

狭帯域低次数デジタルフィルタの設計方法

—補間法に基づく設計—

Design method of low order narrow band IIR digital filters

栖原 淑郎

Yoshiro Suhara

【要 約】

デジタル信号処理において、周波数選択性をもつデジタルフィルタは、周波数領域における設計を実現する手段として多く利用されている。デジタルフィルタは、インパルス応答に着目すると、インパルス応答が無限に続く IIR フィルタと、インパルス応答が有限時間しか続かない FIR フィルタとに分けられる。FIR フィルタは直線位相となる設計が可能で波形伝送を行う場合波形歪みが生じないが、急峻な遮断特性を実現するためにはフィルタの次数が大きくなる。それに比べて IIR フィルタは低次数で急峻な遮断特性を実現することが可能で、アナログフィルタの既知の設計方法を用いてフィルタの設計を行うことができる。本稿では、まず著者等が提案した周波数領域における補間法を用いた IIR デジタルフィルタの設計に基づき補間点を 5 個持つフィルタの設計法について述べる。次に、阻止域減衰特性を条件として与えた場合の阻止域端の最小値を求める方法を示し、狭帯域フィルタについて従来のフィルタに比べて低次数で実現できることを数値計算による結果で示す。さらに位相特性について他の既知のフィルタと比較し直線性に優れていることを数値計算により示す。

[Abstract]

In digital signal processing, A digital filter with the function which chooses frequency, is mostly used as a means to realize the design in a frequency domain. If a digital filter pays its attention to an impulse response, it will be divided into the IIR filter in which an impulse response continues infinitely, and the FIR filter in which an impulse response continues only in limited time. The design which becomes linear phase is possible for the FIR filter. For this reason, when performing waveform transmission, there is no waveform distortion. However, the filter order becomes large in order to realize a steep cut off characteristics. Compared with it, the IIR filter can realize a steep cut off characteristics by a lower degree, and the digital filter can be designed by utilizing the known design method of the analog filter. First, this paper describes the design method of a digital filter with five interpolating points based on the design of the digital filter using the interpolation in the frequency domain which proposed the authors. Then, the method of calculating the minimum of stopband end is introduced, and it is shown by the result depended on numerical computation that it is realizable by a lower degree compared with the conventional filter about the narrowband filter. Furthermore, excelling in linearity about the phase characteristic as compared with other filters is shown.

Key words: IIR digital filter, interpolation, cut off characteristics, linear phase

1. はじめに

デジタルコンピュータの急速な進歩により多くの分野でデジタル技術が急速な発展を遂げている。中でも、フィルタリング、雑音除去、予測、周波数解析、特徴抽出等を行う信号処理の分野においては、ほとんどアナログ信号をデジタル化し、デジタル信号処理を行う方法が取られている。信号処理はリアルタイム処理で行うため専用のデジタルシグナルプロセッサが使われる。この中でフィルタリングを行うデジタルフィルタは、加算器、乗算器、及び遅延器にて構成され、設計の際の遅延器の数を減ずる低次数化の研究は従来より盛んに行われている。デジタルフィルタは、時間応答(インパルス応答)の特徴によりインパルス応答が有限時間しか続かない FIR デジタルフィルタとインパルス応答が無限に続く IIR デジタルフィルタに分けられる。FIR デジタルフィルタは波形伝送の際に必要な直線位相特性を持つ設計が可能であるが、急峻な遮断特性を実現するには次数が非常に高くなる。これに対して IIR デジタルフィルタは、完全な直線位相特性は実現できないが低次で急峻な特性を得ることができる¹⁾²⁾³⁾⁴⁾。本稿では、まず、IIR 低域デジタルフィルタについて、補間法を用いた新しい設計法について述べる^[24]。次にこの設計法の阻止域特性の特徴より遷移域を最小にする方程式を導き、数値計算により解を求める^[16]。さらに、既知の IIR デジタルフィルタと比較し、低次数で急峻なフィルタが実現できることを示す。

