegeln mit integrierten piezoresistiven Sensoren*, HTW Dresden, Diplomarbeit, 2005
- [28] DÜRR, P. ; GEHNER, A. ; DAUDERSTÄDT, U.: Micromirror spatial light modulators. In: *Proc. International Conference on Micro Opto Electro Mechanical Systems* (1999), S. 60–65
- [29] WOLTER, A. ; SCHENK, H. ; GAUMONT, E. ; LAKNER, H.: The MEMS micro scanning mirror for barcode reading: From development to production. In: *Proc. of SPIE* 5348 (2004), S. 32–39
- [30] SCHENK, H. ; DÜRR, P. ; HAASE, T. ; KUNZE, D. ; SOBE, U. ; LAKNER, H. ; KÜCK, H.: Large Deflection Micromechanical Scanning Mirrors for Linear Scans and Pattern Generation. In: *Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* 6 (2000), S. 715–722
- [31] WOLTER, A. ; SCHENK, H. ; GAUMONT, E. ; LAKNER, H.: Improved layout for a resonant 2D Micro Scanning Mirror with low operation voltages. In: *Proc. of SPIE – MOEMS Display and Imaging Systems* 4985 (2003), S. 72–82
- [32] KIESSLING, T. ; WOLTER, A. ; SCHENK, H. ; LAKNER, H.: Bulk micro machined quasistatic torsional micro mirror. In: *Proc. of SPIE – MOEMS Display and Imaging Systems II* 5348 (2004), S. 211–220

- [33] PORTH, C.: *Untersuchung von nichtresonanten Antriebsprinzipien für Mikroscooperspiegel zur niederfrequenten bzw. quasistatischen Lichtablenkung*, TU Dresden, Diplomarbeit, 2006
- [34] SPRAGUE, R. ; MONTAGUE, T. ; BROWN, D.: Bi-axial magnetic drive for Scanned Beam Display mirrors. In: *Proc. of SPIE – MOEMS Display and Imaging Systems III* 5721 (2005), S. 1–13
- [35] GRASSHOFF, T.: *Untersuchungen zum aktiven Frequenz tuning resonanter Mikroscooperspiegel*, Fachhochschule für Technik und Wirtschaft Berlin, Diplomarbeit, 2005
- [36] LAST, M. ; PISTER, K.: 2-DOF Actuated Micromirror Designed for Large DC Deflection. In: *MOEMS '99* (1999), S. PDP
- [37] MOON, K. ; LEVY, M. ; HONG, Y. ; GHIMIRE, S.: A micromechanical mirror based on PZN-PT single crystal films. In: *Proc. of SPIE – Optomechatronic Systems* 4902 (2002), S. 146–153
- [38] RA, H. ; JUNG, I. ; LEE, D. ; KRISHNAMOORTHY, U. ; YU, K. ; SOLGAARD, O.: High-Resolution Microelectromechanical Scanners for Miniaturized Dual-Axes Confocal Microscopes. In: *Proc. of SPIE – MOEMS Display and Imaging Systems III* 5721 (2005), S. 132–135
- [39] ROSA, M. ; DIMITRIJEC, S. ; HARRISON, H.: Enhanced electrostatic force generation capability of angled comb finger design used in electrostatic comb-drive actuators. In: *Electronics Letters* 34 (1998), Nr. 18, S. 1787–1788
- [40] PATTERSON, P. ; HAH, D. ; HUYEN, H. ; TOSHIYOSHI, H. ; CHAO, R. ; WU, M.: A Scanning Micromirror with Angular Comb Drive Actuation. In: *Micro Electro Mechanical Systems* (2002), S. 544–547
- [41] TANG, W. ; LIM, M. ; HOWE, R.: Electrostatic Comb Drive Levitation and Control Method. In: *Journal of Microelectromechanical Systems* 1 (1992), Nr. 4, S. 170–178
- [42] TURNER, K. ; MILLER, S. ; HARTWELL, P. ; MACDONALD, N. ; STROGATZ, A. ; ADAMS, S.: Five parametric resonances in a micromechanical system. In: *Nature* 396 (1998), Nr. 6707, S. 149–151
- [43] BEERSCHWINGER, U. ; MILNE, N. ; YANG, A. ; REUBEN, R. ; SANGSTER, A. ; ZIAD, H.: Coupled Electrostatic and Mechanical FEA of a Micromotor. In: *Journal of Microelectromechanical Systems* 3 (1994), Nr. 4, S. 162–171
- [44] SANDNER, T. ; KLOSE, T. ; WOLTER, A. ; SCHENK, H. ; LAKNER, H.: Damping analysis and measurement for a comb-drive scanning mirror. In: *Proc. of SPIE* 5455 (2004), S. 147–158
- [45] SCHLEBUSCH, D. ; BUNK, G. ; VOGEL, U. ; SCHENK, H. ; ROSCHER, K.-U.: Analogue components for a mixed signal driver ASIC for resonant micro-mirror control. In: *Optical Sensors and Measuring Techniques and IRS2* (2004), S. 35–40

- [46] SCHUSTER, T.: *Untersuchungen zur Positionsdetektion von resonanten Mikroscooperspiegeln mittels miniaturisierter / integrierter Sensoren*, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, 2006
- [47] RAND, R. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations; Version 52*.  
<http://www.tam.cornell.edu/randdocs/>. 2005
- [48] Ç. ATAMAN ; UREY, H.: Modeling and characterization of comb-actuated resonant microscanners. In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 16 (2006), S. 9–16
- [49] Ç. ATAMAN ; KAYA, O. ; UREY, H.: Analysis of Parametric Resonances in Comb-Driven Microscanners. In: *Proc. of SPIE* 5455 (2004), S. 128–136
- [50] ARGYRIS, J. ; FAUST, G. ; HAASE, M.: *Die Erforschung des Chaos*. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1994
- [51] NAYFEH, A. ; MOOK, D.: *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, New York, 1995
- [52] KROCKER, M.: *Entwicklung eines kompakten Mikroscooper-Moduls mit MEMS-Scanner und Ansteuerung*, TU Dresden, Diplomarbeit, 2005
- [53] WOLTER, A. ; HSU, S. ; SCHENK, H. ; LAKNER, H.: Applications and requirements for MEMS scanner mirrors. In: *Proc. of SPIE* 5719 (2005), S. 22–27
- [54] UREY, H. ; WINE, D. ; OSBORN, T.: Optical performance requirements for MEMS-scanner based microdisplays. In: *Proc. of SPIE – MOEMS and Miniaturized Systems* 4178 (2000), S. 176–185
- [55] WINE, D. ; HELSEL, M. ; JENKINS, L. ; UREY, H. ; OSBORN, T.: Performance of a Biaxial MEMS-Based Scanner for Microdisplay Applications. In: *Proc. of SPIE – MOEMS and Miniaturized Systems* 4178 (2000), S. 186–196
- [56] SCHOLLES, M. ; BRÄUR, A. ; FROMMHAGEN, K. ; GERWIG, C. ; LAKNER, H. ; SCHENK, H. ; SCHEIBER, P. ; SCHWARZENBERG, M.: Design of miniaturized optoelectronic systems using resonant microscanning mirrors for projection of full-color images. In: *Proc. of SPIE – Current Developments in Lens Design and Optical Engineering VII* 6288 (2006)
- [57] SCHWARZENBERG, M.: Lissajous-Figuren und Auflösung beim Bi-Sinus-Lissajous-Projektor / Fraunhofer IPMS. 2006. – Forschungsbericht
- [58] ROSCHER, K. ; GRÄTZ, H. ; SCHENK, H. ; WOLTER, A. ; LAKNER, H.: Low cost projection device with a 2-dimensional resonant micro scanning mirror. In: *Proc. of SPIE – Electronic Displays* 5348 (2004), S. 22–31
- [59] SCHWARZENBERG, M.: Bi-Sine Motion artifacts: Results of physiological experiments / Fraunhofer IPMS Dresden. 2006. – Forschungsbericht
- [60] HECHT, E.: *Optik*. 3. Oldenbourg Verlag, München Wien, 2001

- [61] MESCHEDER, U.: *Mikrosystemtechnik – Konzepte und Anwendungen*. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart Leipzig, 2004
- [62] SCHAUMBURG, H.: *Werkstoffe*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1990
- [63] ANSYS Inc.: *ANSYS<sup>TM</sup> Release 10.0 Documentation*. 2005
- [64] BERTRAM, A.: *Vorlesungsskript zur Festigkeitslehre I+II*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät Maschinenbau, 2006
- [65] BRONSTEIN ; SEMENDJAJEW ; MUSIOL ; MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt (M.), 2000
- [66] BEITZ, W. ; KÜTTNER, K.: *Dubbel – Taschenbuch für dem Maschinenbau*. 18. Springer Verlag Berlin, 1995
- [67] TIMOSHENKO, S.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1987
- [68] SCHENK, H. *MIRAGE 1D-Spiegel, Berechnung der Parameter*. C-Programm *m1dp.c* / Fraunhofer IPMS Dresden. 2002
- [69] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. Springer Verlag, Berlin, 2001
- [70] BOWER, A. *Linear Elasticity – Lecture Notes*. Division of Engineering, Brown University <http://www.engin.brown.edu/courses/en224/notes.htm>. 2005
- [71] GROSS, D. ; SEELIG, Th.: *Bruchmechanik*. Springer Verlag, Berlin, 2001
- [72] WIKIPEDIA. *Vergleichsspannung — Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Vergleichsspannung&oldid=22698859> [Online; Stand 10. November 2006]. 2006
- [73] HSU, S. ; WOLTER, A. ; OWE, W. ; SCHENK, H.: Fracture strength of SOI springs in MEMS micromirrors. In: *Proc. of SPIE – MOEMS Display Imaging, and Miniaturized Microsystems VI* 6466 (2007)
- [74] VUDATHU, S. ; DUGANAPALLI, K. ; LAUR, R. ; KUBALINSKA, D. ; GERSTNER, A.: Parametric Yield Analysis of MEMS via Statistical Methods. In: *DTIP Symposium on Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS* (2006), S. 73ff
- [75] NUMERICAL ALGORITHMS GROUP. *NAG SoftIntegration Documentation*. <http://www.softintegration.com/docs/package/chnagstat/>. 2003
- [76] BROSENS, P.: Dynamic Mirror Distortions in Optical Scanning. In: *Applied Optics* 11 (1972), Nr. 12, S. 2987–2989
- [77] DICKENSHEETS, D.: *A Microfabricated Scanning Confocal Optical Microscope for In Situ Imaging*, Stanford University, Dissertation, 2003
- [78] NIKISHKOV, G.: Curvature estimation for multilayer hinged structures with initial strains. In: *Journal of Applied Physics* 94 (2003), Nr. 8, S. 5333–5336

- [79] CONANT, R. ; NEE, J. ; LAU, K. ; MULLER, R.: Dynamic Deformation of Scanning Mirrors. In: *IEEE/LEOS Conference on optical MEMS (proceedings)* (2000), S. 49–50
- [80] BUSER, R.: *Theoretical and experimental investigations on silicon single crystal resonant structures*, Universität Neuchatel, Dissertation, 1989
- [81] ANDREWS, M. K. ; TURNER, G. C. ; HARRIS, P. D. ; HARRIS, I. M.: A resonant pressure sensor based on a squeezed film of gas. In: *Sensors and Actuators A* 36 (1993), S. 219–226
- [82] ANDREWS, M. ; HARRIS, I. ; TURNER, G.: A comparison of squeeze-film theory with measurements on a microstructure. In: *Sensors and Actuators A* 36 (1993), S. 79–87
- [83] KLOSE, T. ; SANDNER, T. ; SCHENK, H. ; LAKNER, H.: Extended Damping Model for Out-Of-Plane Comb driven Micromirrors. In: *MOEMS Display, Imaging, and Miniaturized Microsystems IV, Proc. of SPIE* 6114 (2006), S. 184–195
- [84] STARR, J.: Squeeze-Film Damping in Solid-State Accelerometers. In: *IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop* (1990), S. 44–47
- [85] COMSOL AB: *COMSOL Documentation*. 3.3. FEMLAB GmbH, Berlin : COMSOL Inc., 2006
- [86] BENNINI, F.: *Ordnungsreduktion von elektrostatisch-mechanischen Finite Elemente Modellen für die Mikrosystemtechnik*, TU Chemnitz, Dissertation, 2005
- [87] REIBIGER, A.: *Theoretische Elektrotechnik (Vorlesungsskript)*. TU Dresden, 2003
- [88] SHAKHRAI, M.: Isolation Structures Test / *Fraunhofer IPMS* Dresden. 2006. – Forschungsbericht
- [89] DHARIWAL, R. ; TORRES, J. ; DESMULLIEZ, M.: Electric Field Breakdown at Micrometre separations in air and nitrogen at atmospheric pressure. In: *Science, Measurement and Technology, IEEE Proc.* 147 (2000), Nr. 5, S. 261–265
- [90] JONES, T.: Electrical breakdown limits for MEMS / University of Rochester. 2002. – Forschungsbericht
- [91] BUSCH, G. ; FISCHER, T.: Feldemission aus Silizium. In: *Phys. kondens. Materie* 1 (1963), S. 369–393
- [92] PAMIDIGHANTAM, S. ; PUERS, R. ; BAERT, K. ; TILMANS, H.: Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions. In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 12 (2002), S. 458–464
- [93] PAMIDIGHANTAM, S. ; PUERS, R. ; TILMANS, H.: Pull-in voltage analysis of fixed-fixed beams. In: *Proc. MME* (2001), S. 269–272
- [94] NATHANSON, H. ; NEWELL, W. ; WICKSTROM, R. ; DAVIS, J.: The resonant gate transistor. In: *IEEE Trans. Electron Devices* 14 (1967), S. 117–133

- [95] LAUTERBORN, W. ; KURZ, T.: *Coherent Optics*. Springer Verlag, Berlin, 2003
- [96] EICHLER, J. ; DÜNKEL, L. ; EPPICH, B.: Die Strahlqualität von Lasern. In: *Laser Journal* (2004), Nr. 2, S. 63–66
- [97] VAN DEN ENDEN, W. ; VERHOECKX, N.: *Digitale Signalverarbeitung*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1990
- [98] TURNER, K. ; ZHANG, W.: Design and Analysis of a Dynamic MEM Chemical Sensor. In: *Proc. of the American Control Conference* (2001), S. 1214–1218
- [99] ZHANG, W. ; BASKARAN, R. ; TURNER, K.: Effect of cubic nonlinearity on auto-parametrically amplified resonant MEMS mass sensor. In: *Sensors and Actuators* 102 (2002), Nr. 1-2, S. 139–150
- [100] DRABE, Ch. ; JAMES, R. ; KLOSE, T. ; WOLTER, A. ; SCHENK, H. ; LAKNER, H.: A New Micro Laser Camera. In: *Proc. of SPIE – MOEMS and Miniaturized Systems VI* 6466 (2007)
- [101] QUARANTA, G. ; MASARATI, P. ; MANTEGAZZA, P.: A Conservative Mesh-Free Approach for Fluid-Structure Interface Problems. In: *Coupled Problems* (2005), S. 1–23
- [102] KUNOW, A.: *Finite-Elemente-Methode*. Hüthig Verlag, Heidelberg, 1998
- [103] YSTRÖM, J.: Mehrgitterverfahren – Schneller und effizienter dank neuer Löser. In: *COMSOL News* (2006)
- [104] CONRAD, H.: *Konzeptionelle Untersuchung eines elektrothermisch auslenkbaren mikromechanischen Membranspiegels zur aktiven Fokusvariation*, HTW Dresden, Diplomarbeit, 2007
- [105] CADFEM GMBH: Das Element *SOLSH190*. In: *Service Newsletter* (2005), Nr. 02, S. 6–9
- [106] LOHMANN, B.: Ordnungsreduktion und Dominanzanalyse nichtlinearer Systeme. In: *at – Automatisierungstechnik* 42 (1994), S. 466–474
- [107] LEUNG, A. ; FUNG, T.: Linear-non-linear dynamic substructures. In: *International Journal for numerical Methods in Engineering* 31 (1991), S. 967–985
- [108] BECHTOLD, T. ; SALIMBAHRAMI, B. ; RUDNYI, E. ; LOHMANN, B. ; KORVINK, J.: Krylov-Subspace-Based Order Reduction Methods Applied to Generate Compact-Electro-Thermal Models for MEMS / IMTEK, Universität Freiburg; IAT, University of Bremen. 2002. – Forschungsbericht
- [109] BECHTOLD, T.: *Model Order Reduction of Electro-Thermal MEMS*, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Dissertation, 2005
- [110] GABBAY, L.: *Computer Aided Macromodeling for MEMS*, Massachusetts Institute of Technology, Dissertation, 1998

- [111] SCHNEIDER, P. ; SCHNEIDER, A. ; BASTIAN, J. ; REITZ, S. ; SCHWARZ, P.: MOSCITO - A Program System For MEMS Optimization. In: *Proc. DTIP Conference, Cannes (2002)*, S. 248–257
- [112] SCHNEIDER, A. ; IVASK, E.: Internet-based Collaborative System Design Using MOSCITO. In: *Workshop on Challenges in Collaborative Engineering (2003)*
- [113] THE MATHWORKS. *MATLAB and Simulink for Technical Computing*. <http://www.mathworks.com>. 2007
- [114] SCHNEIDER, A. ; SCHNEIDER, P. ; GRAMATOVA, E. ; IVASK, E.: Internet-basierter Systementwurf mit *MOSCITO*. In: *EIS-Workshop Dresden (2001)*, S. 295–296
- [115] SCHNEIDER, A. ; PARODAT, S. ; SCHWARZ, P.: Verteilte, simulationsbasierte Optimierung mit *MOSCITO*. In: *ASIM-Workshop KI-Methoden in der simulationsbasierten Optimierung, Chemnitz 13 (1999)*, S. 89–96
- [116] CLARK, J. ; BINDEL, D. ; KAO, W. ; ZHU, E. ; KUO, A. ; ZHOU, N. ; NIE, J. ; DEMMEL, J. ; BAI, Z. ; GOVINDJEE, S. ; PISTER, K. ; GU, M. ; AGOGINO, A.: Addressing the Needs of Complex MEMS Design / University of California at Berkeley, University of California at Davis, University of Michigan. 2001. – Forschungsbericht
- [117] BINDEL, D. ; CLARK, J. ; ZHOU, N.: *SUGAR 3.0: A MEMS Simulation Program (User's Guide)*. 3.0. 497 Cory Hall, Berkeley CA: Berkeley Sensor & Actuator Center, University of California at Berkeley, 2002
- [118] DRABE, Ch. ; KLOSE, T. ; SCHENK, H. ; WOLTER, A. ; LAKNER, H.: A Large Deflection Translatory Actuator for Optical Path Length Modulation. In: *Proc. of SPIE 6186 (2006)*
- [119] KENDA, A. ; DRABE, Ch. ; SCHENK, H. ; FRANK, A. ; LENZHOFFER, M. ; SCHERF, W.: Application of a Micromachined Translatory Actuator to an optical FTIR Spectrometer. In: *Proc. of SPIE 6186 (2006)*
- [120] THE MATHWORKS: **MATLAB**<sup>®</sup> – *The Language of Technical Computing*. 6. Edition. Natick. MA: The MathWorks, Inc., 2002
- [121] STROUSTRUP, B.: *Die C++-Programmiersprache*. Addison-Wesley, München, 2000 (2. überarb. Aufl.)
- [122] BLASL, M. *Betreuung und Weiterentwicklung eines Messaufbaus zur spektralen Analyse mikromechanischer Gitter und Entwicklung eines Messaufbaus zur Charakterisierung des realen Oszillationsverhaltens eines 1-dimensionalen Aktors*. Praktikumsbericht, HTW Mittweida. 2006
- [123] ZIMMER, F. ; HEBERER, A. ; SANDNER, Th. ; GRÜGER, H. ; SCHENK, H. ; LAKNER, H. ; KENDA, A. ; SCHERF, W.: Investigation and characterization of high-efficient NIR-scanning gratings used in NIR micro-spectrometer. In: *Proc. of SPIE – MOEMS and Miniaturized Systems 6466 (2007)*

- 
- [124] HSU, S. ; KLOSE, T. ; DRABE, Ch. ; WOLTER, A. ; SCHENK, H.: Ultra flat high resolution microscanners. In: *IEEE/LEOS Proc. on Optical MEMS and Nanophotonics* (2007), S. 197–198
- [125] WOLTER, A. ; KLOSE, T. ; HSU, S. ; SCHENK, H. ; LAKNER, H.: Scanning 2D micromirror with enhanced flatness at high frequency. In: *Proc. of SPIE – MOEMS Display, Imaging and Miniaturized Microsystems IV* 6114 (2006)
- [126] KLOSE, T. ; KUNZE, D. ; SANDNER, T. ; SCHENK, H. ; LAKNER, H. ; SCHNEIDER, A. ; SCHNEIDER, P.: Stress optimization of a micromechanical torsional spring. In: *Nanotech* 3 (2005), S. 602–605
- [127] GRASSHOFF, T. ; KLOSE, T.: IPMS Scanner Limits / *Fraunhofer IPMS* Dresden. 2007. – Forschungsbericht
- [128] VEIJOLA, T.: Compact Damping Models for Lateral Structures Including Gas Rarefaction Effects / Helsinki University of Technology. 2000. – Forschungsbericht
- [129] DRABE, Ch.: *Ein resonanter Mikroaktor zur optischen Weglängenmodulation*, Universität Duisburg-Essen, Dissertation, 2006

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Abstraktionsebenen beim Entwurf von <i>MEMS</i> -Bauelementen . . . . .	2
1.2	Physikalische Domänen des <i>MOEMS</i> -Entwurfs . . . . .	3
2.1	Marktprognose für einige Produkte der Mikrosystemtechnik . . . . .	7
2.2	Beispiele für <i>MEMS</i> -Bauelemente . . . . .	8
2.3	Technologien zur Herstellung von <i>MEMS</i> -Bauelementen . . . . .	9
2.4	Schematischer Aufbau eines Mikroscoannerspiegels . . . . .	11
2.5	Möglichkeiten zur Realisierung elektrostatischer Antriebe . . . . .	14
2.6	Eigenschaften der <i>Out-of-plane</i> -Fingerelektrode . . . . .	15
2.7	Der <i>Fraunhofer IPMS</i> Mikroscoannerspiegel . . . . .	18
2.8	Kapazitätsverlauf des <i>Out-of-plane-comb</i> -Antriebs . . . . .	20
2.9	Antriebskonzept des <i>Fraunhofer IPMS</i> Mikroscoannerspiegels . . . . .	21
2.10	Zusammenhang zwischen Antriebsspannung und Amplitude bei synchroni- sierter Anregung . . . . .	22
2.11	Näherungen zur Untersuchung der parametrischen Anregung . . . . .	24
2.12	Stabilitätsregionen des <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	26
2.13	Typische Frequenz-Antwortkurve des <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	26
2.14	Mögliche Strahl-Trajektorien für die Projektion von Bildern . . . . .	28
2.15	Definition der Winkelauflösung für Mikrospiegel . . . . .	29
2.16	Entwurfsraum für <i>Fraunhofer IPMS</i> Mikroscoannerspiegel . . . . .	31
2.17	Definition der dynamischen Deformation . . . . .	32
3.1	Definition der Koordinatensysteme eines Mikroscoannerspiegels . . . . .	37
3.2	Definition der Zustandsgrößen in anisotropen Werkstoffen . . . . .	38
3.3	Einige Belastungsfälle stabförmiger elastischer Elemente . . . . .	41
3.4	Beispiel für eine nichtlineare Geometrie . . . . .	43
3.5	Torsionsstab mit rechteckiger Querschnittsfläche . . . . .	43
3.6	Querschnittsverwölbung in Torsionsstäben mit rechteckigem Querschnitt .	44
3.7	Gültigkeit der Vergleichsspannungshypothesen . . . . .	46
3.8	Vergleichsspannungen einer ausgelenkten mikromechanischen Torsionsfeder	47
3.9	Typisches Versagen einer Torsionsfeder mit rechteckigem Querschnitt . . .	48
3.10	Scherspannungen in Torsionsstäben mit rechteckförmigem Querschnitt . . .	50
3.11	Normalspannungen in Torsionsstäben mit rechteckförmigem Querschnitt und fester Einspannung . . . . .	51
3.12	Grenzen der analytischen Spannungsmodelle . . . . .	52
3.13	Mechanische Spannungen in schmalen Torsionsfedern unter Schockbelastung	54
3.14	Mechanische Spannungen in breiten Torsionsfedern unter Schockbelastung	55
3.15	Beispiele für Freiheitsgrade eines 1D-Mikroscoanners . . . . .	56
3.16	Geometrische Abweichungen aufgrund von Fertigungstoleranzen . . . . .	59
3.17	Deformationsprofile rechteckiger Spiegelplatten . . . . .	62
3.18	Grenzen des analytischen Modells für die dynamische Deformation . . . . .	62
3.19	Approximationen zur <i>Slip</i> -Korrektur . . . . .	68
3.20	Fluidmechanisches <i>FE</i> -Modell einer Kammelektrode . . . . .	70
3.21	Fluidströmungen innerhalb der Kammstruktur . . . . .	71
3.22	Strömungen innerhalb einer Kammelektrode . . . . .	72
3.23	Ergebnisse des <i>FE</i> -Dämpfungsmodells . . . . .	73
3.24	Verlauf des von einer Kammelektrode verursachten Dämpfungsmoments . .	75
3.25	Dämpfungsmechanismen kippender Platten . . . . .	76

3.26	Einfluss der Rückseitengrube auf die Dämpfung . . . . .	78
3.27	Einfluss der Randeffekte des elektrischen Felds . . . . .	81
3.28	Näherung für den Kapazitätsverlauf . . . . .	81
3.29	Grenzen der Näherung für den Kapazitätsverlauf . . . . .	82
3.30	Isolationsstrukturen in <i>Fraunhofer IPMS</i> Mikroscoannerspiegeln . . . . .	83
3.31	Durchschlagsspannungen für Mikrostrukturen in Luft . . . . .	85
3.32	Ersatzschaltbild eines <i>Fraunhofer IPMS</i> Mikroscoannerspiegels . . . . .	86
3.33	Wirkung parasitärer elektrostatischer Momente . . . . .	88
3.34	<i>Pull-in</i> -Effekt einer Fingerelektrode . . . . .	91
3.35	Erhöhung der <i>Pull-in</i> -Spannung durch trapezförmig ausgeführte Fingerelektroden . . . . .	93
3.36	Fernfeld-Näherung der Wellenoptik . . . . .	95
3.37	Anwendung der <i>DFT</i> zur Bestimmung des Beugungsmusters im Fernfeld . . . . .	97
4.1	Stabilitätseigenschaften eines Mikroscoannerspiegels bei parametrischer Anregung . . . . .	104
4.2	Amplituden- und Phasengang bei parametrischer Anregung . . . . .	106
4.3	Anschwingen in parametrischer Resonanz . . . . .	107
4.4	Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten auf die dynamischen Eigenschaften . . . . .	108
4.5	Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten auf das Bauelementverhalten . . . . .	109
4.6	Beispiel für eine degressive Torsionsfeder . . . . .	111
5.1	Kopplungen zwischen physikalischen Phänomenen bzw. Domänen . . . . .	116
5.2	Beispiele für 3D- <i>FE</i> -Netze . . . . .	117
5.3	Konvergenzverhalten verschiedener <i>FE</i> -Netze ( <i>vgl. Anhang C.6</i> ) . . . . .	118
5.4	Hybrid-Netze in <i>FE</i> -Modellen . . . . .	120
5.5	Orthogonalprojektion auf Basis der modalen Superposition . . . . .	123
5.6	Beispiel für einen typischen <i>MOSCITO-Workflow</i> . . . . .	126
5.7	<i>SUGAR</i> -Modell eines Mikrospiegels . . . . .	128
5.8	<i>SUGAR</i> -Modell eines Translationsspiegels . . . . .	129
5.9	Vererbungshierarchie der <i>IMtk</i> -Klassenbibliothek . . . . .	132
5.10	Nutzung rekursiver Methodenaufrufe im <i>IMtk</i> . . . . .	134
5.11	Erzeugen der grafischen Repräsentation eines Objekts mit dem <i>IMtk</i> . . . . .	135
5.12	Abhängigkeiten zwischen <i>IMtk</i> -Klassen . . . . .	135
5.13	Ordnungsreduktion auf Basis der <i>modalen Zerlegung</i> . . . . .	136
5.14	Verifikation der Modelle anhand von Dämpfungsmessungen . . . . .	140
5.15	Verifikation des Bauelementverhaltens bei parametrischer Anregung . . . . .	141
5.16	Verifikation der Stabilitätseigenschaften . . . . .	141
5.17	Verifikation der Modelle anhand zeitaufgelöster Amplitudenmessungen . . . . .	143
6.1	Entwurfsprozess für <i>Fraunhofer IPMS</i> Mikroscoannerspiegel . . . . .	146
6.2	Verteilte Federn zur Reduzierung der dynamischen Deformation . . . . .	149
6.3	Vorauslegung von verteilten Federn mit <i>ANSYS®</i> und <i>MOSCITO</i> . . . . .	150
6.4	Strukturmechanisches <i>FE</i> -Modell eines 2D-Scannerspiegels mit verteilten Federn . . . . .	151
6.5	Statische <i>FE</i> -Analyse der Spiegelplatte (Entwurfsbeispiel) . . . . .	154
6.6	Statische <i>FE</i> -Analyse des beweglichen Rahmens (Entwurfsbeispiel) . . . . .	154
6.7	Mechanische Spannungen bei Schockbelastung (Entwurfsbeispiel) . . . . .	156
6.8	Dynamische Deformation eines 2D-Mikroscoannerspiegels (Entwurfsbeispiel) . . . . .	157
6.9	Einfluss der Deformation auf die Intensitätsverteilung im Fernfeld . . . . .	157
6.10	Makromodell eines 2D-Mikroscoannerspiegels (Entwurfsbeispiel) . . . . .	158

6.11	Stabilitätsregionen eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel) . . . .	159
6.12	Dynamische Simulation eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel) .	161
6.13	Simulierte Antwortkurven des beweglichen Rahmens (Entwurfsbeispiel) . .	161
6.14	Lichtmikroskopische Aufnahme eines 2D-Scanners (Entwurfsbeispiel) . . .	162
6.15	Amplitudenkennlinien eines 2D-Scanners bei synchronisiertem Antrieb (Entwurfsbeispiel) . . . . .	163
7.1	Erweiterter Entwurfsraum für <i>Fraunhofer IPMS</i> Mikroscannerspiegel . . .	166
A.1	Einheitszelle des Silizium-Einkristalls . . . . .	184
A.2	Richtungsabhängigkeit der elastischen Eigenschaften . . . . .	185
D.1	Strömungsverhältnisse an eingeschwenkten Fingerelektroden . . . . .	197
D.2	Strömungsverhältnisse an ausgeschwenkten Fingerelektroden . . . . .	197
E.1	Verlauf des komplexen Amplitudenquadrats für die Fixpunkte des <i>SINUS</i> - Scanners . . . . .	202
E.2	Verlauf der Realteile der Eigenwerte der JACOBI-Matrix am Beispiel des <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	203
E.3	Numerisch ermittelter Verlauf der Funktionaldeterminante ( <i>SINUS</i> -Scanner)	204
E.4	Bifurkationsdiagramm des <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	206
E.5	Bifurkationsdiagramm des <i>SINUS</i> -Scanners für physikalische Parameter . .	207
F.1	Modelle zur Bestimmung der Kapazität zwischen beliebig orientierten Flächen . . . . .	225
F.2	Modelle zur Kapazitätsberechnung im <i>IMtk</i> . . . . .	225
F.3	Nutzung von Symmetrien bei der Generierung von Scanner-Modellen . . .	230
F.4	Modell einer programmierbaren Spannungsquelle . . . . .	232
F.5	Charakteristiken des <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	235
F.6	Simulierte Frequenz-Antwortkurven eines <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	238
F.7	Bestimmung der Stabilitätseigenschaften des Schwingungssystems mit dem <i>IMtk</i> . . . . .	239
F.8	Charakteristiken eines 2D-Mikroscannerspiegels . . . . .	242
G.1	Spiegelplatte bei synchronisierter Anregung (Entwurfsbeispiel) . . . . .	251
G.2	Beweglicher Rahmen bei synchronisierter Anregung (Entwurfsbeispiel) . . .	251
G.3	Spiegelplatte bei parametrischer Anregung (Entwurfsbeispiel) . . . . .	252
G.4	Beweglicher Rahmen bei parametrischer Anregung (Entwurfsbeispiel) . . .	252
G.5	Experimentell ermittelter Verlauf der dynamischen Deformation (Entwurfs- beispiel) . . . . .	253

# Tabellenverzeichnis

2.1	Typische Beispiele für am <i>Fraunhofer IPMS</i> gefertigte Mikroscoannerspiegel	18
2.2	Parameter des <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	22
2.3	Anforderungen an Mikroscoannerspiegel für Projektionsanwendungen . . . . .	29
2.4	Gegenüberstellung von benötigten und möglichen optischen Aperturen . . . . .	30
3.1	Symbolerklärung zu Abb. 3.1 . . . . .	37
3.2	Richtungsabhängigkeit der Steifigkeiten einer typischen Mikrostruktur . . . . .	41
3.3	Korrekturfaktoren zur Bestimmung der dynamischen Deformation . . . . .	63
3.4	Einfluss der <i>Squeeze-film</i> -Dämpfung . . . . .	77
3.5	Elektrische Eigenschaften der Isolationsstrukturen . . . . .	84
4.1	Zusammenhang normierter und physikalischer Parameter des <i>SINUS</i> -Scanners	99
4.2	Beeinflussung der Nichtlinearitäten mittels Federgeometrien . . . . .	113
5.1	Eigenfrequenzen eines Translationsspiegels . . . . .	129
5.2	Objektorientierte Programmierung mit dem <i>IMtk</i> . . . . .	131
5.3	Verifikation der Modelle zur Berechnung der Stabilitätsspannung . . . . .	139
6.1	Anforderungen an einen 2D-Mikroscoannerspiegel (Entwurfsbeispiel) . . . . .	148
6.2	Eigenfrequenzen eines 2D-Mikroscoannerspiegels (Entwurfsbeispiel) . . . . .	153
6.3	Stabilitätsspannungen eines 2D-Mikroscoannerspiegels (Entwurfsbeispiel) . . . . .	159
F.1	In der <i>IMtk</i> -Bibliothek realisierte Klassen in alphabetischer Reihenfolge . . . . .	211
F.2	<i>Highlevel</i> -Funktionen der <i>IMtk</i> -Toolbox . . . . .	221
F.3	Innerhalb der globalen Datenstruktur <i>IMTK</i> verwaltete Informationen . . . . .	222
F.4	Übersicht zur Basisklasse <i>imtk_element</i> . . . . .	223
F.5	Nutzung von Symmetrien in der Klasse <i>imtk_comb_electrode</i> . . . . .	229
F.6	Einflussmatrix zur Auslegung gerader Torsionsfedern ( $h = \text{const}$ ) . . . . .	240

## Listings

1	<i>SUGAR</i> -Netzliste eines Mikrospiegels . . . . .	128
2	Prinzipielle Implementation der Methode zur Berechnung der Masse . . . . .	134
3	Beispiel für einen Aufruf der <code>plot()</code> -Methode . . . . .	135
1	Erzeugung eines 2D-Scanner-Modells mit dem <i>IMtk</i> (Entwurfsbeispiel) . . . . .	158
1	Erzeugen einer Spannungsquelle . . . . .	232
2	Beispiel für einen Aufruf der Methode <code>find_flexure()</code> . . . . .	241
3	Erzeugen einer Kammelektrode . . . . .	244
4	Erzeugen einer gedrehten und verschobenen Torsionsfeder . . . . .	245
5	Verwaltung von Referenzen in Superreferenzen . . . . .	245
6	Realisierung von <i>Sweeps</i> mit der Klasse <code>imtk_voltage_source</code> . . . . .	246
7	Berechnung der Stabilitätsspannungen eines <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	247
8	Transiente Simulation eines <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	247
9	Simulation der Frequenz-Antwort-Kurve eines <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	248
10	Statische Simulation eines <i>SINUS</i> -Scanners . . . . .	248
11	Darstellung der Charakteristiken eines 2D-Scanners . . . . .	249
12	Transiente Simulation eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel) . . . . .	250

# Anlagenverzeichnis

1 *stabilitaetsanalyse.nb*:

*Mathematica*<sup>®</sup>-Notebook zur Stabilitätsanalyse der nichtlinearen Bewegungsgleichung des *Fraunhofer IPMS*-Mikroscannerspiegels (Kapitel 4)

2 *stabilitaetsanalyse.pdf*:

PDF-Version des *Mathematica*<sup>®</sup>-Notebooks *stabilitaetsanalyse.nb*

3 *IMtk\_v1.0*:

Version 1.0 der *IMtk*-Klassenbibliothek (Kapitel 5)

4 *IMtk\_Installation.txt*:

Hinweise zur Installation und Nutzung der *IMtk*-Klassenbibliothek

Alle Anlagen sind in Dateiform auf dem beiliegenden Datenträger verfügbar. Für die Online-Version dieser Arbeit sind die Anlagen in der eingebettete Datei *Anlagen.zip\_* enthalten. Diese kann mit einem PDF-Betrachter extrahiert und anschließend mit jeder gängigen Kompressionssoftware entpackt werden.



