Martingales in stochastic control problems (確率制御問題に於けるマルチンゲール)

著者	森本 宏明
号	700
発行年	1982
URL	http://hdl.handle.net/10097/24549

氏名・(本籍)	森(もり) 本(もと) 宏(ひろ) 明(あき)
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第 700 号
学位授与年月日	昭和57年5月26日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和45年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Martingales in stochastic control problems （確率制御問題に於けるマルチンゲール）
論文審査委員	（主査） 教授 土倉 保　教授 猪狩 惺 教授 吉沢太郎

論　文　目　次

論 文 内 容 要 旨

［序 文］

この研究はマルチンゲール理論を用いる観点から，指数マルチンゲール，停止時間，スウィッチの意味による確率制御問題を取り扱う。1970年代多くの研究者によって確率微分システムと点過程システムの間に類似性，例えば，伊藤の公式，マルチンゲールの積分表現定理，確率測度の変換に於ける Girsanov の公式等，があることが示された。そしてマルチンゲール理論は状態方程式の解の推定，信号検定，非線形確率微分方程式あるいは点過程の制御へと応用された。筆者は確率制御問題に特に興味がある。それは一般的には次の様に述べられる。

ある確率空間$(\Omega,\ F,\ \mathrm{P};(F_t)_{t\geqq 0})$上で各制御関数$u$に対して確率変数$\mathrm{X}(u)$が対応するとき，その平均値$\mathrm{E}[\mathrm{X}(u)]$を最小(又は最大)にする最適制御関数$u^*$を求めること，そして最小(又は最大)値を特性づけることである。

制御関数としては第1章では指数マルチンゲール，第2章では停止時間，第3章では停止時間のNヶの組を考える。マルチンゲール理論はこれらの問題の核心をとらえるのに適合しており確率過程論において依然として強力な道具であることが示される。

［第1章］

確率微分システムの制御問題は次の様に述べられる。(W_t)をブラウン運動，F_tは$(\mathrm{W}_s, s\leqq t)$から生成される完全加法族とする。確率過程(x_t)を与えられた$[0,\ 1]\times\mathrm{C}[0,\ 1]$上の関数$\sigma(t,\ x)$に対する確率微分方程式$dx_t=\sigma(t, x)\,d\mathrm{W}_t$の解とする。Vをコンパクト距離空間，UをVの値をとるF_t―可予測過程の全体とする。各$u\ \varepsilon\ \mathrm{U}$に対して$(\mathrm{Z}_t(u))$を確率微分方程式$d\mathrm{Z}_t(u)=\mathrm{Z}_t(u)f(t, x, u_t)\,\sigma^{-1}(t, x)\,d\mathrm{W}_t$，$\mathrm{Z}_0(u)=1$の解とすると$f$，$\sigma$に対する適当な仮定の下で$\mathrm{E}[\mathrm{Z}_1(u)]=1$を得て確率測度$d\mathrm{P}_u$を$d\mathrm{P}_u=\mathrm{Z}_1(u)\,d\mathrm{P}$で定義できる。Girsanov の公式を用いると$\mathrm{P}_u$に関して$(x_t)$は確率微分方程式$dx_t=f(t,\ x,\ u_t)\,dt+\sigma(t,\ x)\,d\mathrm{W}_t^u$の解であることがわかる。ここで$(\mathrm{W}_t^u)$は$\mathrm{P}_u$に関するブラウン運動である。与えられた$[0,\ 1]\times\mathrm{C}[0,\ 1]\times\mathrm{V}$上の有界関数$\mathrm{c}(t, x, v)$に対して$\mathrm{c}(t, x, u_t)$の$dt$に関する$[0, t]$上の積分を$\mathrm{X}_t(u)=\mathrm{c}(t, x, u_t)\cdot t$で表わすとき，各$u\ \varepsilon\ \mathrm{U}$に対するコスト関数$\mathrm{J}(u)=\mathrm{E}[\mathrm{X}_1(u)]$を最小にしたい。Beneš, Duncan とVaraiyaらは$f,\ \sigma,\ c$に対するある仮定の下で最適制御u^*が存在することを示し，Davis と Varaiyaは最適性の条件を動的計画法によって求めた。同じことが Brēmaud, Borel と Varaiya によって点過程の場合に論じられた。これらの問題は Girsanov の公式をを基礎にしておりマルチンゲールの観点からすると確率微分システムの制御というよりはむしろもっと一般化された指数マルチンゲールの制御であると考えられる。即ち次の形の問題である。局所マルチンゲールMに対して指数マルチンゲール$\mathrm{Z}=\mathrm{Z}(\mathrm{M})$，即ち方程式$d\mathrm{Z}=\mathrm{Z}_-d\mathrm{M}$，$\mathrm{Z}_0=1$の解，が正かつ一様可積分であって与えられた有界マルチンゲール(θ_t)に対しコスト関数$\mathrm{J}(\mathrm{M})=\mathrm{E}[\theta_\infty \mathrm{Z}_\infty(\mathrm{M})]$を考えるとき，これが最小値をもつ様なMのクラス$M$を求めることである。確率測