2. 補間に基づく IIR デジタルフィルタの設計

図 1. にデジタルフィルタの構成を示す。

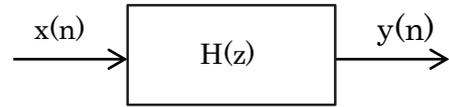


図 1. デジタルフィルタの構成

入力信号 $x(n)$ 、及び出力信号 $y(n)$ は、離散信号で n は整数値 $-\infty < n < \infty$ を取る。又、

$$X(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (1)$$

$$Y(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \quad (2)$$

を z 変換という。線形離散システムであるデジタルフィルタのインパルス応答を $h(m)$ ($m=0,1,\dots,\infty$) とすると

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(n-m)h(m) \quad (3)$$

と表される。又、伝達関数 $H(z)$ は

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (4)$$

で表され、

$$Y(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z^{-1}) \quad (5)$$

の関係がある。

IIR デジタルフィルタでは伝達関数 $H(z)$ は有理関数で

$$H(z^{-1}) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} \quad (6)$$

と表される。ここで $n(z)$ は実係数の多項式である。又、 $d(z)$ は実係数の多項式で、最高次の係数は 1 とおける。

伝達関数 $H(z)$ は特性関数 $\Phi(z)$ を用いて

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{K^2}{1 + \Phi(z)\Phi(z^{-1})} \quad (7)$$

と表される。ここで特性関数は

$$\Phi(z^{-1}) = \frac{h(z^{-1})}{f(z^{-1})} \quad (8)$$

と表せ、 $h(z), f(z)$ は、一般性を失わずに共通因数がないとおける。著者等は特性関数を Lagrange の補間式を用いて設計する方法を提案し、フィルタの通過域、阻止域はもとより、遷移域においても、従来規定された遮断周波数や遷移域の幅だけでなく、その急峻度や直線性などの高度の条件に対しても十分な設計が可能になることを示した⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾¹⁰⁾¹¹⁾¹²⁾。なお、 K は、通過域における減衰量で通常は 1 である。(6),(8)を(7)に代入し、両辺の分母を比較することにより

$$f(z^{-1})f(z) + h(z^{-1})h(z) = d(z^{-1})d(z) \quad (9)$$

を得る。前に述べた仮定により $|f(e^{-j\omega})|$ および

$|h(e^{-j\omega})|$ は任意の実数 ω に対して同時に 0 になる

ことはない。すなわち式(9)の左辺は複素 Z -平面の単位円上で 0 にはならない。従って式(9)の右辺の $d(z^{-1})$ は複素 Z -平面の単位円内にもみ零点をもつようにすることができる。以上の議論より(6)は

$|z| \leq 1$ で正則であり、伝達関数 $H(z^{-1})$ は常に安定である。

ここで $z = e^{j\omega}$ とおき $x = \cos\omega$ とすると二乗振幅特性は

$$|H(z)|^2 = 1 / \left\{ 1 + |\hat{\Phi}(x)|^2 \right\} \quad (10)$$

と表される。ただし、

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(z^{-1}) \Big|_{x = \frac{z+z^{-1}}{2}} \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (11)$$

である。ここで、図 1. に示すように低域通過デジタルフィルタの通過域端及び阻止域端の角周波数、振幅をそれぞれ $\omega_p, \rho_p : \omega_s, \rho_s$ とし、角周

波数 $\omega_1 (\omega_s < \omega_1 < \pi)$ に補間点を配置した場合の

$\Phi(z^{-1})$ は次のように定められる^{[11][12]}。

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 1 \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (12)$$

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_1} = 0 \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_1} = \infty \quad (13)$$

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = 0 \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = \infty \quad (14)$$

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_p} = \rho_p \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_p} = \gamma_p \quad (15)$$

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_s} = \rho_s \quad \text{より} \quad \Phi(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_s} = \gamma_s \quad (16)$$

ただし、

$$\gamma_p = \sqrt{\rho_p^{-2} - 1} \quad (17)$$

$$\gamma_s = \sqrt{\rho_s^{-2} - 1} \quad (18)$$

である。ここで、 $\Phi(x)$ は $\omega = 0$ では M 位の零点を持ち、 $\omega = \omega_1$ では、 $M-1$ 位の極を持つものとする。以上の条件で Lagrange の補間法を用いて