## A Materialeigenschaften

### A.1 Einkristallines Silizium

#### Kristallstruktur

Einkristallines Silizium besitzt eine symmetrische Kristallstruktur. Diese besteht aus zwei kubisch flächenzentrierten Gittern die um ein Viertel der Raumdiagonale versetzt sind. Die Gitterkonstante  $a$  beträgt 0.543 nm. Jedes Atom im Gitter ist tetraederförmig an seine vier benachbarten Atome gebunden.

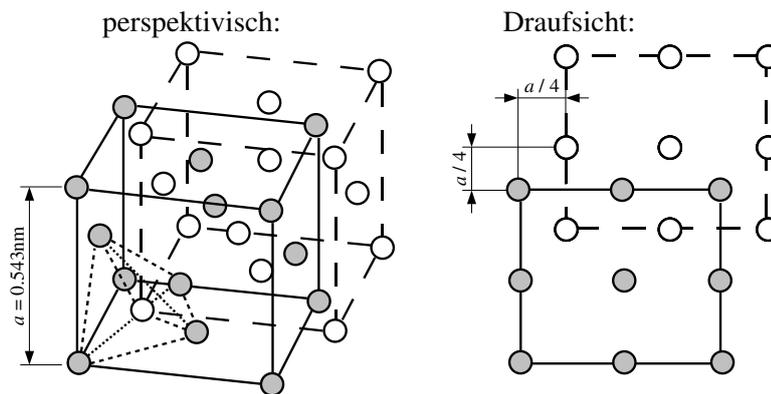


Abb. A.1: Einheitszelle des Silizium-Einkristalls.

#### Isotrope Materialeigenschaften

Alle Angaben sind gültig für Raumtemperatur [5]:

Eigenschaft	Streckgrenze	Knoophärte	Dichte	Wärmeleitfähigkeit	Wärmeausdehnungskoeffizient	spezifische Wärme
Symbol	$\sigma_y$	$HK$	$\rho_{m,Si}$	$\lambda$	$\alpha$	$c_m$
Wert	7.00 GPa	0.85 kg/mm <sup>2</sup>	2329.0 kg/m <sup>3</sup>	156 W/mK	$2.33 \cdot 10^{-6}/\text{K}$	695 Ws/kgK

#### Anisotrope Materialeigenschaften

Aufgrund der symmetrischen Kristallstruktur verhalten sich die richtungsabhängigen Materialeigenschaften bezüglich der Symmetrieachsen des Kristalls periodisch mit einem Raumwinkel von  $\Omega = 90^\circ$ . Unterhalb von  $700^\circ\text{C}$  kann Silizium als ideal elastisches Material betrachtet werden. Alle Angaben sind gültig für Raumtemperatur [3, 5]:

Eigenschaft	Elastizitätskoeffizient	Elastizitätsmoduln	Bruchzähigkeit
Symbol	$s$	$E_{[hkl]}$	$K_{IC,(hkl)}$
Wert	$s_{11} = 7.68/\text{TPa}$ $s_{12} = -2.14/\text{TPa}$ $s_{44} = 12.56/\text{TPa}$	$E_{[100]} = 130 \text{ GPa}$ $E_{[110]} = 169 \text{ GPa}$ $E_{[111]} = 188 \text{ GPa}$	$K_{IC,(100)} = 0.95 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$ $K_{IC,(110)} = 0.90 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$ $K_{IC,(111)} = 0.82 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$

Der Elastizitätsmodul  $E_{[hkl]}$  lässt sich aus den Elastizitätskoeffizienten  $s$  bestimmen, es ist hier jedoch zum besseren Verständnis der orthotropen Eigenschaften mit aufgeführt. Weitere wichtige Materialparameter wie der Schubmodul  $G$  oder die *Poisson-Zahl*  $\nu$  können ebenfalls aus  $s$  bestimmt werden. Der richtungsabhängige Verlauf für E-Modul, Poisson-Zahl und Schubmodul für die (100)-Ebene ist in der folgenden Abbildung enthalten.

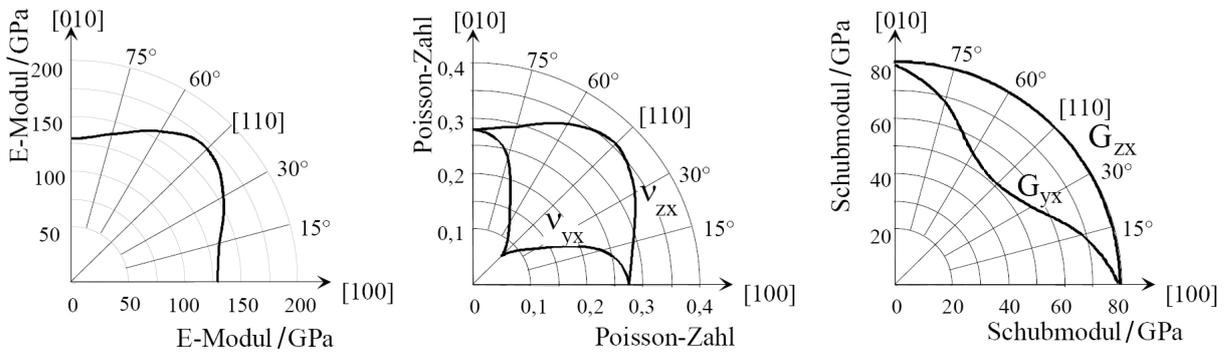


Abb. A.2: Richtungsabhängigkeit der elastischen Eigenschaften. [5]

### Temperaturabhängigkeit

**Die Dichte** von einkristallinem Silizium ist nur geringfügig von der Temperatur abhängig [5]. Sie sinkt um 0.11 % je 100 °C Temperaturerhöhung. Der Grund dafür ist die Wärmedehnung des Materials.

**Die elastischen Eigenschaften** von einkristallinem Silizium sind ebenfalls nur in geringem Maße von der Umgebungstemperatur abhängig [5]. Der Elastizitätsmodul  $E_{[hkl]}$  verringert sich um ca. 1 % je 100 °C Temperaturerhöhung.

## A.2 Umgebungsluft

Alle Angaben sind gültig für Raumtemperatur [66]:

Eigenschaft	BOLTZMANN-konstante	Gas-konstante	molare Masse	Molekül-durch-messer	relative Permittivität
Symbol	$k$	$R$	$M$	$\sigma$	$\epsilon_r$
Wert	$13.8 \cdot 10^{-24} \text{ J/K}$	$8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$	$29 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$	0.35 nm	1

Die dynamische Viskosität  $\eta$  ist stark von der Temperatur des Fluids  $T$  abhängig [66]:

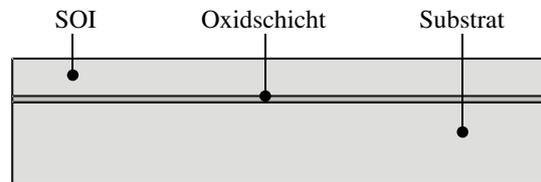
$T/\text{K}$	90	169	203	241	273	291	313	327	347	502
$\eta \cdot 10^6 / \text{Pa} \cdot \text{s}$	6.27	11.3	13.3	15.3	17.1	18.3	19.0	19.6	21.0	26.4

## B MEMS-Prozess des Fraunhofer IPMS

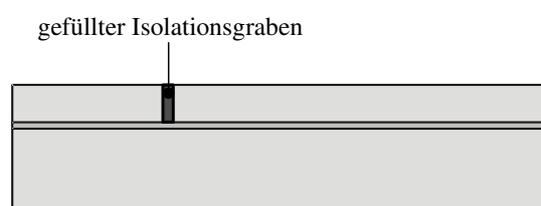
[3, 29]

### B.1 Prozessablaufplan AME1

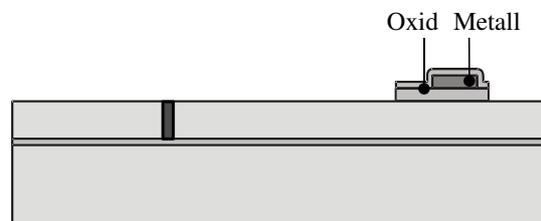
**Schritt 1:** Als Ausgangsmaterial dienen (100)-orientierte *BSOI*-Substrate mit  $30\ \mu\text{m}$  dickem, Bor-dotiertem *SOI*. Als Isolator besitzen diese eine  $1000\ \text{nm}$  dicke Oxidschicht zwischen Substrat und *SOI*.



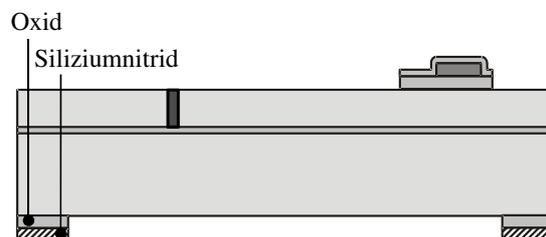
**Schritt 2:** Zuerst werden die Isolationsgräben innerhalb der *SOI*-Schicht erzeugt, welche im Bauelement später die elektrischen Potentiale trennen. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wird auf die dazu nötigen Schritte hier nicht näher eingegangen.



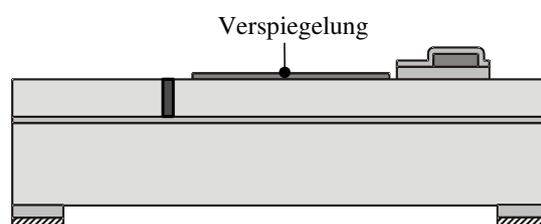
**Schritt 3:** Auf das *SOI* wird ein Film aus Silicatglas abgeschieden. Nach der Strukturierung der Kontaktlöcher wird eine Metallschicht (AlSiCu) aufgesputtert und strukturiert. Aus dieser Schicht werden die Leiterbahnen gebildet, welche noch mit einer Silicatglasschicht passiviert werden. Anschließend wird das Oxid aus den mechanisch und optisch aktiven Gebieten, sowie von den Bondpads nasschemisch entfernt.



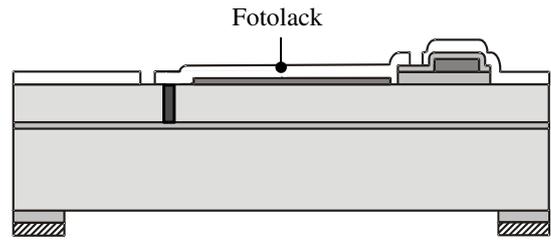
**Schritt 4:** Um die Entfernung des Substrats unterhalb der mikromechanischen Elemente mittels anisotroper Ätzung zu vereinfachen, wird die Scheibe auf eine Dicke von  $420\ \mu\text{m}$  geschliffen. Anschließend wird die für die Rückseitenätzung benötigte Hartmaske aus Siliziumdioxid und Siliziumnitrid abgeschieden und strukturiert.



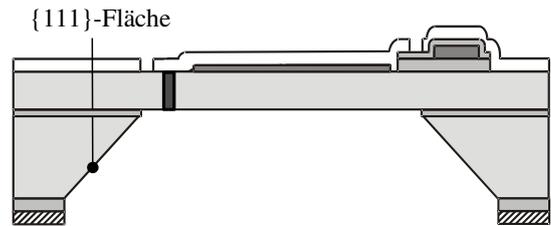
**Schritt 5:** Im nächsten Schritt wird die Verspiegelung, bestehend aus einer dünnen Aluminium-Schicht, auf der gesamten Oberfläche abgeschieden. Die Metallschicht wird anschließend so strukturiert, dass ausschließlich die optisch aktive Fläche des späteren Mikrospiegels bedeckt ist.



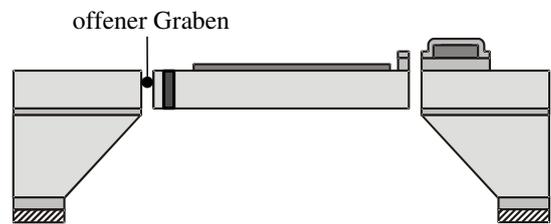
**Schritt 6:** Nun wird die Fotolackmaske für das anisotrope Trockenätzen der tiefen Gräben erzeugt, welche später Spiegelplatte, Fingerelektroden und Torsionselemente definieren.



**Schritt 7:** Im nächsten Prozessschritt wird die Siliziummembran durch anisotropes Ätzen des Siliziumsubstrats freigelegt. Dabei fungieren die {111}-Fläche und die Oxidschicht als Ätzstopp. Zusätzlich wird das vergrabene Oxid unter der Membran nasschemisch entfernt.



**Schritt 8:** Im letzten Schritt erfolgt die Strukturierung der Membran mithilfe eines *ASE<sup>TM</sup>*-Prozesses. Anschließend wird der Fotolack entfernt und die Prozessierung des Wafers ist abgeschlossen, die Bauelemente können vereinzelt werden.



## B.2 Prozessabhängige Materialeigenschaften

### Elektrische Eigenschaften

Aufgrund der Dotierung der *SOI*-Schicht mit Bor-Atomen ergeben sich veränderte elektrische Eigenschaften [27]:

Eigenschaft	Dotierung	Dotierungskonzentration	spezifischer elektrischer Widerstand spezifiziert	typisch
Symbol	-	$N_A$	$\rho_{SOI}$	$\rho_{SOI}$
Wert	p++	$1.8 \cdot 10^{18} / \text{cm}^2$	$< 0.025 \Omega \cdot \text{cm}$	$0.017 \Omega \cdot \text{cm}$

### Mechanische Eigenschaften

Die Prozessierung der *SOI*-Membran und die sich daraus ergebende Mikro-Rauigkeit der Oberflächen beeinflusst die Bruchspannung sehr stark. Dies muss beim Entwurf beachtet werden. Es ergeben sich bei Anwendung der Normalspannungshypothese die folgenden Grenzwerte (siehe auch Abschnitt 3.2.3):

Eigenschaft	Streckgrenze	max. Scherspannung
Symbol	$\max \sigma_1 = \max \sigma_{ii}$	$\max \sigma_1 = \max \sigma_{ij}$
Wert	1 GPa	1 GPa

## C Strukturmechanische *FE*-Analysen

### C.1 *FEM*-Werkzeuge am *Fraunhofer IPMS*

Am *Fraunhofer IPMS* stehen die kommerziellen *FEM*-Programme *ANSYS*<sup>®</sup> und *COMSOL Multiphysics*<sup>TM</sup> für den Entwurf von Mikroscooperspiegeln zur Verfügung. Die Anwendungsmöglichkeiten bzw. Fähigkeiten beider Werkzeuge weisen in vielen Bereichen Überschneidungen auf. Teilweise grundsätzliche Unterschiede in der Implementierung bzw. Formulierung der Probleme in beiden Systemen und die sich daraus ergebende Möglichkeit eines Vergleichs verschiedener Lösungsansätze rechtfertigen trotzdem den parallelen Einsatz im Entwurf.

#### C.1.1 *ANSYS*<sup>®</sup>

*ANSYS*<sup>®</sup> gilt als etabliertes, ausgereiftes *FEM*-System mit vergleichsweise großer Verbreitung, vor allem im Bereich der Strukturmechanik. Der in *ANSYS*<sup>®</sup> verfolgte Ansatz zur Beschreibung eines physikalischen Problems beruht auf der Unterscheidung verschiedener Elementtypen mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften. Um die Phänomene einer bestimmten physikalischen Domäne abbilden zu können, muss das Lösungsgebiet unter Nutzung eines bestimmten Elementtyps diskretisiert werden. Die zuvor vom Anwender festgelegten Parameter der Elemente (Materialeigenschaften, Schichtdicken usw.) bestimmen die Eigenschaften des Lösungsgebiets. Das Element selbst bzw. dessen Implementation legt die Art des zu lösenden Problems (also die Material- und Zustandsgleichungen) fest. Es ist allerdings zu beachten, dass für eine bestimmte Problemstellung durchaus verschiedene Elementtypen existieren können. Diese unterscheiden sich in strukturellen Eigenschaften wie der genutzten Ansatzfunktion oder der Anzahl und Art der Knoten-Freiheitsgrade (z.B. Verschiebungen, Rotationen in der strukturmechanischen Domäne).

Zurzeit sind in der sogenannten *Multiphysics*-Version von *ANSYS*<sup>®</sup> (Version 11.0, [12]) ca. 200 verschiedene Elementtypen verfügbar [63]. Mit deren Hilfe können 1D-, 2D- und 3D-*FE*-Netze zur Lösung verschiedenster physikalischer Probleme realisiert werden. Kopplungen zwischen verschiedenen physikalischen Domänen werden dabei im Allgemeinen durch explizite Kopplungen zwischen verschiedenen *FE*-Netzen innerhalb einer Geometrie realisiert. Muss eine Kopplung als implizit betrachtet werden, wird sie mithilfe einer Iterationsschleife auf explizite Kopplungen abgebildet (Abschnitt 5.1.1). Für einige Spezialfälle existieren allerdings spezielle Elementtypen, welche für eine implizite Kopplung genutzt werden können. Als Beispiel sei das *ANSYS*<sup>®</sup>-Element *SOLID226* genannt. Es realisiert u.a. implizite Kopplungen zwischen der strukturmechanischen, der thermischen und der piezoresistiven Domäne [27, 63].

Besonders hervorzuheben sind die in *ANSYS*<sup>®</sup> verfügbaren, zahlreichen und sehr effizienten Möglichkeiten, die Vernetzung einer Struktur zu beeinflussen bzw. festzulegen. Mit ihrer Hilfe lassen sich fast beliebige Kombination von strukturierten und frei vernetzten Bereichen innerhalb eines dreidimensionalen Lösungsgebiets realisieren (siehe dazu beispielsweise Abb. 5.4). Es ist daher möglich, sehr effiziente (hybride) *FE*-Netze zu erstellen.

Alle in *ANSYS*<sup>®</sup> verfügbaren Funktionen können über einen Skript-Interpreter angesprochen werden. Dabei kommt die spezielle, syntaktisch an die Programmiersprache *Fortran* angelehnte Skript-Sprache *APDL* [63] zum Einsatz. Diese eignet sich allerdings nur bedingt für die Realisierung größerer Projekte. Der Grund dafür liegt in der Be-

schränkung auf prozedurale Programmieretechniken, vor allem aber im Fehlen lokaler (auf die jeweilige Funktion bzw. Prozedur eingeschränkter) Datenstrukturen.

### C.1.2 COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>

*COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>* ist ein vergleichsweise neues, noch wenig etabliertes *FEM*-Werkzeug, welches aus einer *MATLAB*<sup>®</sup>-Toolbox zum Lösen partieller Differentialgleichungen hervorgegangen ist. Die Formulierung eines Problems innerhalb einer bestimmten physikalischen Domäne erfolgt durch die direkte Definition der zu lösenden partiellen Differentialgleichungen mit Randbedingungen innerhalb des Lösungsgebiets. Im Gegensatz zu dem in *ANSYS*<sup>®</sup> verfolgten Ansatz kann der Nutzer auf diese Weise nahezu beliebige, mithilfe von Differentialgleichungen beschreibbare Probleme formulieren bzw. lösen<sup>a</sup>. Für eine Reihe von Standardproblemen der verschiedenen physikalischen Domänen stehen bereits Beschreibungen bzw. Schnittstellen zur Verfügung. Diese werden vom Hersteller in Form von größtenteils kostenpflichtigen Zusatzmodulen bereitgestellt. Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Beispiele beziehen sich dabei ausschließlich auf das Basis- bzw. *MEMS*-Modul der Version 3.3.

Anders als bei *ANSYS*<sup>®</sup> stand die Kopplung verschiedener physikalischer Domänen bei der Entwicklung von *COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>* von Beginn an im Vordergrund. Dementsprechend lassen sich die zur Verfügung stehenden Module ohne Einschränkungen kombinieren bzw. koppeln. Dabei können sowohl explizite als auch implizite Zusammenhänge abgebildet werden. Dieser Ansatz ermöglicht es, selbst sehr komplexe Problemstellungen vergleichsweise einfach und elegant zu formulieren.

Es existieren allerdings auch eine Reihe von Einschränkungen und Problemen beim Einsatz von *COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>*. So ist der Bedarf an Ressourcen (hauptsächlich Speicher) im Vergleich zu *ANSYS*<sup>®</sup> hoch. Auch treten vor allem im Bereich der Strukturmechanik in Kombination mit nichtlinearen Geometrien (bzw. großen Auslenkungen) teilweise Konvergenzprobleme auf. Ein weiterer Nachteil der aktuellen Version von *COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>* sind die vergleichsweise rudimentären Möglichkeiten zum Erstellen von strukturierten Netzen. Auch führt die Tatsache, dass zurzeit keine pyramidenförmigen Elemente verfügbar sind dazu, dass sich strukturierte Hexaeder-Netze und Tetraedernetze nicht mithilfe einer direkten Elementkopplung zu Hybrid-Netzen kombinieren lassen. Vor allem für Geometrien mit großen, sich ändernden Aspektverhältnissen resultiert dies in *FE*-Netzen mit vergleichsweise geringer Effizienz.

Ähnlich wie in *ANSYS*<sup>®</sup> steht die gesamte in *COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>* realisierte Funktionalität alternativ in einem Skript-Interpreter zur Verfügung. Die dafür zum Einsatz kommende Syntax basiert auf der im Vergleich zur *APDL* modernen, objektorientierten *MATLAB*<sup>®</sup>-Sprache [120]. Alternativ lässt sich *COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>* auch in eine vorhandene *MATLAB*<sup>®</sup>-Installation integrieren. Auf diese Weise lassen sich die Funktionalitäten beider Systeme kombinieren.

---

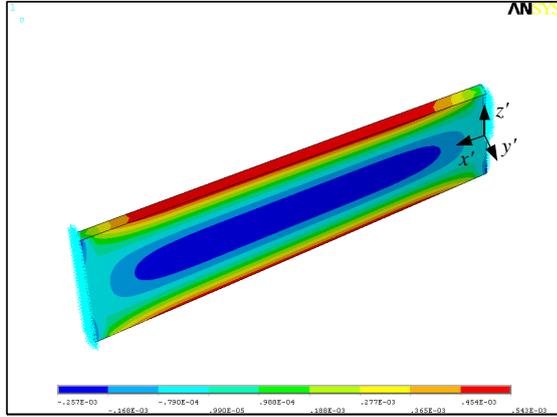
<sup>a</sup>Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass die Lösung beliebiger, mit Differentialgleichungen beschreibbarer Problemstellungen prinzipiell auch mithilfe von *ANSYS*<sup>®</sup> möglich ist. Dies wird mit einer Schnittstelle zur Implementation eigener Elementtypen realisiert [63].

## C.2 Nichtlinearitäten prismatischer Torsionsstäbe

### Einfluss der Einspannung

**Normaldehnung  $\epsilon_{x'z'}$  bei freier Verwölbung an den Stabenden**

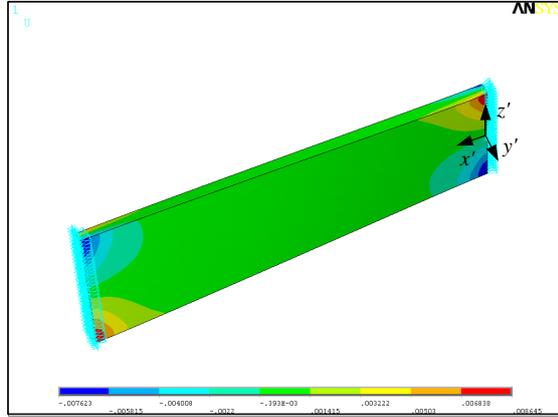
Parameter:  $l = 100\mu\text{m}$ ,  $w = 3\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $\theta_x = 15^\circ$



- Querschnittsverwölbung sowie die Scherdehnungen  $\gamma_{x'y'}$  und  $\gamma_{x'z'}$  entlang der Torsionsachse nahezu konstant
- geringe Normaldehnungen in  $x'$ -Richtung, welche überproportional mit der Auslenkung ansteigen
- leicht progressiver Verlauf der Federhärte in Abhängigkeit von der Auslenkung
- Größenordnung der Normalkomponenten klein gegenüber Scherdehnungen

**Normaldehnung  $\epsilon_{x'z'}$  bei fest eingespannten Stabenden**

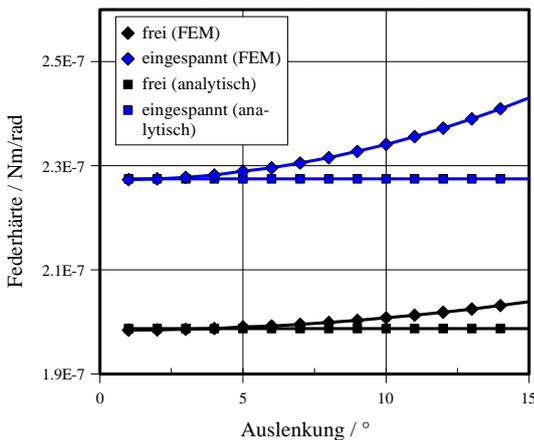
Parameter:  $l = 100\mu\text{m}$ ,  $w = 3\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $\theta_x = 15^\circ$



- Querschnittsverwölbung des Torsionsstabes sowie Scherdehnungen  $\gamma_{x'y'}$  und  $\gamma_{x'z'}$  ändern sich in der Nähe der Einspannungen sehr stark
- zusätzliche große Normaldehnungen in  $x'$ -Richtung
- stärker progressiver Verlauf der Federhärte in Abhängigkeit von der Auslenkung
- Größenordnung der Normalkomponenten zumeist vergleichbar oder groß gegenüber Scherkomponenten

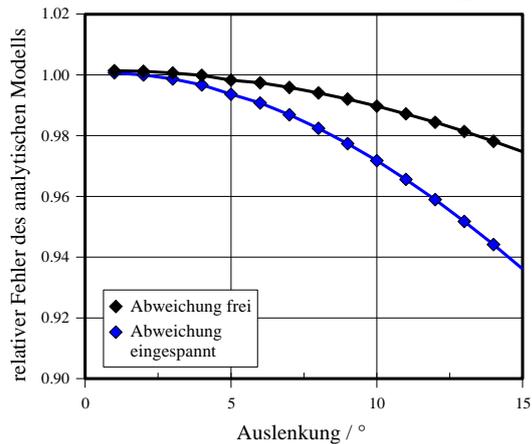
### Verlauf der Federhärten bei freier und fester Einspannung

Parameter:  $l = 100\mu\text{m}$ ,  $w = 3\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $l_{\text{eff}} = 87.4\mu\text{m}$



### Abweichung der analytischen Modelle

Parameter:  $l = 100\mu\text{m}$ ,  $w = 3\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $l_{\text{eff}} = 87.4\mu\text{m}$



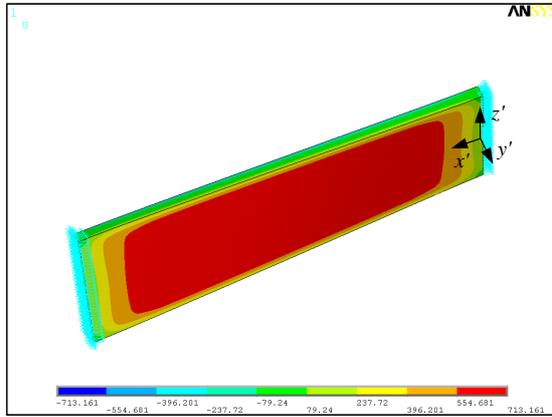
Bei freier Verwölbung an den Federenden ist der Verlauf der Federhärte leicht progressiv. Das analytische Modell stimmt für kleine Auslenkungen sehr gut mit den numerischen Ergebnissen überein. Für größere Auslenkungen steigt die relative Abweichung überproportional an, bleibt jedoch auch für ungünstige Geometrien ( $w \ll h$  bzw.  $w \gg h$ ) und große Auslenkungen unter 5%.

Eine feste Einspannung der Enden führt im dargestellten Beispiel zu einer Erhöhung der Federhärte für kleine Auslenkungen um ca. 15%. Das modifizierte analytische Modell stimmt für kleine Auslenkungen wieder sehr gut mit den numerischen Ergebnissen überein. Für große Auslenkungen steigt die relative Abweichung auch in diesem Fall überproportional an. Für ungünstige Geometrien kann sie eine Größenordnung von 10% erreichen. Dies muss beim Entwurf berücksichtigt werden.

Verlauf der maximalen mechanischen Spannungen

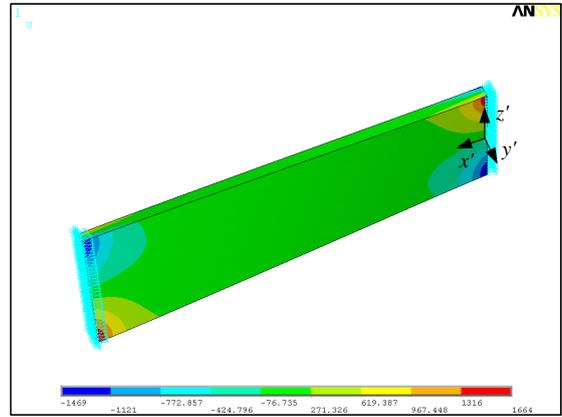
Scherspannung  $\sigma_{xz}$  bei fest eingespannten Stabenden

Parameter:  $l = 100\mu\text{m}$ ,  $w = 3\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $\theta_x = 15^\circ$



Normalspannung  $\sigma_{xx}$  bei fest eingespannten Stabenden

Parameter:  $l = 100\mu\text{m}$ ,  $w = 3\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $\theta_x = 15^\circ$

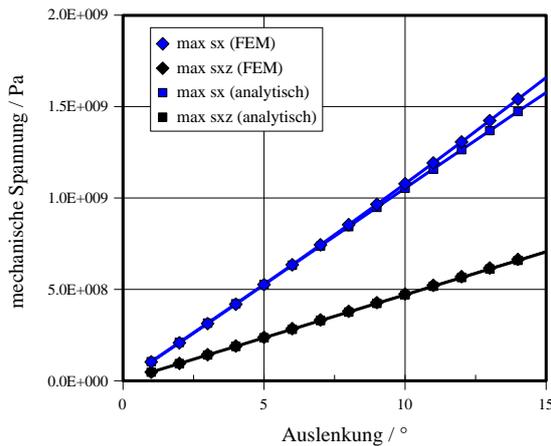


- Scherspannungen im mittleren Bereich der Torsionsfeder maximal und nahezu konstant
- nahe der Einspannung wird Verwölbung des Querschnitts eingeschränkt und damit die Torsionssteifigkeit vergrößert
- Verdrehung ist kleiner als im mittleren Bereich und Scherspannungen sind geringer

- feste Einspannung an den Federenden resultiert in einer Einschränkung der Verwölbung
- vergleichsweise große mechanische Normalspannungen in Federrichtung

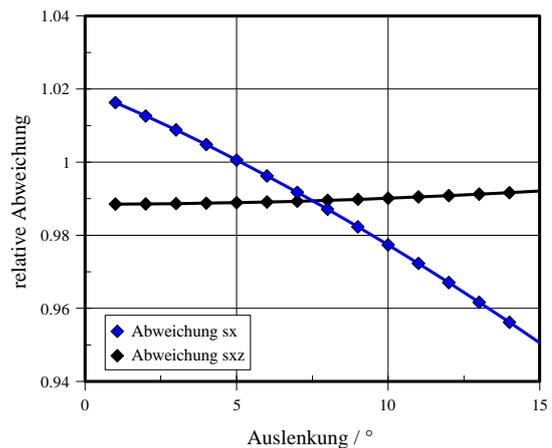
Typischer Verlauf der Spannungskomponenten bei fester Einspannung

Parameter:  $l = 100\mu\text{m}$ ,  $w = 3\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $l_{\text{eff}} = 87.4\mu\text{m}$



Typische Abweichung der analytischen Modelle zur Bestimmung der maximalen Scher- und Normalspannung

Parameter:  $l = 100\mu\text{m}$ ,  $w = 3\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $l_{\text{eff}} = 87\mu\text{m}$

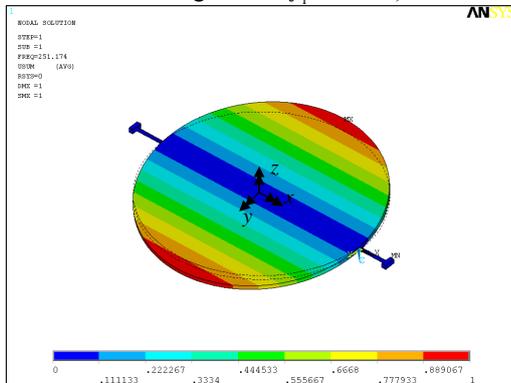


Sowohl der Verlauf der maximalen Scherspannung als auch der Verlauf der maximalen Normalspannung lässt sich für  $w \ll h$  mithilfe analytischer Modelle gut annähern. Der Betrag der relativen Abweichung liegt typischerweise in einem Bereich von 5%. Ist die Bedingung  $w \ll h$  nicht erfüllt, wird die Zugspannung von dem analytischen Modell stark überschätzt.

### C.3 Typische Eigenformen von Mikros scannerspiegeln

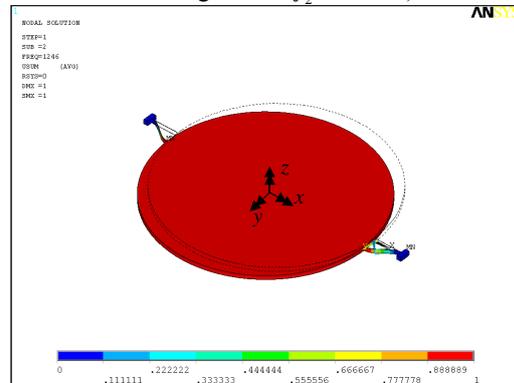
#### 1D-Scanner (SINUS)

1. Eigenform ( $f_1=250$  Hz)



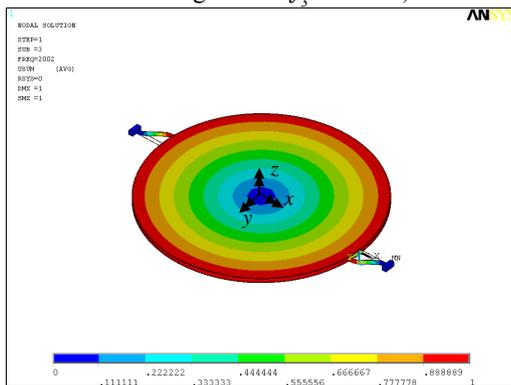
- Spiegelplatte bildet zusammen mit den Torsionsfedern einen Torsionsschwinger mit Bewegung um die  $x$ -Achse
- → für Kippspiegel genutzte Eigenform

2. Eigenform ( $f_2=1.2$  kHz)



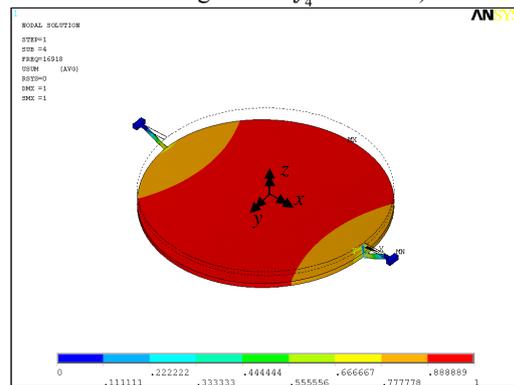
- Spiegelplatte bildet zusammen mit den Torsionsfedern einen Translationschwinger mit Bewegung in  $y$ -Richtung
- → muss beim Entwurf berücksichtigt werden

3. Eigenform ( $f_3=2.0$  kHz)



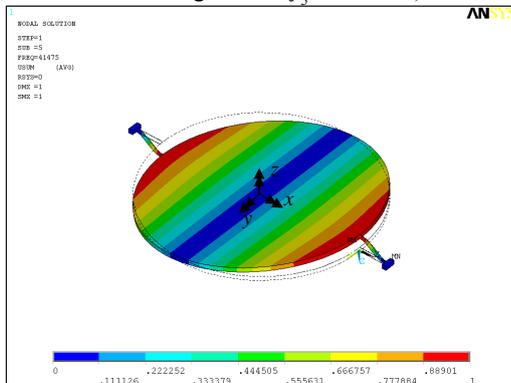
- Spiegelplatte bildet zusammen mit den Torsionsfedern einen Torsionsschwinger mit Bewegung um die  $z$ -Achse
- → muss beim Entwurf berücksichtigt werden.

