

Fundamentos y aplicaciones de la teoría de grafos. Grafos eulerianos y hamiltonianos. Diagramas en árbol. (2ª Parte)

Título: Fundamentos y aplicaciones de la teoría de grafos. Grafos eulerianos y hamiltonianos. Diagramas en árbol. (2ª Parte). **Target:** Profesores de Matemáticas. **Asignatura:** Teoría de Grafos. **Autor:** María de la O Martínez Santibañez, Licenciada en Matemáticas, Profesora de Matemáticas en Educación Secundaria.

[...]

3. Grafos eulerianos y hamiltonianos.

Como ya comentábamos en la introducción Euler fue el que planteando el problema en la teoría de grafos “resolvió” el problema de los 7 puentes Königsberg. El problema consistía en encontrar una ruta en la ciudad que recorriera los siete puentes, cruzando cada uno de ellos una sola vez, y regresando al punto de partida. Euler demostró que esto no era posible, con lo cual se planteó el problema:

¿En que grafos es posible encontrar una ruta que recorra todas las aristas una sola vez y vuelva al punto de partida? Más adelante veremos cual es la solución. De esta forma se define lo que es un grafo euleriano.

Definición: Sea G un grafo. Entonces:

- se llama camino euleriano en G a un camino simple que contiene todas las aristas de G .
- Se llama circuito euleriano a un camino euleriano cerrado.
- Se dice que G es un grafo euleriano si contiene un circuito euleriano.

Veamos la solución que aportó Euler.

Teorema Sea G un grafo.

G es euleriano $\Leftrightarrow G$ es conexo y el grado de todos sus vértices es par.

Dem:

\Rightarrow Como G tiene un circuito euleriano, entonces cualquier par de vértices u y v de G están conectados por la parte del circuito que de u a v y por tanto G es conexo.

Si C es un circuito euleriano, el número de aristas incidentes en cualquier vértice del grafo debe ser par (ya que por cada arista que lleva a un vértice ha de haber otra que salga).

\Leftarrow (Por inducción). Si el número de aristas es 1 ó 2, es inmediato. Así que supongamos que G tiene n aristas y que el resultado es válido para los grafos que cumplan las condiciones y tengan menos de n aristas.

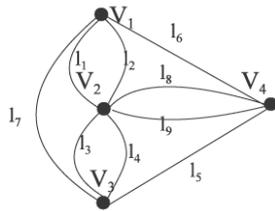
Dado que todos los vértices son de grado par, es posible encontrar un circuito en C . Si C contiene todas las aristas de G , C es un circuito euleriano. En caso contrario, consideramos el grafo G_1 obtenido al suprimir en G las aristas de C y G' obtenido al eliminar de G_1 los vértices aislados.

Por haber eliminado las aristas de un circuito, todos los vértices de G' siguen teniendo grado par. Por (H.I.) cada componente conexa G'_i de G' tiene un circuito euleriano. Como en cada G'_i existe al menos un vértice v_i de C podemos obtener un circuito euleriano en G del siguiente modo: partiendo de un vértice cualquiera de C lo

recorremos hasta encontrarnos con un vértice v_i de G' , recorriendo entonces la componente G'_i a través de un circuito euleriano de extremos v_i , y así sucesivamente hasta regresar al vértice inicial. ■

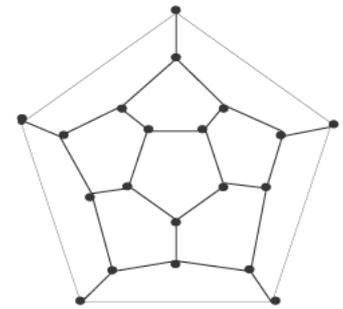
Así pues “no existe la ruta que deseamos en la ciudad de Königsberg”. En la actualidad Königsberg es la ciudad lituana de Kaliningrado. Sobre ella se han construido dos puentes, no existentes en la época de Euler, para permitir una solución positiva al histórico problema.