$\hat{\Phi}(x)$ を求めると

$$\hat{\Phi}(x) = |F(x) / a(b-x)| \quad (19)$$

と表される。但し、

$$F(x) = \left| (1-x)^M / (1+x)(x_1-x)^{M-2} \right| \quad (20)$$

$$a = [F(x_s) / \gamma_s - F(x_p) / \gamma_p] / (x_s - x_p) \quad (21)$$

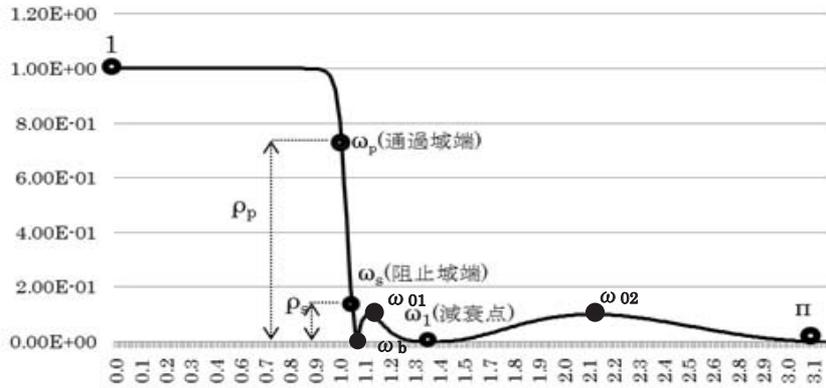


図 2.

$$b = \frac{F(x_s)x_p/\gamma_s - F(x_p)x_s/\gamma_p}{F(x_s)/\gamma_s - F(x_p)/\gamma_p} \quad (22)$$

ここで

$$x_p = \cos\omega_p, x_s = \cos\omega_s, x_1 = \cos\omega_1 \quad (23)$$

である。図 2.に示すフィルタは通過域、遷移域は、単調減少で通過域最大平坦特性を持ち、阻止域は、二つのリップルを持つフィルタである。ここで、阻止域端 ω_s を通過域端 ω_p に近づけて遷移域の幅を小さくすると阻止域の二つの極大点 ω_{01}, ω_{02} が大きくなり阻止域の条件

$$\max_{\omega_s \leq \omega \leq \pi} |H(e^{j\omega})| \leq \rho_s \quad (24)$$

を満たさなくなる。本論文では、過域端 ω_p を与えた時の阻止域端 ω_s の最小値を求める方法を述べる。

3.阻止域における減衰点及び極大点 [16]

本フィルタにおける阻止域では、 ω_b, ω_1 、及び π の三個の減衰点及び ω_{01}, ω_{02} の二個の極大点が存在する。ここで

$$\omega_b = \cos^{-1} b \quad (25)$$

である。又、減衰点 ω_1 は、 $\omega_s < \omega_1 < \pi$ の範囲で

任意の値を取ることができる。 ω_s が十分大きいと阻止域の条件を満たす ω_1 が存在する。 ω_s を小さくして遷移域の幅を小さくしていくと、ある点 ω_{s0} より ω_s が小さいと阻止域の条件(24)を満たす ω_1 が存在しなくなる。 ω_{s0} を ω_s の最小値とする。一般に

$$\omega_{s0} < \omega_b < \omega_{01} < \omega_1 < \omega_{02} < \pi \quad (26)$$

の関係がある。阻止域の条件より

$$|H(e^{j\omega_{01}})| \leq \rho_s \quad (27)$$

$$|H(e^{j\omega_{02}})| \leq \rho_s \quad (28)$$

を満たす必要がある。 $\omega_s = \omega_{s0}$ の時、阻止域の条件(24)を満足する ω_1 は一意的に決まる。これを ω_{10} とする。以下、伝達関数を三変数の関数で表す。

$$|H(e^{j\omega})| = |\hat{H}(\omega, \omega_s, \omega_1)| \quad (29)$$

$\omega_s = \omega_{s0}, \omega_1 = \omega_{10}$ の時、極大点 ω_{01} 又は ω_{02} における利得で値の大きい極大点の利得は ρ_s に等しく

$$\text{Max}(|H(\omega_{01}, \omega_s, \omega_1)|, |H(\omega_{02}, \omega_s, \omega_1)|) = \rho_s \quad (30)$$