4. Eigenform ( $f_4=16.9$  kHz)



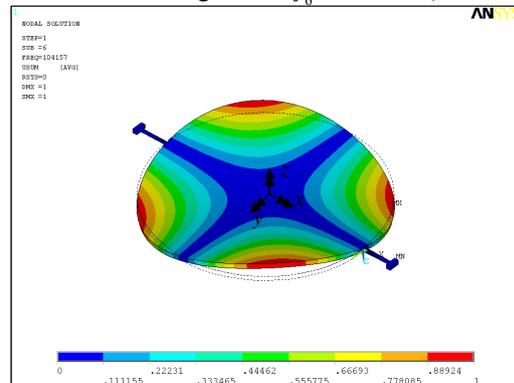
- Spiegelplatte bildet zusammen mit den Torsionsfedern einen Translationschwinger mit Bewegung in  $z$ -Richtung
- → muss beim Entwurf berücksichtigt werden

5. Eigenform ( $f_5=41.5$  kHz)



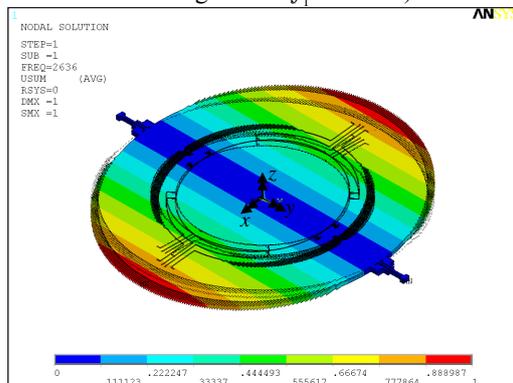
- Spiegelplatte bildet zusammen mit den Torsionsfedern einen Torsionsschwinger mit Bewegung um die  $y$ -Achse
- → muss beim Entwurf berücksichtigt werden

6. Eigenform ( $f_6=104.2$  kHz)

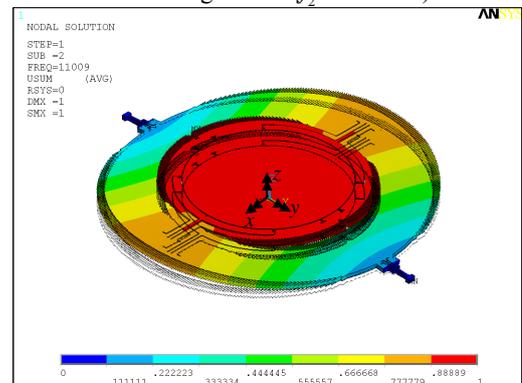


- erste Eigenform der Spiegelplatte
- diese und die folgenden Eigenformen haben vergleichsweise hohe Eigenfrequenzen
- → muss beim Entwurf nicht berücksichtigt werden

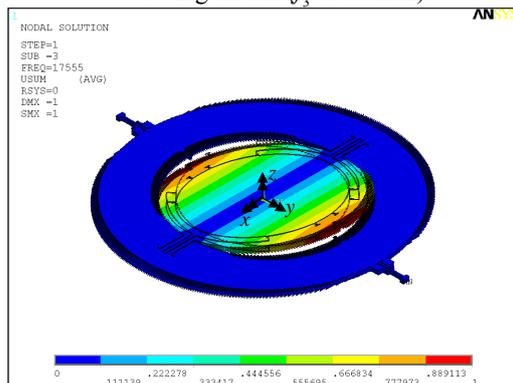
## 2D-Scanner (Entwurfsbeispiel)

1. Eigenform ( $f_1=2.6$  kHz)

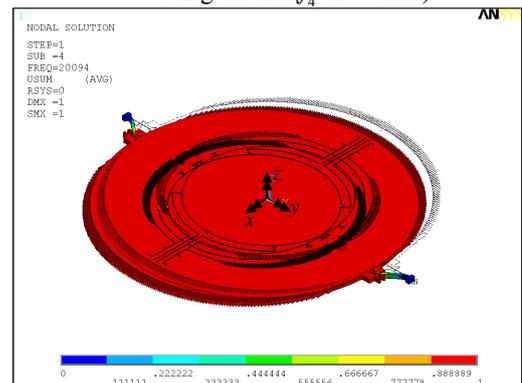
- beweglicher Rahmen bildet zusammen mit äußeren Torsionsfedern einen Torsionsschwinger mit Bewegung um die  $y$ -Achse
- → genutzte Eigenform des Bauelements

2. Eigenform ( $f_2=11.0$  kHz)

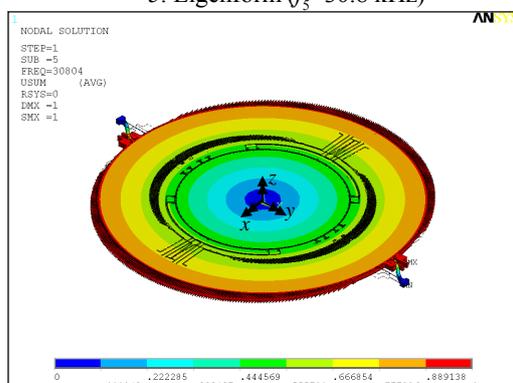
- beweglicher Rahmen und Spiegelplatte bilden zusammen mit Torsionsfedern einen Translationsschwinger mit Bewegung in  $z$ -Richtung
- → muss beim Entwurf berücksichtigt werden

3. Eigenform ( $f_3=17.5$  kHz)

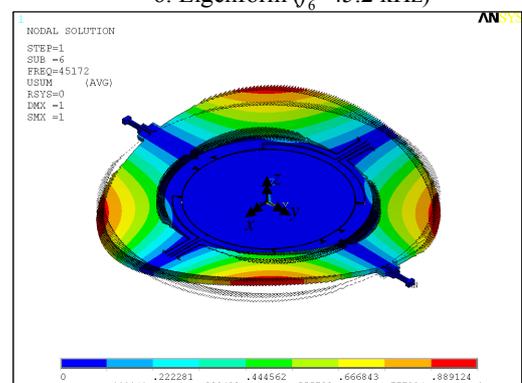
- Spiegelplatte bildet zusammen mit inneren Torsionsfedern einen Torsionsschwinger mit Bewegung um die  $x$ -Achse
- → genutzte Eigenform des Bauelements

4. Eigenform ( $f_4=20.0$  kHz)

- beweglicher Rahmen bildet zusammen mit äußeren Torsionsfedern einen Translationsschwinger mit Bewegung in  $x$ -Richtung
- → muss beim Entwurf berücksichtigt werden

5. Eigenform ( $f_5=30.8$  kHz)

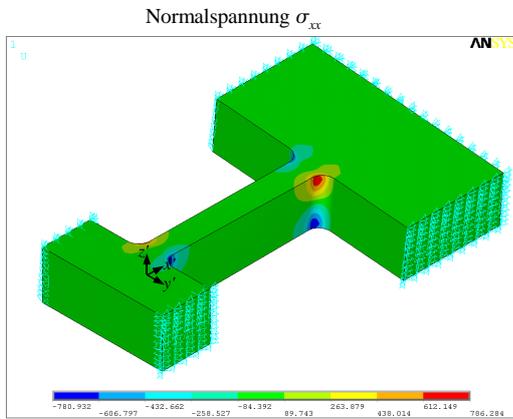
- beweglicher Rahmen bildet zusammen mit äußeren Torsionsfedern einen Torsionsschwinger mit Bewegung um die  $z$ -Achse
- → muss beim Entwurf berücksichtigt werden

6. Eigenform ( $f_6=45.2$  kHz)

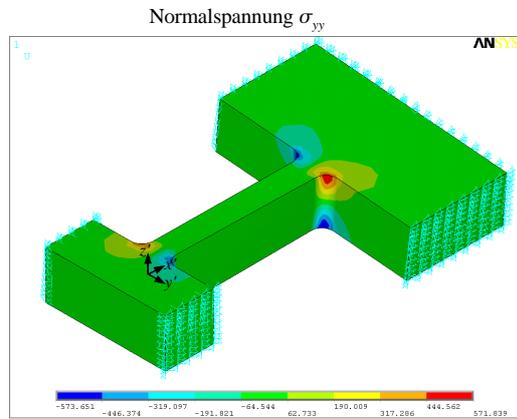
- erste Eigenform des beweglichen Rahmens
- diese und die folgenden Eigenformen haben vergleichsweise hohe Eigenfrequenzen
- → muss beim Entwurf nicht berücksichtigt werden

### C.4 Mechanische Spannungen in Torsionsfedern

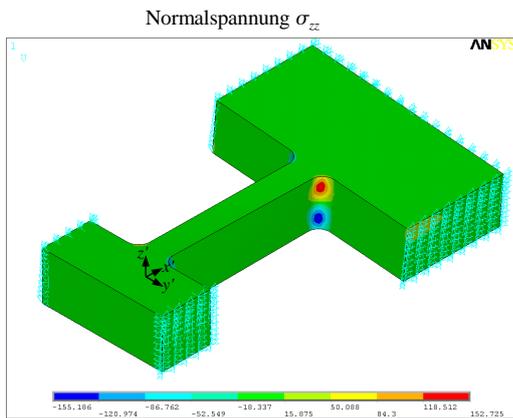
Auslenkung:  $\theta_{x'} = 5^\circ$



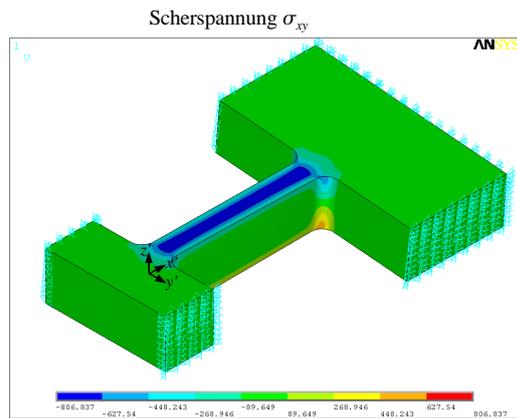
Aufgrund der festen Einspannung resultieren aus der Verwölbung des Querschnitts des prismatischen Torsionsstabes mechanische Spannungen an den Stabenden. Dies ist die größte auftretende Normalspannung.



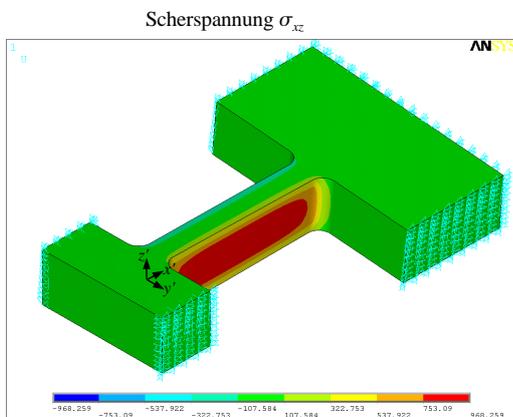
Aufgrund der Abrundungen am Ende des Torsionsstabes entstehen auch (wesentlich geringere) Normalspannungen in  $y'$ -Richtung.



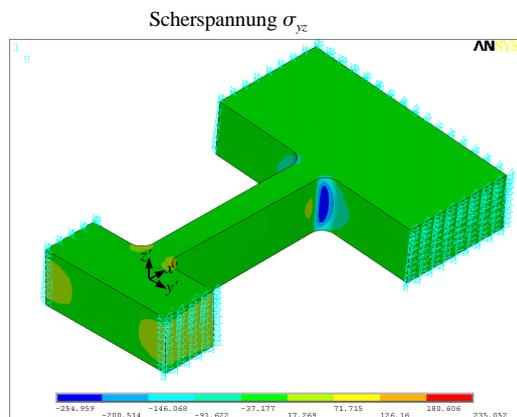
Aufgrund der Abrundungen am Ende des Torsionsstabes entstehen auch (wesentlich geringere) Normalspannungen in  $z'$ -Richtung.



Die Torsionsbelastung führt zu einer vergleichsweise geringen mechanischen Scherspannung an der kürzeren Seite des Torsionsquerschnitts.



Die Torsionsbelastung führt zu einer vergleichsweise großen mechanischen Scherspannung entlang der längeren Seite des Torsionsquerschnitts. Dies ist gleichzeitig die größte in dem Bauteil auftretende Scherspannung.



Aufgrund der Verwölbung des Querschnitts führt die feste Einspannung an den Stabenden zu einer vergleichsweise geringen mechanischen Scherspannung.

## C.5 Dynamische Deformation der Spiegelplatte

### Vergleich des analytischen Modells (3.75) mit *FE*-Analysen

**Verlauf der Deformation bei variiertem Plattenbreitenverhältnis für ein konstantes Seitenverhältnis  $l/w=1$   
für eine rechteckige (quadratische) Spiegelplatte für  $f_x=5\text{kHz}$ ,  $\theta_x=10^\circ$**

$w / \mu\text{m}$	$\max \delta_{\text{FEM}} / \text{nm}$	$\text{rms } \delta_{\text{FEM}} / \text{nm}$	$\max \delta / \text{nm}$	$\max \delta_{\text{FEM}} / \max \delta$	$\text{rms } \delta_{\text{FEM}} / \max \delta$
500	1.68	0.63	0.45	3.699	1.395
600	4.14	1.60	1.13	3.662	1.410
700	9.21	3.48	2.44	3.767	1.425
800	18.22	6.85	4.77	3.824	1.437
900	32.16	12.39	8.59	3.744	1.442
1000	54.36	20.96	14.54	3.738	1.441
1200	139.53	52.70	36.19	3.856	1.456
1400	315.09	115.01	78.22	4.028	1.470
1600	604.30	224.22	152.50	3.963	1.470
1800	1078.74	404.84	274.82	3.925	1.473
2000	1753.41	690.22	465.40	3.768	1.483
2200	2986.21	1111.05	749.54	3.984	1.482
2400	4451.41	1707.28	1158.07	3.844	1.474
2600	6598.37	2545.09	1728.01	3.818	1.473
2800	11136.48	3679.44	2503.05	4.449	1.470
3000	13023.25	5034.76	3534.15	3.685	1.425
3500	28860.52	10934.62	7638.69	3.778	1.431
4000	56309.53	21648.71	14892.89	3.781	1.454

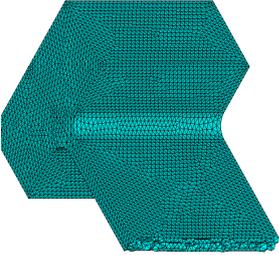
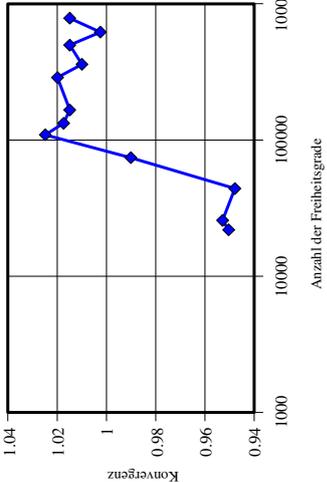
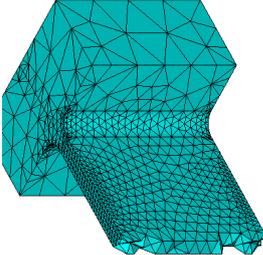
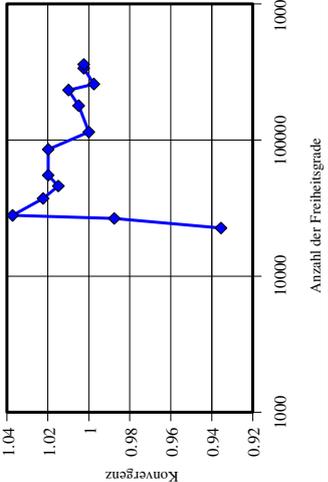
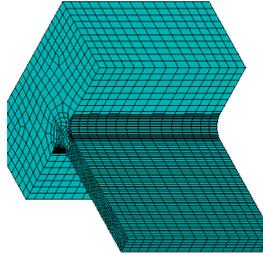
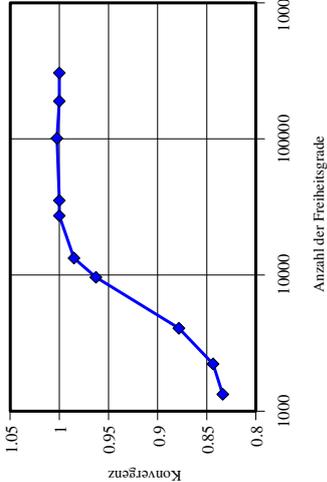
**Verlauf der Deformation bei variiertem Plattenbreitenverhältnis für ein konstantes Seitenverhältnis  $l/w=1$   
für eine elliptische (runde) Spiegelplatte für  $f_x=5\text{kHz}$ ,  $\theta_x=10^\circ$**

$w / \mu\text{m}$	$\max \delta_{\text{FEM}} / \text{nm}$	$\text{rms } \delta_{\text{FEM}} / \text{nm}$	$\max \delta / \text{nm}$	$\max \delta_{\text{FEM}} / \max \delta$	$\text{rms } \delta_{\text{FEM}} / \max \delta$
500	1.16	0.38	0.45	2.555	0.831
600	2.91	0.94	1.13	2.573	0.831
700	6.38	2.04	2.44	2.612	0.835
800	12.34	3.99	4.77	2.589	0.837
900	21.85	7.20	8.59	2.545	0.838
1000	35.17	12.36	14.54	2.418	0.850
1200	95.84	30.27	36.19	2.648	0.836
1400	203.24	65.94	78.22	2.598	0.843
1600	395.04	127.37	152.50	2.590	0.835
1800	725.52	229.56	274.82	2.640	0.835
2000	1158.73	382.18	465.40	2.490	0.821
2200	1904.61	622.93	749.54	2.541	0.831
2400	2823.64	931.24	1158.07	2.438	0.804
2600	4282.03	1389.63	1728.01	2.478	0.804
2800	6139.67	1994.28	2503.05	2.453	0.797
3000	8766.90	2879.03	3534.15	2.481	0.815
3500	18970.24	6143.36	7638.69	2.483	0.804
4000	37971.64	12218.83	14892.89	2.550	0.820

Für rechteckförmige und elliptische Spiegelplatten mit konstantem Verhältnis der lateralen Abmessungen unterscheiden sich sowohl die maximale Deformation, als auch der quadratische Mittelwert bis auf einen konstanten Faktor nur unwesentlich von dem analytisch bestimmten Verlauf der maximalen Deformation  $\delta$ .

## C.6 Konvergenzeigenschaften von FE-Netzen

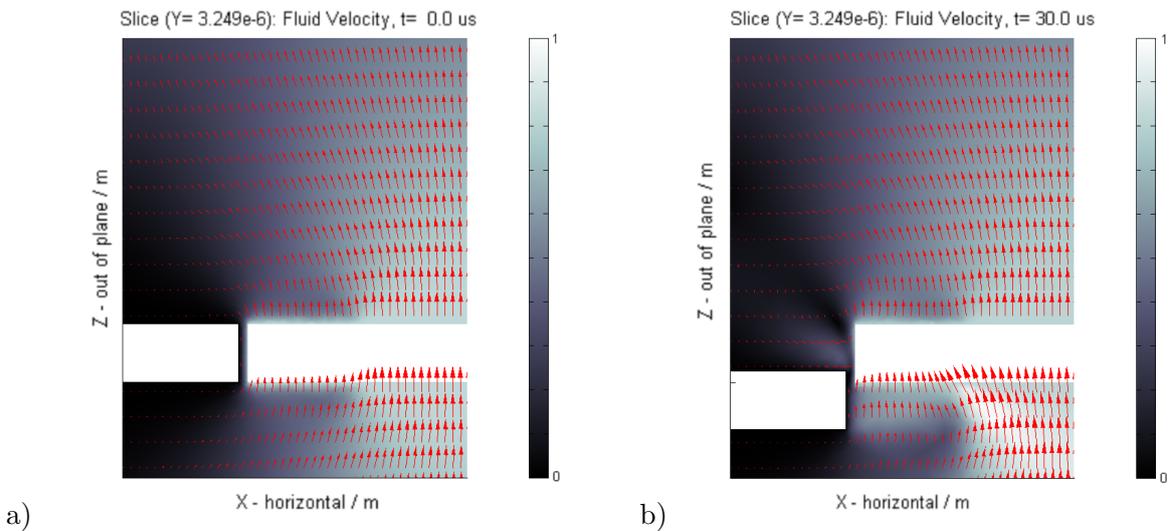
Typische Konvergenz der kritischen Vergleichsspannung (vgl. Abb. 5.3, S. 118)

<p><b>freies Tetraedernetz</b></p> 	<p>Bei der freien Vernetzung von Volumen kommen sowohl bei ANSYS Multiphysics als auch bei COMSOL Multiphysics ausschließlich Tetraederelemente zum Einsatz. Die Elementgröße kann dabei beeinflusst werden. Auf diese Weise können selbst kompliziertere Geometrien sehr schnell und mit beliebiger Genauigkeit vernetzt werden.</p> <p>Die Nutzung frei vernetzter Volumen in FE-Modellen führt zu einem vergleichsweise schlechten Konvergenzverhalten bei sehr hohem Rechenaufwand. Vor allem für Geometrien mit großen Aspektverhältnissen und Spannungsgradienten ist diese Vernetzungstechnik nicht geeignet.</p>	<p><b>Konvergenzverhalten</b></p> 
<p><b>strukturiertes Tetraedernetz</b></p> 	<p>Die Möglichkeit der strukturierten Vernetzung von Volumen mithilfe von Tetraederelementen steht sowohl in ANSYS Multiphysics als auch in COMSOL Multiphysics zur Verfügung. Dabei wird die Unterteilung von Linien genutzt um lokal größere Netzichten und damit Rechengenauigkeiten zu erreichen. Dies erhöht den Aufwand bei der Modellgenerierung.</p> <p>Die Nutzung strukturierter Tetraedernetze in FE-Modellen führt zu einem mäßigen Konvergenzverhalten bei großem Rechenaufwand. Für Geometrien mit großen Aspektverhältnissen und Spannungsgradienten ist diese Vernetzungstechnik nur bedingt geeignet</p>	<p><b>Konvergenzverhalten</b></p> 
<p><b>strukturiertes Hexaedernetz</b></p> 	<p>Die Möglichkeit der strukturierten Vernetzung von Volumen mithilfe von Hexaederelementen ist in COMSOL Multiphysics nur eingeschränkt und für sehr einfache Geometrien nutzbar. ANSYS Multiphysics unterstützt diese Technik sehr gut. Es werden wieder Linienunterteilungen zur lokalen Erhöhung der Netzdichte genutzt. Der Aufwand bei der Modellgenerierung ist vergleichbar zu strukturierten Tetraedernetzen.</p> <p>Die Nutzung strukturierter Tetraedernetze in FE-Modellen führt zu einem sehr guten Konvergenzverhalten bei vergleichsweise geringem Rechenaufwand. Diese Technik ist für Geometrien mit großen Aspektverhältnissen und Spannungsgradienten gut geeignet.</p>	<p><b>Konvergenzverhalten</b></p> 

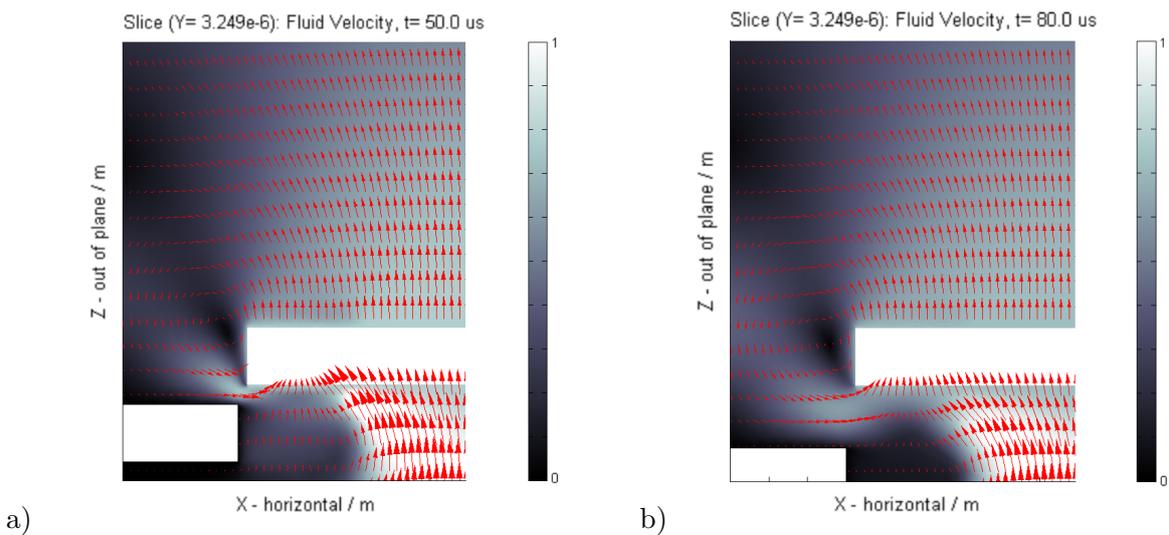
## D Dämpfungsmechanismen

### D.1 *Slide-film*-Dämpfung

Die fluidmechanischen Vorgänge innerhalb des *Out-of-plane-comb*-Antriebs können anhand eines *FE*-Modells einer halben Fingerelektrode untersucht werden. Die dynamischen Vorgänge innerhalb des Fluids können dabei vernachlässigt werden (Abschnitt 3.3.3). Die folgenden Darstellungen enthalten typische, mittels *COMSOL Multiphysics<sup>TM</sup>* simulierte Strömungsverläufe für eine Fingerelektrode mit einem Abstand zur Torsionsachse von  $750\ \mu\text{m}$  und den Abmessungen  $l \times w \times h = 58.5\ \mu\text{m} \times 1.5\ \mu\text{m} \times 30\ \mu\text{m}$ , bei einer Resonanzfrequenz von 1 kHz und einer Schwingungsamplitude von  $10^\circ$ :



**Abb. D.1:** Strömungsverhältnisse an eingeschwenkten Fingerelektroden.  
a)  $t = 0\ \mu\text{s}$ ; b)  $t = 30\ \mu\text{s}$ .



**Abb. D.2:** Strömungsverhältnisse an ausgeschwenkten Fingerelektroden.  
a)  $t = 50\ \mu\text{s}$ ; b)  $t = 80\ \mu\text{s}$ .

## D.2 Squeeze-film-Dämpfung

Mithilfe einer 2D-Temperaturfeldanalogie und einem numerischen Lösungsverfahren wie der *FEM* kann das aus dem *Squeeze-film*-Effekt resultierende Dämpfungsmoment für beliebige Plattengeometrien bestimmt werden. Dabei wird ausgenutzt, dass der Wärmetransport mit einer zur REYNOLDSSchen Schmierfilmgleichung (3.113) analogen POISSON-Dgl. beschrieben werden kann [5]. Bei der genutzten Analogie wird in der Domäne *Wärmetransport* die Wärmeleitfähigkeit auf eins gesetzt. Die Randbedingung für die Temperatur am Plattenrand wird zu null gesetzt. Die Wärmequellendichte entspricht dem Störterm der Schmierfilmgleichung  $12 \frac{\eta_{\text{eff}}}{d^3} v_z'$ , die sich ergebende Temperatur entspricht der Druckänderung  $p'$  (vgl. Gl. (3.113) auf S. 76).

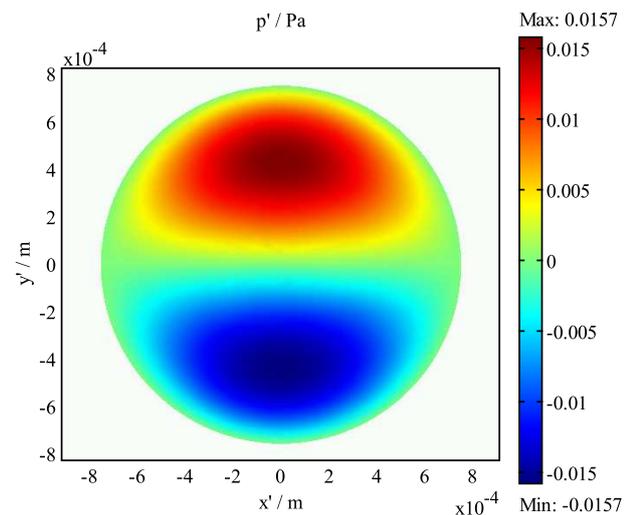
Im Folgenden sind die sich ergebenden Verläufe der Druckänderung unterhalb der Spiegelplatte für drei typische Mikroscoannerspiegel dargestellt. Die Parameter der Bauelemente, die zur Simulation herangezogen wurden, sind in Tabelle 3.4 auf S. 77 enthalten. Dabei wird eine Höhe der Rückseitengrube  $d$  von  $390 \mu\text{m}$  angenommen.

**Mikroscoannerspiegel mit  $D < 2.5 \text{ mm}$**  (z.B. *EO*, *SINUS*) werden kaum von *Squeeze-film*-Effekten beeinflusst. Die sich entsprechend Gl. (3.114) auf S. 77 aus dem Verlauf der Druckänderung ergebenden Dämpfungsmomente sind für den Scanner *EO* sechs Größenordnungen geringer als die sich aus experimentellen Untersuchungen ergebenden, wirksamen Momente. Für den deutlich größeren *SINUS*-Scanner (Abbildung) beträgt der Anteil an der Dämpfung noch immer weniger als 1%.

### Simulationsparameter:

Winkelgeschwindigkeit:  $\dot{\theta}_x = 411 \text{ 1/rad}$

Amplitude:  $\hat{\theta}_x = 15^\circ$

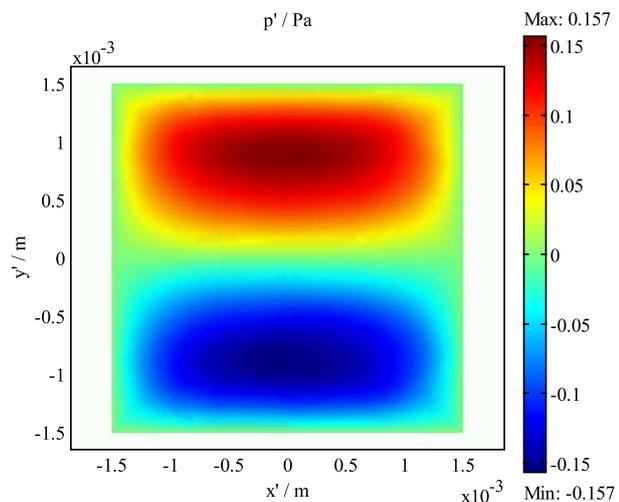


**Mikroscoannerspiegel mit  $D \geq 2.5 \text{ mm}$**  (z.B. *S30150*) werden geringfügig von *Squeeze-film*-Effekten beeinflusst. Die sich entsprechend Gl. (3.114) auf S. 77 aus dem Verlauf der Druckänderung ergebenden Dämpfungsmomente liegen in der Größenordnung von 10% der anhand von experimentellen Untersuchungen ermittelten Dämpfungsmomente.

### Simulationsparameter:

Winkelgeschwindigkeit:  $\dot{\theta}_x = 192 / \text{rad}$

Amplitude:  $\hat{\theta}_x = 12^\circ$



## E Bewegungen-Dgl. des *IPMS* Mikrosannerspiegels

[47, 50, 99]

In diesem Abschnitt wird die normierte nichtlineare Bewegungsgleichung (2.29) des *Fraunhofer IPMS* Mikrosannerspiegels mithilfe einer Methode der Störungstheorie – der *zwei-Zeiten-Methode* (*two variable expansion*) – auf ihre dynamischen Eigenschaften hin untersucht. Es handelt sich bei Gl. (2.29) um eine Form der nichtlinearen MATHIEU-Gleichung. Eine wichtige Eigenschaft dieses Gleichungstyps ist das Auftreten von subharmonischen und superharmonischen Resonanzen. Der *Fraunhofer IPMS* Mikrosannerspiegel wird bei parametrischer Anregung in seiner ersten subharmonischen Resonanz betrieben (parametrische Resonanz erster Ordnung). Diese tritt bei Anregungsfrequenzen in der Größenordnung der doppelten Resonanzfrequenz des mechanischen Systems auf.

In den folgenden Betrachtungen werden zur Vereinfachung nur die Eigenschaften des Systems in der Nähe dieser parametrischen Resonanz erster Ordnung untersucht. Für weitergehende Betrachtungen ist die hier vorgestellte Methode ebenfalls geeignet. Es müssen dazu lediglich die Terme höherer Ordnung  $\Omega(\epsilon^2)$  mit  $\Omega$  als LANDAU-Symbol, in die Analyse mit einbezogen werden.

### E.1 Fixpunkte

Ausgangspunkt der Analyse ist die gestörte lineare Dgl. (4.2) auf S. 100 dieser Arbeit. Bei der *zwei-Zeiten-Methode* wird ausgenutzt, dass die Lösung dieser Differentialgleichung mehrere Zeitskalen beinhaltet. Es wird daher eine *schnelle Zeit*  $\xi$  und eine *langsame Zeit*  $\eta$  eingeführt. Die *schnelle Zeit* ist dann mit einer periodischen Lösung verknüpft. Diese wird in ihrer Amplitude bezüglich der *langsamen Zeit* moduliert. Der Zusammenhang der Zeitskalen mit der physikalischen Zeit ist definiert zu:

$$\xi := \omega t \quad \text{und} \quad \eta := \epsilon t \tag{E.1}$$

$\omega = \sqrt{\beta_0}$  ist dabei die Kreisfrequenz der zu erwartenden periodischen Bewegung des Systems und  $\epsilon$  der Störparameter der gestörten linearen Dgl. Für die normierte Gl. (4.2) gilt bezüglich der parametrischen Resonanz erster Ordnung  $\beta_0 = 1$ . Für  $\xi$  und  $\eta$  ergibt sich demnach:

$$\xi = \tau \quad \text{und} \quad \eta = \epsilon \tau \tag{E.2}$$

Aus der Einführung zweier verschiedener Zeitskalen folgt:

$$x = f(\tau) \quad \rightarrow \quad x = f(\xi, \eta) \tag{E.3}$$

Die Auslenkung  $x$  wird nun in eine Potenzreihe bezüglich des Störparameters  $\epsilon$  entwickelt.

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \dots \tag{E.4}$$

Für die in Gl. (4.2) enthaltenen Ableitungen von  $x$  nach der normierten Zeit  $\tau$  ergibt sich nun mit der Summen- und Kettenregel der Differentialrechnung

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial x_0}{\partial \xi} + \epsilon \frac{\partial x_0}{\partial \eta} + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \dots \tag{E.5}$$

und

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} + \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + \dots \quad (\text{E.6})$$

Setzt man diese Ausdrücke zusammen mit Gl. (E.4) in die gestörte lineare Dgl. (4.2) ein, ergibt sich nach einigen Umformungsschritten der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \epsilon^0 \left( x_0 + \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} \right) \\ & + \epsilon^1 \left( (\beta_1 + 2 \cos 2\xi) x_0 + (\gamma_3 + \gamma'_3 \cos 2\xi) x_0^3 + x_1 + \mu \frac{\partial x_0}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} \right) \\ & + \underbrace{(\dots)}_{\Omega(\epsilon^2)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung  $\Omega(\epsilon^2)$  ergibt sich so ein nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem (Dgls.):

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi^2} + x_0 = 0 \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \xi \partial \eta} - \mu \frac{\partial x_0}{\partial \xi} - (\beta_1 + 2 \cos 2\xi) x_0 - (\gamma_3 + \gamma'_3 \cos 2\xi) x_0^3 \quad (\text{E.9})$$

Gl. (E.8) ist eine Schwingungs-Dgl. (ungedämpfter, harmonischer Oszillator) mit der Lösung

$$x_0 = A \cos \xi + B \sin \xi \quad \text{mit} \quad A = f(\eta), \quad B = g(\eta) \quad (\text{E.10})$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung eines Mikroscoannerspiegels ist demnach näherungsweise eine harmonische Schwingung mit der Amplitude  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Allerdings sind die Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  und damit auch die Amplitude der Schwingung Funktionen der *langsamen Zeit*  $\eta$ . Aus deren Lösungen ergeben sich die Eigenschaften des nichtlinearen Systems in Abhängigkeit von seinen Parametern.

Setzt man nun die Lösung für Gl. (E.8) in die partielle Dgl. (E.9) ein, erhält man einen Ausdruck der folgenden Form:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi^2} + x_1 = \underbrace{(\dots)}_{\text{resonant}} \cos \xi + \underbrace{(\dots)}_{\text{resonant}} \sin \xi + \underbrace{(\dots)}_{\text{nichtresonant}} \quad (\text{E.11})$$

Dies ist eine ungedämpfte Schwingungs-Dgl. mit Störtermen (rechte Seite). Voraussetzung für eine stabile Lösung dieser Gleichung ist, dass die resonanten Anteile der Störterme null werden. Da die jeweiligen Ausdrücke für  $\sin \xi$  und  $\cos \xi$  linear unabhängig sind, ergeben sich aus dieser Bedingung nach einigen Umformungen zwei gekoppelte, lineare Dgln. erster Ordnung (in der Literatur auch als *Slow-flow* bezeichnet):

$$\frac{dA}{d\eta} = -\frac{\mu}{2} A + \frac{1}{2} (\beta_1 - 1) B + \frac{3}{8} \gamma_3 B (A^2 + B^2) - \frac{1}{4} \gamma'_3 B^3 \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{dB}{d\eta} = -\frac{\mu}{2} B - \frac{1}{2} (\beta_1 + 1) A - \frac{3}{8} \gamma_3 A (A^2 + B^2) - \frac{1}{4} \gamma'_3 A^3 \quad (\text{E.13})$$

Bedingung für eine stabile harmonische Lösung (E.10) ist eine konstante Amplitude  $R$  der Schwingung. Daraus folgen die Bedingungen  $\frac{dA}{d\eta} = 0$  und  $\frac{dB}{d\eta} = 0$ . Diese entsprechen den Fixpunkten des Dgls. Deren Lage und Eigenschaften bestimmen demnach die Stabilitätscharakteristik des gesamten Systems.

