

# Desarrollo de las Ecuaciones de Detección de Posición y Movimiento de un Sistema de Visión Artificial

**Autores:** Rodríguez Rodríguez, Ignacio (Máster en Ingeniería Química); Rodríguez Rodríguez, José Víctor (Dr. Ingeniero de Telecomunicación, Profesor Titular de Comunicaciones Ópticas de la Universidad Politécnica de Cartagena); Martínez Inglés, María Teresa (Ingeniero de Telecomunicaciones).

**Público:** Profesores y estudiantes de Ingeniería y Robótica. **Materia:** Robótica. **Idioma:** Español.

**Título:** Desarrollo de las Ecuaciones de Detección de Posición y Movimiento de un Sistema de Visión Artificial.

## Resumen

Las ecuaciones finales que determinan la localización de los marcadores de los sistemas de detección de posición y movimiento dentro de la visión artificial no son evidentes. Por tanto, en ámbitos de enseñanza de asignaturas de ingeniería industrial o de telecomunicación que aborden el aprendizaje de estos conceptos de robótica, su entendimiento puede resultar complejo. En este sentido, en este artículo se deducen, de manera pormenorizada y paso a paso, las ecuaciones de detección de posición y movimiento de marcadores de un sistema de visión artificial (mediante triangulación geométrica) con el fin de facilitar su comprensión e ilustrar su desarrollo.

**Palabras clave:** Visión artificial, robótica, docencia.

**Title:** Development of the Equations for determining the Position and Movement of a Machine Vision System.

## Abstract

The final equations which determine the location of the markers of tracking systems operating within a machine vision context are not evident. Therefore, in educational circles where industrial or telecommunication engineering subjects related to robotics are given, the understanding of such equations could be difficult. In this sense, in this work, the equations for determining the position and movement of markers in a machine vision system are thoroughly deduced (step by step) by geometrical triangulation with the aim of facilitating their understanding as well as illustrating their obtaining.

**Keywords:** Machine vision, robotics, teaching.

Recibido 2017-12-15; Aceptado 2017-12-21; Publicado 2018-01-25; Código PD: 091049

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas ópticos de detección de posición de objetos y medida del movimiento (visión artificial) presentan una alta precisión que, unida a su fácil manejo, les sitúa como una herramienta totalmente adecuada para su utilización en aplicaciones como, por ejemplo, la cirugía asistida por ordenador.

Estos sistemas detectan puntos en tres dimensiones a través de triangulación óptica (luz infrarroja) de tal manera que, mediante la inserción en herramientas quirúrgicas de los llamados 'marcadores' cuya posición es detectada, el cirujano puede realizar una intervención mucho más precisa apoyado por la información que recibe (Fig. 1) (Davies, 2005).

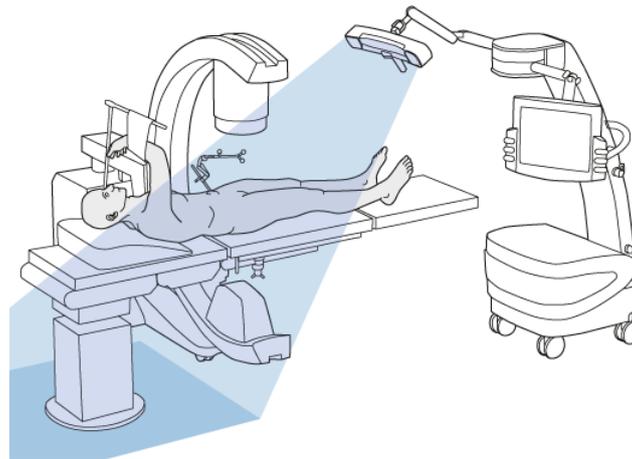


Fig. 1. Ejemplo de intervención quirúrgica con ayuda de un sistema óptico de posición. Fuente: <https://www2.aofoundation.org>

### Funcionamiento de los Sistemas de posicionamiento óptico.

Todos los sistemas de posicionamiento (a excepción de los mecánicos) basan su funcionamiento en el empleo de algún tipo de radiación electromagnética. Por ejemplo, en el caso del sistema Polaris, de Northern Digital Inc. (<https://www.ndigital.com/>) (Fig. 2), los marcadores comentados anteriormente son situados en la herramienta cuya posición se quiere determinar y estos son configurados de forma que emitan energía en respuesta a una señal de activación (activos) o que reflejen la radiación proveniente de una fuente externa a ellos (pasivos).