Una posible solución sería:



$$v_1 \rightarrow l_1 \rightarrow v_2 \rightarrow l_3 \rightarrow v_3 \rightarrow l_5 \rightarrow v_4 \rightarrow l_6 \rightarrow v_1 \rightarrow l_7 \rightarrow v_3 \rightarrow l_4 \rightarrow v_2 \rightarrow l_9 \rightarrow v_4 \rightarrow l_8 \rightarrow v_2 \rightarrow l_2 \rightarrow v_1$$

En 1856, el matemático Sir Willian Hamilton presentó al mundo un puzzle. El juego estaba basado en un dodecaedro regular cuyos 20 vértices se marcaban cada uno con el nombre de una ciudad importante en aquella época. El juego consistía en salir de una determinada ciudad y encontrar una ruta que permitiera pasar por todas las demás ciudades una sola vez y regresar al punto de partida. El dodecaedro era tan incómodo de manipular que Hamilton desarrolló una versión del juego, en la que lo reemplazaba por un grafo con 20 vértices unidos mediante 30 aristas. El grafo resultante se conoce como grafo del dodecaedro.



Dado un determinado grafo, si existe algún camino en el mismo que verifique las condiciones anteriormente expuestas se conoce como ciclo hamiltoniano. A los grafos que admitan recorrer todos sus vértices mediante un ciclo hamiltoniano, se les denomina grafos hamiltonianos.

Definición: Sea G un grafo y C un camino en G . Entonces,

- Se dice que C es un camino de Hamilton si es simple y contiene a todos los vértices de G .
- Se dice que C es un circuito de Hamilton si es un camino de Hamilton cerrado.
- G es un grafo hamiltoniano si tiene un circuito de Hamilton.

A pesar de la desesperada lucha de los matemáticos, no existe hoy en día un teorema alguno que nos permita determinar si un grafo es hamiltoniano o no, de modo tan sencillo como el que hemos visto para circuitos eulerianos. El método de ensayo y error es la única forma posible de tratar de encontrar una respuesta al problema.

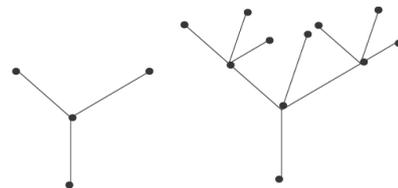
4. Diagramas en árbol.

La jerarquía de directorios en estructura de árbol en los sistemas operativos que permiten la organización de los ficheros es un ejemplo de este tipo de grafos que vamos a ver. Un árbol genealógico también lo es y resulta útil su aplicación para analizar los posibles resultados de un experimento (cálculo de probabilidades).

Definición: Sea T un grafo. Entonces:

- Se dice que T es un bosque si no tiene circuitos.
- Se dice que T es un árbol si es un bosque conexo.

Observación: Obsérvese que los árboles y los bosques son por definición grafos simples.



Definición: Un arco es un istmo o puente si al suprimirlo en G se obtiene un mayor número de componentes conexas que en G .

A continuación vamos a ver un resultado muy útil que nos caracterizará los árboles.

Teorema. Sea T un grafo con n vértices. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- T es un árbol.
- T no posee ningún circuito y tiene $n-1$ aristas.
- T es conexo y tiene $n-1$ aristas.
- T es conexo y cada arista es un istmo.
- Para cada dos vértices de T existe una única trayectoria.
- T no posee ningún circuito, pero la adición de cualquier nueva arista crea exactamente un circuito.

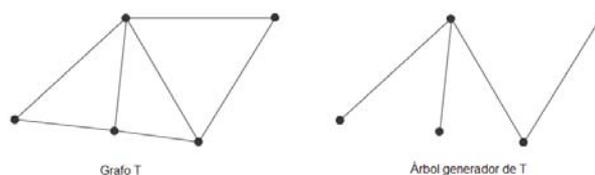
Definición: Sea T un grafo conexo. Se llama árbol generador de T a cualquier árbol que contenga a todos los vértices de T .