が成り立つ。狭帯域フィルタの場合一般に

$$|H(\omega_{01}, \omega_s, \omega_1)| > |H(\omega_{02}, \omega_s, \omega_1)| \quad (31)$$

である。従って

$$|H(\omega_{01}, \omega_s, \omega_1)| = \rho_s \quad (32)$$

とおける。又、 ω_{01} は極大点であることから

$$\left. \frac{\partial |H(\omega, \omega_s, \omega_1)|}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{01}} = 0 \quad (33)$$

が成り立つ。さらに $\omega = \omega_{01}$ において ω_s が最小値 ω_{s0} を取る時、 ω_1 は極小値 ω_{10} をとることから

$$\left. \frac{\partial |H(\omega, \omega_s, \omega_1)|}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_1=\omega_{10}} = 0 \quad (34)$$

が成立する。(32),(33),(34)の連立方程式の解 $(\omega_{01}, \omega_{s0}, \omega_{10})$ を求めることにより ω_s の最小値

ω_{s0} 及びその際の減衰点 ω_{10} を求めることができる。図3(a),(b)に

通過域端 $\omega_p = 0.1$ 、

通過域最大減衰量 $\rho_p = 0.1[\text{dB}]$ 、

阻止域最小減衰量 $\rho_s = 60[\text{dB}]$ 、

の狭帯域フィルタについて interpolation filter の減衰特性及び通過域特性を従来よりよく知られている Butterworth filter 及び Chebyshev filter と比較したものを示す。Butterworth filter 及び interpolation filter は通過域最大平坦特性であるが、interpolation filterの方が遮断特性が急峻である。しかし Chebyshev filter は、interpolation filter に比べて急峻であるが、通過域にリップルがある。