Fig. 2. Sistema Polaris de detección de posición de objetos. Fuente: <https://www.ndigital.com/>

Seguidamente, se utilizan dos planos compuestos por sensores CCD para detectar la energía emitida o reflejada por los marcadores y, mediante triangulación geométrica (Iocchi, 1998), se determina de manera exacta su localización (De la Escalera, 2001; Sanders-Reed, 2002).

Las ecuaciones finales que determinan esta localización no son evidentes y, por tanto, en ámbitos de enseñanza de asignaturas de ingeniería industrial o de telecomunicación que aborden el aprendizaje de conceptos de robótica o visión artificial, su entendimiento puede resultar complejo. En este sentido, en este artículo se deducen, de manera pormenorizada y paso a paso, las ecuaciones de detección de posición y movimiento de un sistema de visión artificial (mediante triangulación) con el fin de facilitar su comprensión e ilustrar su desarrollo.

### PROYECCIÓN DE LA POSICIÓN DE LOS MARCADORES

Para obtener la localización exacta de un marcador, cada uno de los dos planos formados por sensores CCD obtiene dos pares diferentes de coordenadas derivados de la proyección en ellos de la energía proveniente del marcador, encaminada a través de un plano de enfoque. El esquema básico de la proyección de la posición del marcador en uno de los dos planos de recepción (CCD) se representa en la Fig. 3, en donde cabe destacar la existencia del plano de enfoque (lente), así como de la correspondiente distancia focal ( $F$ ).

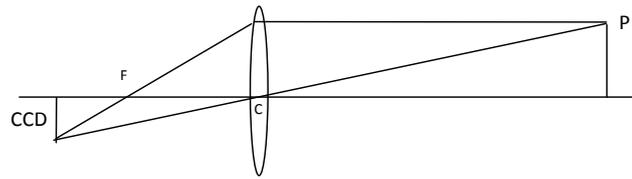


Fig. 3. Proyección de un punto en el plano de imagen a través de una lente convexa.

No obstante, y a efectos prácticos, el esquema que va a ser considerado para la representación de la proyección de la posición del marcador es el de la Fig. 4, en el que aparece la imagen no invertida del plano de CCDs enfrente de la lente, a una distancia igual a la focal. El centro de la lente se considera el centro de proyección de la formación de la imagen.

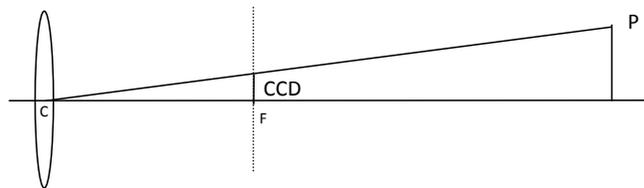


Fig. 4. Representación imaginaria de la proyección de un punto en el plano de imagen a través de una lente convexa.

### OBTENCIÓN DE LAS COORDENADAS DEL MARCADOR A TRAVÉS DE TRIANGULACIÓN GEOMÉTRICA

Para la obtención de las coordenadas de uno de los marcadores partiremos del esquema que se observa en la Fig. 5.