Da die Eigenschaften des Systems vor allem von der Amplitude der harmonischen Lösung  $R$  bestimmt sind, werden die Dgln. (E.12) und (E.13) zur weiteren Analyse in polare Koordinaten transformiert. Dazu wird der folgende Zusammenhang genutzt:

$$A = R \cos \varphi \quad \text{und} \quad B = R \sin \varphi \quad \text{mit} \quad R = f(\eta), \quad \varphi = f(\eta) \quad (\text{E.14})$$

Es ergibt sich das zu den Dgln. (E.12) und (E.13) äquivalente Dgln. in polaren Koordinaten  $(R, \varphi)$ :

$$\frac{dR}{d\eta} = -\frac{\mu}{2}R - \frac{1}{2}R \left(1 + \frac{\gamma'_3}{4}R^2\right) \sin 2\varphi \quad (\text{E.15})$$

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = -\frac{\beta_1}{2} - \frac{3\gamma_3}{8}R^2 - \left(\frac{\gamma'_3}{4}R^2 + \frac{1}{2}\right) \cos 2\varphi \quad (\text{E.16})$$

Die Fixpunkte  $R_s$  und  $\varphi_s$  ergeben sich durch Nullsetzen der linken Seiten der Dgln. Es ist jedoch zu beachten, dass die triviale Lösung  $A = B = 0$  für die Bedingung  $\frac{dA}{d\eta} = 0$ ,  $\frac{dB}{d\eta} = 0$  aufgrund der besonderen Eigenschaften des polaren Koordinatensystems im Koordinatensprung nicht berücksichtigt wird. Es gilt daher unabhängig von den nachfolgenden Betrachtungen für beliebige  $\varphi$ :

$$R_{s,1} = \sqrt{A^2 + B^2} \Big|_{\substack{A=0 \\ B=0}} = 0 \quad (\text{E.17})$$

mit  $R_{s,1}$  als Amplitude im ersten Fixpunkt des Systems. Nach einigen Umformungsschritten lassen sich aus den Dgln. (E.15) und (E.16) die folgenden Ausdrücke als Bedingung für nicht-triviale Fixpunkte ermitteln:

$$\sin 2\varphi_s = -\frac{4\mu}{4 + \gamma'_3 R_s^2} \quad (\text{E.18})$$

$$R_s^2 = -\frac{4(\beta_1 + \cos 2\varphi_s)}{3\gamma_3 + 2\gamma'_3 \cos 2\varphi_s} \quad (\text{E.19})$$

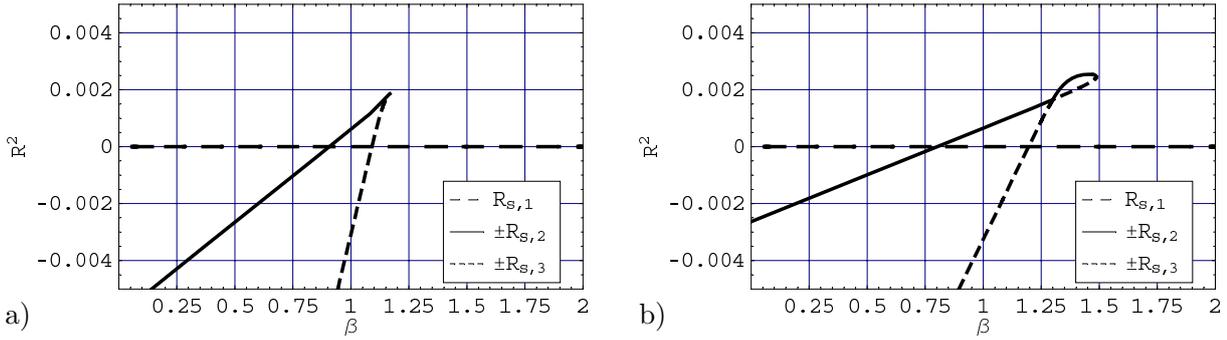
Gl. (E.18) hat für  $\mu > 0$  (gedämpftes System) zwei relevante Lösungen für  $\varphi_s$ :

$$\varphi_{s,1} = -\frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{4\mu}{4 + R_s^2 \gamma'_3} \right) \quad \text{und} \quad \varphi_{s,2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{4\mu}{4 + R_s^2 \gamma'_3} \right) \quad (\text{E.20})$$

Werden diese in Gl. (E.19) eingesetzt, ergeben sich ebenfalls zwei (beachte  $\pm$ ) Ausdrücke für  $R_s$ :

$$R_s^2 = -\frac{4(\beta_1 \pm \Gamma)}{2\gamma'_3 \Gamma \pm 3\gamma_3} \quad \text{mit} \quad \Gamma = \sqrt{1 - \frac{16\mu^2}{(4 + \gamma'_3 R_s^2)^2}} \quad (\text{E.21})$$

Es ist zu berücksichtigen, dass für  $\mu \neq 0$  der Ausdruck  $R_s^2$  sowohl in der linken, als auch in der rechten Seite der Gleichungen enthalten ist. Mithilfe eines CAS wie *Mathematica*<sup>®</sup> lassen sich diese Ausdrücke nach  $R_s$  umstellen. Es ergeben sich zusätzlich zu der trivialen Lösung (E.17) acht voneinander verschiedene Lösungen  $R_{s,2...9}$ .



**Abb. E.1:** Verlauf des komplexen Amplitudenquadrats für die Fixpunkte des SINUS-Scanners. Die Darstellung erfolgt für zwei verschiedene Werte des Störparameters  $\epsilon$  in Abhängigkeit von dem Kontrollparameter  $\beta$ . Die Nulldurchgänge des Amplitudenquadrats kennzeichnen den Übergang von komplexen zu reellen Amplituden und damit Bifurkationen des Systems. a)  $\epsilon = 0.1$ ; b)  $\epsilon = 0.2$ .

Anhand der Zusammenhänge (4.1) lassen sich die Lösungen für  $R_s$  nun als Funktion des Störparameters  $\epsilon$  und des Kontrollparameters  $\beta$  angeben. Auf die Darstellung der konkreten analytischen Ausdrücke wird an dieser Stelle aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Stattdessen ist in Abb. E.1 der Verlauf von  $R_s^2$  für den SINUS-Scanner und zwei verschiedene Werte für  $\epsilon$  über dem Kontrollparameter  $\beta$  dargestellt. Dabei wird sich auf diejenigen Lösungen für  $R_s$  beschränkt, die zumindest für bestimmte Parameterkombinationen reellwertig bzw. für das Verhalten eines Mikroscoannerspiegels relevant sind. Die zur Abbildung gehörenden konkreten Werte für die Parameter der normierten Bewegungsgleichung sind in Tabelle 4.1 (S. 99) enthalten.

## E.2 Stabilität

Im nächsten Schritt werden die Stabilitätseigenschaften der Fixpunkte des Systems untersucht. Dazu wird die JACOBI-Matrix des Dgls. (E.12,E.13) benötigt:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\gamma_3 AB - \frac{\mu}{2} & \frac{1}{2}(\beta_1 - 1) + \frac{3}{8}\gamma_3 A^2 + \left(\frac{9}{8}\gamma_3 - \frac{3}{4}\gamma_3'\right) B^2 \\ -\frac{1}{2}(1 + \beta_1) - \frac{3}{8}\gamma_3 B^2 + \left(\frac{9}{8}\gamma_3 + \frac{3}{4}\gamma_3'\right) A^2 & -\frac{3}{4}\gamma_3 AB - \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{E.22})$$

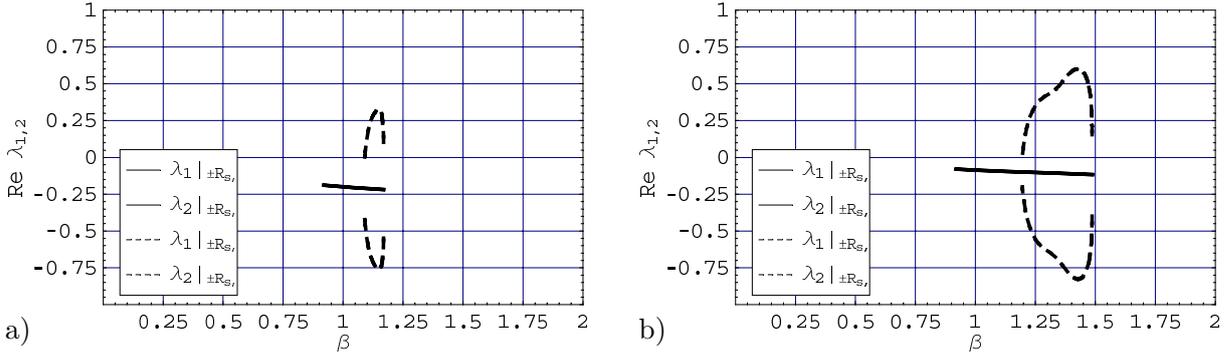
Die Eigenwerte  $\lambda_i$  dieser Matrix bestimmen die Stabilität des Systems:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} \pm \left[ -6 \left( (9\gamma_3^2 - 6\gamma_3'^2) A^2 + (8\beta_1 + 4) \gamma_3 - 4(\beta_1 + 1) \gamma_3' \right) B^2 - 9\gamma_3 (3\gamma_3 - 2\gamma_3') B^4 + (-3\gamma_3 A^2 - 4\beta_1 + 4) \left( (9\gamma_3 + 6\gamma_3') A^2 + 4(\beta_1 + 1) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.23})$$

Ein Fixpunkt bei  $A = A_s$  und  $B = B_s$  ist stabil, wenn der Realteil beider Eigenwerte negativ ist (Satz von HARTMAN-GROBMAN). Es ergibt sich daher die folgende Bedingung für Stabilität eines Fixpunktes:

$$\frac{\mu}{2} > \sqrt{-6 \left( (9\gamma_3^2 - 6\gamma_3'^2) A^2 + (8\beta_1 + 4) \gamma_3 - 4(\beta_1 + 1) \gamma_3' \right) B^2 - \dots} \quad (\text{E.24})$$

$\begin{matrix} A=A_s \\ B=B_s \end{matrix}$



**Abb. E.2:** Verlauf der Realteile der Eigenwerte der JACOBI-Matrix am Beispiel des SINUS-Scanners. Es sind die Lösungen für die Fixpunkte  $R_{s,2}$  und  $R_{s,3}$  dargestellt.  
a)  $\epsilon = 0.1$ ; b)  $\epsilon = 0.2$ .

Für den trivialen Fixpunkt bei  $R_{s,1} = 0$  wird  $A_s = B_s = 0$  und es gilt:

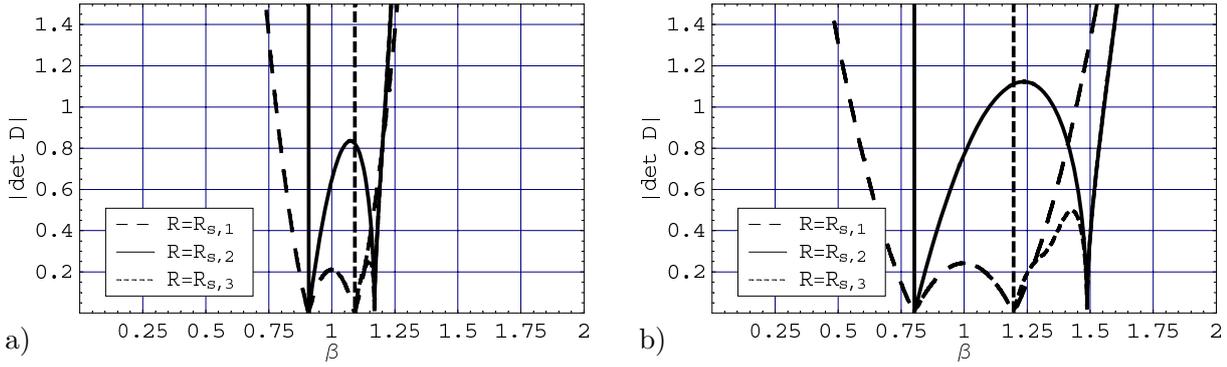
$$\sqrt{1 - \beta_1^2} < \mu \quad (\text{E.25})$$

Mit den Zusammenhängen in (4.1) lässt sich die Bedingung für Stabilität wieder in der  $\epsilon$ - $\beta$ -Ebene darstellen. Der triviale Fixpunkt  $R_{s,1} = 0$  ist demnach stabil für

$$\beta < 1 - \epsilon \sqrt{1 - \mu^2} \quad \text{oder} \quad \beta > 1 + \epsilon \sqrt{1 - \mu^2} \quad (\text{E.26})$$

Um die Stabilität der Fixpunkte  $R_{s,2\dots 9} \neq 0$  zu bestimmen, müssen die zugehörigen Lösungen für  $A_{s,2\dots 9}$  und  $B_{s,2\dots 9}$  in Ungleichung (E.24) eingesetzt werden. Es ergeben sich sehr umfangreiche und komplexe Ausdrücke, die sich scheinbar nicht vereinfachen lassen. Es ist daher nicht möglich, eine überschaubare, analytische Bedingung für die Stabilität dieser Lösungen anzugeben. Die Stabilitätseigenschaften lassen sich jedoch für beliebige Parametersätze numerisch bestimmen. Die für das Verhalten eines Mikroscooperspiegels relevanten Fixpunkte bzw. die Realteile der dazugehörigen Eigenwerte sind in Abb. E.2 für die Parameter des SINUS-Scanners und zwei verschiedene  $\epsilon$  dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Fixpunkte bei  $R_{s,2}$  stabil sind, da die Realteile beider Eigenwerte negativ sind. Für die Fixpunkte bei  $R_{s,3}$  ist jeweils ein Realteil positiv. Es handelt sich also um Sattelpunkte. Eine Variation der Parameter führt zu der Vermutung, dass diese Stabilitätseigenschaften für beliebige  $\epsilon$  Gültigkeit besitzen. In [99] wird diese Annahme bestätigt.

Entsprechend Gl. (E.10) korrespondiert jeder Fixpunkt des Systems mit einer harmonischen Schwingung bei konstanter Amplitude. Im Phasenraum des Systems entspricht eine solche Schwingung einer geschlossenen Trajektorie. Man spricht daher auch von einem *Grenzzzyklus*. Instabile Fixpunkte des Dgls. (E.12,E.13) korrespondieren dabei mit instabilen Grenzzyklen und stabile Fixpunkte mit stabilen Grenzzyklen. Überträgt man die Stabilitätseigenschaften des *Slow-flow* auf die Bewegungs-Dgl. (2.29), korrespondiert  $R_{s,2}$  mit einem *asymptotisch stabilen* Grenzzyklus und  $R_{s,3}$  mit einem instabilen Grenzzyklus. Da die Amplitude der harmonischen Lösung (E.10) für  $R_{s,1}$  immer null ist, spricht man hierbei nicht von einem Grenzzyklus. Es handelt sich vielmehr um einen *Punktattraktor* (stabiler Zustand) oder um einen *Sattelpunkt* (instabiler Zustand).



**Abb. E.3:** Numerisch ermittelter Verlauf der Funktionaldeterminante (SINUS-Scanner). Die Darstellung erfolgt für die drei relevanten Fixpunkte  $R_{s,1...3}$ . a)  $\epsilon = 0.1$ ; b)  $\epsilon = 0.2$ .

### E.3 Bifurkationen

Wie in Abb. E.1 erkennbar ist, kann das Amplitudenquadrat der Fixpunkte negative Werte annehmen. Die Amplitude  $R_s$  muss in einem solchen Fall komplexwertig sein. Eine solche Lösung ist nicht physikalisch und daher nicht für die Eigenschaften des Mikroscannerspiegels relevant. Interessant ist jedoch der Übergang von komplexen zu reellen Lösungen und umgekehrt. Für das physikalische System bedeutet dies eine plötzliche Änderung seiner topologischen Eigenschaften. Fixpunkte können verschwinden, erscheinen oder ihre Eigenschaften ändern. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *Bifurkation*.

#### Lokale Bifurkationen

Mithilfe einer linearen Stabilitätsanalyse können Werte für Kontrollparameter ermittelt werden, bei denen Bifurkationen auftreten. Diese werden auch als *Verzweigungswerte* bezeichnet. Da bei einer solchen Analyse das Vektorfeld des dynamischen Systems in der Nähe eines (degenerierten) Fixpunktes untersucht wird, spricht man von *lokalen Bifurkationen*.

Die Bedingung für eine lokale Bifurkation lässt sich wieder mithilfe der JACOBI-Matrix des Systems ausdrücken. Verzweigungen von Fixpunkten treten immer dann auf, wenn deren Determinante (Funktionaldeterminante) null wird. Bedingung für eine lokale Bifurkation ist also

$$\det \mathbf{D} \Big|_{\substack{A=A_s \\ B=B_s}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det \mathbf{D}_{\text{polar}} \Big|_{\substack{\varphi=\varphi_s \\ R=R_s}} = 0 \quad (\text{E.27})$$

Dabei ist  $\mathbf{D}_{\text{polar}}$  die JACOBI-Matrix des *Slow-flow* in polaren Koordinaten (vgl. Gln. (E.15,E.16)) mit

$$\mathbf{D}_{\text{polar}} = \begin{pmatrix} (\gamma_3' R^2 + 2) \cos \varphi \sin \varphi & -(\frac{3}{4} \gamma_3 + \frac{1}{2} \gamma_3' \cos 2\varphi) R \\ -\frac{1}{4} R \cos 2\varphi (\gamma_3' R^2 + 4) & -\frac{1}{2} \mu - (\frac{3}{8} \gamma_3' R^2 + \frac{1}{2}) \sin 2\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{E.28})$$

Ein numerisch ermittelter, typischer Verlauf des Betrags der Funktionaldeterminante für die drei Fixpunkte  $R_{s,1...3}$  und zwei verschiedene  $\epsilon$  ist in Abb. E.3 dargestellt. Diejenigen Werte für  $\beta$ , bei denen mindestens eine der drei Kurven null wird, kennzeichnen die Verzweigungen des Systems.

Die Bifurkationen des trivialen Fixpunkts  $R_{s,1}$  lassen sich aufgrund der besonderen Eigenschaften des polaren Koordinatensystems nur in kartesischen Koordinaten untersuchen. Für die Funktionaldeterminante ergibt sich dann:

$$\det \mathbf{D} \Big|_{\substack{A=0 \\ B=0}} = \frac{1}{4} (\beta_1^2 + \mu^2 - 1) \quad (\text{E.29})$$

Setzt man diesen Ausdruck null, ergibt sich die Bedingung für eine Bifurkation des trivialen Fixpunkts  $R_{s,1}$ . Mithilfe der Zusammenhänge (4.1) lässt sich diese Bedingung innerhalb der  $\epsilon$ - $\beta$ -Ebene des Systems ausdrücken:

$$\beta_{\text{cr}1,2} = 1 \mp \epsilon \sqrt{1 - \mu^2} \quad (\text{E.30})$$

Für gegebene Parameter  $\epsilon$  und  $\mu$  tritt demnach eine Verzweigung des trivialen Fixpunktes  $R_{s,1}$  immer dann auf, wenn für den (quasistatisch) variierten Kontrollparameter  $\beta$  eine der Bedingungen  $\beta = \beta_{\text{cr}1}$  oder  $\beta = \beta_{\text{cr}2}$  erfüllt ist.

**Übergang  $\beta \rightarrow \beta_{\text{cr}1} - 0$ :** Entsprechend Abschnitt E.2 wird der Fixpunkt bei  $R = 0$  instabil. Außerdem entsteht ein stabiler Fixpunkt bei  $R = \pm R_{s,2}$ . Eine solche Verzweigung wird als *superkritische Gabelverzweigung* bezeichnet. Für die Bewegungsgl. (2.24) bedeutet dies den Übergang von einem Punktattraktor zu einem Sattelpunkt bei  $(\theta_x, \dot{\theta}_x) = (0, 0)$  und zu einem asymptotisch stabilen Grenzyklus bei  $\hat{\theta}_x = \pm R_{s,2}$ . Dieser Verzweigungstyp wird als *superkritische HOPF-Verzweigung* bezeichnet [50].

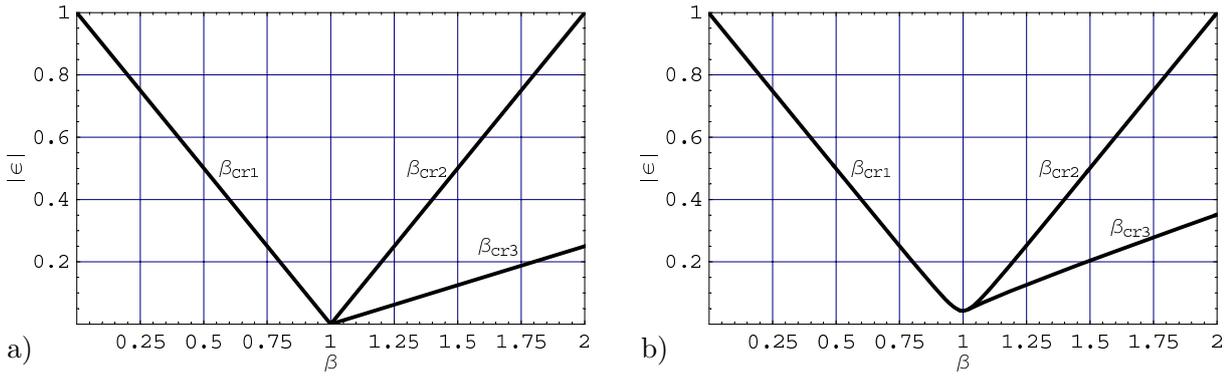
**Übergang  $\beta \rightarrow \beta_{\text{cr}2} - 0$ :** Der triviale Fixpunkt bei  $R = 0$  wird wieder stabil. Zusätzlich entsteht ein instabiler Fixpunkt bei  $R = \pm R_{s,3}$ . Es handelt sich demnach um eine *subkritische Gabelverzweigung*. Für Gl. (2.24) entspricht das dem Übergang von einem Sattelpunkt zu einem Punktattraktor bei  $(\theta_x, \dot{\theta}_x) = (0, 0)$ . Gleichzeitig entsteht ein instabiler Grenzyklus bei  $\hat{\theta}_x = \pm R_{s,3}$ . Dies wird als *subkritische HOPF-Verzweigung* bezeichnet [50].

Wie in Abb. E.1 erkennbar ist, findet eine weitere Änderung der topologischen Eigenschaften des Systems bei  $\beta = \beta_{\text{cr}3} > \beta_{\text{cr}2}$  statt. Dabei verschwinden die Fixpunkte  $R_{s,2}$  und  $R_{s,3}$ . Es macht daher Sinn, die Funktionaldeterminante an dieser Stelle zu untersuchen. Da ein geschlossener Ausdruck für die Fixpunkte  $R_{s,2}$  und  $R_{s,3}$  nur in polaren Koordinaten vorliegt (Gl. (E.18) und Gl. (E.19)), wird die Funktionaldeterminante ebenfalls in polaren Koordinaten benötigt. Diese ergibt sich zu

$$\det \mathbf{D}_{\text{polar}} = \frac{1}{32} \left[ 2(\gamma_3'(\cos 4\varphi - 4\mu \sin 2\varphi - 9) - 12\gamma_3 \cos 2\varphi)R^2 \right. \\ \left. + (\gamma_3'^2(\cos 4\varphi - 5) - 6\gamma_3\gamma_3' \cos 2\varphi)R^4 - 16 \sin 2\varphi(\mu + \sin 2\varphi) \right] \quad (\text{E.31})$$

Um die qualitativen Eigenschaften dieses komplexen Ausdrucks für  $\varphi = \varphi_s$  und  $R = R_s$  untersuchen zu können, muss zur Vereinfachung die Dämpfung des Systems vernachlässigt werden. Mit  $\mu \approx 0$  folgt dann aus den Gln. (E.18) und (E.19):

$$\varphi_s \approx 0 \quad \text{und} \quad R_s \approx \sqrt{-\frac{4(\beta_1 \pm 1)}{3\gamma_3 \pm 2\gamma_3'}} \quad (\text{E.32})$$



**Abb. E.4:** Bifurkationsdiagramm des SINUS-Scanners. a) mit der Näherung  $\mu \approx 0$  lassen sich alle Verzweigungswerte  $\beta_{cr}$  analytisch bestimmen; b) für  $\mu \neq 0$  kann der Verzweigungswert  $\beta_{cr3}$  numerisch bestimmt werden.

Setzt man diese Näherungen in Gl. (E.31) ein und setzt diese dann null, ergeben sich die folgenden Bedingungen für Verzweigungen der Fixpunkte  $R_{s,2}$  und  $R_{s,3}$ :

$$\beta_1 = \pm 1 \quad \text{oder} \quad \beta_1 = \frac{3\gamma_3 - \gamma'_3}{\gamma'_3} \quad (\text{E.33})$$

Die beiden ersten Bedingungen entsprechen dabei dem Ausdruck in Gl. (E.30). Die dritte Bedingung ist eine zusätzliche, dritte Verzweigung. Mithilfe der Zusammenhänge (4.1) lassen sich die dazugehörigen Verzweigungswerte wieder in der  $\epsilon$ - $\beta$ -Ebene darstellen:

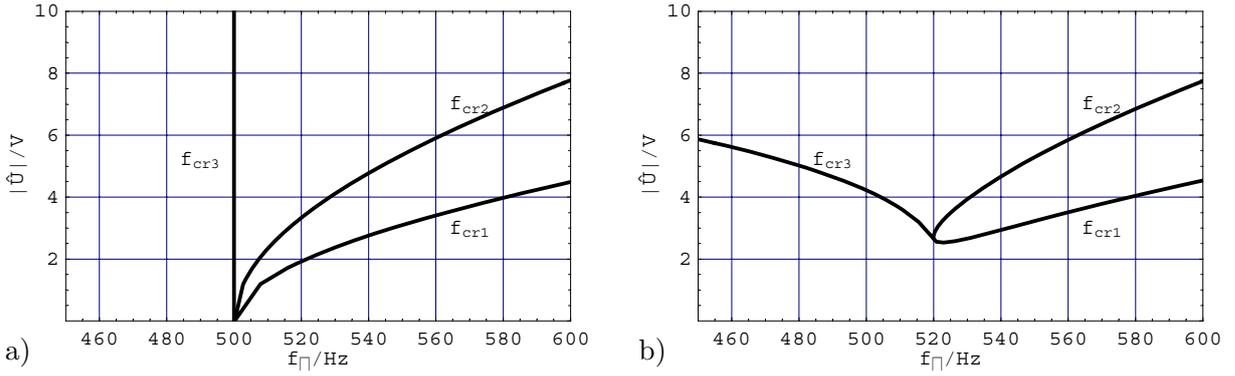
$$\beta_{cr3} \approx 1 + 2\epsilon \quad (\text{E.34})$$

Die Genauigkeit dieser Näherung ist von der tatsächlichen Größenordnung des Dämpfungsparameters  $\mu$  abhängig. Die qualitativen Eigenschaften des Systems bleiben jedoch für  $|\epsilon| \gg 0$  erhalten. Abb. E.4 verdeutlicht dies anhand der Gegenüberstellung des analytisch und numerisch ermittelten Verlaufs der Verzweigungswerte (Bifurkationsdiagramm) des SINUS-Scanners.

**Übergang  $\beta \rightarrow \beta_{cr3} - 0$ :** Entsprechend Abschnitt E.2 trifft der stabile Fixpunkt  $R_{s,2}$  auf den instabilen Fixpunkt  $R_{s,3}$ . Beide fließen ineinander und heben sich gegenseitig auf. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer *Falte* bzw. *Sattel-Knoten-Verzweigung* [50]. Für die Bewegungs-Dgl. (2.24) bedeutet dies eine Kollision des stabilen Grenzzyklus bei  $\hat{\theta}_x = \pm R_{s,2}$  mit dem instabilen Grenzzyklus bei  $\hat{\theta}_x = \pm R_{s,3}$ , wobei sich beide gegenseitig aufheben. Dies wird auch als *Annihilation* bezeichnet [50].

Die ermittelten Zusammenhänge lassen sich nun auf die physikalischen Parameter eines Mikrosannerspiegels übertragen. Für ein bestimmtes Bauelement können Systemparameter wie Massenträgheitsmoment oder Dämpfung als konstant angesehen werden. Es macht daher Sinn, die Pulsspannung  $\hat{U}_x$  und die Pulsfolgefrequenz  $f_{\square,x}$  der Antriebspannung als veränderliche Parameter zu betrachten. Anhand der Zusammenhänge (2.28) und (4.1) lassen sich die Bifurkationsbedingung in die  $\hat{U}_x$ - $f_{\square,x}$ -Ebene eines Mikrosannerspiegels übertragen. Mit den Zusammenhängen zwischen den physikalischen und normierten Parametern

$$\hat{U}_x = 2 \sqrt{\frac{2k_{t,x} \epsilon}{2r_1 \epsilon - r_1 \beta}} \quad \text{und} \quad f_{\square,x} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_{t,x}}{J_{xx} (\beta - 2\epsilon)}} \quad (\text{E.35})$$



**Abb. E.5:** Bifurkationsdiagramm des SINUS-Scanners für physikalische Parameter. a) mit der Näherung  $\mu \approx 0$  lassen sich alle Verzweigungswerte  $f_{cr}$  analytisch bestimmen; b) für  $\mu \neq 0$  kann der Verzweigungswert  $f_{cr3}$  numerisch bestimmt werden.

ergeben sich die Verzweigungswerte für die Pulsfrequenz  $f_{\square,x} > 0$  in Abhängigkeit von der Pulsspannung  $\hat{U}_x$  zu

$$f_{cr1,2} = \frac{\sqrt{2J_{xx} \left( 4k_{t,x} - r_1 \hat{U}_x^2 \right) - 4\alpha_x^2} \mp \sqrt{J_{xx}^2 r_1^2 \hat{U}_x^4 + 16\alpha_x^4 + 16J_{xx} \left( r_1 \hat{U}_x^2 - 4k_{t,x} \right) \alpha_x^2}}{2\pi\sqrt{2} J_{xx}} \quad (\text{E.36})$$

und

$$f_{cr3} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_{t,x}}{J_{xx}}} \quad \text{mit} \quad \alpha_x \approx 0 \quad (\text{E.37})$$

Die Eigenschaften der Verzweigungen bleiben dabei erhalten. Allerdings kehren sich Reihenfolge und Richtung aufgrund der nichtlinearen Koordinatentransformation entsprechend Gl. (E.35) um. Die Verzweigungen treten nun bei (quasistatischer) Verringerung der Pulsfrequenz in folgender Reihenfolge auf:

**Superkritische Hopf-Verzweigung bei  $f_{\square,x} \rightarrow f_{cr,1} + 0$ :** Der triviale Fixpunkt  $R_{s,1}$  wird instabil. Es entsteht ein asymptotisch stabiler Grenzzyklus mit der Amplitude  $\pm R_{s,2}$ .

**Subkritische Hopf-Verzweigung bei  $f_{\square,x} \rightarrow f_{cr,2} + 0$ :** Der triviale Fixpunkt  $R_{s,1}$  wird stabil. Es entsteht ein instabiler Grenzzyklus mit der Amplitude  $\pm R_{s,3}$ .

**Annihilation bei  $f_{\square,x} \rightarrow f_{cr,3} + 0$ :** Die Grenzzyklen annihilieren sich. Es existiert nur noch der Punktattraktor bei  $R_{s,1} = 0$ .

Abb. E.5 enthält das Bifurkationsdiagramm des SINUS-Scanners für physikalische Parameter ( $\hat{U}_x$ - $f_{\square,x}$ -Ebene). Zum Vergleich wurde wieder die Näherung  $\mu \approx 0$  dem numerisch ermittelten Verlauf gegenübergestellt. Es ist zu erkennen, dass die qualitativen Eigenschaften des gedämpften Systems mit denen des ungedämpften vergleichbar sind. Es treten jedoch größere Abweichungen für die Verzweigungswerte  $f_{cr,3}$  vor allem bei großen Pulsspannung  $\hat{U}_x$  auf.

## Globale Bifurkationen

Als *globale Bifurkation* wird eine parameterabhängige Änderung der *globalen* dynamischen Eigenschaften eines Systems bezeichnet. Im Unterschied zu lokalen Bifurkationen lassen sich globale Bifurkationen nicht aus lokalen Informationen ableiten.

Für die Bewegungs-Dgl. des *Fraunhofer IPMS* Mikrosannerspiegels können sich die dynamischen Eigenschaften bei Variation des Dämpfungsparameters  $\mu$  bzw.  $\alpha$  ändern. Wie in den Abbildungen E.4 und E.5 erkennbar ist, tritt eine globale Bifurkation bei

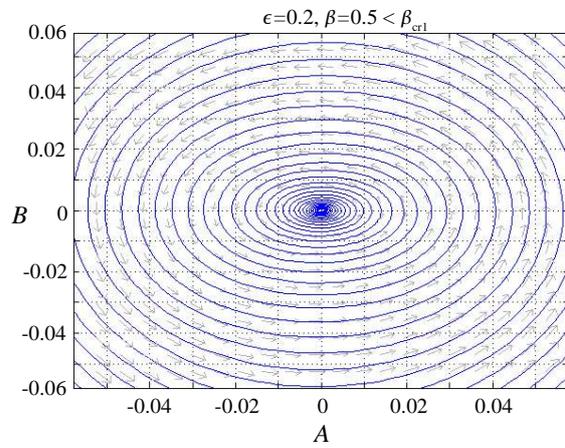
$$\mu = \mu_{\text{cr}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \alpha_{\text{cr}} = 0 \quad (\text{E.38})$$

auf. Beim Übergang  $\mu \rightarrow +0$  bzw.  $\alpha \rightarrow +0$ , ändern sich die qualitative Gestalt der Bifurkationsdiagramme und damit die globalen Eigenschaften des Systems. Es existieren dann bei  $\epsilon = 0$  bzw.  $U = 0$  stabile Orbits der Schwingung für alle Werte der Kontrollparameter  $\beta$  und  $\hat{U}_x$  (ungedämpfte nichtlineare Schwingung).

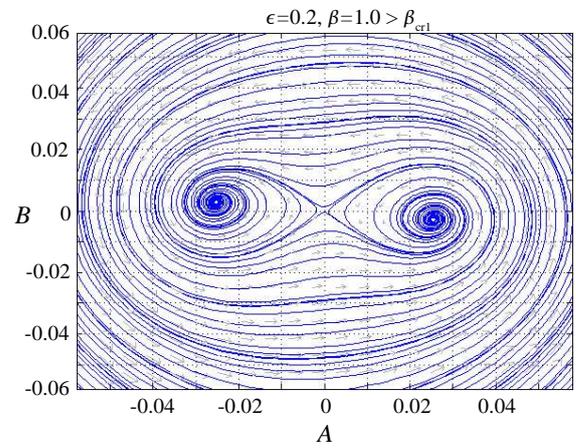
Aufgrund der Tatsache, dass in einem real existierenden, physikalischen System die Dämpfung immer ungleich null ist, ist diese Eigenschaft der Bewegungs-Dgl. praktisch nicht von Belang.