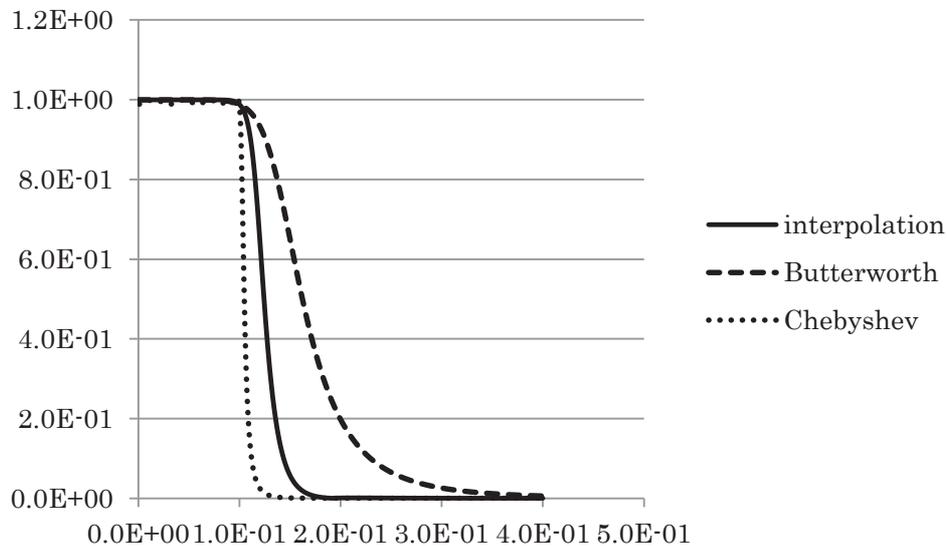


図 3(a). 減衰特性

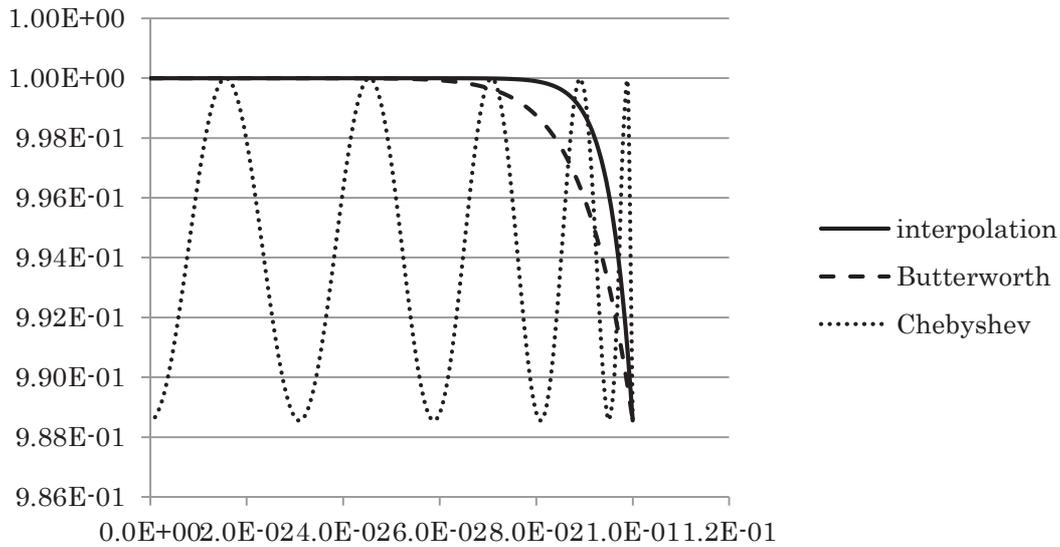


図 3(b). 通過域特性

4.位相特性

デジタルフィルタの設計では、振幅特性とともに位相特性も重要である。特に、波形伝送の場合は、直線位相フィルタが用いられる。今、伝達関数を

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \angle H(e^{j\omega}) \quad (35)$$

と表す。ここで、 $|H(e^{j\omega})|$ は絶対値、 $\angle H(e^{j\omega})$ は偏

角である。(1),(2)及び(5)より

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (40)$$

が成り立つ。(35)より、フィルタでは、入力信号

の振幅が $|H(e^{j\omega})|$ 倍され、位相が $\angle H(e^{j\omega})$ だけ歪

を受けたものが出力信号となる。今

$$\angle H(e^{j\omega}) = L\omega \quad (41)$$

の関係があるとするとき周波数による遅延は一定 L となる。このため、時間領域における波形は崩れない。IIR フィルタでは完全な直線位相フィルタは得られない。しかし、近似的な直線位相フィルタを設計することは可能である。

今、フィルタの伝達関数の零点を

$$\alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, K) \quad (42)$$

極を

$$\beta_j \quad (j = 1, 2, \dots, L) \quad (43)$$

とすると伝達関数は

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\prod_{i=1}^K (e^{j\omega} - \alpha_i)}{\prod_{j=1}^L (e^{j\omega} - \beta_j)} \times \exp \left\{ \sum_{i=1}^K \tan^{-1} \frac{\sin \omega - \text{Im}(\alpha_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\alpha_i)} - \sum_{j=1}^L \tan^{-1} \frac{\sin \omega + \text{Im}(\beta_j)}{\cos \omega - \text{Re}(\beta_j)} \right\} \quad (44)$$

位相特性は

$$\angle H(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^K \tan^{-1} \frac{\sin \omega - \text{Im}(\alpha_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\alpha_i)} - \sum_{j=1}^L \tan^{-1} \frac{\sin \omega + \text{Im}(\beta_j)}{\cos \omega - \text{Re}(\beta_j)}$$

で表される。今、(19),(20)により(10)は

$$\begin{aligned} |\hat{H}(x)|^2 &= 1/\{1+|\varphi(x)|^2\} \left(x = \frac{z+z^{-1}}{2} \right) \\ &= \frac{a^2(1+x)^2(x_1-x)^{2M-4}(b-x)^2}{(1-x)^{2M} + a^2(1+x)^2(x_1-x)^{2M-4}(b-x)^2} \end{aligned} \quad (45)$$