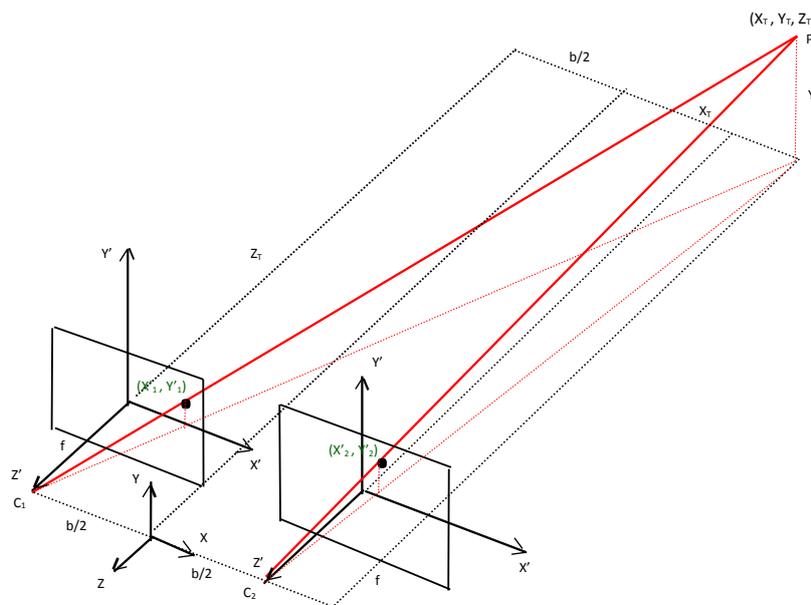


Fig. 5. Esquema de la proyección de las coordenadas del marcador en sendos planos de recepción provistos de sensores CCD.

En él podemos observar los dos planos de sensores CCD, cada uno referenciado a un sistema de coordenadas propio, y en los que el punto  $P$  en el que se encuentra el marcador es proyectado a través de emisión infrarroja en sendos puntos de coordenadas  $(X'_1, Y'_1)$  y  $(X'_2, Y'_2)$ . Por otra parte, el punto  $P (X_T, Y_T, Z_T)$  figura referenciado respecto al sistema de coordenadas universal que hemos situado en el punto medio de la distancia  $b$  que separa las dos lentes  $C_1$  y  $C_2$  (planos de enfoque).

Con el fin de obtener las coordenadas tridimensionales del punto  $P$  en función de las coordenadas de las dos representaciones distintas bidimensionales y de los datos conocidos  $b$  y  $f$ , realizamos la mencionada triangulación que se basa en las propiedades de los triángulos semejantes. De esta manera, y fijándonos en los triángulos semejantes de color azul que aparecen en la Fig. 6 y Fig. 7, podemos, primeramente, obtener las expresiones de  $Z_T$  realizando el siguiente desarrollo matemático:

$$\frac{x'_1}{X_T + \frac{b}{2}} = \frac{-f}{-Z_T} \rightarrow \frac{x'_1}{X_T + \frac{b}{2}} = \frac{f}{Z_T} \quad (1)$$