## E.4 Phasenportraits

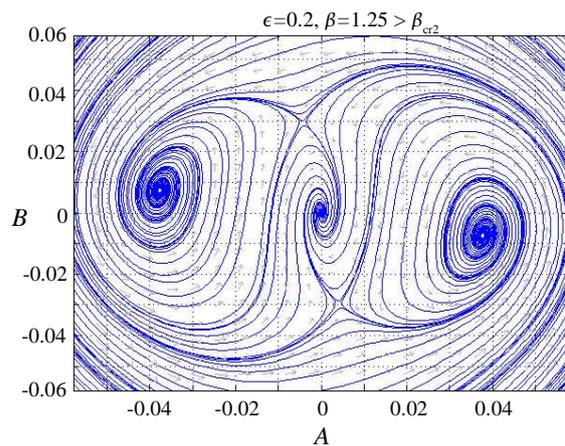
### Slow-flow-System (*SINUS-Scanner*)



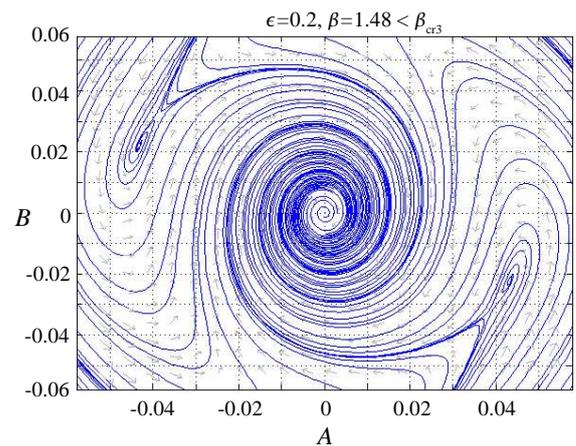
Punktattraktor bei (0,0)



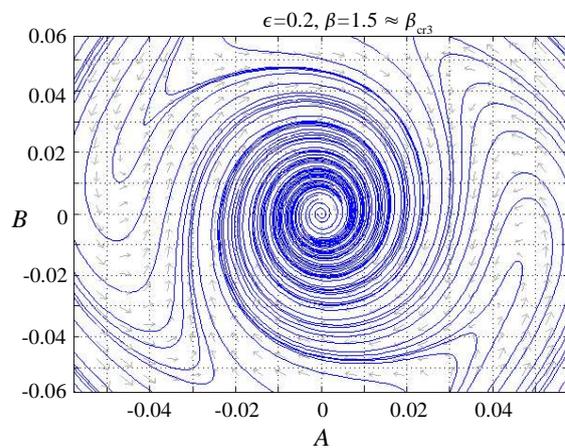
Sattelpunkt bei (0,0)  
Punktattraktoren bei  $(\pm A_{s,2}, \pm B_{s,2})$



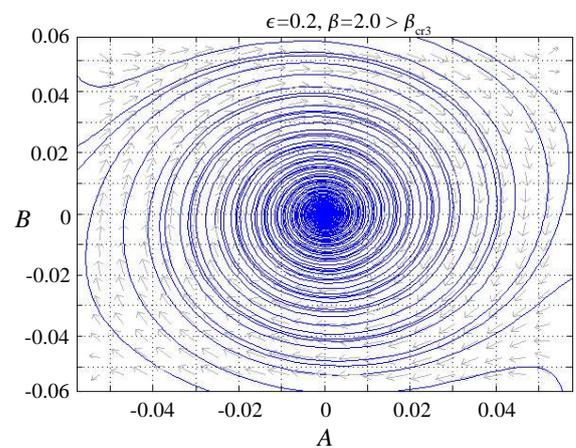
Punktattraktor bei (0,0)  
Punktattraktoren bei  $(\pm A_{s,2}, \pm B_{s,2})$   
Sattelpunkte bei  $(\pm A_{s,3}, \pm B_{s,3})$



Punktattraktor bei (0,0)  
Punktattraktoren bei  $(\pm A_{s,2}, \pm B_{s,2})$   
Sattelpunkte bei  $(\pm A_{s,3}, \pm B_{s,3})$

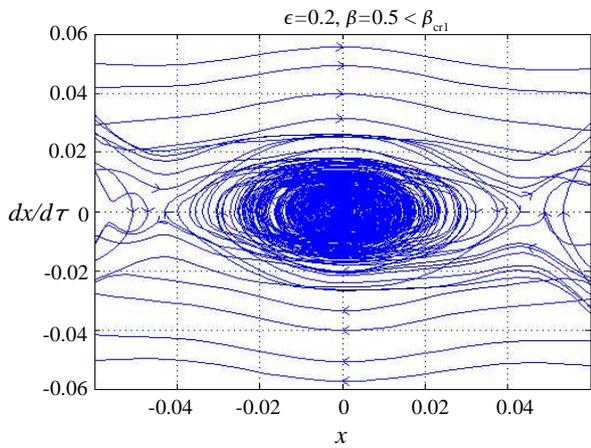


Punktattraktor bei (0,0)  
**Sattel-Knoten-Verzweigung**

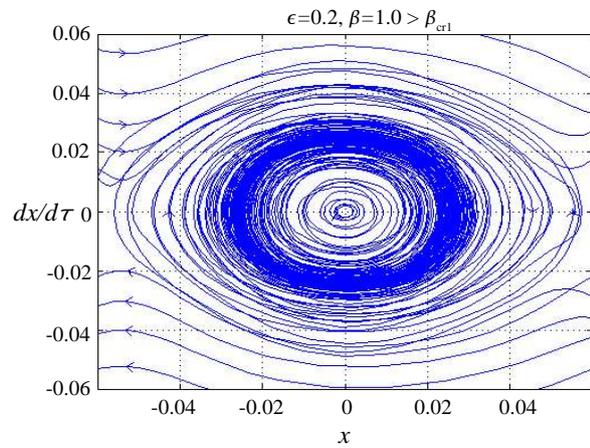


Punktattraktor bei (0,0)

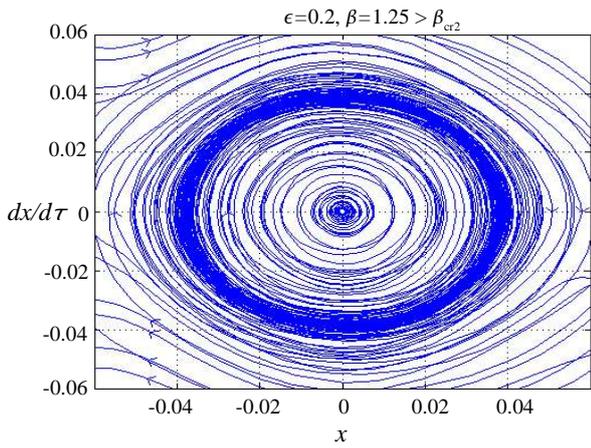
Bewegungs-Differentialgleichung (*SINUS-Scanner*)<sup>b</sup>



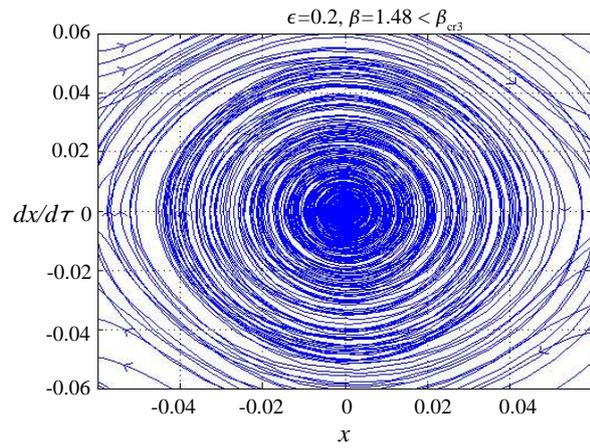
Punktattraktor bei (0,0)



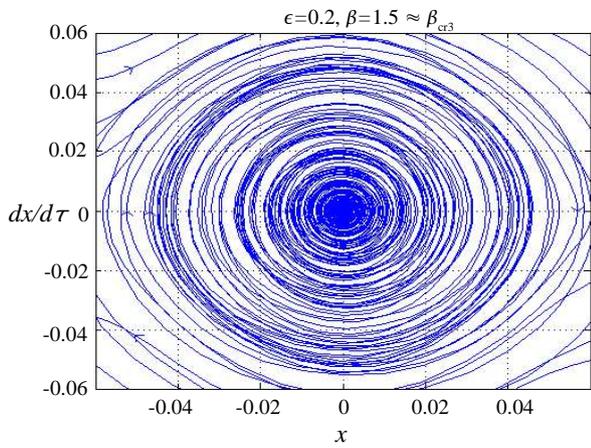
Sattelpunkt bei (0,0)  
stabile Grenzzyklen bei  $(\pm A_{s,2}, \pm B_{s,2})$



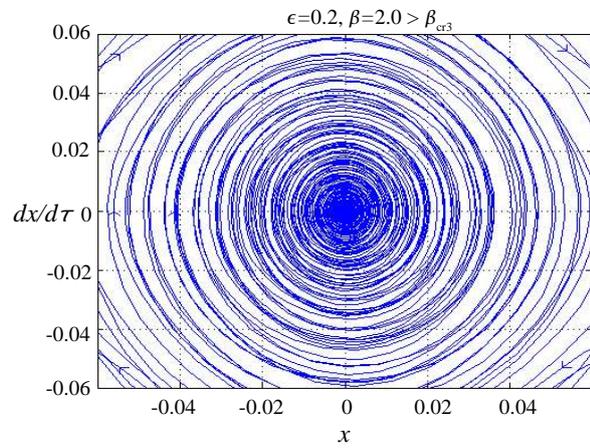
Punktattraktor bei (0,0)  
stabile Grenzzyklen bei  $(\pm A_{s,2}, \pm B_{s,2})$   
instabile Grenzzyklen bei  $(\pm A_{s,3}, \pm B_{s,3})$



Punktattraktor bei (0,0)  
stabile Grenzzyklen bei  $(\pm A_{s,2}, \pm B_{s,2})$   
instabile Grenzzyklen bei  $(\pm A_{s,3}, \pm B_{s,3})$



Punktattraktor bei (0,0)  
**Annihilation**



Punktattraktor bei (0,0)

<sup>b</sup>Es wird lediglich eine Projektion des dreidimensionalen Phasenraums  $(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau)$  der Dgl. (2.29) dargestellt. Es ist daher möglich, dass sich Trajektorien schneiden.

## F *IMtk*-Klassenbibliothek

### F.1 Klassenübersicht

Es folgt eine Übersicht zu den im *IMtk* bereitgestellten Klassen und deren Eigenschaften und Methoden (vgl. dazu auch Abb. 5.9 auf S. 132). Auf die komplette Beschreibung der Schnittstellen wird an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet. Es sei daher auf die Online-Dokumentation der Bibliothek verwiesen. Diese kann für die *IMtk*-Methoden mithilfe der *MATLAB*<sup>®</sup>-Funktion `help()` aufgerufen werden:

---

```
>> help global_coords
IMTK_ELEMENT/GLOBAL_COORDS transformation of a vector or rotation
matrix into global coordinates

5   xt = global_coords(e, x) returns the vector 'x' of the coordinate
    system of object 'e' as vector in the global coordinate system

    rt = global_coords(e, r) returns the rotation matrix 'r' of the
10   coordinate system of object 'e' as rotation matrix in the global
    coordinate system

    example: global_coords(fl, [0; 0; 15e-6]) returns the vector
    [0; 0; 15e-6] in the global coordinate system of flexure 'fl'

15   Copyright: (C) 2004-2007 Fraunhofer IPMS/MSD,
    Address:   Maria-Reiche-Str. 2, 01109 Dresden, Germany
    Internet:  http://www.ipms.fraunhofer.de

    Project:   Dissertation 'Modellierung und Entwurf von resonanten
20   Mikroaktoren mit elektrostatischem Antrieb'
    Revision:  $Id: global_coords.m,v 1.1.1.1 2007/04/16 14:25:42 klose Exp$
    Author:    Thomas Klose <thomas.klose@ipms.fraunhofer.de>
```

---

*Lowlevel*-Eigenschaften und Methoden sowie *private* [120] Funktionen, Eigenschaften und Methoden sind in der Übersicht nicht enthalten.

**Tabelle F.1:** In der *IMtk*-Bibliothek realisierte Klassen.

<i>IMtk</i> -Klasse	Beschreibung
<code>imtk_axis</code>	Rotations- oder Verschiebungsachse innerhalb des globalen Koordinatensystems
<code>imtk_capacitor</code>	Anordnung zweier Flächen zu einer elektrischen Kapazität (z.B. zur Beschreibung einer Plan-Platten-Elektrode)
<code>imtk_comb_electrode</code>	beliebige Anordnung von Fingerelektroden, also im weitesten Sinne eine Kammelektrode
<code>imtk_element</code>	abstrakte Basisklasse, von der alle anderen Klassen abgeleitet werden (Ausnahme: <code>imtk_voltage_source</code> )
<code>imtk_elliptical_frame</code>	elliptischer Rahmen
<code>imtk_elliptical_plate</code>	elliptische (Spiegel-) Platte
<code>imtk_finger_elektrode</code>	Fingerelektrode (sowohl <i>In-plane</i> als auch <i>Out-of-plane</i> )
<code>imtk_flexure</code>	beschreibt ein Torsionsfederelement
<code>imtk_microscanner</code>	Superklasse, die einen 1D-Mikroscannerspiegel mit <i>Out-of-plane-comb</i> -Antrieb beschreibt

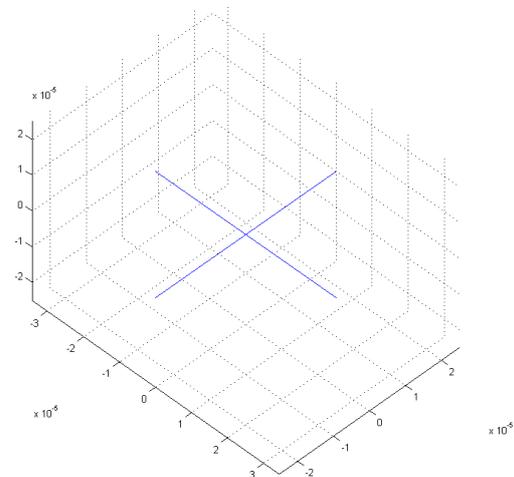
fortgesetzt auf der nächsten Seite

Fortsetzung von Tabelle F.1

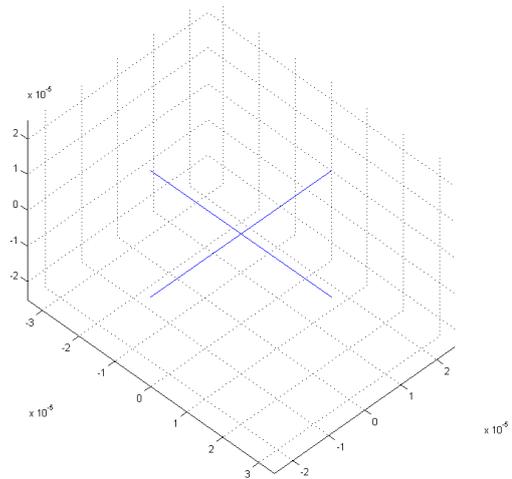
<i>IMtk</i> -Klasse	Beschreibung
<code>imtk_microscanner_2d</code>	Superklasse, die einen 2D-Mikroscannerspiegel mit <i>Out-of-plane-comb</i> -Antrieb beschreibt
<code>imtk_movable_frame</code>	Superklasse, die einen beweglichen Rahmen eines 2D-Mikroscannerspiegels mit <i>Out-of-plane-comb</i> -Antrieb beschreibt
<code>imtk_open_trench</code>	offener Graben innerhalb einer Platte oder eines beweglichen Rahmens
<code>imtk_plate</code>	abstraktes Objekt einer Platte mit zunächst undefinierter Form
<code>imtk_plot_reference</code>	Referenzpunkt eines Objekts, welches nur für die grafische Repräsentation erzeugt wird ( <i>Lowlevel</i> -Klasse)
<code>imtk_rectangular_area</code>	rechteckige Fläche, mit deren Hilfe beispielsweise die Kapazität einer Elektrodenanordnung beschrieben werden kann
<code>imtk_rectangular_frame</code>	rechteckförmiger Rahmen
<code>imtk_rectangular_plate</code>	rechteckförmige (Spiegel-) Platte
<code>imtk_reference</code>	Referenzkoordinatensystem eines Objekts (z.B. Einspannung eines Federelements oder Ort einer Gegenelektrode)
<code>imtk_superreference</code>	Zusammenfassung mehrerer Objekte des Typs <code>imtk_reference</code> (z.B. der Gegenelektroden in einer Kammelektrode)
<code>imtk_voltage_source</code>	abstraktes Objekt, mit dem eine (programmierbare) elektrische Spannungsquelle beschrieben wird

<code>imtk_element</code>	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
<code>displacement</code>	<code>displace()</code>
<code>rotation</code>	<code>global_coords()</code>
<code>is_physical</code>	<code>local_coords()</code>
<code>is_super</code>	<code>mass()</code>
	<code>moment_of_inertia()</code>
	<code>plot()</code>
	<code>rotate()</code>

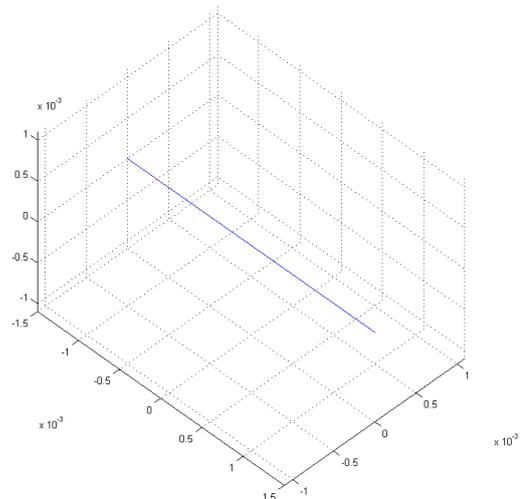
<code>imtk_reference</code>	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
<code>displacement</code>	<code>displace()</code>
<code>rotation</code>	<code>global_coords()</code>
<code>index</code>	<code>local_coords()</code>
<code>is_physical=false</code>	<code>plot()</code>
<code>is_super=false</code>	<code>rotate()</code>



imtk_superreference	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	add_reference()
rotation	displace()
index	global_coords()
is_physical=false	local_coords()
is_super=true	plot()
	rotate()
	copy()
	reset()

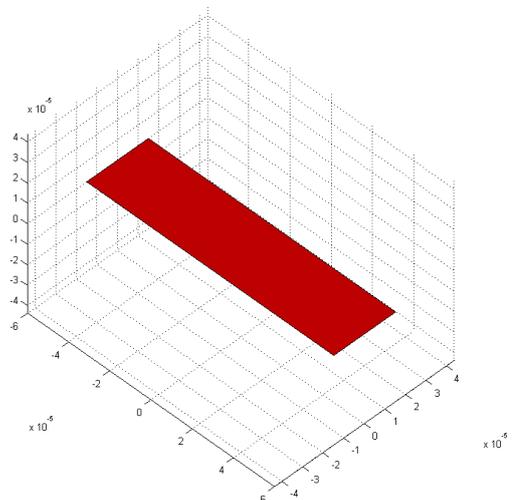


imtk_plot_reference	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
index	local_coords()
is_physical=false	rotate()
is_super=false	

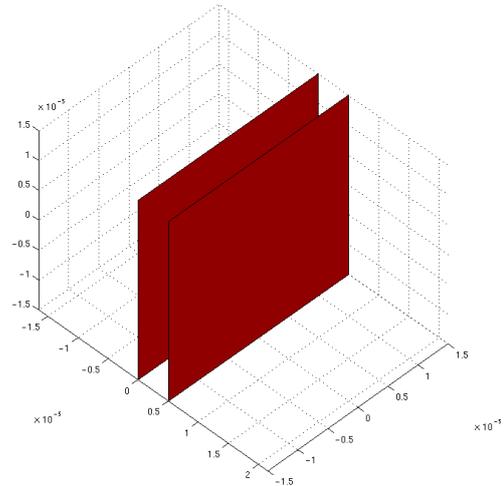


imtk_axis	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=false	local_coords()
is_super=false	plot()
	rotate()

imtk_rectangular_area	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=false	local_coords()
is_super=false	plot()
A, B, C, D	rotate()
	distance()
	shift()
	capacitance()



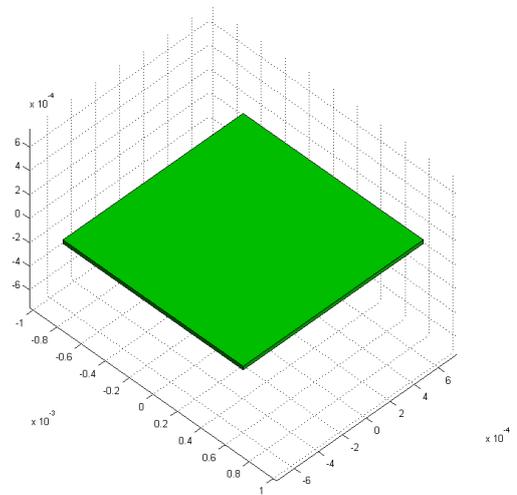
imtk_capacitor	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=false	local_coords()
is_super=false	plot()
width	rotate()
height	capacitance()
distance	electrostatic_force()
capacitance_model	electrostatic_torque()



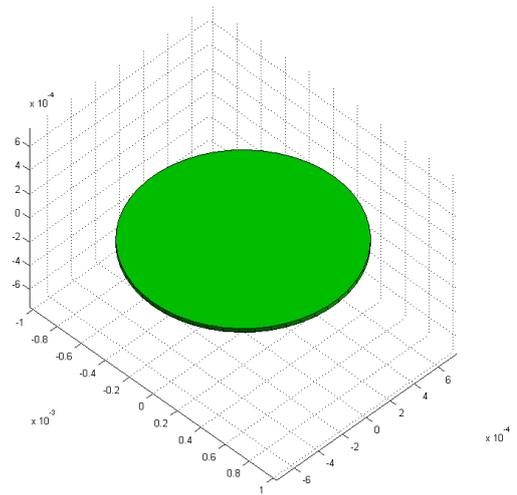
imtk_voltage_source	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
magnitude	voltage()
shape	duty_factor()
frequency	frequency()
period	magnitude()
pulse_length	
slope_time	
trigger	
trigger_time	
trigger_off_time	
trigger_delay	
offset	
phase_shift	
frequency_sweep	
fsweep_frequency	
voltage_sweep	
vsweep_voltage	
duty_sweep	
dsweep_factor	
dsweep_time	
slope_sweep	
ssweep_slope	
sweep_time	
custom_data	

imtk_plate	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=false	rotate()
reference	
length	
width	
height	

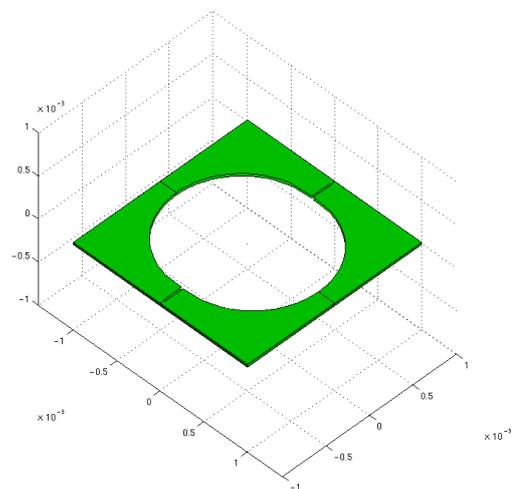
imtk_rectangular_plate	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=false	mass()
reference	moment_of_inertia()
length	plot()
width	rotate()
height	margin()
	drag_torque()
	squeeze_torque()
	damping_torque()



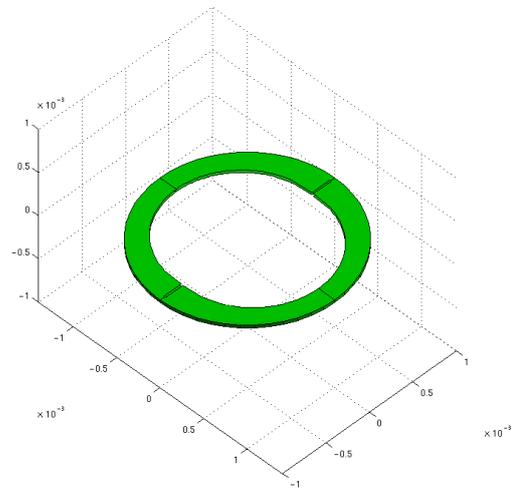
imtk_elliptical_plate	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=false	mass()
reference	moment_of_inertia()
length	plot()
width	rotate()
height	margin()
	drag_torque()
	squeeze_torque()
	damping_torque()



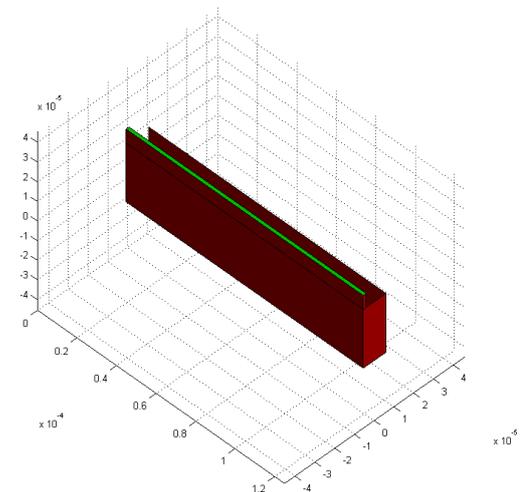
imtk_rectangular_frame	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=false	mass()
reference	moment_of_inertia()
length	plot()
width	rotate()
height	margin()
margin	drag_torque()
	squeeze_torque()
	damping_torque()



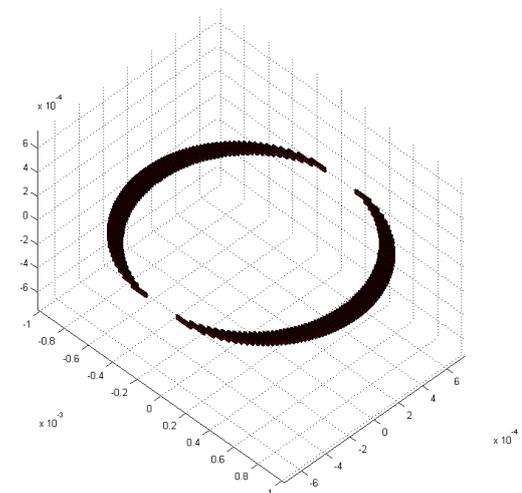
imtk_elliptical_frame	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=false	mass()
reference	moment_of_inertia()
length	plot()
width	rotate()
height	margin()
margin	drag_torque()
	squeeze_torque()
	damping_torque()



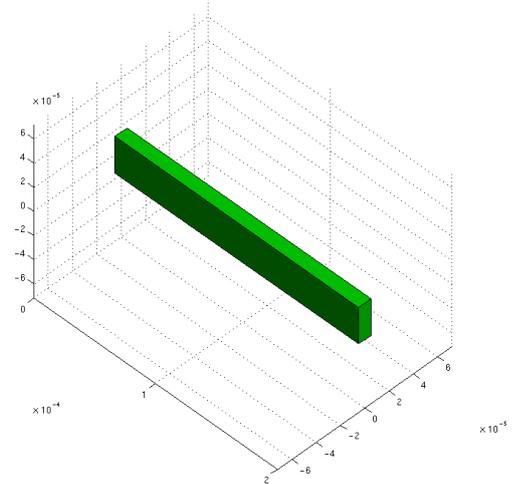
imtk_finger_electrode	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=false	mass()
length	moment_of_inertia()
width	plot()
bwidth	rotate()
distance	capacitance()
height	damping_force()
reference	electrostatic_force()
capacitance_model	electrostatic_torque()
deflection	trajectory_radius()
	stability_voltage()



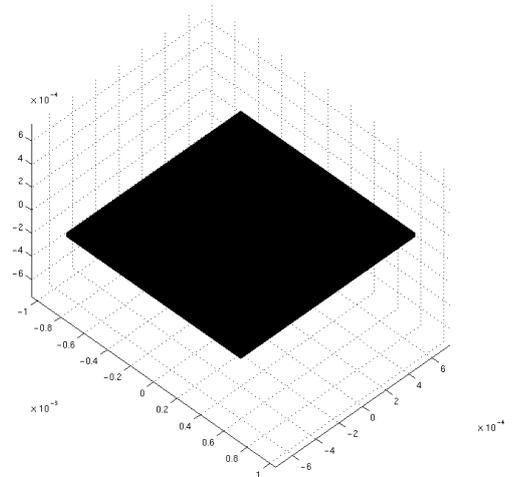
imtk_comb_electrode	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=true	mass()
length	moment_of_inertia()
width	plot()
bwidth	rotate()
height	capacitance()
distance	damping_torque()
superreference	electrostatic_force()
margin	electrostatic_torque()
symmetry_factor	margin()
nfinger	coordinates()
capacitance_model	stability_voltage()
capacitors	



imtk_flexure	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=false	mass()
reference	moment_of_inertia()
length	plot()
width	rotate()
height	shear_stress()
Gm <sup>a</sup>	torsional_torque()
It <sup>a</sup>	tensile_stress()
leff <sup>a</sup>	margin()
Wt <sup>a</sup>	
kt <sup>a</sup>	
deflection	
characteristic_curve	

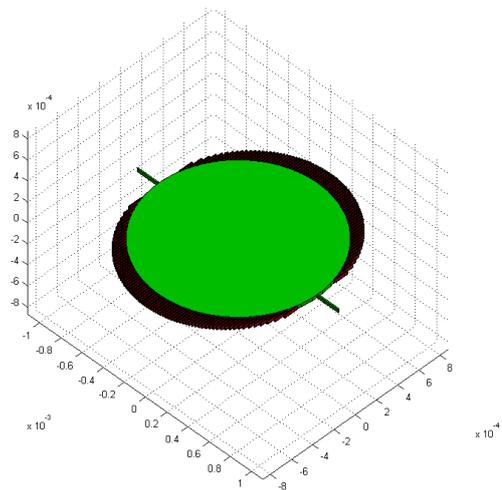


imtk_open_trench	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=false	mass()
reference	moment_of_inertia()
length	plot()
width	rotate()
height	margin()



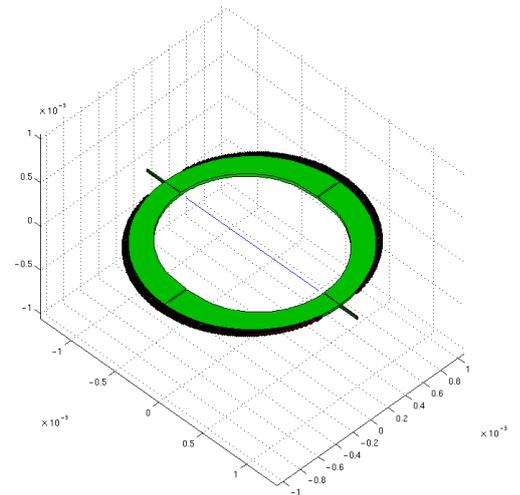
<sup>a</sup>Kein Schreibzugriff; die Eigenschaft kann nur gelesen werden.

imtk_microscanner	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=true	mass()
superreference	moment_of_inertia()
plate <sup>a</sup>	plot()
plate.subtype	write_meander_path()
plate.length	rotate()
plate.width	margin()
plate.height	capacitance()
plate.margin <sup>a</sup>	damping_torque()
comb	driving_torque()
comb.step	torsional_torque()
comb.length	init()
comb.width	transient()
comb.bwidth	closed_loop_equilibrium()
comb.distance	open_loop_response()
comb.height	plot_cc()
comb.epsilon	stability_regions()
comb.margin <sup>a</sup>	shock_stress()
capacitance_model	stability_voltage()
flexure <sup>a</sup>	parametric_resonance()
flexure.length	dynamic_deformation()
flexure.width	find_flexure()
flexure.height	
flexure.kt <sup>a</sup>	
flexure.characteristic axis <sup>a</sup>	
open_trenches	
deflection	
moment_of_inertia	
torsional_torque <sup>a</sup>	
frequency <sup>a</sup>	
capacitance_table	
damping_table	



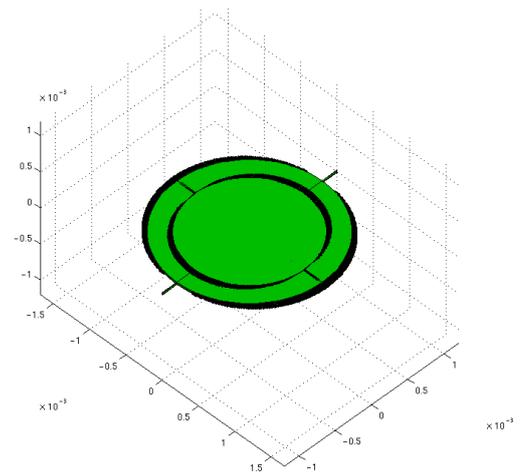
<sup>a</sup>Kein Schreibzugriff; die Eigenschaft kann nur gelesen werden.

imtk_movable_frame	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords() local_coords()
is_physical=true	mass()
is_super=true	moment_of_inertia()
superreference	plot()
frame	write_meander_path()
frame.subtype	rotate()
frame.length	margin()
frame.width	capacitance()
frame.height	damping_torque()
frame.margin <sup>a</sup>	driving_torque()
comb	torsional_torque()
comb.step	init()
comb.length	transient()
comb.width	closed_loop_equilibrium()
comb.bwidth	open_loop_response()
comb.distance	plot_cc()
comb.height	stability_regions()
comb.epsilon	shock_stress()
comb.margin <sup>a</sup>	capacitance_model
capacitance_model	stability_voltage()
flexure <sup>a</sup>	parametric_resonance()
flexure.length	dynamic_deformation()
flexure.width	find_flexure()
flexure.height	
flexure.kt <sup>a</sup>	
flexure.characteristic axis <sup>a</sup>	
open_trenches	
deflection	
moment_of_inertia	
torsional_torque <sup>a</sup>	
frequency <sup>a</sup>	
capacitance_table	
damping_table	



<sup>a</sup>Kein Schreibzugriff; die Eigenschaft kann nur gelesen werden.

imtk_microscanner_2d	
Eigenschaften	Methoden (Highlevel)
displacement	displace()
rotation	global_coords()
is_physical=true	local_coords()
is_super=true	mass()
movable_frame	moment_of_inertia()
frame.subtype	plot()
frame.length	write_meander_path()
frame.width	rotate()
frame.height	margin()
frame.margin <sup>a</sup>	capacitance()
comb	damping_torque()
comb.step	driving_torque()
comb.length	torsional_torque()
comb.width	init()
comb.bwidth	transient()
comb.distance	closed_loop_equilibrium()
comb.height	open_loop_response()
comb.epsilon	plot_cc()
comb.margin <sup>a</sup>	stability_regions()
capacitance_model	shock_stress()
flexure <sup>a</sup>	stability_voltage()
flexure.length	parametric_resonance()
flexure.width	capacitance_2d()
flexure.height	damping_torque_2d()
flexure.kt <sup>a</sup>	driving_torque_2d()
flexure.characteristic	moment_of_inertia_2d()
axis <sup>a</sup>	torsional_torque_2d()
open_trenches	transient_2d()
deflection	dynamic_deformation()
frame.moment_of_inertia	find_flexure()
frequency <sup>a</sup>	
capacitance_table	
damping_table	
microscanner	
superreference	
cross_coupling_table	
frequency_2d	
deflection_2d	



<sup>a</sup>Kein Schreibzugriff; die Eigenschaft kann nur gelesen werden.

## F.2 Funktionen

Es folgt eine tabellarische Übersicht zu den mit dem *IMtk* bereitgestellten Funktionen bzw. deren Zweck. Auf die komplette Beschreibung der Schnittstellen wird an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet. Es sei daher auf die Online-Dokumentation der Bibliothek verwiesen. Diese kann für die Funktionen mithilfe der *MATLAB*<sup>®</sup>-Funktion `help()` aufgerufen werden:

---

```
>> help imtk_plot_phasepicture
IMTK_PLOT_PHASEPICTURE plots phase pictures for a given deformation
profile.

5 FFT = imtk_plot_phasepicture(filename, theta) plots the phase
  picture for the deformation profile given in 'filename' with
  default parameters. The Deformation is scaled for a deflection
  angle of 'theta'. If 'theta' is zero the deformation is not
10 scaled. It returns a 512x512 matrix with the result
  of the FFT.

  FFT = imtk_plot_phasepicture(filename, theta, name, val, ...)
  plots the phase picture for the deformation profile given in
  'filename' with given properties. The Deformation is scaled for
15 a deflection angle of 'theta'. If 'theta' is zero the deformation
  is not scaled. It returns a 'Resolution'x'Resolution' matrix with
  the result of the FFT.
  Valid names are 'LaserDirection' (incidence angle), 'LaserPosition'
  [x,y], 'LaserDiameter', 'WaveLength', 'Dimension' (transformed area),
20 'Resolution', 'UnitSystem' (of input data: MKS|uMKS|mMKS)

  defaults:
  'LaserDirection': 0   'LaserPosition': [0 0]   'LaserDiameter': Inf
  'WaveLength': 650e-9 'Dimension': 15e-3       'Resolution': 512
25 'UnitSystem': uMKS

  Copyright: (C) 2004-2007 Fraunhofer IPMS/MSD,
  Address:   Maria-Reiche-Str. 2, 01109 Dresden, Germany
  Internet:  http://www.ipms.fraunhofer.de

30 Project:   Dissertation 'Modellierung und Entwurf von resonanten
             Mikroaktoren mit elektrostatischem Antrieb'
  Revision:  $Id: imtk_plot_phasepicture.m,v 1.1.1.1 2007/04/16 13:45:54 klose Exp$
  Author:    Thomas Klose <thomas.klose@ipms.fraunhofer.de>
```

---

**Tabelle F.2:** Highlevel-Funktionen der *IMtk*-Klassenbibliothek

Funktionsname	Zweck
<code>dynamic_viscosity()</code>	Berechnung der effektiven dynamischen Viskosität von Luft
<code>imtk_clear_references()</code>	Löscht alle in der globalen Datenstruktur IMTK verwalteten <code>imtk_reference</code> - und <code>imtk_superreference</code> -Objekte
<code>imtk_init()</code>	Initialisiert die globale Datenstruktur IMTK (siehe Anhang F.3)
<code>imtk_plot_deformation()</code>	Berechnet und skaliert Oberflächenprofile aus Messungen oder <i>FEM</i> -Rechnungen und stellt diese dar (Abb. 6.8 auf S. 157)
<code>imtk_plot_lissajous()</code>	Erzeugt die Animation einer LISSAJOUS-Figur aus den Ergebnissen der transienten Simulation eines <code>imtk_microscanner_2d</code> -Objekts (Abb. 6.12 auf S. 161)
<code>imtk_plot_phasepicture()</code>	Berechnet die von einer deformierten Oberfläche verursachte Verzerrung eines Laserstrahls im Fernfeld und stellt diese dar (Abb. 6.9 auf S. 157)
<code>imtk_plot_response_curves()</code>	Stellt die mithilfe der Methode <code>open_loop_response()</code> berechneten Frequenz-Antwortkurven dar (Abb. 6.13 auf S. 161)
<code>imtk_read_ansys_results()</code>	Bereitet die aus <i>ANSYS</i> <sup>®</sup> -Simulationen gewonnenen Ergebnisse auf, sodass sie an ein <code>imtk_microscanner</code> - bzw. <code>imtk_microscanner_2d</code> -Objekt übergeben werden können

### F.3 Datenstruktur IMTK

Globale Daten und Informationen zur Konfiguration der *IMtk*-Klassenbibliothek werden in der globalen Datenstruktur IMTK verwaltet. Sie wird von der Funktion `imtk_init()` initialisiert und kann mithilfe der Funktion `imtk_clear_references()` zurückgesetzt werden.