度の点から言い換えると，P と互いに絶対連続である確率測度 Q のうちで与えられた確率変数 θ_∞の Q による平均値を最小にする様な確率測度 Q* を求めよということになる。この問題を解くには Meyer，風巻によって得られた H^1 と BMO―マルチンゲールの理論を用いると都合がよい。この章では M に対する適当な仮定の下で，例えば，M として BMO の部分クラスで汎弱コンパクト，かつ確率積分の凸結合で閉じているジャンプ有界なクラスであればよい，最適な $M^* \varepsilon\ M$ の存在が示される。又，動的計画法を用いて最適性の条件が導かれる。

［第 2 章］

この章では次の様な最適停止問題を考える。

〝(X_t)を与えられた右連続，F_t―適合した過程で $E[\sup_t|X_t|]<\infty$とする。すべての停止時間 T に対して利得 $J(T)=E[X_T]$を考えて，これを最大にする停止時間を求めよ。〟

この問題の起源は仮説検定における Wald の逐次解析の中に見られる。Snell は確率変数の列$(X_n)_{n=1,2,\ldots}$ に対して最適停止問題を優マルチンゲールで特性づけた。Fakeev は Snell の考えを発展させて連続時間をもつ確率過程(X_t)について同様の結果を得た。(Y_t)を(X_t)の Snell 包，即ち $Y_t \geqq X_t$ なる最小の右連続優マルチンゲールとする。もし(X_t)が連続ならば $T=\inf\{t\mid X_t=Y_t\}$が最適停止時間である。又，$E[Y_0]$は最大値である。

この章では(X_t)が $E[\sup_t|X_t^+|]<\infty$かつ $E[X_t^-]<\infty$（各 t）をみたす場合への拡張を考える。この場合にも Snell 包(Y_t)が得られる。(X_t)が擬左連続のとき上記の形の停止時間 T が最適であり，更に $X_t\to-\infty\ (t\to\infty)$の場合には T は有限となる。又停止時間が最適であるための必要十分条件が与えられる。

次に Snell 包の求め方が問題となる。コンピュータ的な観点から何らかの方法で近似をしたい。Bensoussan と Lions は1970年代中頃，偏微分方程式や変分不等式を用いて確率微分システムに対する Snell 包をペナルティ方程式と呼ばれる偏微分方程式の解によって近似する方法，ペナルティ法を考えた。この章では更にこのペナルティ法にマルチンゲールからのアプローチを考えて，偏微分方程式の議論を除去し，理論を簡単にする一般的な Snell 包の近似を考える。その概略は次の通りである。

W を有界，右連続，F_t―適合確率過程の全体とする。与えられた(X_t)は $X_t=e^{-\alpha t}f_t+e^{-\alpha t}g_t\circ t$，$\alpha>0$，の形であるとする。ここで f，$g\ \varepsilon$ W そして ∘ は dt による$[0, t]$上の積分を意味する。このとき Snell 包(Y_t)はある(Z_t)によって $Y_t=e^{-\alpha t}Z_t+e^{-\alpha t}g_t\circ t$ の形となる。今 A を W 上の生成作用素とする。これは右微分作用素 d^+/dt をランダム化したものである。そしてペナルティ方程式$(\alpha-A)Z^\varepsilon-(f-Z^\varepsilon)^+/\varepsilon=g$，$\varepsilon>0$，を考えてその解を Z^ε とする。$Ax=0\ (\leqq 0)$には x＝マルチンゲール（優マルチンゲール）が対応しており，$(e^{-\alpha t}Z_t^\varepsilon+e^{-\alpha t}g_t\circ t)$は優マルチンゲールとなる。各 t に対して ε が 0 に減少するとき Z_t^ε は増加して Z_t に概収束することが示される。即ち(Y_t)は$(e^{-\alpha t}Z_t^\varepsilon+e^{-\alpha t}g_t\circ t)$の ε を 0 に減少させたときの極限という訳である。

［第3章］

前章の最適停止問題の１つの応用として最適スウィッチ問題がある。特にここでは直列型のものを取り扱う。Nヶの与えられた確率過程$(x_i(t))$, $i=1, 2, \cdots, N$, に対して$0=T_0\leqq t<T_1$のとき$x_1(t)$であり，時間T_1で$x_1(t)$から$x_2(t)$にスウィッチし，$T_1\leqq t<T_2$のとき$x_2(t)$であり，次の時間T_2で$x_2(t)$から$x_3(t)$にスウィッチして順次$T_i\leqq t<T_{i+1}$のとき$x_i(t)$でありT_{i+1}で$x_i(t)$から$x_{i+1}(t)$へスウィッチする確率過程を考えてそれの利得を停止時間のNヶの組$(T_1, T_2, \cdots, T_N)$を動かして最大にしたい。これは直列型待ち行列，在庫量管理等で生ずるスウィッチ時間のとり方によって利得を最大にする問題をモデル化したものである。