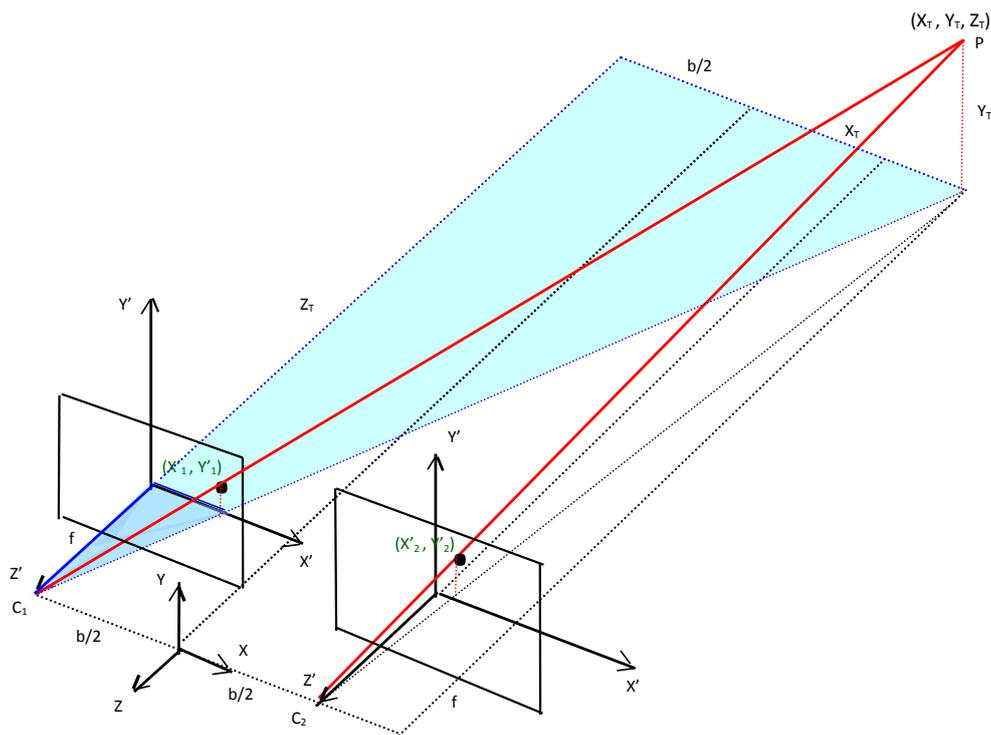


Fig. 6. Primeros triángulos semejantes para la obtención de la coordenada  $Z_T$ .

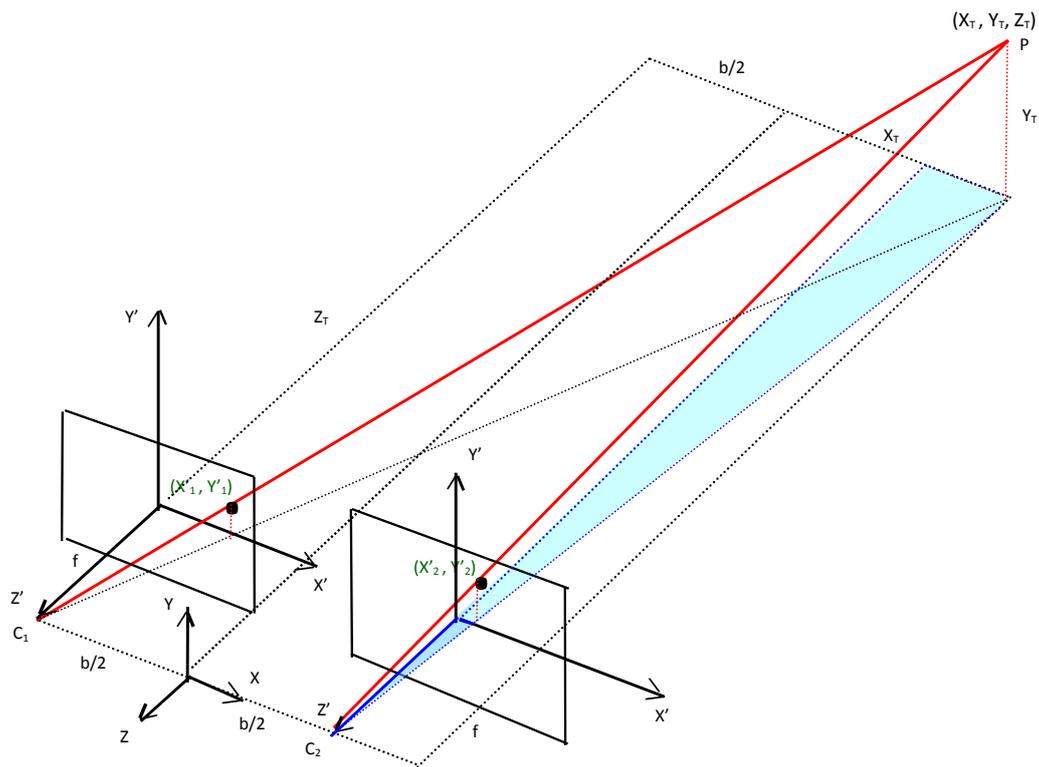


Fig. 7. Segundos triángulos semejantes para la obtención de la coordenada  $Z_T$ .