Proposición. Sea T un grafo conexo. Entonces, T admite un árbol generador.

Dem:

- Si T es un árbol, ya está.
- Si T no es un árbol, por el apartado d) del teorema anterior, T posee una arista que no es un istmo. Así que, suprimiendo dicha arista se obtiene un grafo conexo T' .
 - Si T' es un árbol, hemos terminado.
 - Si T' no es un árbol, repetimos lo anterior con T' . Como T es finito, repitiendo este proceso se llega a un grafo conexo A con los mismos vértices de T (cuyas aristas son aristas de T) en el que cada arista es un istmo. Así pues, por el apartado d) del teorema anterior, A es un árbol generador de T . ■

Ejemplo:



Observación: el método descrito en esta proposición para hallar un árbol generador de un grafo, tiene la dificultad de comprobar la existencia o no de istmos. Cayley, en 1889, aportó el siguiente resultado:

Teorema de Cayley Existen exactamente n^{n-2} árboles etiquetados diferentes de n vértices.

Dem : un esbozo de la demostración consistiría en establecer una correspondencia biunívoca del conjunto de todos los árboles etiquetados de n vértices sobre el conjunto de todos los símbolos $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}, a_i \in \{1 \dots n\}$. Por tanto, habrá $n \cdot n \cdot n \dots \cdot n$ ^(n-2 veces) de tales símbolos, y de ahí se obtiene de forma casi inmediata la dimensión deseada.

5. Aplicaciones de la teoría de grafos. Problemas clásicos.

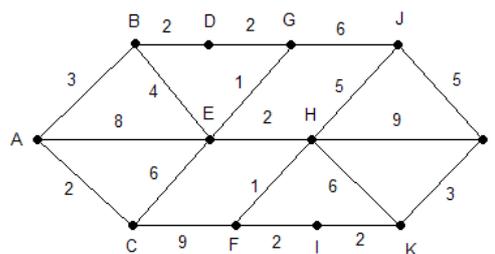
Desde sus orígenes, la Teoría de Grafos se utilizó para la resolución de juegos matemáticos, para el estudio de circuitos eléctricos y en diversas aplicaciones en una multitud de campos tan diferentes como la economía, física teórica, psicología, física nuclear, lingüística, sociología, zoología, tecnología, antropología, química, biología, etc. En la actualidad, la teoría de grafos sigue aplicándose dentro y fuera de las matemáticas.

La Teoría de Grafos tiene un poderoso apoyo en los problemas de transporte. Desde un punto de vista elemental, para que sea posible el transporte o la comunicación, son necesarios puntos concretos de emisión o recepción y rutas de comunicación. Estos dos elementos, puntos y rutas, se representan respectivamente por vértices y lados. La figura así obtenida es una red de transporte. Además los lados pueden estar orientados según si las rutas de desplazamiento necesitan definirse en un sentido obligatorio o puedan recorrerse en ambos sentidos. A menudo interesa fijar la atención en los posibles trayectos posibles entre dos vértices distintos, de tal manera que se cumplan algunas condiciones útiles.

Veamos algunos de los ejemplos más importantes.

1. El problema del camino más corto.

Supongamos que tenemos un mapa como el que sigue:



y queremos saber ¿cuál será el camino más corto entre A y L?

El problema del camino más corto consiste en encontrar un camino de un vértice dado y de coste mínimo. Para hallar este camino existe un algoritmo conocido como Algoritmo de Dijkstra basado en ir asignando temporalmente etiquetas a los vértices e ir reduciéndolas continuamente en cada iteración, al mismo tiempo que una sola de estas se convierte en permanente. La solución que aportaría sería A B E H F I K L.

2. El problema del cartero chino.

En este problema, un cartero desea repartir todas sus cartas a un conjunto de direcciones de forma que la distancia total a recorrer sea la más corta posible.

Podemos resolverlo en términos de la Tª Grafos ponderados, encontrando una secuencia de aristas cerrada que incluya todas las aristas y que tenga un peso total mínimo.