Der Zugriff auf die in IMTK enthaltenen Daten kann jederzeit erfolgen. Im folgenden Beispiel werden die Parameter für die grafische Repräsentation der im *IMtk* enthaltenen Objekte an der Kommandozeile abgerufen. Anschließend wird die Farbe, in welcher Objekte vom Typ `imtk_flexure` dargestellt werden, auf rot gesetzt:

---

```
>> global IMTK
>> IMTK.plots

ans =
5
    elliptical_plate_resolution: 50
        plate_color: 'green'
        flexure_color: 'green'
    finger_electrode_color: 'green'
10    reference_color: 'blue'
        reference_line_length: 5.0000e-05
            axis_color: 'blue'
        axis_line_length: 0.0015
            area_color: 'red'
15    trench_color: 'black'
        plot_whole_comb: 1

>> IMTK.plots.flexure_color = 'red';
```

---

**Tabelle F.3:** Innerhalb der globalen Datenstruktur *IMTK* verwaltete Informationen.

Name	Typ	Zweck
IMTK.constants.poisson_si	double	mittlere POISSON-Zahl für Silizium
IMTK.constants.rho_si	double	Massendichte von Silizium
IMTK.constants.E_si_100	double	E-Modul von einkristallinem Silizium ((100)-Richtung)
IMTK.constants.E_si_110	double	E-Modul von einkristallinem Silizium ((110)-Richtung)
IMTK.constants.E_si_111	double	E-Modul von einkristallinem Silizium ((111)-Richtung)
IMTK.constants.g	double	Schwerebeschleunigung
IMTK.constants.epsilon_0	double	Permittivität von Luft
IMTK.constants.k	double	BOLTZMANN-Konstante
IMTK.constants.R	double	universelle Gaskonstante
IMTK.constants.M_air	double	molare Masse von Luft
IMTK.constants.standard_pressure	double	Normaldruck
IMTK.constants.mean_molecular_diameter	double	mittlerer Moleküldurchmesser von Luft
IMTK.constants.standard_temperature	double	Raumtemperatur
IMTK.constants.Kn_critical	double	kritische KNUDSEN-Zahl
IMTK.constants.dynamic_viscosity	2x25 double	Verlauf der relativen dynamischen Viskosität über $T$
IMTK.transient.angular_acceleration	double	externe Winkelbeschleunigung um die $x$ -Achse
IMTK.AME1.substrate_height	double	Standard-Höhe der Struktur-Ebene
IMTK.AME1.trench_width	double	Standard-Grabenbreite
IMTK.design.min	double	Mindestabstand einer Fingerelektrode von der $x$ -Achse
IMTK.design.min_i	double	Mindestabstand einer Fingerelektrode von der $y$ -Achse
IMTK.design.dp	double	äußere Breite eines Stoppers
IMTK.design.dp2	double	innere Breite eines Stoppers
IMTK.design.cavity_height	double	Höhe der Rückseitengrube
IMTK.plots.elliptical_plate_resolution	integer	Linienunterteilungen einer elliptischen Platte
IMTK.plots.plate_color	char	Farbe einer Platte
IMTK.plots.flexure_color	char	Farbe einer Torsionsfeder
IMTK.plots.finger_electrode_color	char	Farbe einer Fingerelektrode
IMTK.plots.reference_color	char	Farbe einer Referenz

*fortgesetzt auf der nächsten Seite*

Fortsetzung von Tabelle F.3

Name	Typ	Zweck
<code>IMTK.plots.reference_line_length</code>	double	Länge einer Referenz
<code>IMTK.plots.axis_color</code>	char	Farbe einer Achse
<code>IMTK.plots.axis_line_length</code>	double	Länge einer Achse
<code>IMTK.plots.area_color</code>	char	Farbe einer Fläche
<code>IMTK.plots.trench_color</code>	char	Farbe eines offenen Grabens
<code>IMTK.plots.plot_whole_comb</code>	logical	Darstellung der vollständigen Kammelektrode
<code>IMTK.precision.rectangular_area.c_step</code>	integer	Diskretisierung einer Fläche bei der Berechnung von $C$
<code>IMTK.precision.electrode_finger.c_ds</code>	double	infinitesimal kleine Auslenkung einer Fingerelektrode
<code>IMTK.precision.microscanner.c_step1</code>	double	Diskretisierungsweite bei der Berechnung des $C$ -Verlaufs
<code>IMTK.precision.microscanner.c_angle1</code>	double	Auslenkung für die Diskretisierungsweite <code>c_step1</code>
<code>IMTK.precision.microscanner.c_step2</code>	double	Diskretisierungsweite bei der Berechnung des $C$ -Verlaufs
<code>IMTK.precision.microscanner.c_angle2</code>	double	Auslenkung für die Diskretisierungsweite <code>c_step2</code>
<code>IMTK.precision.microscanner.c_method</code>	char	Interpolationsmethode zur Berechnung des $C$ -Verlaufs
<code>IMTK.precision.microscanner.c_dphi</code>	double	infinitesimal kleiner Auslenkwinkel eines Mikrosanners
<code>IMTK.precision.microscanner.stability_ds</code>	double	infinitesimal kleine Auslenkung eines Mikrosanners
<code>IMTK.precision.microscanner.d_step1</code>	double	Diskretisierungsweite bei der Berechnung des $M_d$ -Verlaufs
<code>IMTK.precision.microscanner.d_angle1</code>	double	Auslenkung für die Diskretisierungsweite <code>d_step1</code>
<code>IMTK.precision.microscanner.d_step2</code>	double	Diskretisierungsweite bei der Berechnung des $M_d$ -Verlaufs
<code>IMTK.precision.microscanner.d_angle2</code>	double	Auslenkung für die Diskretisierungsweite <code>d_step2</code>
<code>IMTK.precision.microscanner.d_method</code>	char	Interpolationsmethode zur Berechnung des $M_d$ -Verlaufs
<code>IMTK.precision.microscanner.init_deflect</code>	double	infinitesimal kleine Startauslenkung eines Mikrosanners
<code>IMTK.timebar.show</code>	logical	Schaltet Fortschrittsanzeigen ein oder aus
<code>IMTK.transient.result</code>	x6 double	Zwischenschritte der letzten transienten Rechnung

## F.4 Eigenschaften und Methoden der Basisklasse `imtk_element`

Um der besonderen Bedeutung der Klasse `imtk_element` als Basisklasse gerecht zu werden, folgt eine Übersicht der implementierten Eigenschaften und Methoden. Diese werden (mit Ausnahme von `imtk_voltage_source`) an alle übrigen Klassen der *IMtk*-Bibliothek (vgl. Anhang F.1) vererbt.

Tabelle F.4: Übersicht zur Basisklasse `imtk_element`.

Eigenschaft / Methode	Beschreibung
<code>displacemet</code>	Verschiebungsvektor des lokalen Koordinatensystems des Objekts bezüglich des Koordinatenursprungs des globalen Koordinatensystems; Datentyp: <code>&lt;3x1&gt; double</code>
<code>rotation</code>	Rotationsmatrix des lokalen Koordinatensystems des Objekts bezüglich der Orientierung des globalen Koordinatensystems; Datentyp: <code>&lt;3x3&gt; double</code>
<code>is_physical</code>	Legt fest, ob das Objekt physikalische Eigenschaften wie Masse oder Massenträgheitsmoment besitzt (z.B. Platten oder Fingerelektroden) oder ob es von abstrakter Natur ist (z.B. Achsen oder Referenzen); Datentyp: <code>logical</code>
<code>is_super</code>	Legt fest, ob das Objekt ein übergeordnetes Objekt ist, also weitere Objekte enthält (z.B. Kammelektroden) oder nicht (z.B. Flächen, Achsen); Datentyp: <code>logical</code>
<code>displace()</code>	Verschiebt das Objekt bzw. dessen lokales Koordinatensystem innerhalb des globalen Koordinatensystems
<code>rotate()</code>	Rotiert das Objekt bzw. dessen lokales Koordinatensystem um eine vorgegebene Achse
<code>global_coords()</code>	Transformiert einen Vektor oder eine Matrix aus dem lokalen Koordinatensystem des Objekts in das globale Koordinatensystem
<code>local_coords()</code>	Transformiert einen Vektor oder eine Matrix aus dem globalen Koordinatensystem in das lokale Koordinatensystem des Objekts

*fortgesetzt auf der nächsten Seite*

Fortsetzung von Tabelle F.4

Eigenschaft / Methode	Beschreibung
<code>mass()</code>	Berechnet die Masse des Objekts und gibt sie zurück
<code>moment_of_inertia()</code>	Berechnet das Massenträgheitsmoment eines Objekts bezüglich einer vorgegebenen Achse
<code>plot()</code>	Erzeugt eine grafische Repräsentation des Objekts in einem <i>MATLAB</i> <sup>®</sup> -Ausgabefenster ( <i>Figure</i> )

## F.5 Implementation

Neben einigen vergleichsweise einfach realisierten Klassen wie beispielsweise `imtk_plate` und deren Subklassen, welche lediglich geometrische Eigenschaften und eine bestimmte Masse bzw. Massenträgheit beitragen<sup>c</sup>, sowie den abstrakten Klassen `imtk_axis`, `imtk_reference` und `imtk_superreference`, welche keine nennenswerte über die Basisklasse hinausgehende Funktionalität aufweisen, enthält die *IMtk*-Klassenbibliothek auch wesentlich komplexere Klassen. Auf einige ihrer Besonderheiten wird in diesem Abschnitt näher eingegangen.

Die Klasse `imtk_rectangular_area` dient zur Modellierung kapazitiver Anordnungen. Aufgrund der Tatsache, dass eine Fläche per Definition weder eine Masse noch ein Massenträgheitsmoment besitzt, gehört `imtk_rectangular_area` zu den abstrakten Klassen (`is_physical=false`). Sie wird ausschließlich in anderen (physikalischen) Klassen wie beispielsweise `imtk_finger_electrode` oder `imtk_capacitor` instanziiert, kann also auch als *Lowlevel*-Klasse bezeichnet werden.

Eine Besonderheit der Klasse `imtk_rectangular_area` ist die Verfügbarkeit der Methode `capacitance()`. Sie gibt die elektrische Kapazität einer beliebigen Anordnung zweier Objekte vom Typ `imtk_rectangular_area` zurück. Dabei kann beim Aufruf der Methode neben der Permittivität des Dielektrikums auch das zur Bestimmung der Kapazität zu nutzende Modell angegeben werden. Es stehen zurzeit vier verschiedene Modelle zur Verfügung:

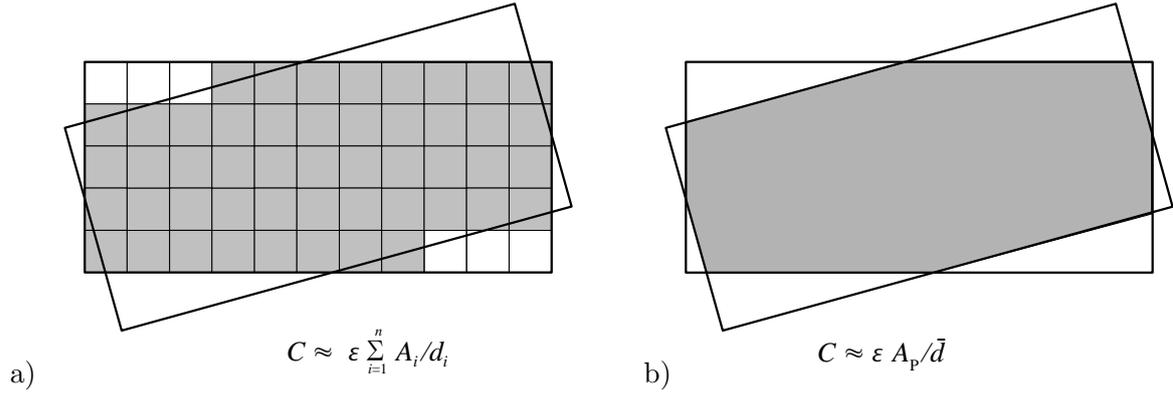
1. `capacitance_model='plate_capacitance'` (Abb. F.1a): Eine der beiden zur Elektrodenanordnung gehörenden Flächen (`imtk_rectangular_area`) wird in  $n$  rechteckige Flächen unterteilt. Die zum Einsatz kommende Unterteilung kann mit dem globalen Parameter `IMTK.precision.rectangular_area.c_step` beeinflusst werden (siehe dazu auch Anhang F.3). Für jede der  $n$  Teilflächen wird die sich aus der Anordnung ergebende Kapazität bestimmt und aufsummiert:

$$C \approx \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{d_i} \quad (\text{F.1})$$

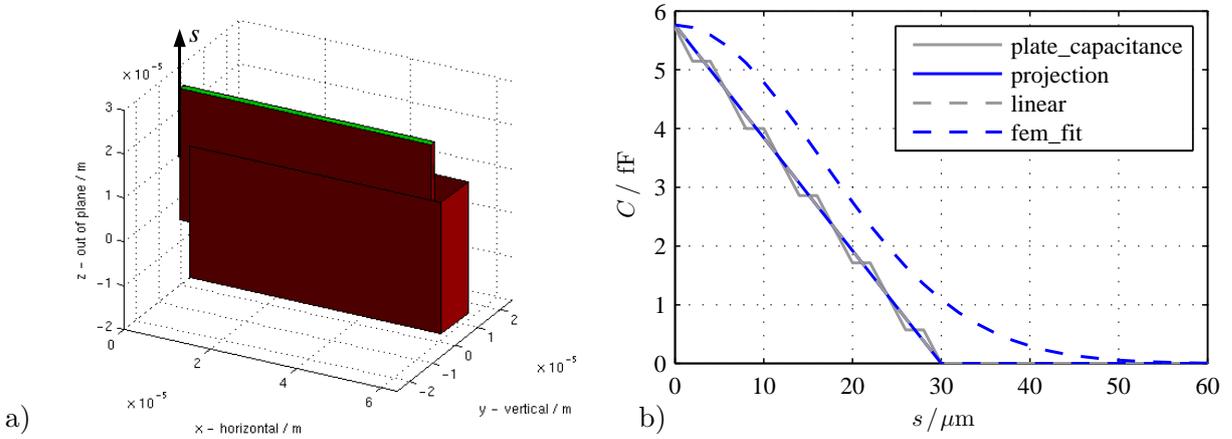
Dabei bezeichnet  $d_i$  den Abstand zwischen dem Mittelpunkt der jeweiligen Teilfläche und der zweiten Elektrode (vgl. mit Methode `distance()` der Klasse `imtk_rectangular_area`). Steht einer Teilfläche keine zweite Elektrode gegenüber, gilt  $d_i = \infty$ , sodass der entsprechende Beitrag zur Gesamtkapazität null wird.

Aufgrund der Abbildung der Elektrodenanordnung auf idealisierte Plattenkondensatoren können Effekte, die aus elektrischen Randfeldern resultieren nicht berücksichtigt werden. Der Vorteil des Modells liegt jedoch darin, dass die Kapazität räumlich

<sup>c</sup>Ausnahmen sind die Klassen `rectangular_plate` und `elliptical_plate`. Sie besitzen zusätzliche Methoden zur Bestimmung des Dämpfungsmoments bei einer Kippbewegungen, entsprechend Abschnitt 3.3.4 bzw. Gln. (3.112) und (3.114): `drag_torque()`, `squeeze_torque()`, `damping_torque()`.



**Abb. F.1:** Modelle zur Bestimmung der Kapazität zwischen beliebig orientierten Flächen. a) Unterteilung der Flächen in  $n$  rechteckförmige, ideale Plattenkondensatoren (`capacitance_model='plate_capacitance'`); b) Projektion der Flächen aufeinander (`capacitance_model='projection'`).



**Abb. F.2:** Modelle zur Kapazitätsberechnung im IMtk. a) Beispiel für instanziierte Objekte des Typs `imtk_rectangular_area` (Fingerelektrode:  $l = 58.5\mu\text{m}$ ,  $w = 1.5\mu\text{m}$ ,  $h = 30\mu\text{m}$ ,  $d = 5\mu\text{m}$ ); b) Für die verfügbaren Modelle ergeben sich unterschiedliche Kapazitätsverläufe in Abhängigkeit von der Auslenkung. Für die *Out-of-plane*-Bewegung ist das Modell `fem_fit` erwartungsgemäß am besten geeignet.

beliebig verkippter Anordnungen von Elektrodenflächen mit vergleichsweise hoher Genauigkeit bestimmt werden kann. Aufgrund der zum Einsatz kommenden Diskretisierung eignet sich das Modell allerdings nur bedingt zur Bestimmung eines Kapazitätsanstiegs  $\frac{d}{ds}C$  (stufenförmiger Verlauf der Kapazität; vgl. dazu Abb. F.2b).

2. `capacitance_model='projection'` (Abb. F.1b): Es wird der Flächeninhalt der Projektion einer der beiden zur Elektrodenanordnung gehörenden Flächen (`imtk_rectangular_area`) auf die verbleibende Fläche bestimmt. Dazu wird das folgende Integral numerisch gelöst:

$$A_p = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \text{inside}(x, y) dx dy \quad (\text{F.2})$$

Die Funktion `inside(x, y)` ist folgendermaßen definiert:

$$\text{inside}(x, y) := \begin{cases} 1 & : \text{distance}(x, y) < \infty \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

`distance()` ist eine Methode der Klasse `imtk_rectangular_area`. Sie gibt den Abstand eines beliebigen Punkts im globalen Koordinatensystem zum Fußpunkt des darauf gefällten Lots an. Ist dies nicht möglich, wird das Symbol für einen unendlichen Wert `Inf` zurückgegeben.

Mit dem auf diese Weise bestimmten Flächeninhalt der Projektion lässt sich die Kapazität einer Elektrodenanordnung näherungsweise bestimmen:

$$C \approx \varepsilon \frac{A_p}{\bar{d}} \quad (\text{F.4})$$

Dabei bezeichnet  $\bar{d}$  den mittleren Abstand der Flächen zueinander.

Aus elektrischen Randfeldern resultierende Effekte können ähnlich dem `plate_capacitance`-Modell nicht berücksichtigt werden. Aufgrund der sehr genauen Bestimmung der effektiven Elektrodenfläche eignet sich das `projection`-Modell vor allem zur Bestimmung von elektrostatischen Kräften bei Auslenkungen innerhalb der Strukturebene (*In-plane*-Auslenkung). Es muss allerdings beachtet werden, dass aufgrund des in Gl. (F.4) genutzten mittleren Abstands  $\bar{d}$  für stark zueinander verkippte Elektrodenflächen größere Abweichungen auftreten können.

3. `capacitance_model='linear'`: Der Kapazitätsverlauf wird entsprechend [3] als stückweise linear angenommen (Abschnitt 2.2.2). Es gilt:

$$C \approx \begin{cases} \Delta C - \Delta C \frac{|\text{shift}()|}{h} & : |\text{shift}()| \leq h \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \Delta C = \varepsilon \frac{A}{d} \quad (\text{F.5})$$

Dabei ist `shift()` eine Methode der Klasse `imtk_rectangular_area`. Sie gibt die absolute Verschiebung der Flächenmittelpunkte zueinander in Richtung einer Flächentangente zurück;  $h$  ist die Höhe der Elektrodenflächen (also der Fingerelektroden). Es ergibt sich ein Verlauf der Kapazität entsprechend Abb. 2.6a auf S. 15.

Wie bei den bereits vorgestellten Modellen können keine elektrischen Randfelder berücksichtigt werden. Zusätzlich ist das Modell ausschließlich für *Out-of-plane*-Auslenkungen geeignet. Es ergibt sich dann ein mit dem `projection`-Modell identischer Kapazitätsverlauf (vgl. dazu Abb. F.2). Der Vorteil des `linear`-Modells ist der wesentlich geringere Berechnungsaufwand.

4. `capacitance_model='fem_fit'`: Der Kapazitätsverlauf resultiert aus entsprechend Abschnitt 3.4.1 durchgeführten *FE*-Untersuchungen (Abb. 3.27 bzw. Gl. (3.120) auf S. 81). Um auch für leicht verkippte Fingerelektroden hohe Genauigkeiten erreichen zu können, werden dazu die Elektrodenflächen in Richtung der Fingerelektroden diskretisiert (vgl. dazu Abb. 3.29 bzw. Gl. (3.122) auf S. 82). Die dabei zum Einsatz kommende Unterteilung kann wieder mithilfe des globalen Parameters `IMTK.precision.rectangular_area.c_step` beeinflusst werden (siehe dazu auch Anhang F.3).

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Modellen werden bei Verwendung von `fem_fit` relevante (also veränderliche) elektrische Randfelder weitestgehend berücksichtigt (siehe Abb. F.2b). Es ist allerdings zu beachten, dass das Modell ähnlich dem `linear`-Modell ausschließlich für *Out-of-plane*-Auslenkungen geeignet ist.

Je nach Problemstellung kann eines der vier verfügbaren Modelle ausgewählt werden. Eine Erweiterung um weitere Ansätze ist ebenfalls problemlos möglich. Wird beim Aufruf von `capacitance()` kein Modellname angegeben, erfolgt die Berechnung auf Basis von `plate_capacitance`.

Die Klasse `imtk_finger_electrode` dient der Modellierung von Fingerelektroden. Sie enthält u.a. sechs Instanzen der Klasse `imtk_rectangular_area`. Diese bilden die Seitenflächen der Elektrode bzw. Gegenelektrode und definieren somit die elektrischen Eigenschaften einer `imtk_finger_electrode`-Instanz (Abb. F.2a). Es folgt eine kurze Beschreibung der wichtigsten verfügbaren Methoden:

`capacitance()` dient zur Berechnung der Kapazität einer beliebig ausgelenkten Fingerelektrode. Die Methode ruft die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene `capacitance()`-Methode der enthaltenen Flächen-Objekte auf. Das dabei zum Einsatz kommende Modell zur Berechnung der Kapazität wird von der Eigenschaft `capacitance_model` der Klasse `imtk_finger_electrode` festgelegt (Anhang F.1). Die Permittivität wird standardmäßig auf den Wert für Luft gesetzt (`IMTK.constants.epsilon_0`, Anhang F.3). Optional kann sowohl das zu nutzende Modell, als auch die Permittivität beim Aufruf von `capacitance()` angegeben werden.

`stability_voltage()` berechnet die *Pull-in*-Spannung einer Fingerelektrode entsprechend Gl. (3.141) für gerade bzw. Gl. (3.145) für trapezförmige Elektroden. Dabei wird auf die dem Objekt eigenen geometrischen Eigenschaften  $w_0 = \text{bwidth}$ ,  $w_1 = \text{width}$ ,  $d = \text{distance}$  (vgl. mit Anhang F.1) zurückgegriffen. Optional kann beim Aufruf auch eine von Luft abweichende Permittivität angegeben werden.

`damping_force()` gibt die auf eine bewegte Fingerelektrode wirkende Dämpfungskraft zurück. Dabei kommt das in Abschnitt 3.3.3 erarbeitete Dämpfungsmodell zum Einsatz. Ursprünglich war es geplant, dieses ähnlich den Kapazitätsmodellen innerhalb der Klasse `rectangular_area` zu implementieren. Es hat sich jedoch im Rahmen der in Abschnitt 3.3.3 durchgeführten fluidmechanischen *FEM*-Untersuchungen herausgestellt, dass die relative geometrische Anordnung der Seitenflächen einen großen Einfluss auf die Dämpfungsmechanismen ausübt. So hat beispielsweise die Veränderung der Breite einer Fingerelektrode starke Auswirkungen auf den Verlauf des Strömungsparameters  $\xi_{\text{eff}}$  (siehe Gl. (3.108) auf S. 74). Da die geometrische Anordnung der Seitenflächen erst innerhalb einer Instanz von `imtk_finger_electrode` bekannt ist, muss das Dämpfungsmodell in dieser Klasse implementiert werden. Dies geschieht innerhalb der Methode `damping_force()`. Rückgabewert ist die Dämpfungskraft einer Fingerelektrode für eine *Out-of-plane*-Bewegung entsprechend Gl. (3.105). Beim Aufruf wird als Parameter die Geschwindigkeit der Elektrode erwartet. Optional können zusätzlich Werte für den Umgebungsdruck oder die Temperatur übergeben werden (Standard: `IMTK.constants.standard_pressure` bzw. `IMTK.constants.standard_temperature`, vgl. Anhang F.3).

`electrostatic_force()`, `electrostatic_torque()` berechnen die auf eine Fingerelektrode wirkenden elektrostatischen Kräfte bzw. Drehmomente. Beide Methoden erfordern neben einer elektrischen Spannung  $U$  die Übergabe eines `imtk_axis`-Objekts. Dieses legt die Richtung der Translation bzw. der Rotation fest, für die die Kraft bzw. das Drehmoment bestimmt werden soll. Die Berechnung erfolgt dann anhand des *zentralen Differenzenquotienten* [65] des Kapazitätsverlaufs entsprechend Gl. (2.5):

$$\left| \vec{F}_{\text{el}} \right| \approx \frac{U^2}{2} \frac{\text{capacitance}(\text{displace}(\text{ax}, \Delta s/2)) - \text{capacitance}(\text{displace}(\text{ax}, -\Delta s/2))}{\Delta s} \quad (\text{F.6})$$

bzw. entsprechend Gl. (2.17):

$$\left| \vec{M}_{\text{el}} \right| \approx \frac{U^2}{2} \frac{\text{capacitance}(\text{rotate}(\text{ax}, \Delta\theta/2)) - \text{capacitance}(\text{rotate}(\text{ax}, -\Delta\theta/2))}{\Delta\theta} \quad (\text{F.7})$$

Die Richtung der Kraft  $\vec{F}_{\text{el}}$  bzw. des Drehmoments  $\vec{M}_{\text{el}}$  wird dabei jeweils von `ax`, einer Instanz der Klasse `imtk_axis`, festgelegt. Der Quotient  $\Delta s$  kann durch Setzen des globalen Parameters `IMTK.precision.finger_electrode.c_ds` beeinflusst werden. Für  $\Delta\theta$  gilt:

$$\Delta\theta = \frac{180}{\pi} \Delta s \text{trajectory\_radius}(\text{ax}) \quad (\text{F.8})$$

Dabei ist `trajectory_radius()` eine weitere Methode der `imtk_finger_electrode`-Klasse. Sie gibt den mittleren Abstand einer Fingerelektrode bezüglich einer beliebigen Rotationsachse zurück.

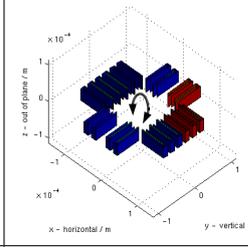
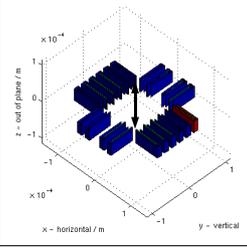
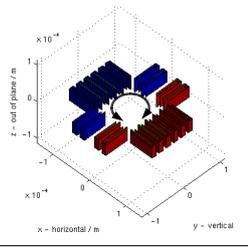
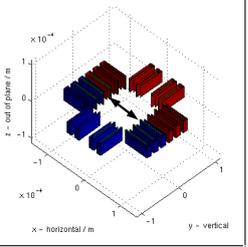
**Die Klasse `imtk_comb_electrode`** dient der Modellierung von Kammelektroden. Sie enthält eine zumeist große Anzahl von Instanzen der Klasse `imtk_finger_electrode`.

Aufgrund der Tatsache, dass ein Mikroscoanerspiegel typischerweise mehrere 100 Fingerelektroden enthält und um den daraus folgenden Berechnungsaufwand zu verringern, besitzt `imtk_comb_electrode` eine Funktionalität zur Nutzung von Symmetrien. Dazu werden alle Elektroden, welche für eine bestimmte Bewegung der Kammelektrode gleiche relative Auslenkungen zur jeweiligen Gegenelektrode aufweisen, in einer Instanz zusammengefasst. Die sich für diese vereinfachte Elektrodenanordnung ergebenden Größen (Kapazität, elektrostatische Kraft, Masse usw.) werden dann mit einem entsprechend gewählten Symmetriefaktor (Eigenschaft `symmetry_factor`) multipliziert.

Tabelle F.5 dient zur Verdeutlichung der zugrunde liegenden Idee. Sie enthält Beispiele für typische Auslenkungsrichtungen einer vergleichsweise einfachen, doppelt spiegelsymmetrischen Elektrodenanordnung und die jeweilige, sich dafür ergebende Symmetrie. Es wird deutlich, dass für die typische Bewegung eines Mikroscoanerspiegels mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb, also das Kippen um eine innerhalb der Strukturebene befindlichen Achse, der Berechnungsaufwand auf ein Viertel reduziert werden kann. Für Bauelemente mit translatorischer Auslenkung aus der Ebene heraus [118, 129] muss sogar nur eine einzige Fingerelektrode tatsächlich modelliert werden. Für *In-plane*-Auslenkungen reduziert sich der Aufwand auf die Hälfte.

Sollen im Modell einer Kammelektrode Symmetrien genutzt werden, darf nur derjenige Teil der Elektrode definiert werden, der tatsächlich modelliert werden soll (Abb. F.3a). Anschließend muss der Symmetriefaktor des Objekts auf den entsprechenden Wert gesetzt werden (Standard: `symmetry_factor=4`). Es ist zu beachten, dass die `plot()`-Methode

**Tabelle F.5:** Nutzung von Symmetrien in der Klasse `imtk_comb_electrode`. In Abhängigkeit von der Auslenkung können verschiedene Symmetrien einer Elektrodenanordnung genutzt werden. In den Abbildungen sind diejenigen Elektroden blau dargestellt, die aufgrund der jeweils genutzten Symmetrie nicht modelliert werden müssen.

Auslenkung	Rotation <i>Out-of-plane</i>	Translation <i>Out-of-plane</i>	Rotation <i>In-plane</i>	Translation <i>In-plane</i>
Symmetrie				
Faktor	4	$N^{\ddagger}$	2	2

<sup>‡</sup>Anzahl der innerhalb der Kammelektrode angeordneten Fingerelektroden.

der Klasse `imtk_comb_electrode` für Symmetriefaktoren 2 und 4 standardmäßig die definierten Elektroden entsprechend der jeweiligen Symmetrie gespiegelt darstellt. Dieses Verhalten lässt sich mit dem globalen Parameter `IMTK.plots.plot_whole_comb` (Typ `logical`) beeinflussen (vgl. dazu Abb. F.3).

Es folgt eine kurze Beschreibung der wichtigsten Methoden der `IMtk`-Klasse `imtk_comb_electrode`:

`capacitance()` gibt die elektrische Kapazität einer beliebig ausgelenkten Kammelektrode zurück. Dazu wird die `capacitance()`-Methode aller enthaltenen Objekte der Klassen `imtk_finger_electrode` und `imtk_capacitor` aufgerufen. Mithilfe der Eigenschaft `capacitance_model` kann das dabei zum Einsatz kommende Modell festgelegt werden. Optional kann wieder ein von Luft abweichender Wert für die Permittivität übergeben werden.

`stability_voltage()` gibt die geringste *Pull-in*-Spannung der enthaltenen Fingerelektroden zurück:

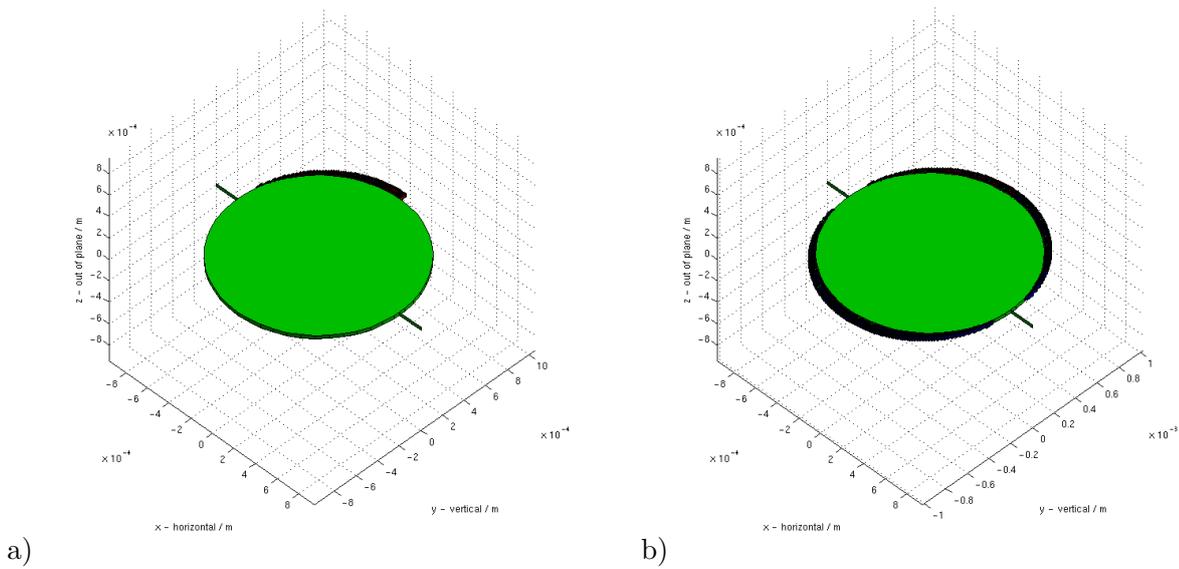
$$U_{\text{pi}} = \min_{i=1,\dots,N} \text{stability\_voltage}(\text{e.e}\{i\}) \quad (\text{F.9})$$

Dabei bezeichnet  $\text{e.e} \in (\text{imtk\_finger\_electrode})^N$  die Menge der in der Kammelektrode enthaltenen  $N$  Fingerelektroden.

`damping_torque()` gib das auf eine kippende Kammelektrode wirkende Dämpfungsdrehmoment zurück. Dazu wird die Methode `damping_force()` für alle enthaltenen Fingerelektroden aufgerufen:

$$\left| \vec{M}_d \right| \approx \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \text{damping\_force}(\text{e.e}\{i\}, \omega \bar{r}_i) \quad (\text{F.10})$$

mit  $\bar{r}_i = \text{trajectory\_radius}(\text{e.e}\{i\}, \text{ax})$



**Abb. F.3:** Nutzung von Symmetrien bei der Generierung von Scanner-Modellen. a) Darstellung der tatsächlich instanziierten Elektroden im Modell des *SINUS*-Scanners (`IMTK.plots.plot_whole_comb=false`); b) standardmäßige Darstellung des Modells mittels `plot()` (`IMTK.plots.plot_whole_comb=true`).

Dabei ist  $\bar{r}_i$  der mittlere Abstand der  $i$ -ten in der Kammelektrode enthaltenen Fingerelektrode von der Rotationsachse  $\mathbf{ax} \in \mathbf{imtk\_axis}$ . Letztere legt gleichzeitig die Richtung des Dämpfungs Drehmoments  $\vec{M}_d$  fest. Die Winkelgeschwindigkeit der Kammelektrode wird durch  $\omega$  festgelegt. Sie wird beim Aufruf von `damping_torque()` als Parameter erwartet.

Es ist zu beachten, dass die Methode aufgrund der Einschränkungen des zugrundeliegenden Dämpfungsmodells (Abschnitt 3.3.3) nur für eine Kippbewegung aus der Strukturebene heraus (siehe Tabelle F.5: Rotation *Out-of-plane*) genutzt werden kann.

`electrostatic_force()`, `electrostatic_torque()` berechnen die auf eine Kammelektrode wirkenden elektrostatischen Kräfte bzw. Drehmomente. Beide Methoden erfordern neben einer elektrischen Spannung  $U$  die Übergabe eines `imtk_axis`-Objekts. Dieses legt die Richtung der Translation bzw. der Rotation fest, für die die Kraft bzw. das Drehmoment bestimmt werden soll. Die Berechnung erfolgt dann durch Aufsummierung der Beiträge aller enthaltenen Elektroden:

$$\left| \vec{F}_{\text{el}} \right| = \sum_{i=1}^N \text{electrostatic\_force}(\mathbf{e.e}\{i\}, \mathbf{ax}, U) \quad (\text{F.11})$$

$$\left| \vec{M}_{\text{el}} \right| = \sum_{i=1}^N \text{electrostatic\_torque}(\mathbf{e.e}\{i\}, \mathbf{ax}, U) \quad (\text{F.12})$$

Dabei bezeichnet `e.e` in diesem Fall die Menge aller enthaltenen Instanzen der Klassen `imtk_finger_electrode` und `imtk_capacitor`. Die Richtung der Kraft bzw. des Drehmoments wird wieder von der Achse `ax` bestimmt.

**Die Klasse `imtk_flexure`** (Abb. 5.11) dient zur Modellierung mikromechanischer Torsionsfedern. Standardmäßig wird dabei von einem geraden Torsionsstab mit rechteckigem

Querschnitt ausgegangen. Aus den geometrischen Eigenschaften (`length`, `width`, `height`) ergeben sich dann die Eigenschaften der Torsionsfeder (`Gm`, `Wt`, `It`, `leff`, `kt`), entsprechend den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2. Geometrische Nichtlinearitäten werden dabei allerdings im Gegensatz zur Richtungsabhängigkeit der Materialeigenschaften zunächst nicht berücksichtigt.

Es folgt eine kurze Beschreibung der wichtigsten in der Klasse `imtk_flexure` implementierten Methoden:

`shear_stress()`, `tensile_stress()` berechnen die maximale Scherspannung bzw. Normalspannung einer Torsionsfeder entsprechend Gl. (3.40) bzw. Gl. (3.48). Als optionaler Parameter kann ein Auslenkwinkel angegeben werden; ansonsten werden die Spannungswerte für die aktuelle Auslenkung des Objekts (Eigenschaft `deflection`) bestimmt.

`torsional_torque()` gibt das rückstellende mechanische Drehmoment der Torsionsfeder zurück:

$$\left| \vec{M}_{\text{mech}} \right| = -k_t \theta \quad (\text{F.13})$$

Dabei ist  $k_t$  die Torsionsfederhärte (Eigenschaft `kt`) und  $\theta$  der Auslenkwinkel. Dieser kann als optionaler Parameter übergeben werden. Ansonsten wird die aktuelle Auslenkung des Objekts genutzt. Die Richtung des Drehmoments ist identisch mit der Torsionsachse ( $x'$ -Achse des lokalen Koordinatensystems).