と表される。分子=0 の $2M$ 個の根を

$\alpha_j, \bar{\alpha}_j (j=1,2,\dots,M)$ 、分母=0 の $2M$ 個の根を

$\beta_j, \bar{\beta}_j (j=1,2,\dots,M)$ とすると

$$|\hat{H}(x)|^2 = \frac{a^2 \prod_{i=1}^M (x - \alpha_i)(x - \bar{\alpha}_i)}{1 + a^2 \prod_{j=1}^M (x - \beta_j)(x - \bar{\beta}_j)} \quad (46)$$

$x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ より

$$|H(z)|^2 = \frac{a^2 \prod_{i=1}^{2M} (z - \mu_i)(z - \bar{\mu}_i)}{1 + a^2 \prod_{j=1}^{2M} (z - \nu_j)(z - \bar{\nu}_j)} \quad (47)$$

と表される。ここで μ_i は、(45)の分子=0 の根

$\cos^{-1} b, \omega_1, \pi$ である。又、 ν_j は、(45)の分母=0

の根を数値計算により求める。

$z = e^{j\omega}$ とおくと

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{a^2 \prod_{i=1}^{2M} (e^{j\omega} - \mu_i)(e^{j\omega} - \bar{\mu}_i)}{1 + a^2 \prod_{j=1}^{2M} (e^{j\omega} - \nu_j)(e^{j\omega} - \bar{\nu}_j)} \\ &\times \exp\left(\sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \frac{\sin \omega - \text{Im}(\mu_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\mu_i)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \frac{\sin \omega + \text{Im}(\mu_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\mu_i)} \\ &\times \exp\left(-\sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \frac{\sin \omega - \text{Im}(\nu_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\nu_i)}\right) \\ &- \sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \frac{\sin \omega + \text{Im}(\nu_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\nu_i)} \end{aligned} \quad (48)$$

と表され、位相特性は

$$\begin{aligned} \angle H(e^{j\omega}) &= \sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \frac{\sin \omega - \text{Im}(\mu_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\mu_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \frac{\sin \omega + \text{Im}(\mu_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\mu_i)} \\ &- \sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \frac{\sin \omega - \text{Im}(\mu_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\mu_i)} \\ &- \sum_{i=1}^{2M} \tan^{-1} \frac{\sin \omega + \text{Im}(\nu_i)}{\cos \omega - \text{Re}(\nu_i)} \end{aligned} \quad (49)$$

で計算される。通過域端 $\omega_p = 0.1$ の狭帯域の場合

の interpolation filter の位相特性と他の既知のフィルタの位相特性とを比較したものを図4に示す。interpolation filter が Butterworth filter と同様に直線性に優れていることが示されている。

5.おわりに

本稿では、IIR デジタルフィルタについて、interpolation filter と既知の filter との比較を行った。まず、interpolation filter について阻止域端の最小値を求める計算方法を示し、設計方法を明確にした。次に、周波数特性について、既知の IIR デジタルフィルタと比較し、最大平坦特性を持ち、低次数で急峻なフィルタが実現できることを示した。さらに位相特性について他の IIR フィルタと比べて直線性に優れていることを数値計算により示した。FIR デジタルフィルタは、