もっと一般には次の様に定式化される。

〝$(f_i(t))$, $i=1, 2, \cdots, N$, をWからの元のNヶの列とする。$X_i(t)=e^{-\alpha t}f_i(t)\circ t$, $\alpha>0$, としてすべての停止時間の列$\hat{T}=(T_1, T_2, \cdots, T_N)$に対して利得$J(\hat{T})=E[\Sigma_{i=1}^{N}\{X_i(T_i)-X_i(T_{i-1})\}]$を最大にせよ。〟

特に$N=1$のときには第2章の問題になっている。主要結果は第2章の結果とBismutとSkalliによる最適停止理論を基礎にしており，次の通りである。

先ず，ペナルティ方程式$(\alpha-A)Z_{i+1}^{\varepsilon}-Z_i^{\varepsilon+}/\varepsilon=f_i$, $Z_{N+1}^{\varepsilon}=0$, $i=1, 2, \cdots, N$, を考えると数学的帰納法から順次解$(Z_1^{\varepsilon}, Z_2^{\varepsilon}, \cdots, Z_N^{\varepsilon})$を得る。$Z_i^{\varepsilon}(t)$は各$t$に対して$\varepsilon$が0に減少するとき増加して概収束する。その極限を$Z_i(t)$とする。今$\hat{T}^*=(T_1^*, T_2^*, \cdots, T_N^*)$として$T_i^*=\inf\{t\geqq T_{i-1}^* | Z_i(t)=Z_{i+1}(t)\}$, $T_0^*=0$, とおけば，これが最適になっていることが示される。又，停止時間のNヶの組が最適であるための必要十分条件が与えられる。

最後に本研究に関連して引続き研究されるべき複雑な形のスウィッチ問題を述べる。第2章と第3章の考察から，一般のF_tの場合とF_tが自明族$\{\phi, \Omega\}$の場合には次の様な対応がある。F_t—適合確率過程，優マルチンゲール，マルチンゲール，停止時間T，生成作用素A，等にはそれぞれ時間tだけの通常の１変数関数，tについての減少関数，tについて定数，通常の時間t，右微分作用素d^t/dt，等が対応する。従ってこれらの問題において対象とするものがノンランダムの場合の性質を解析，抽出し，ランダム化するのがこれらの研究の第一歩になるものと思われる。

論文審査の結果の要旨

この十数年間に多くの研究者によってマルチンゲールの積分表現定理や確率測度の変換におけるGirsanovの公式などが開発されてきた。これらを確率過程論の応用的分野である停止時刻問題，直列配置のスウィッチによる制御問題などに適用研究していこうとするのが本論文の主要目的である。すなわち問題は一般的にいえば確率空間において，あるクラスに属する制御関数uに確率変数$X(u)$が対応しているときその期待値$E(X(u))$を最大または最小にするような最適制御関数uを求めること，またそのときの最大値または最小値を特性づけることである。ここで制御関数としては指数マルチンゲールになっているものを第1章で，第2章では停止時刻，第3章ではスウィッチされん複数個の停止時刻からなる組を取扱っている。

まず第1章では，ある確率微分方程式をみたす一つの確率過程に対して，予測可能過程による一つの変換あるいは合成を考える。これも適当な条件のもとで前と類似の確率微分方程式をみたすことになり，確率測度の変更とも解釈される結果が得られる。ここでGirsanovの公式が基本的なものとなり，予測可能過程を適当にとって変換された確率過程の最終時刻における平均値，すなわちコスト関数を最小にすること，あるいは場合によっては利得関数を最大にすることが問題になる。Benes, Davis, Duncan, Varaiyaなどはその最適制御を与える可能過程の存在性や最適性の条件を求めているが，著者はこれらはむしろ指数マルチンゲールの制御であるということに注目して問題を設定している。すなわち与えられた確率測度と互に絶対連続であるような確率測度のうちで適当なものをとって期待値の最大あるいは最小問題を考えることである。著者はこれがマルチンゲール理論に適合していることを示し，存在性や最適条件を与えている。

第2章では停止時刻を適当にとって利得を最大にするという制御問題を扱っている。ここではSnell—Fakeevの結果である包絡線の考えを拡張して最適停止時刻を与え，さらにこれを近似する方法としてペナルティ法というLions等が用いた方法が適用できることを示している。

第3章では停止時刻決定問題の変形として直列型のスイッチ問題を扱っている。すなわち一つの確率過程からある確率的な時刻において他の確率過程にのりかえるというものである。これらは待ち行列，在庫量の管理問題などで生ずるものであって，やはり利得を最大にする問題である。著者は前章の結果を基礎として，ペナルティ方程式の解の列の概収束する極限として最適過程を導びいている。

参考論文はポアッソン測度について絶対連続であるような確率測度の必要十分条件を解明したもの及び点過程に対するBMO空間の双対空間を求めたものである。

以上本論文，参考論文とも学術的にも新しい研究結果であり，著者は独立した研究者として十分な学識を有することを示しており，博士論文として合格と認める。