Da die Torsionsfederhärte  $k_t$  entsprechend den in Abschnitt 3.2.1 bzw. 3.2.2 vorgestellten Zusammenhängen berechnet wird, lassen sich zunächst nur gerade Torsionsfedern mit rechteckförmigem Querschnitt modellieren. Außerdem können geometrische Nichtlinearitäten nicht berücksichtigt werden. Um diesen Nachteil aufzuheben, besitzt die Klasse `imtk_flexure` die Eigenschaft `characteristic`, mit deren Hilfe beliebige Federkennlinien, also auch nichtlineare Eigenschaften berücksichtigt werden können. Auf diese Weise kann beispielsweise ein mithilfe der *FEM* ermittelter diskreter Kennlinienverlauf an ein Torsionsfeder-Objekt übergeben werden. Dies erfolgt in Form einer zweizeiligen Matrix. Dabei werden die Komponenten der ersten Zeile als Auslenkungen, die Komponenten der zweiten Zeile als Absolutwerte des rückstellenden Drehmoments interpretiert. Ist die Eigenschaft `characteristic` gesetzt, gibt `torsional_torque()` ein Drehmoment entsprechend dem übergebenen Kennlinienverlauf zurück. Bei Bedarf wird dabei zwischen den Werten interpoliert.

**Die Klasse `imtk_voltage_source`** dient zur Modellierung einer programmierbaren Spannungsquelle. Da sie als einzige *Highlevel*-Klasse des *IMtk* nicht von der Basisklasse `imtk_element` abgeleitet wird, stellt sie eine Besonderheit dar. Sie besitzt weder ein lokales Koordinatensystem noch sonstige geometrische Eigenschaften. Die zentrale Funktionalität der Klasse ist in der Methode `voltage()` realisiert. Sie gibt einen Spannungswert  $U$  für einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  zurück. Abbildung F.4 verdeutlicht dies anhand eines einfachen Beispiels.

Zurzeit sind vier verschiedene Spannungsverläufe implementiert. Sie können anhand der Eigenschaft `shape` ausgewählt werden:

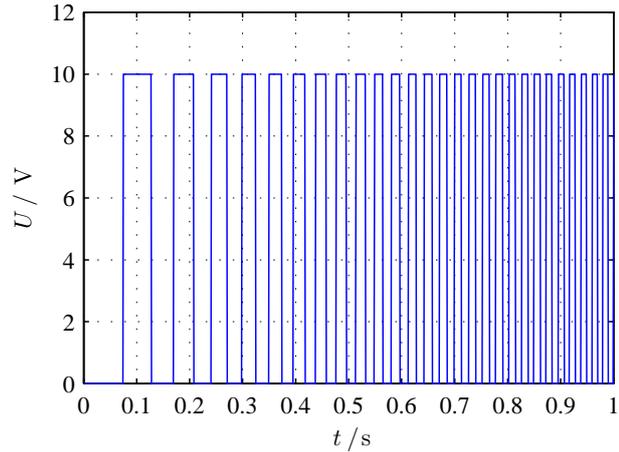
**Listing 1:** Erzeugen einer Spannungsquelle.

```

% Aufruf des Konstruktors
vs = imtk_voltage_source( ...
    'shape', 'pulse', ...
    'magnitude', 10, ...
5    'pulse_length', 0.1, ...
    'frequency', 5, ...
    'frequency_sweep', true, ...
10   'sweep_frequency', 50, ...
    'sweep_time', 1);

% Darstellen eines Spannungsverlaufs
t = 0:0.001:1;
U = voltage(vs, t);
plot(t, U);

```



**Abb. F.4:** Modell einer programmierbaren Spannungsquelle. Es wird eine Instanz der Klasse `imtk_voltage_source` erzeugt. Diese wird genutzt, um einen pulsartigen Spannungsverlauf mit veränderlicher Pulsfolgefrequenz (*Frequenz-Sweep*) zu berechnen.

1. `shape='step'`: Der Verlauf entspricht qualitativ dem der Sprungfunktion  $H(t)$  [65]. Als Parameter können Zeitpunkt, Sprunghöhe und Gleichanteil des Verlaufs beeinflusst werden:

$$U = \text{magnitude}(t) \cdot H(t - \text{phase\_shift} - \text{trigger\_time}) + \text{offset} \quad (\text{F.14})$$

Die Objekteigenschaften `phase_shift` und `trigger_time` legen dabei die Phasenverschiebung bzw. den Zeitpunkt des letzten *Trigger*-Signals<sup>e</sup> fest. `magnitude()` ist eine Methode der Klasse `imtk_voltage_source`. Sie gibt die für einen bestimmten Zeitpunkt gültige Spannungsamplitude zurück. Dabei wird nicht nur die Eigenschaft `magnitude` berücksichtigt, sondern auch `voltage_sweep`, `vsweep_voltage` und `sweep_time`, mit denen ein Spannungs-*Sweep* definiert werden kann (siehe Beispiel in Anhang F.6).

2. `shape='sine'`: Die Spannung verläuft sinusförmig. Neben der Amplitude und der Phase kann dabei auch ein zeitabhängiger Frequenzverlauf (*Sweep*) definiert werden:

$$U = \text{magnitude}(t) \sin \left( 2\pi \tau - \frac{\text{phase\_shift} + \text{trigger\_time}}{\text{period}} \right) + \text{offset} \quad (\text{F.15})$$

Dabei ist  $\tau$  die auf die Periodendauer `period` normierte, entsprechend den vorgegebenen *Sweep*-Parametern gestreckte Zeit<sup>f</sup>:

$$\tau = \begin{cases} t \left( \text{frequency} + \frac{t}{2} \frac{\text{fsweep\_frequency} - \text{frequency}}{\text{sweep\_time}} \right) & : \text{frequency\_sweep}=\text{true} \\ t \text{ frequency} & : \text{frequency\_sweep}=\text{false} \end{cases} \quad (\text{F.16})$$

<sup>e</sup>Mithilfe des *Trigger*-Mechanismus kann eine Rückkopplung (implizite Kopplung) auf die Spannungsquelle erfolgen. Dies wird beispielsweise zur Simulation eines Mikros scannerspiegels mit synchronisierter Anregung benötigt. Die Auslösung des *Triggers* erfolgt durch Setzen der Eigenschaft `trigger_time`.

<sup>f</sup>Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird an dieser Stelle nur prinzipiell auf die Definition der normierten Zeit  $\tau$  eingegangen. Die eigentliche Implementation in `voltage()` ist wesentlich komplexer. Sie ermöglicht *Frequenz-Sweeps* in verschiedenen Stufen bzw. *Sweep*-Geschwindigkeiten (vgl. Anhang F.6).

Die Eigenschaft `frequency` legt die (Start-) Frequenz des sinusförmigen Verlaufs der Spannung fest. Mithilfe von `frequency_sweep` (Typ `logical`) kann der Frequenz-*Sweep* aktiviert werden; `fsweep_frequency` und `sweep_time` legen dann die Parameter des *Sweeps* fest (siehe Beispiel in Anhang F.6).

3. `shape='pulse'` (Abb. F.4): Die Spannung verläuft in Form einer Pulsfolge, ähnlich dem in Abschnitt 2.3.1 beschriebenen Verlauf (vgl. mit Gl. (2.18) auf S. 20):

$$U = \begin{cases} \text{offset} & : \tau_{\square} \geq \frac{\text{pulse\_length} \cdot \text{duty\_factor}(t)}{\text{period}} \\ \text{magnitude}(t) + \text{offset} & : \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{F.17})$$

Die Eigenschaft `pulse_length` definiert die (Start-) Pulslänge des Verlaufs; `duty_factor()` ist eine Methode der Klasse `imtk_voltage_source`. Sie gibt das für einen bestimmten Zeitpunkt gültige Tastverhältnis zurück. Dabei werden ähnlich wie bei `magnitude()` die Parameter eines *Sweeps* berücksichtigt (Eigenschaften `duty_sweep`, `dsweep_factor`, `sweep_time`; siehe Beispiel in Anhang F.6).  $\tau_{\square}$  ist die auf eine Periodendauer bezogene normierte Zeit. Sie ergibt sich aus der normierten gestreckten Zeit  $\tau$ :

$$\tau_{\square} = \left( \tau - \frac{\text{phase\_shift} - \text{trigger\_time} - \text{period} + \text{pulse\_length} \cdot \text{duty\_factor}(t)}{\text{period}} \right) \bmod 1 \quad (\text{F.18})$$

Ähnlich dem sinusförmigen Spannungsverlauf kann sowohl eine veränderliche Pulsspannung (*Spannungs-Sweep*), als auch eine veränderliche Pulsfolgefrequenz (*Frequenz-Sweep*) realisiert werden. Zusätzlich besteht die Möglichkeit einer veränderlichen Pulslänge (*Duty-sweep*).

4. `shape='custom'`: Der Spannungsverlauf kann beliebig gewählt werden. Er wird von der Eigenschaft `custom_data` definiert. Diese muss vom Nutzer zuvor gesetzt werden. Dabei wird eine Matrix mit zwei Zeilen erwartet, wobei die Komponenten der ersten Zeile als Zeitwerte, die Komponenten der zweiten Zeile als Spannungswerte interpretiert werden. Zwischenwerte werden interpoliert.

Die Klassen `imtk_microscanner` und `imtk_movable_frame` dienen zur Modellierung von Mikroscooperspiegeln mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb entsprechend Abschnitt 2.3. Sie enthalten als Superklassen Instanzen der Klassen `imtk_plate` (bzw. deren Subklassen), `imtk_flexure` und `imtk_comb_electrode` (und damit auch `imtk_capacitor`, `imtk_finger_electrode`, `imtk_rectangular_area`; vgl. Abb. 5.12). Außerdem werden die Klassen `imtk_axis`, `imtk_reference` und `imtk_superreference` instanziiert.

Eine Besonderheit der Klasse `imtk_movable_frame` ist, dass sie als Subklasse von `imtk_microscanner` erzeugt wird. Sie enthält also, der Realität entsprechend, alle Eigenschaften und Methoden eines 1D-Mikroscooperspiegels. Der Unterschied zu `imtk_microscanner` besteht lediglich in der Art der Spiegelplatte. Anstelle von `imtk_elliptical_plate` bzw. `imtk_rectangular_plate` werden die Klassen `imtk_elliptical_frame` bzw. `imtk_rectangular_frame` instanziiert.

Es folgt eine Übersicht zu den für Objekte der Klasse `imtk_microscanner` implementierten Methoden. Sie stehen ausnahmslos auch für Objekte der Klasse `imtk_movable_frame` zur Verfügung:

`init()` stellt eine Besonderheit der Klassen `imtk_microscanner` bzw. `imtk_movable_frame` dar. Die Methode besitzt keinen Rückgabewert. Sie dient ausschließlich zur Initialisierung der Eigenschaften `capacitance_table` und `damping_table`. Diese enthalten nach dem Aufruf diskrete Kennlinienverläufe für die Kapazität bzw. die normierte Dämpfung der Antriebselektroden des Bauelements in Abhängigkeit von dessen Auslenkung und dienen späteren Aufrufen der Methoden `capacitance()` und `damping_torque()` als *Look-up-table*. Auf diese Weise lässt sich die Bestimmung der Kapazität bzw. des Dämpfungsdrehmoments stark beschleunigen.

Die bei der Bestimmung der diskreten Kennlinien zum Einsatz kommenden Parameter für die Diskretisierung des Wertebereichs können mithilfe der globalen Struktur `IMTK.precision.microscanner` (Anhang F.3) beeinflusst werden. Alternativ lassen sie sich beim Aufruf der Methode auch angeben (*IMtk-Online-Manual*).

Da die Initialisierung der Wertetabellen (in Abhängigkeit vom gewählten Modell zur Kapazitätsberechnung, der Elektrodenzahl und der Diskretisierung der Kennlinien) eine vergleichsweise aufwändige Operation darstellt, ist es sinnvoll einen Mechanismus zur Verfügung zu stellen, mit dessen Hilfe mehrfache Berechnungen (z.B. nachdem das Objekt neu erstellt wurde) vermieden werden können. Aus diesem Grund werden die Ergebnisse der Initialisierung nach deren Abschluss in einer Datei namens `init_data_[OBJEKTNAME].mat` innerhalb des aktuellen Dateiverzeichnisses abgelegt. Wird die `init()`-Methode für ein Objekt mit gleichem Namen und gleichen geometrischen Eigenschaften der Antriebselektrode<sup>§</sup> später erneut aufgerufen, wird die Initialisierung nicht ausgeführt. Stattdessen werden die in der Datei abgelegten Daten gelesen. Ist ein solches Verhalten nicht gewünscht, kann es durch Übergabe des optionalen Parameters `'ForceInit'` unterbunden werden (*IMtk-Online-Manual*).

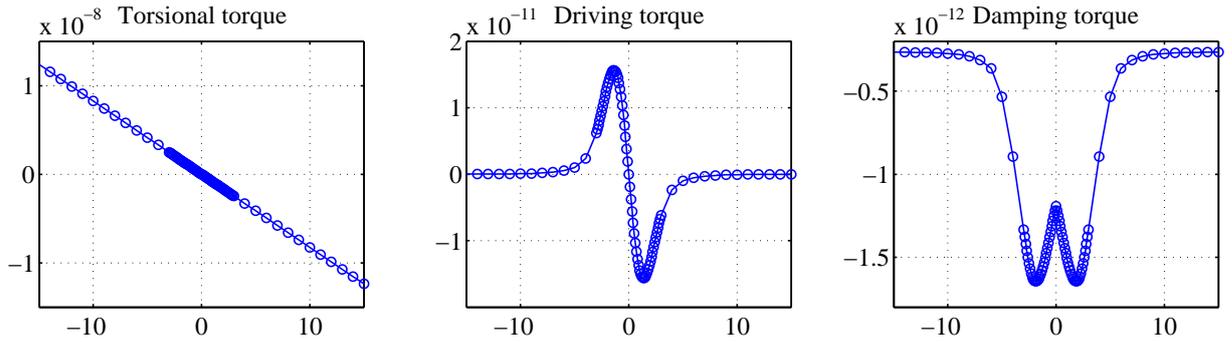
`plot_cc()` dient zur Darstellung der in einem Scanner-Objekt enthaltenen Charakteristiken. Die Methode dient vorrangig zur Visualisierung bzw. Überprüfung der in der `init()`-Methode erzeugten diskreten Kennlinien. Auf diese Weise können eventuelle Probleme, beispielsweise aufgrund einer zu groß gewählten Diskretisierungsweite bei der Berechnung des Kapazitäts- bzw. Dämpfungsverlaufs, erkannt werden. Ein Beispiel für eine Ausgabe der `plot_cc()`-Methode für das Modell eines Mikroscannerspiegels (*SINUS-Scanner*) ist in Abb. F.5 enthalten.

`capacitance()` gibt die elektrische Kapazität der enthaltenen Antriebselektroden zurück. Diese werden vorzugsweise anhand der in `capacitance_table` abgelegten Kennlinien (bei Bedarf durch Interpolation) ermittelt. Ist dies nicht möglich, weil die `init()`-Methode nicht ausgeführt wurde oder für die vorliegende Auslenkung keine Kapazitätswerte verfügbar sind, werden die `capacitance()`-Methoden der enthaltenen Instanzen von `imtk_comb_electrode` aufgerufen, um die Kapazität zu bestimmen.

Optional kann beim Aufruf von `capacitance()` oder `frame_capacitance()` ein Auslenkwinkel angegeben werden. Die Kapazität wird dann nicht für die Momentanauslenkung des Objekts, sondern entsprechend der angegebenen Auslenkung zurückgegeben. Voraussetzung für die Verfügbarkeit dieser Option ist allerdings ein initialisiertes Objekt (`init()` wurde ausgeführt).

---

<sup>§</sup>Änderungen an der Geometrie der Antriebselektrode führen im Allgemeinen zu Änderungen der Kennlinien. Tritt ein solcher Fall ein, wird dies automatisch festgestellt und führt zu einer Neu-Initialisierung. Dabei wird die Datei `init_data_[OBJEKTNAME].mat` aktualisiert.



**Abb. F.5:** Charakteristiken des SINUS-Scanners. Die Übersicht wurde mit der Methode `plot_cc()` erzeugt. Diese dient dazu, dem Entwerfer einen Überblick über die für ein Scanner-Objekt gültigen Kennlinien (Wertetabellen) zu verschaffen.

`damping_torque()` gibt das für eine bestimmte Winkelauslenkung und Winkelgeschwindigkeit wirksame Dämpfungs Drehmoment zurück. Dabei werden sowohl die Beiträge der Spiegelplatte bzw. des beweglichen Rahmens, als auch der Beitrag der Antriebs- elektroden berücksichtigt:

$$\left| \vec{M}_d \right| = \text{damping\_torque}(\mathbf{p}, \mathbf{ax}, \omega) + M_{d,y'} \quad (\text{F.19})$$

Dabei ist  $\mathbf{p}$  das jeweils enthaltene Objekt einer Subklasse von `imtk_plate` (also die Spiegelplatte oder der bewegliche Rahmen);  $\mathbf{ax}$  definiert die Achse, um welche die Auslenkung stattfindet;  $\omega$  ist die Winkelgeschwindigkeit der ausgelenkten Struktur.  $M_{d,y'}$  ist das sich für die jeweilige Antriebselektrode ergebende Dämpfungs Drehmoment:

$$M_{d,y'} = \begin{cases} \omega M_{d,\text{norm}} & : \text{damping\_table} \neq 0 \\ \text{damping\_torque}(\mathbf{e}, \mathbf{ax}, \omega) & : \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{F.20})$$

$M_{d,\text{norm}}$  entspricht dabei dem auf eine Winkelgeschwindigkeit von  $1 \text{ 1/s}$  normierte Dämpfungs Drehmoment. Es wird durch Interpolation zwischen den in `damping_table` hinterlegten Werten bestimmt. Voraussetzung ist daher eine zuvor durchgeführte Initialisierung des Objekts. Ist diese Bedingung nicht erfüllt oder kein für die aktuelle Auslenkung gültiger Wert in `damping_table` hinterlegt, wird die `damping_torque()`-Methode der jeweiligen Kammelektrode (symbolisiert durch  $\mathbf{e}$ ) aufgerufen.

Der Grund für eine Unterscheidung zwischen der Dämpfung der bewegten Platte (bzw. des Rahmens) und der Dämpfung der Kammelektrode innerhalb Gl. (F.19) liegt in der Tatsache, dass die auf eine kippende Platte wirkende Dämpfung überproportional mit der Winkelgeschwindigkeit ansteigt (siehe dazu Abschnitt 3.3.4). Aufgrund dieser Nicht-linearität kann die für die Berechnung des Dämpfungs Drehmoments benötigte Information nicht in Form einer normierten Kennlinie hinterlegt werden. Da dessen Berechnung mit einem vergleichsweise geringen Aufwand verbunden ist (vgl. Gl. (3.111) bzw. (3.114)), stellt dies jedoch kein Problem dar.

Optional kann beim Aufruf von `damping_torque()` oder `frame_damping_torque()` wieder ein Auslenkwinkel angegeben werden. Das Drehmoment wird dann nicht für die Momentanauslenkung des Objekts, sondern entsprechend der angegebenen Auslenkung berechnet. Voraussetzung für die Verfügbarkeit dieser Option ist ein initialisiertes Objekt.

`driving_torque()` berechnet das von den Antriebselektroden aufgebraachte elektrostatische Drehmoment in einer Auslenkungsrichtung des Mikrosanners. Als Parameter

wird eine elektrische Spannung  $U$  erwartet. Optional kann auch ein von der aktuellen Auslenkung abweichender Winkel angegeben werden.

Zur Berechnung des Drehmoments wird nicht die `electrostatic_torque()`-Methode der enthaltenen Kammelektroden genutzt. Stattdessen wird der zentrale Differenzenquotient, ähnlich Gl. (F.7), mithilfe der `capacitance()`-Methode des Objekts berechnet:

$$M_{\text{el},x} \approx \frac{U^2}{2} \frac{\text{capacitance}(U, \theta_x + \Delta\theta/2) - \text{capacitance}(U, \theta_x - \Delta\theta/2)}{\Delta\theta} \quad (\text{F.21})$$

$$M_{\text{el},y} \approx \frac{U^2}{2} \frac{\text{frame\_capacitance}(U, \theta_y + \Delta\theta/2) - \text{frame\_capacitance}(U, \theta_y - \Delta\theta/2)}{\Delta\theta} \quad (\text{F.22})$$

Anders als in Gl. (F.7) müssen die Bestandteile des Mikros scanners demnach nicht rotiert werden um den Kapazitätsanstieg zu bestimmen. Stattdessen wird auf die in `capacitance_table` hinterlegte Kennlinie zurückgegriffen. Auf diese Weise lässt sich die Berechnung des Antriebsdrehmoments erheblich beschleunigen. Voraussetzung für einen Aufruf von `driving_torque()` bzw. `frame_driving_torque()` ist dementsprechend ein initialisiertes Objekt.

`torsional_torque()` gibt das rückstellende mechanische Drehmoment der Torsionsfederaufhängung zurück. Dabei kann als optionaler Parameter ein Auslenkwinkel angegeben werden; ansonsten wird das Drehmoment für die aktuelle Auslenkung berechnet. Es wird in jedem Fall davon ausgegangen, dass die Aufhängung aus zwei gleichen Torsionsfedern besteht. Das Drehmoment ergibt sich demnach zu

$$M_{\text{mech}} = 2 \cdot \text{torsional\_torque}(\text{fl}, \theta) \quad (\text{F.23})$$

mit `fl` als dem jeweils aktiven Torsionsfeder-Objekt (Klasse `imtk_flexure`).

`transient()` führt eine transiente Simulation des Bauelementverhaltens durch. Dazu muss ein Objekt der Klasse `imtk_voltage_source` übergeben werden, welches den der Simulation zugrunde liegenden Verlauf der Antriebsspannung festlegt. Außerdem wird die Zeitspanne der Simulation und die Startbedingung für die Freiheitsgrade übergeben. Rückgabewerte sind die Simulationszeit und die zugehörigen Werte für die Auslenkungen und Winkelgeschwindigkeiten. Ein Beispiel für die Nutzung der `transient()`-Methode findet sich in Anhang F.6 (Listing 8).

Die innerhalb der Methode realisierten, mathematischen Ansätze und deren Eigenschaften und Einschränkungen werden im folgenden Abschnitt im Detail diskutiert. Es folgt daher an dieser Stelle lediglich eine kurze Beschreibung der zusätzlich in `transient()` verfügbaren Funktionalität. Sie kann anhand sogenannter Parameterschalter [120] aktiviert oder deaktiviert werden, welche beim Aufruf zusätzlich angegeben werden (siehe auch *IMtk Online Manual*):

1. 'SaveAllResults': Alle während der transienten Simulation als Zwischenergebnis berechneten Spannungs- und Momentenverläufe werden zusätzlich zu den Ergebnisgrößen (Auslenkwinkel und Winkelgeschwindigkeit) gespeichert. Sie können nach der Simulation in der globalen Struktur `IMTK.transient.result` abgerufen werden. (Standardmäßig deaktiviert.)
2. 'ShowGraph': Der Verlauf der Simulation wird interaktiv in einem *MATLAB*<sup>®</sup>-Figure dargestellt. (Standardmäßig aktiviert.)

3. 'StopAtZeroCross': Die transiente Simulation stoppt beim ersten Nulldurchgang der Auslenkung. (Standardmäßig deaktiviert.)
4. 'StopAtExtremum': Die transiente Simulation stoppt beim ersten Extrempunkt der Auslenkung, also beim ersten Nulldurchgang der Winkelgeschwindigkeit. (Standardmäßig deaktiviert.)
5. 'StopAtCutOff': Die transiente Simulation stoppt, wenn die Amplitude der Auslenkung um mehr als die Hälfte geringer wird als das absolute Maximum der Auslenkung. (Standardmäßig deaktiviert.)
6. 'HighPrecision': Zur numerischen Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen wird anstelle des standardmäßig genutzten RUNGE-KUTTA-Verfahrens [65, 120] das zum Erreichen höherer Rechengenauigkeiten besser geeignete, dafür aber aufwändigere ADAMS-Verfahren [120] verwendet. (Standardmäßig deaktiviert.)
7. 'Postprocessing': Nach Abschluss der transienten Simulation wird für den resultierenden Schwingungsverlauf die Amplitude und Frequenz in Abhängigkeit von der Simulationszeit bestimmt. Die Ergebnisse werden innerhalb der globalen Struktur `IMTK.transient.result` abgelegt. (Standardmäßig deaktiviert.)

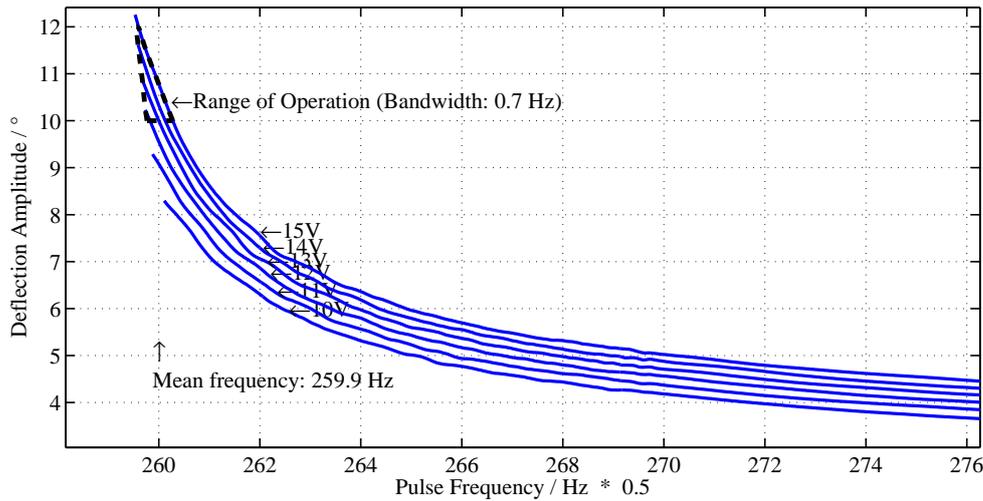
Es soll an dieser Stelle noch angemerkt werden, dass sich die Parameterschalter 'StopAtZeroCross', 'StopAtExtremum' und 'StopAtCutOff' nicht miteinander kombinieren lassen. Werden mehrere dieser Schalter aktiviert, wird nur der zuletzt gesetzte berücksichtigt.

`open_loop_response()` simuliert die Frequenz-Antwort eines Mikroscoannerspiegels. Als Parameter werden die Antriebsspannung und die Parameter des Frequenz-*Sweeps* übergeben. Innerhalb der Methode wird dann eine den Vorgaben entsprechende Spannungsquelle erzeugt und eine transiente Simulation durchgeführt. Rückgabewerte der Methode sind die Simulationszeit und die zugehörigen Verläufe der Amplitude und Frequenz der Schwingung. Mit der ebenfalls in der *IMtk*-Bibliothek enthaltenen Funktion `imtk_plot_response_curves()` können mehrere Simulationen mit verschiedenen Pulsspannungen in einer Darstellung zusammengefasst werden. Dabei kann unter anderem auch ein für die jeweilige Anwendung zulässiger Amplitudenbereich angegeben werden. Anhand dieser Information und den Verläufen der Frequenz-Antwortkurven für verschiedene Pulsspannungen ermittelt die Funktion `imtk_plot_response_curves()` dann eine Prognose für die Bandbreite des Bauelements im Arbeitspunkt<sup>h</sup>. Diese kann dann zusammen mit der Antwortkurvenschar dargestellt werden (Abb. F.6). Ein Beispiel für eine Anwendung der Methode `open_loop_response()` findet sich in Anhang F.6 (Listing 9).

`closed_loop_equilibrium()` ermittelt den stationären Zustand (Arbeitspunkt) eines Mikroscoannerspiegels im synchronisierten Betrieb. Dazu kann wahlweise eine Pulsspannung oder eine Amplitude als Randbedingung übergeben werden. Die Methode bestimmt dann die jeweils verbleibende Größe, sodass sich bei synchronisierter Anregung und einem Tastverhältnis  $\tau/T = 0.5$  ein stabiler Arbeitspunkt einstellt. Zusätzlich wird die sich für diesen Arbeitspunkt ergebende Oszillationsfrequenz zurückgegeben.

---

<sup>h</sup>Als Bandbreite wird in diesem Zusammenhang derjenige Frequenzbereich bezeichnet, in dem das Bauelement bei Annahme eines vorgegebenen Amplituden- und Spannungsbereichs stabil bei parametrischer Anregung betrieben werden kann.



**Abb. F.6:** *Simulierte Frequenz-Antwortkurven eines SINUS-Scanners.* Die Abbildung wurde mithilfe der *IMtk*-Funktion `imtk_plot_response_curves()` erstellt. Es ergibt sich demnach für einen Amplitudenbereich  $\hat{\theta} = 10 \dots 12^\circ$  und eine Antriebsspannung von maximal 15 V eine Bandbreite von lediglich 0.7 Hz mit einer Mittenfrequenz von 259.9 Hz.

Zur Bestimmung des stationären Zustands wird folgendes, sich aus der Energiebilanz eines Mikrosanners ergebendes nichtlineares Optimierungsproblem gelöst:

$$\left( \int_{-\hat{\theta}}^0 \text{driving\_torque}(U_{t \rightarrow \infty}, \theta) d\theta + \int_{-\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} \text{damping\_torque}(\dot{\theta}, \theta) d\theta \right)^2 \rightarrow \text{Min}$$

mit  $[\theta, \dot{\theta}] = \text{transient}(U_{t \rightarrow \infty}, [t_0 = 0, t_1 = T/2], [\theta_0 = -\hat{\theta}_{t \rightarrow \infty}, \dot{\theta}_0 = 0])$  (F.24)

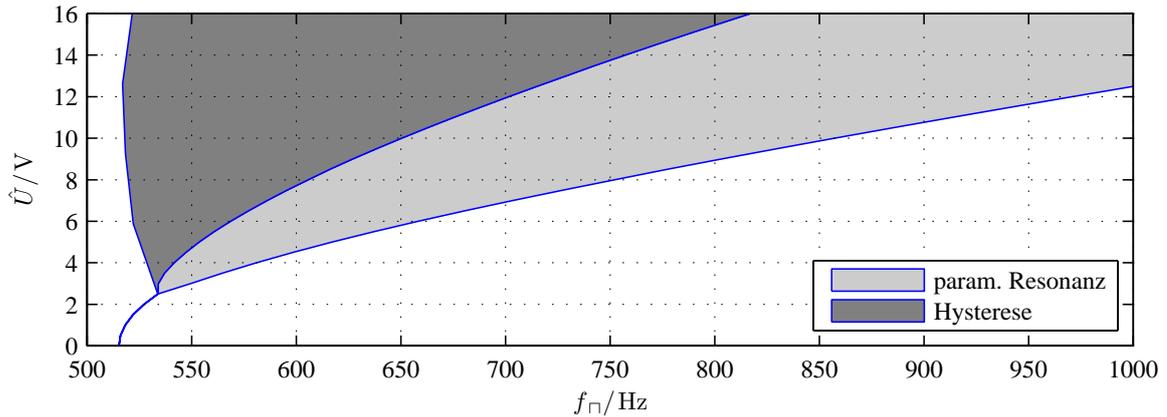
Dabei legen  $t_0$  die Startzeit,  $t_1$  die Endzeit sowie  $\theta_0$  und  $\dot{\theta}_0$  die Startwerte einer transienten Simulation fest;  $U_{t \rightarrow \infty}$  und  $\hat{\theta}_{t \rightarrow \infty}$  sind die Pulsspannung bzw. die Amplitude im eingeschwungenen Zustand. Wird einer der Parameter  $U_{t \rightarrow \infty}$  oder  $\hat{\theta}_{t \rightarrow \infty}$  als Randbedingung (bei Aufruf der Methode) vorgegeben, kann der jeweils verbleibende durch Optimierung bestimmt werden:

Ausdruck (F.24) wird null (minimal), wenn die Arbeit, welche der elektrostatische Antrieb des Bauelements während einer halben Periodendauer verrichtet, genauso groß wird wie die durch Dämpfung umgewandelte Energie. Dies entspricht dem stationären Zustand des Systems.

Ein Beispiel für die Anwendung der Methode `closed_loop_equilibrium()` findet sich wieder in Anhang F.6 (Listing 10).

`stability_regions()` berechnet die Verzweigungswerte (Abschnitt 4.1.3) der Pulsfolgefrequenz  $f_{\Gamma}$  in Abhängigkeit von der Pulsspannung  $\hat{U}$  und stellt diese in Form eines Bifurkationsdiagramms dar. Abbildung F.7 enthält die sich für den *SINUS*-Scanner ergebenden Verläufe. Der zur Berechnung der Verzweigungswerte nach Gl. (4.20) benötigte Parameter  $r_1$  wird anhand des folgenden zentralen Differenzenquotienten bestimmt (siehe dazu Gl. (2.25)):

$$r_1 \approx 2 \frac{\text{driving\_torque}(U, \Delta\theta/2) - \text{driving\_torque}(U, -\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} \Big|_{U=1} \quad (\text{F.25})$$



**Abb. F.7:** Bestimmung der Stabilitätseigenschaften des Schwingungssystems mit dem IMtk. Die Abbildung enthält das mithilfe der Methode `stability_regions()` erstellte Bifurkationsdiagramm des *SINUS*-Scanners.

Die Verzweigungswerte  $f_{cr3}$  werden nicht mithilfe der in Abschnitt 4.1.3 ermittelten Zusammenhänge berechnet. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass mit der nichtlinearen Bewegungsgleichung (2.29) der Verlauf des Antriebsmoments ausschließlich für kleine Auslenkungen ( $|\theta_x| < \theta_{c,x}$ ) korrekt berücksichtigt werden kann (siehe dazu Abb. 2.11a). Zur Berechnung des Verlaufs von  $f_{cr3}$  wird daher ein anderer Ansatz genutzt:

Wie aus Abschnitt 4.1.4 deutlich wird, entspricht der dynamische Zustand bei  $f_{\square} = f_{cr3}$  auf dem oberen Zweig der Hysterese ( $R = R_{s2}$ ) dem Zustand des Bauelements bei synchronisiertem Antrieb. Zur Bestimmung des Verlaufs  $f_{cr3} = f(\hat{U})$  kann daher die Methode `closed_loop_equilibrium()` genutzt werden. Dazu wird für eine gegebene Spannung  $\hat{U}$  der Gleichgewichtspunkt bei synchronisierter Anregung bestimmt. Die dazugehörige Pulsfrequenz entspricht dann gerade  $f_{cr3}$ .

Die Methode `stability_regions()` kann genutzt werden, um das Anschwingverhalten eines Bauelements zu untersuchen bzw. zu optimieren. Gleiches gilt für die Hysterese bzw. den Arbeitspunkt. Dabei werden entsprechend Gl. (4.20) und Abschnitt 4.1.4 sowohl die nichtlinearen mechanischen und elektrostatischen Eigenschaften, als auch die Dämpfung des Bauelements berücksichtigt.

`stability_voltage()` dient zur Bestimmung der *Pull-in*-Spannungen (Stabilitätsspannungen) eines Mikroscooperspiegels. Als Parameter können dazu optional die Steifigkeiten der Aufhängung übergeben werden. Diese lassen sich beispielsweise mithilfe der *FEM* bestimmen. Die Methode gibt vier Spannungswerte zurück. Diese entsprechen den *Pull-in*-Spannungen der drei in Abschnitt 3.4.4 betrachteten parasitären Freiheitsgrade eines Mikroscooperspiegels. Der vierte Wert ist der Rückgabewert der Methode `stability_voltage()` des enthaltenen `imtk_comb_electrode`-Objekts und entspricht somit der geringsten Stabilitätsspannung aller enthaltenen Fingerelektroden.

Werden keine Steifigkeiten als Parameter übergeben, wird das jeweilige rückstellende mechanische Moment basierend auf den geometrischen Eigenschaften der enthaltenen Torsionsfedern mit den in den Gln. (3.128 - 3.130) vorgestellten Zusammenhängen analytisch bestimmt. Zur Berechnung der Anstiege der elektrostatischen Momente entsprechend Gl. (3.126) werden die Methoden `electrostatic_force()` bzw. `electrostatic_torque()` des enthaltenen `imtk_comb_electrode`-Objekts aufgerufen.

**Tabelle F.6:** Einflussmatrix zur Auslegung gerader Torsionsfedern ( $h = \text{const}$ ).

$l$	$\rightarrow$	$\approx \frac{1}{k}$	$\approx \frac{1}{k}$	$\approx \frac{1}{k}$	$\approx k$	$\approx \sqrt{\frac{1}{k^3}}$
$w$	$\rightarrow$	$\approx k^3 \parallel$	$\approx k$	$\approx k \parallel$	$\approx \frac{1}{k} \parallel$	$\approx \sqrt{k^3}$
		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
		$k_{t,x'}$	$\max \sigma_{ii} _{\theta=\hat{\theta}}$	$\max \sigma_{ij} _{\theta=\hat{\theta}}$	$\max \sigma_{ii} _{a_z=2000g}$	$U_{pi}$

$\parallel$ Nur gültig für  $w \ll h$ ; siehe Abschnitt 3.2.1.

Dabei wird die von diesem Objekt bereitgestellte Funktionalität zur Nutzung von Symmetrien entsprechend Tabelle F.5 (S. 229) angewandt.