3. El problema del vendedor ambulante.

En este problema un vendedor ambulante desea visitar varias ciudades y volver a su punto de partida, de forma que cubra la menor distancia posible.

En términos de la Tª Grafos ponderados, el problema consiste en encontrar un circuito hamiltoniano en un grafo ponderado completo cuyo peso total sea mínimo.

4. El problema del conector mínimo.

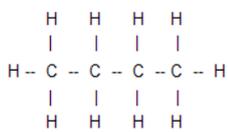
Supongamos que deseamos construir una red de ferrocarriles que conecte n ciudades de modo que un pasajero pueda viajar desde cualquiera de esas ciudades a cualquier otra.

Para resolver el problema, debemos encontrar un árbol expandido T con un peso total mínimo. La solución la proporciona un algoritmo conocido como Algoritmo de Kruskal.

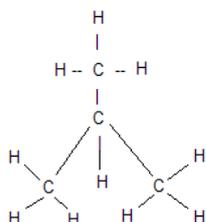
5. Enumeración de moléculas químicas.

Un hidrocarburo (moléculas compuestas por carbono e hidrógeno) puede ser representado por un grafo donde los átomos de carbono y de hidrógeno se representan por vértices de grado 4 y 1 respectivamente.

Ejemplo:



Butano



Isobutano

Ambas tienen la misma fórmula química, C_nH_{2n+2} sin embargo, sus moléculas son diferentes.

Interesa conocer el número de moléculas diferentes que poseen estas fórmulas. Para ello, hay que determinar la posición de los átomos de carbono y completar la fórmula con átomos de hidrógeno hasta que el grado sea 4.

Así que, ¿cuántos árboles hay de n vértices tales que cada uno tenga grado cuatro o menor? La solución fue aportada por Cayley en 1875.

6. Redes eléctricas.

Este problema consiste en determinar la corriente que circula por cada cable.

7. Teorema matrimonial de Hall.

Sea un conjunto finito de muchachos, cada uno de los cuales conoce a varias chicas. ¿En qué condiciones se pueden formar los matrimonios de tal forma que cada uno de los muchachos se case con la chica que conoce?

TEOREMA de Hall Una condición necesaria y suficiente para la solución del problema matrimonial es que cada conjunto de k jóvenes conozca colectivamente k chicas al menos, siendo m el número total de chicos ($1 \leq k \leq m$).

8. Teorema de Menger.

Permite la determinación del número de trayectorias que unen dos vértices dados u, v de un grafo G .

TEOREMA de Menger] El número máximo de trayectorias de vértices disjuntos que conectan dos vértices diferentes no adyacentes u y w de G es igual al número mínimo de vértices de un subconjunto separador vw .

TEOREMA El teorema de Menger implica el teorema de Hall.

6. Conclusión.

Como síntesis, podemos concluir que nos hemos iniciado en la Tª Grafos, hemos recorrido por distintos tipos de grafos y estudiado algunas de sus propiedades.

Nos hemos detenido en algunas de sus aplicaciones y hemos visto como se han ido resolviendo los problemas que en principio se planteaban y hemos la representación gráfica mediante árboles.

Queremos incidir en la importancia de este tema, ya que actualmente la Tª Grafos está jugando un creciente papel en campos tan diversos como la ingeniería eléctrica, la geografía, el análisis numérico,...



Bibliografía

BEHZAD M. Y CHARTRAND. "INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS". BOSTON 1971

T. VEERARAJAN. "MATEMÁTICAS DISCRETAS" ED. MC GRAW-HILL 2008.

BONDY, J.A. Y MURTY, U.S.R. "TEORÍA DE GRAFOS Y APLICACIONES".

WILSON, R.J. "INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS" ED. ALIANZA, MADRID 1983

Páginas web como:

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/capitulo8a.pdf

http://docencia.udea.edu.co/regionalizacion/teoriaderedes/informaci%F3n/C1_RepresentacionMatrices.pdf