$$\frac{x'_2}{X_T - \frac{b}{2}} = \frac{-f}{-Z_T} \rightarrow \frac{x'_2}{X_T - \frac{b}{2}} = \frac{f}{Z_T} \quad (2)$$

$$x'_1 Z_T = f X_T + f \frac{b}{2} \quad (3)$$

$$x'_2 Z_T = f X_T - f \frac{b}{2} \quad (4)$$

$$Z_T (x'_1 - x'_2) = fb \quad (5)$$

$$Z_T = \frac{fb}{x'_1 - x'_2} \quad (6)$$

Seguidamente, basta sustituir la expresión hallada de  $Z_T$  en (1) para obtener  $X_T$ :

$$\frac{x'_1}{X_T + \frac{b}{2}} = \frac{f}{\frac{fb}{x'_1 - x'_2}} \quad (7)$$

$$x_1' \left( \frac{fb}{x_1' - x_2'} \right) = f \left( X_T + \frac{b}{2} \right) \quad (8)$$

$$\frac{x_1' b}{x_1' - x_2'} = X_T + \frac{b}{2} \quad (9)$$

$$X_T = \frac{x_1' b}{x_1' - x_2'} - \frac{b}{2} = b \left( \frac{x_1'}{x_1' - x_2'} - \frac{1}{2} \right) = b \left( \frac{2x_1' - (x_1' - x_2')}{2(x_1' - x_2')} \right) = -\frac{b}{2} \left( \frac{(x_1' - x_2') - 2x_1'}{x_1' - x_2'} \right) \quad (10)$$

$$X_T = \frac{b}{2} \frac{(x_1' + x_2')}{(x_1' - x_2')} \quad (11)$$

De igual modo, atendiendo a los triángulos semejantes coloreados en azul de la Fig. 8 y Fig. 9, y sustituyendo los valores ya conocidos de  $X_T$  y  $Z_T$ , podemos establecer los desarrollos que derivan finalmente en las expresiones correspondientes a  $Y_T$ .

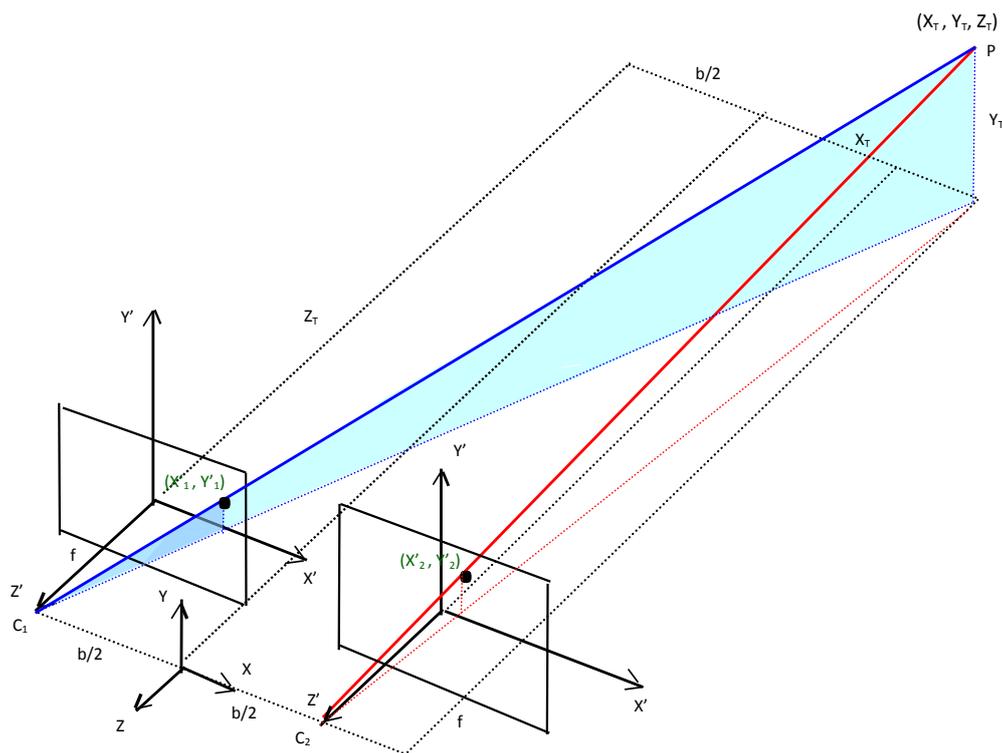


Fig. 8. Primeros triángulos semejantes para la obtención de la coordenada  $Y_T$ .