`shock_stress()` bestimmt die maximal auftretende mechanische Hauptnormalspannung innerhalb des Bauelements bei einer Beschleunigung in  $z$ -Richtung. Als Parameter wird die Beschleunigung als Faktor der Schwerebeschleunigung  $g$  erwartet. Die Berechnung der Spannung erfolgt nach Gl. (3.54) und ist daher ausschließlich für gerade Torsionsfedern gültig. Außerdem müssen die in Abschnitt 3.2.3 diskutierten Einschränkungen bezüglich der Gültigkeit des zugrunde liegenden analytischen Modells beachtet werden (vgl. dazu auch Abb. 3.13 und Abb. 3.14). Die beschleunigte Masse wird mit der `mass()`-Methode des Scanner-Objekts ermittelt.

`dynamic_deformation()` bestimmt den quadratischen Mittelwert und den Maximalwert der dynamischen Deformation entsprechend Gl. (3.82) und gibt beides zurück. Es können zurzeit ausschließlich Deformationen für Spiegelplatten mit  $l = w$  bestimmt werden. Für abweichende Geometrien wird eine Fehlermeldung ausgegeben.

`find_flexure()` bestimmt die optimale Länge und Breite einer geraden Torsionsfeder, sodass eine bestimmte Eigenresonanzfrequenz  $f_x$  bei möglichst hoher Auslenkung erreicht wird. Dazu wird eine nichtlineare Optimierung mit Nebenbedingungen durchgeführt, wobei die *Pull-in*-Spannung des Bauelements (`stability_voltage()`), die erreichbare Auslenkung bei synchronisierter Anregung (`closed_loop_equilibrium()`) und die mechanischen Spannungen (`tensile_stress()`, `shear_stress()`, `shock_stress()`) berücksichtigt werden. Die dazu genutzten Zusammenhänge sind in Tabelle F.6 in Form einer Einflussmatrix zusammengefasst. Dabei entspricht  $k$  einem dimensionslosen Faktor, welcher die Skalierung in Abhängigkeit von der jeweiligen geometrischen Größe (Breite  $w$ , Länge  $l$ ) angibt.

Beim Aufruf der Methode können optional Parameter wie maximal zulässige mechanische Spannungen oder Parameter-Restriktionen wie Mindestbreite der Torsionsfeder angegeben werden. Die sich für den gefundenen Entwurfspunkt ergebenden Eigenschaften werden in einer Übersicht ausgegeben. Ein Beispiel für einen Aufruf der Methode `find_flexure()` ist in Listing 2 enthalten.

**Die Klasse `imtk_microscanner_2d`** dient zur Modellierung von 2D-Mikroscannerspiegeln mit *Out-of-plane-comb*-Antrieb entsprechend Abschnitt 2.3. Sie ist eine

**Listing 2:** *Beispiel für einen Aufruf der Methode `find_flexure()`.* Das für die Optimierung genutzte Objekt wird mit den Standard-Eigenschaften der Klasse `imtk_microscanner` erstellt. Für die Optimierung werden Restriktionen bezüglich der Federlänge und -breite angegeben (siehe *IMtk-Online-Manual*).

---

```

>> ms = imtk_microscanner();
>> [l,w] = find_flexure(ms, 5000, 'lmax', 400e-6, 'wmin', 2e-6, ...
                        'sigmamax', 1e+9)
5  =====
Optimal flexure parameters w = 20.5um, l = 394.6um:
Pull-in voltage: 254.6V
Maximum deflection @185.1V: 17.3° (f = 5.00kHz)
Maximum tensile stress @17.3°: 1.1e+09Pa    <== Check with FEM
10 Maximum shear stress    @17.3°: 1e+09Pa
Maximum tensile stress @2500g: 9.9e+07Pa
=====

l =
15  3.9461e-04

w =
    2.0506e-05

```

---

Subklasse von `imtk_movable_frame` und enthält außerdem eine Instanz der Klasse `imtk_microscanner`. Diese wird als Parameter beim Aufruf des Konstruktors erwartet und kann anschließend nicht mehr verändert werden.

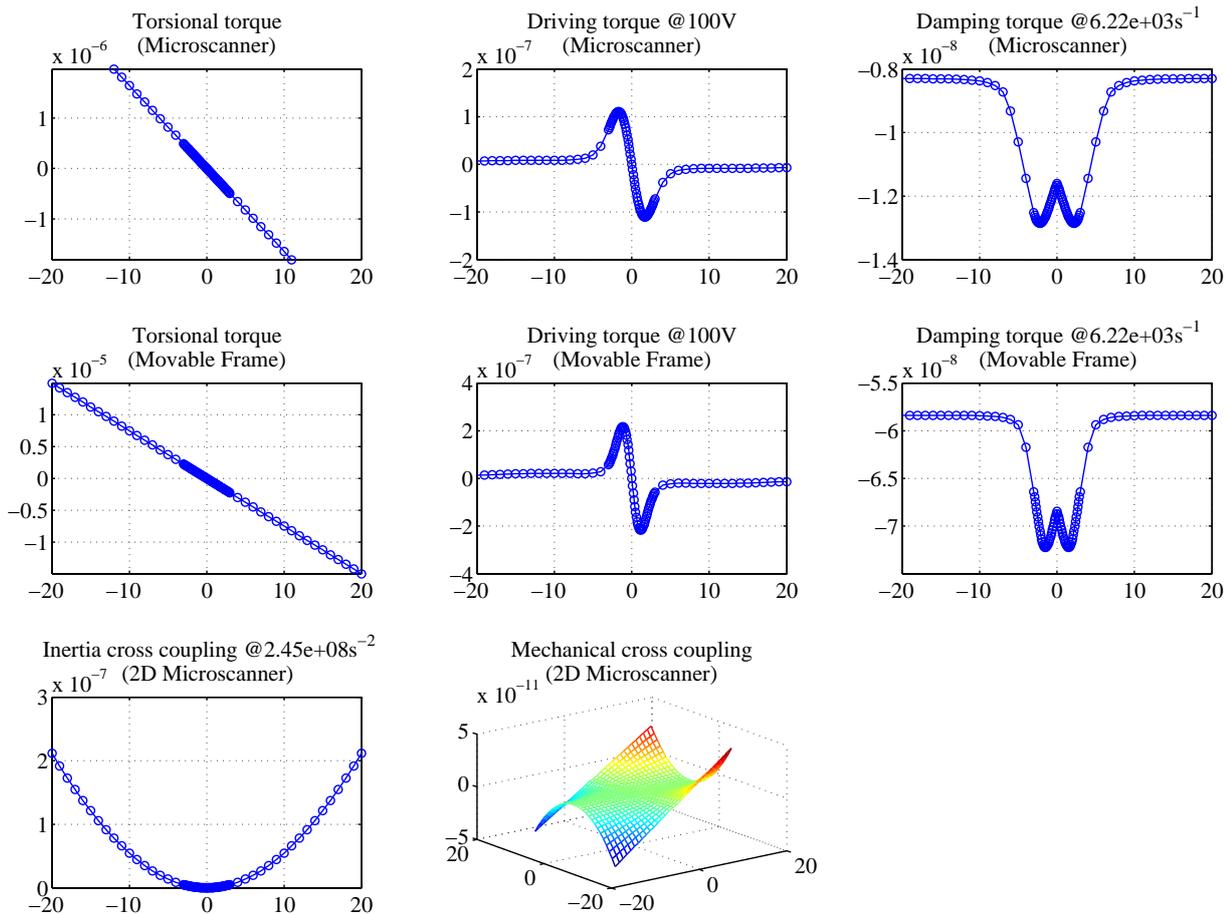
Neben den von der Basisklasse `imtk_movable_frame` geerbten sind innerhalb der Klasse `imtk_microscanner_2d` eine Reihe von zusätzlichen Methoden implementiert. Teilweise stellen diese jedoch keine wirklich neue Funktionalität zur Verfügung, sondern dienen nur zur Realisierung einer komfortablen bzw. konsistenten Programmierschnittstelle der Klasse. Dazu gehören `capacitance_2d()`, `damping_torque_2d()` und `driving_torque_2d()`. Sie rufen lediglich die entsprechenden Methoden der enthaltenen Klassen `imtk_microscanner` und `imtk_movable_frame` auf. Dabei wird bei der Angabe einer Auslenkung anstelle eines Skalars ein Vektor mit zwei Komponenten  $(\theta_x, \theta_y)^T$  erwartet. Dementsprechend ist der Rückgabewert ebenfalls ein Vektor.

Es folgt eine Übersicht zu den innerhalb der Klasse `imtk_microscanner_2d` implementierten Methoden mit zusätzlicher für die Klasse spezifischer Funktionalität:

`init()` initialisiert die Wertetabellen (*Look-up-tables* eines Objekts der Klasse `imtk_microscanner_2d`. Dazu werden die `init()`-Methoden der enthaltenen Objekte (`imtk_microscanner` und `imtk_movable_frame`) aufgerufen.

Für 2D-Mikroscannerspiegel ergibt sich noch eine Besonderheit bezüglich der Initialisierung: Die Massenträgheit des jeweiligen beweglichen Rahmens ist von der Auslenkung der darin enthaltenen Spiegelplatte abhängig. Um dem Rechnung zu tragen, wird der Verlauf der gekoppelten Massenträgheit ebenfalls in der `init()`-Methode bestimmt und als diskrete Kennlinie  $J_{yy} = f(\theta_x)$  in einer Wertetabelle abgelegt.

`plot_cc()` dient zur Darstellung der in einem 2D-Scanner-Objekt enthaltenen Charakteristiken. Zusätzlich zu den bereits in der gleichnamigen Methode der Klasse



**Abb. F.8:** Charakteristiken eines 2D-Mikroscannerspiegels. Die Übersicht wurde mit der Methode `plot_cc()` erzeugt. Das entsprechende Skript findet sich als Beispiel in Anhang F.6 (Listing 11).

imtk\_microscanner dargestellten Eigenschaften werden die mechanischen Kopplungen zwischen den beiden genutzten Bewegungsfreiheitsgraden eines 2D-Mikroscannerspiegels berücksichtigt. Abbildung F.8 enthält eine entsprechende mit `plot_cc()` erzeugte Darstellung.

`torsional_torque_2d()` bzw. `moment_of_inertia_2d()` geben die rückstellenden mechanischen Momente bzw. die Massenträgheit des 2D-Scanners, jeweils unter Berücksichtigung der mechanischen Kopplung zwischen den beiden genutzten Bewegungsfreiheitsgraden, zurück.

Die gekoppelte Massenträgheit wird dabei aus Performance-Gründen ausschließlich anhand des innerhalb der `init()`-Methode berechneten diskreten Kennlinienverlaufs (Abb. F.8) bestimmt. Voraussetzung für eine Nutzung dieser Methode ist daher ein initialisiertes Objekt.

Ist die Eigenschaft `cross_coupling_table` ungleich null (also gesetzt), wird innerhalb der Methode `torsional_torque_2d()` die mechanische Kreuzkopplung zwischen den Scanner-Achsen berücksichtigt. Das rückstellende mechanische Moment der Spiegelplatte ergibt sich dann zu:

$$M_{\text{mech},x} = 2 \cdot \text{torsional\_torque}(f_l, \theta_x) + M_{\text{cross}} \quad (\text{F.26})$$

Dabei wird  $M_{\text{cross}} = f(\theta_x, \theta_y)$  durch Interpolation zwischen den in der Eigenschaft `cross_coupling_table` hinterlegten Koppel-Matrizen bestimmt. Diese können mithilfe von *FE*-Modellen oder experimentellen Untersuchungen ermittelt werden. Ein Beispiel für den Verlauf von  $M_{\text{cross}}$  in Abhängigkeit von den Auslenkungen  $\theta_x$  und  $\theta_y$  ist in Abb. F.8 enthalten.

`transient_2d()` entspricht in ihrer Funktionalität der `transient()`-Methode der Klasse `imtk_mikroscanner`. Sie ermöglicht die transiente Simulation eines 2D-Mikroscannerspiegels unter Berücksichtigung der Kopplungen zwischen den beiden genutzten Bewegungsfreiheitsgraden. Als Parameter werden zwei Objekte der Klasse `imtk_voltage_source` erwartet. Außerdem werden beim Aufruf die Zeitspanne der Simulation und die Startbedingungen der Freiheitsgrade festgelegt. Ein Beispiel für die Nutzung der `transient_2d()`-Methode findet sich in Anhang F.6 (Listing 12).

Ähnlich der `transient()`-Methode kann das Verhalten anhand von Parameterschaltern beeinflusst werden. Für die `transient_2d()`-Methode stehen jedoch nur die folgenden Optionen zur Auswahl: 'SaveAllResults', 'ShowGraph', 'Refine' und 'HighPrecision' (siehe dazu S. 236f).

Neben den in diesem Abschnitt beschriebenen Klassen enthält die *IMtk*-Bibliothek auch Funktionen. Diese sind im Gegensatz zu Methoden durch den Präfix `imtk_` gekennzeichnet. Exemplarisch sei an dieser Stelle auf `imtk_plot_phasepicture()` verwiesen, welche die praktische Umsetzung des in Abschnitt 3.5 beschriebenen Verfahrens zur Bestimmung der Leistungsdichteverteilung im Fernfeld realisiert (siehe Abb. 3.37). Als Ausgangspunkt dient dazu ein messtechnisch oder mithilfe der *FEM* ermitteltes Deformationsprofil der Spiegeloberfläche. Da dieses keine Eigenschaft einer der im *IMtk* implementierten Klassen darstellt, ist die Implementation als Funktion gerechtfertigt. Eine vollständige Übersicht der im *IMtk* implementierten Funktionen findet sich in Anhang F.2.

## F.6 Beispiele

Zur Verdeutlichung der angewandten Konzepte folgt eine Reihe von Beispielen für *MATLAB*<sup>®</sup>-Skripte, welche auf die *IMtk*-Klassenbibliothek zurückgreifen. Sie dienen gleichzeitig als Referenzen für Abschnitt 6.2, sowie Anhang F.5.

**Listing 3:** *Erzeugen einer Kammelektrode.* Die Position und Ausrichtung der in einer Kammelektrode enthaltenen Finger wird mit einer Matrix festgelegt. Diese kann mithilfe einer `margin()`-Methode oder manuell erzeugt werden.

---

```

% Parameter der Kammelektrode
w = 1.5e-6;
bw = 1.5e-6;
l = 58.5e-6;
5 d = 5e-6;

step = w + bw + 2*d;

% Erzeuge Margin-Matrix, welche die Anordnung
10 % der Elektroden festlegt (Beispiel elliptische Platte)
ep = imtk_elliptical_plate('length', 1.5e-6, ...
                           'width', 2e-6);

m = margin(ep, step);

15 % Erzeuge Kammelektrode
ce = imtk_comb_electrode(m, ...
                          'width', w, ...
                          'bwidth', bw, ...
                          'length', l, ...
20                          'distance', d, ...
                          'capacitance_model', 'fem_fit');

% Berechne C im unausgelenkten Zustand
C1 = capacitance(ce);

25 % Berechne C bei 20° Verkippung um die y-Achse
C2 = capacitance(rotate(ce, imtk_axis('y'), 20));

```

---

**Listing 4:** *Erzeugen einer gedrehten und verschobenen Torsionsfeder.* Um die absolute Position einer Torsionsfeder festzulegen, muss deren Referenz verschoben bzw. rotiert werden. Die Eigenschaften `displacement` und `rotation` des Objekts beziehen sich auf die Momentanauslenkung der Feder.

---

```

% Erzeugen einer um 90° um die z-Achse gedrehten, um
% 750µm in x-Richtung verschobenen Referenz
ref = imtk_reference('displacement', [750e-6; 0; 0], ...
                    'rotation', [0,-1,0; 1,0,0; 0, 0, 1]);
5
% Alternativ kann die Referenz auch erst erzeugt und dann
% rotiert und verschoben werden
ref = imtk_reference();
ref = rotate(ref, imtk_axis('z'), 90);
10 ref = displace(ref, imtk_axis('x'), 750e-6);

% Erzeugen einer Torsionsfeder entsprechend der Referenz
fl = imtk_flexure(ref, ...
                  'length', 200e-6, ...
15                  'width', 10e-6);

```

---

**Listing 5:** *Verwaltung von Referenzen in Superreferenzen.* Eine Superreferenz kann beliebig viele Referenzen oder weitere Superreferenzen verwalten. Aufgrund der besonderen, globalen Implementation aller Referenz-Objekte ändern `displace()` bzw. `rotate()` die Eigenschaften, auch ohne dass das Objekt auf sich selbst zurück geschrieben wird.

---

```

% Erzeugen von zwei Referenzen und zwei Superreferenzen
ref1 = imtk_reference();
ref2 = imtk_reference();
sref1 = imtk_superreference();
5 sref2 = imtk_superreference();

% Hinzufügen von 'ref1' zu 'sref1'
add_reference(sref1, ref1);

10 % Hinzufügen von 'sref1' und 'ref2' zu 'sref2'
add_reference(sref2, {sref1, ref2});

% Rotation aller in 'sref2' enthaltenen Referenzen ('sref1', 'ref2')
% um 45°
15 rotate(sref2, imtk_axis('x'), 45);

% Verschieben der aller in 'sref1' enthaltenen Referenzen ('ref1')
% um 10µm
displace(sref1, imtk_axis('y'), 10e-6);

```

---



**Listing 7:** *Berechnung der Stabilitätsspannungen eines SINUS-Scanners.* Zur Bestimmung der Stabilitätsspannungen ist ausschließlich das auf Flächenprojektion basierende Modell zur Kapazitätsberechnung geeignet. Bei Bedarf wird das Modell bei Aufruf von `stability_voltage()` unter Ausgabe einer Warnung automatisch angepasst.

---

```

% Erzeugen eines Mikros scanner-Objekts
sinus = imtk_microscanner('plate.subtype', 'elliptical', ...
                          'plate.length', 1.5e-3, ...
                          'plate.width', 1.5e-3, ...
5                          'flexure.length', 200e-6, ...
                          'flexure.width', 1.8e-6, ...
                          'comb.length', 58.5e-6, ...
                          'comb.step', 13e-6, ...
10                         'comb.distance', 5e-6, ...
                          'capacitance_model', 'projection');

% Berechnen der Stabilitätsspannungen bezüglich der drei parasitären
% Freiheitsgrade des Bauelements und der enthaltenen
% Fingerelektroden
15 [Ux, Uy, Uxy, Ufe] = stability_voltage(sinus);

```

---

**Listing 8:** *Transiente Simulation eines SINUS-Scanners.* Für eine transiente Simulation eines Mikros scannerspiegels wird jeweils ein Objekt der Klassen `imtk_microscanner` und `imtk_voltage_source` mit entsprechend gesetzten Eigenschaften benötigt.

---

```

% Erzeugen eines Mikros scanner-Objekts
sinus = imtk_microscanner('plate.subtype', 'elliptical', ...
                          'plate.length', 1.5e-3, ...
                          'plate.width', 1.5e-3, ...
5                          'flexure.length', 200e-6, ...
                          'flexure.width', 1.8e-6, ...
                          'comb.length', 58.5e-6, ...
                          'comb.step', 13e-6, ...
10                         'comb.distance', 5e-6, ...
                          'capacitance_model', 'fem_fit');

% Initialisieren des Objekts
sinus = init(sinus);

% Erzeugen einer Spannungsquelle mit geeigneten Parametern
15 % zur Simulation des synchronisierten Betriebs
vs = imtk_voltage_source('shape', 'pulse', ...
                        'period', 2e-3, ...
                        'pulse_length', 1.2e-3, ...
                        'magnitude', 10, ...
20                        'trigger', true);

% Parameter der transienten Simulation
% Zeitspanne und Startwerte für die Freiheitsgrade ( $\theta_x = 0, \dot{\theta}_x = 0$ )
tspan = [0, 100e-3];
25 Y0 = [0, 0];

% transiente Simulation
[t, Y] = transient(sinus, vs, tspan, Y0);

```

---

**Listing 9:** *Simulation der Frequenz-Antwort-Kurve eines SINUS-Scanners.* Die Methode `open_loop_response()` erzeugt eine den Sweep-Parametern entsprechende Spannungsquelle und bestimmt anhand einer transienten Simulation den zeitlichen Verlauf der Frequenz und Amplitude der sich ergebenden Auslenkung.

---

```

% Erzeugen eines Mikroscanner-Objekts
sinus = imtk_microscanner('plate.subtype', 'elliptical', ...
                          'plate.length', 1.5e-3, ...
                          'plate.width', 1.5e-3, ...
5                          'flexure.length', 200e-6, ...
                          'flexure.width', 1.8e-6, ...
                          'comb.length', 58.5e-6, ...
                          'comb.step', 13e-6, ...
10                         'comb.distance', 5e-6, ...
                          'capacitance_model', 'fem_fit');

% Initialisieren des Objekts
sinus = init(sinus);

% Parameter der Antwortkurve
15 % Pulsspannung, Sweep-Zeiten, Sweep-Frequenzen
U = 15;
sweep_time = [0 200e-3];
sweep_frequency = [500 250];

20 % Simulation der Frequenzantwort (Zeit, Frequenz, Amplitude)
[t, f, A] = open_loop_response(sinus, U, sweep_time, sweep_frequency);

```

---

**Listing 10:** *Statische Simulation eines SINUS-Scanners.* Eine statische Simulation des Bauelemente-Verhaltens ist ausschließlich für den synchronisierten Betrieb möglich. Alternativ kann der Methode `closed_loop_equilibrium()` auch eine Auslenkung ('deflection') als Parameter übergeben werden. Der Rückgabewert ist dann die benötigte Antriebsspannung.

---

```

% Erzeugen eines Mikroscanner-Objekts
sinus = imtk_microscanner('plate.subtype', 'elliptical', ...
                          'plate.length', 1.5e-3, ...
                          'plate.width', 1.5e-3, ...
5                          'flexure.length', 200e-6, ...
                          'flexure.width', 1.8e-6, ...
                          'comb.length', 58.5e-6, ...
                          'comb.step', 13e-6, ...
10                         'comb.distance', 5e-6, ...
                          'capacitance_model', 'fem_fit');

% Initialisieren des Objekts
sinus = init(sinus);

% statische Simulation des Bauelements bei synchronisiertem Antrieb
15 % und 15V Antriebsspannung
[theta, f] = closed_loop_equilibrium(sinus, 'voltage', 15);

```

---

**Listing 11:** *Darstellung der Charakteristiken eines 2D-Scanners.* Es wird ein Objekt der Klasse `imtk_microscanner_2d` erzeugt. Diesem werden die mithilfe der *FEM* berechneten Charakteristiken übergeben. Zur Überprüfung werden diese anschließend mit der Methode `plot_cc()` dargestellt (siehe Abb. F.8 auf S. 242).

---

```

% Einlesen von FEM-Ergebnissen mit der Funktion
% imtk_read_ansys_result():

% Koppelmatrix und Federkennlinie für Spiegelplatte
5 result = imtk_read_ansys_result('L12_BB_opt_23.csv', ...
                                'mechanical_cross_coupling');

ccx = result{1};
CMx = result{3};

10 % Federkennlinie für beweglichen Rahmen
ccy = imtk_read_ansys_result('L12_BB_opt_slow_axis.csv', ...
                              'flexure_characteristic');

% Parameter für Massenträgheiten (aus FEM)
15 Jxx = 0.75244e-14;
Jyy = 0.30895e-13;

% Erzeugen des 2D-Scanner-Objekts und Übergabe der Charakteristiken
ms = imtk_microscanner('plate.subtype', 'elliptical', ...
20   'plate.length', 1.2e-3, ...
   'plate.width', 1.2e-3, ...
   'flexure.length', 200e-6, ...
   'flexure.width', 11.8e-6, ...
   'flexure.characteristic', ccx, ...
25   'moment_of_inertia', Jxx, ...
   'comb.length', 58.5e-6, ...
   'comb.step', 13e-6, ...
   'comb.distance', 5e-6, ...
   'capacitance_model', 'fem_fit');

30 ms2d = imtk_microscanner_2d(ms, ...
                               'frame.subtype', 'elliptical', ...
                               'frame.length', 1.6e-3, ...
                               'frame.width', 1.8e-3, ...
35   'flexure.length', 220e-6, ...
   'flexure.width', 24.2e-6, ...
   'flexure.characteristic', ccy, ...
   'moment_of_inertia', Jyy, ...
   'comb.length', 58.5e-6, ...
40   'comb.step', 13e-6, ...
   'comb.distance', 5e-6, ...
   'capacitance_model', 'fem_fit', ...
   'cross_coupling_matrix', CMx);

% Initialisierung des Objekts
45 ms2d = init(ms2d);

% Darstellung der Charakteristiken
plot_cc(ms2d);

```

---

**Listing 12:** *Transiente Simulation eines 2D-Mikroscannerspiegels (Entwurfsbeispiel).* Mithilfe der Methode `transient_2d()` wird das zeitliche Verhalten des 2D-Scanners simuliert. Anschließend wird das resultierende LISSAJOUS-Muster dargestellt (Abb. 6.12, S. 161).

---

```

% Spiegelplatte
% =====
cc = imtk_read_ansys_result('results_acc_53.2x200x1000_1.csv', ...
    'flexure_characteristic');

5
ms = imtk_microscanner('plate.subtype', 'elliptical', ...
    'plate.length', 1.19e-3, ...
    'plate.width', 1.19e-3, ...
    'flexure.length', 200e-6, ...
10
    'flexure.characteristic', cc, ...
    'comb.length', 58.5e-6, ...
    'comb.width', 1.5e-6, ...
    'comb.bwidth', 1.5e-6, ...
    'comb.step', 13e-6, ...
15
    'comb.distance', 5e-6, ...
    'capacitance_model', 'fem_fit', ...
    'moment_of_inertia', 6.2376e-15);

% 2D-Scanner
20
% =====
ms2d = imtk_microscanner_2d(ms, ...
    'frame.subtype', 'elliptical', ...
    'frame.length', 1.9e-3, ...
    'frame.width', 1.9e-3, ...
25
    'flexure.length', 200.9e-6, ...
    'flexure.width', 13e-6, ...
    'comb.length', 58.5e-6, ...
    'comb.step', 13e-6, ...
    'comb.distance', 5e-6, ...
30
    'capacitance_model', 'fem_fit');

% Initialisierung des Objekts
ms2d = init(ms2d);

35
% Spannungsquellen für die transiente Simulation
fx = 17000;
vsx = imtk_voltage_source('shape', 'pulse', ...
    'frequency', 2*fx, ...
    'pulse_length', 1/fx/4, ...
40
    'magnitude', 140, ...
    'trigger', true);

fy = 2500;
vsy = imtk_voltage_source('shape', 'pulse', ...
    'frequency', 2*fy, ...
    'pulse_length', 1/fy/4, ...
    'magnitude', 75, ...
    'trigger', true);

50
% Transiente Simulation
[t,Y] = transient_2d(ms2d, {vsx, vsy}, [0,0.1], [7.8,0,10,0]);

% Erzeuge Animation des LISSAJOUS-Musters
imtk_plot_lissajous(t, Y, 1, 500, 10);

```

---

## G Experimentelle Ergebnisse (Entwurfsbeispiel)

### G.1 Charakterisierung

Die am *Fraunhofer IPMS* gefertigten Bauelemente werden in einem größtenteils automatisierten Prozess charakterisiert. Dabei werden die Eigenschaften bei synchronisierter oder parametrischer Anregung ermittelt [122]. Es folgen die entsprechenden Ergebnisse eines dem Entwurfsbeispiel (Abschnitt 6.2) entsprechenden Bauelements.

#### G.1.1 Synchronisierte Anregung

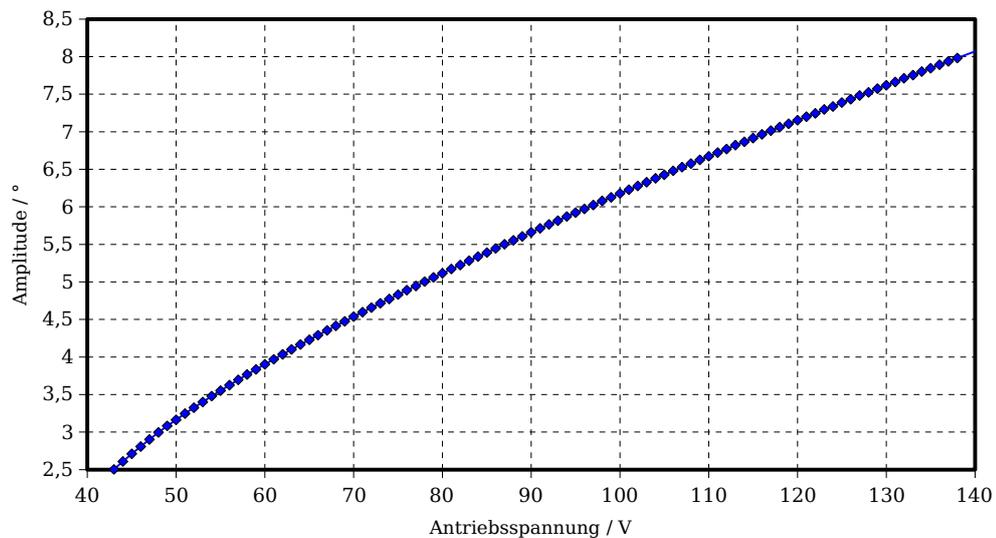


Abb. G.1: Spiegelplatte bei synchronisierter Anregung (Entwurfsbeispiel).

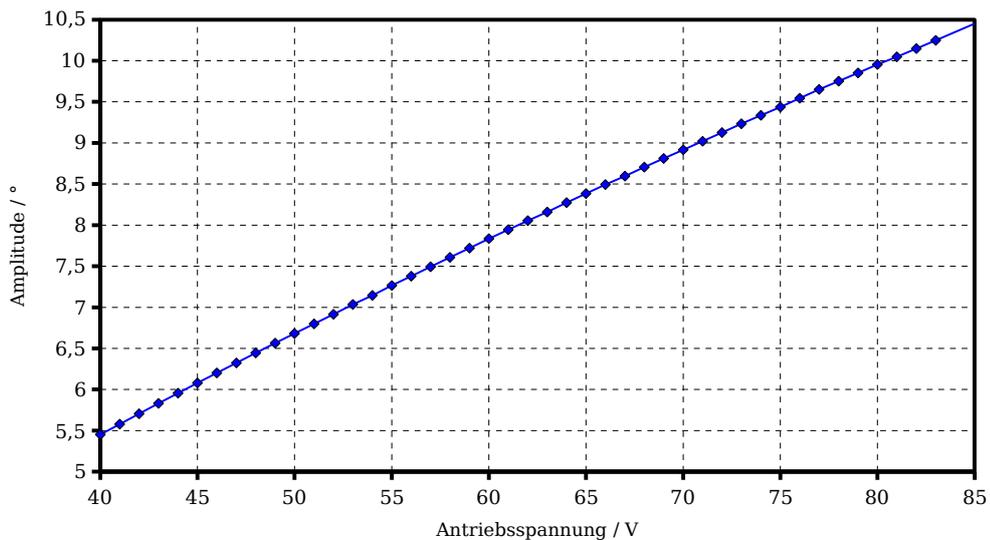


Abb. G.2: Beweglicher Rahmen bei synchronisierter Anregung (Entwurfsbeispiel).

## G.1.2 Parametrische Anregung

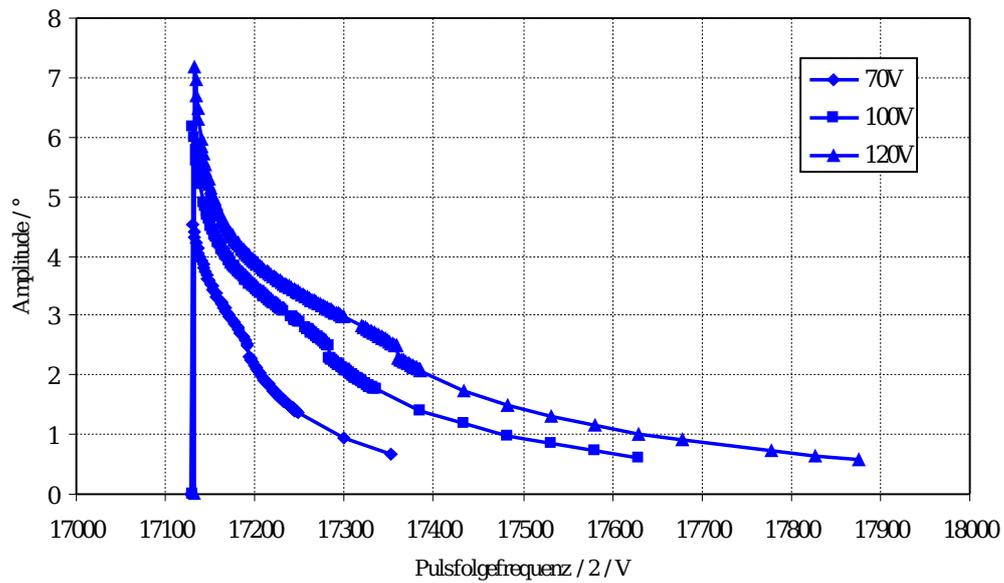


Abb. G.3: Spiegelplatte bei parametrischer Anregung (Entwurfsbeispiel).

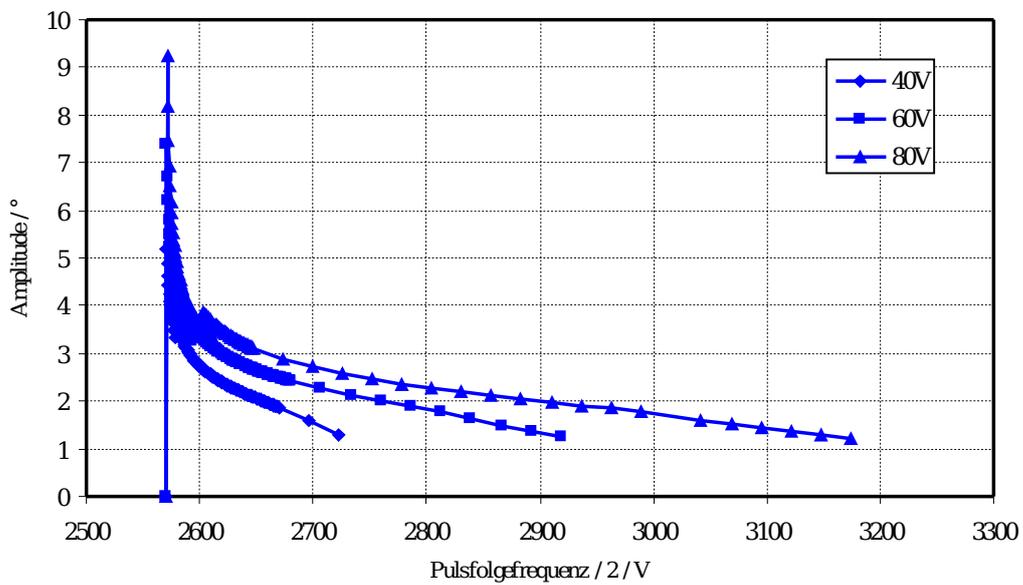
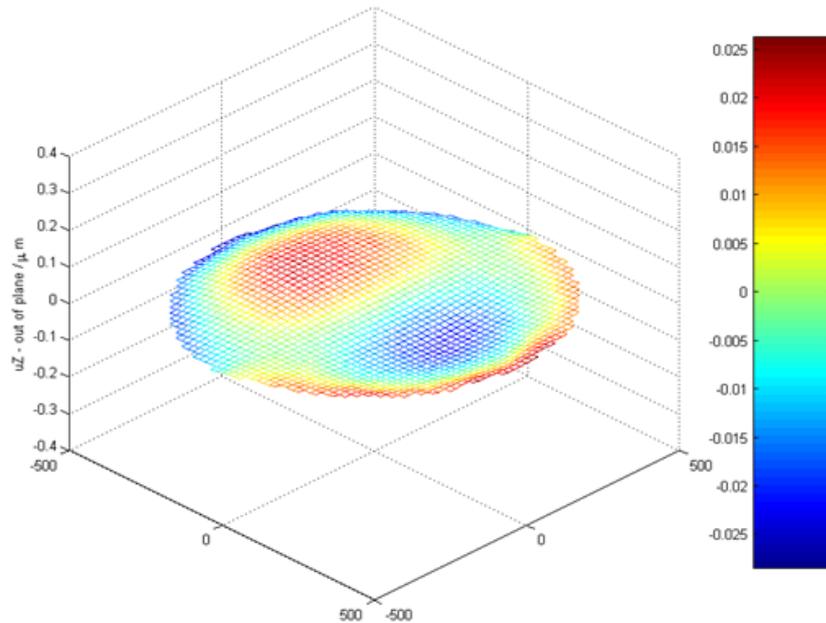


Abb. G.4: Beweglicher Rahmen bei parametrischer Anregung (Entwurfsbeispiel).

## G.2 Dynamische Deformation

Mithilfe eines Weißlicht-Interferometers wurde die dynamische Deformation einer Spiegelplatte messtechnisch ermittelt. Dazu wurde die Oberfläche stroboskopisch mit einer Frequenz entsprechend der Schwingfrequenz bei einer bestimmten Auslenkung erfasst. Aufgrund geometrischer Einschränkungen des Messaufbaus konnte die dynamische Deformation nur bis zu einer maximalen Auslenkung von ca.  $5^\circ$  bestimmt werden. Die gemessene Deformation kann jedoch anhand des Zusammenhangs (3.80) näherungsweise auf beliebige Auslenkungen skaliert werden.



**Abb. G.5:** Experimentell ermittelter Verlauf der dynamischen Deformation (Entwurfsbeispiel). Parameter der Messung:  $f_x = 17.1$  kHz,  $\hat{\theta}_x = 4.5^\circ$ , rms  $\delta = 11.2$  nm, max  $\delta = 25$  nm [125].