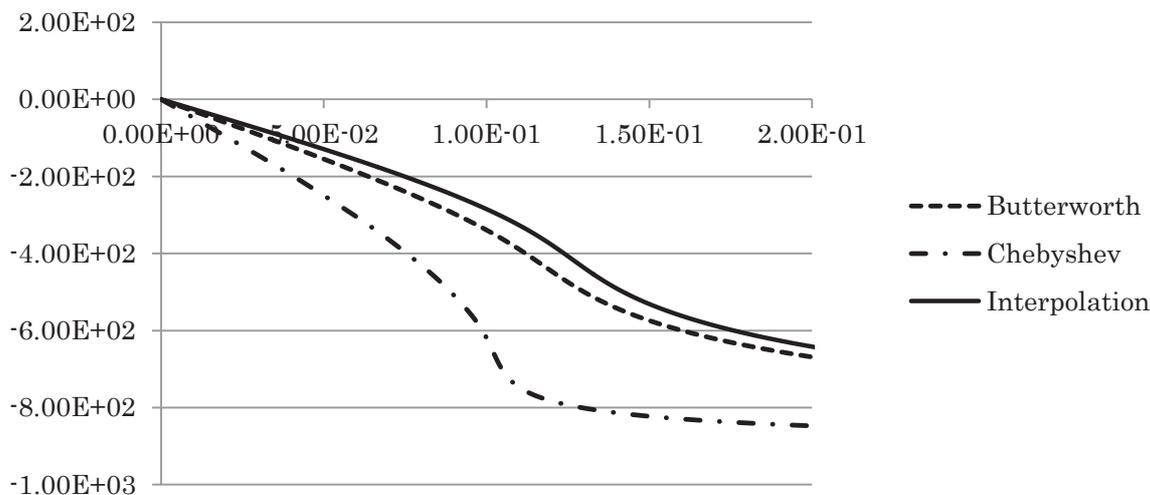


図 4.位相特性

伝達関数の極の位置は零点にあるが、IIR デジタルフィルタは、極の位置が単位円に近づくことにより、係数感度が非常に高くなる場合が多い。特に、狭帯域で急峻なフィルタを実現する場合、この傾向によりフィルタの安定性も保証できなくなる。今後、interpolation filter の係数感度特性について研究を進め、低感度フィルタの実現を図る予定である。

参考文献

- 1) 谷萩隆嗣『デジタル信号処理と基礎理論』コロナ社、1996年3月.
- 2) 谷萩隆嗣『デジタルフィルタと信号処理』コロナ社、2001年12月.
- 3) “Handbook for Digital Signal Processing.”, Edited by Sanjit K. Mitra & James F.Kaiser, John Wiley & Sons (1993)
- 4) Alan V. Oppenheim & Ronald W.Schafer“Digital Signal Processing”, Prentice-Hall(1975)
- 5) Walsh,J.L.“Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain,”American Math. Soc. Colloquium Pub. Vol.xx,(1960)
- 6) 栖原淑郎、古賀利郎「補間に基づく巡回型デジタルフィルタの特性の近似」,信学論(A),J75-A,8,pp1341-1346, (1992年8月)
- 7) Suhara,Y.,Koga,T.“A Method of Designing IIR Digital Filters with Maximal Flatness in Passband and Prescribed Steepness in Transition Band”, Trans.IEICE, E73, 11,pp.1807-1809 Nov.(1990)
- 8) Suhara,Y.,Koga,T.“A Designing Method of IIR Digital Filters Taking Account of Transition Band Characteristics”,Proc.JTC-CSCC’90, pp.501-506 Dec.(1990)
- 9) Suhara,Y.“A Method of Designing IIR Digital Filters with Minimum Number of Interpolation Points”, Trans. IEICE, E74,9,pp.2652-2654 Sept.(1991)
- 10) Suhara,Y.,Koga,T.“A Method of Designing IIR Digital Filters by Means of Interpolation Taking Account of Transition Band Characteristics”, Trans. IEICE, Fundamentals, Vol.E76-A,No.4 April(1993)
- 11) Suhara,Y.,Koga,T.,Madachi T.“A Method of Approximating Characteristics of Linear Phase Digital Filters”, Proc. JTC-CSCC’92, pp.422-427, July(1992)

- 12) Suhara, Y., Madachi T., Koga, T. "A Method of Approximating Characteristics of Linear Phase Digital Filters Utilizing Interpolation Technique in Combination with LMS Method", Trans. IEICE
- 13) 栖原淑郎、「補間法による狭帯域低域通過型低感度デジタルフィルタの設計」, 第14回デジタル信号処理シンポジウム C4-2(1999-11)
- 14) 栖原淑郎、「補間法により設計された IIR 型デジタルフィルタの遮断特性」 Proceedings of the 2011 IEICE General Conference A-4-32(2011-03)
- 15) 栖原淑郎、「補間型 IIR デジタルフィルタの設計アルゴリズム」 Proceedings of the 2012 IEICE General Conference A-4-12(2012-03)
- 16) 栖原淑郎、「補間型 IIR デジタルフィルタの設計方法」 Proceedings of the 2013 IEICE General Conference A-4-12(2013-03)