$$\frac{y_1'}{Y_T} = \frac{\sqrt{f^2 + x_1'^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} + X_T\right)^2 + Z_T^2}} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_1'}{Y_T} &= \frac{\sqrt{f^2 + x_1'^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} \left(1 + \frac{x_1' + x_2'}{x_1' - x_2'}\right)\right)^2 + \left(\frac{fb}{x_1' - x_2'}\right)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{f^2 + x_1'^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} \left(\frac{2x_1'}{x_1' - x_2'}\right)\right)^2 + \left(\frac{fb}{x_1' - x_2'}\right)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{f^2 + x_1'^2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} \left(\frac{4x_1'^2 + 4f^2}{(x_1' - x_2')^2}\right)}} = \frac{\sqrt{f^2 + x_1'^2}}{\sqrt{b^2 \frac{(x_1'^2 + f^2)}{(x_1' - x_2')^2}}} = \\ &= \frac{\sqrt{f^2 + x_1'^2}}{\frac{b}{x_1' - x_2'} \sqrt{x_1'^2 + f^2}} = \frac{x_1' - x_2'}{b} \end{aligned} \quad (13)$$

$$Y_T = \frac{by_1'}{x_1' - x_2'} \quad (14)$$

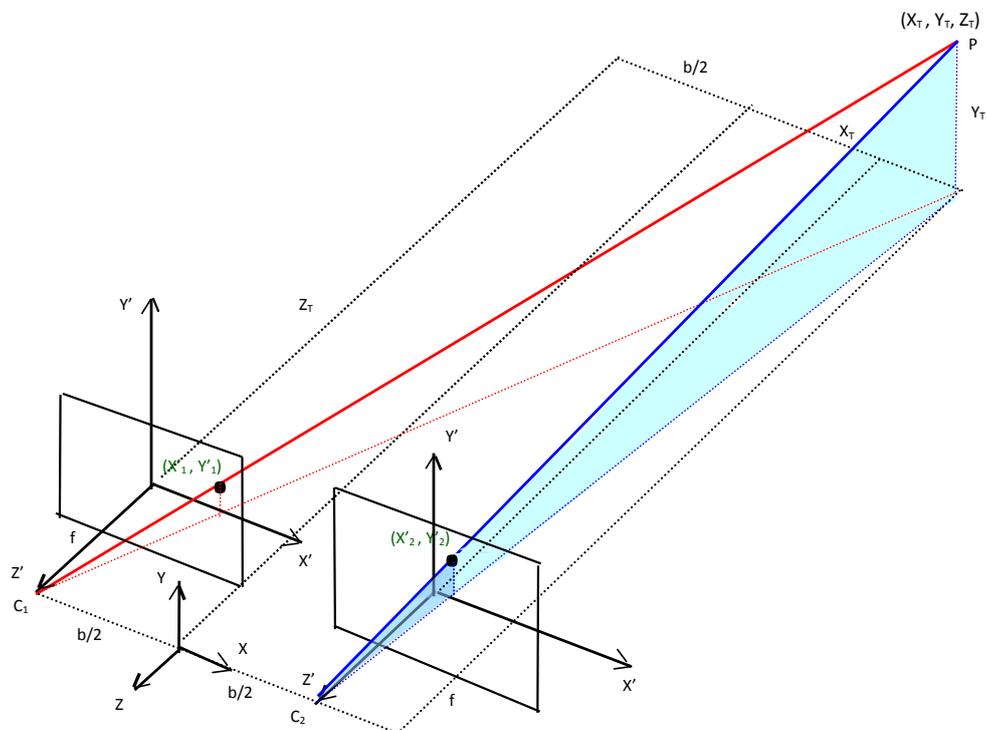


Fig. 9. Segundos triángulos semejantes para la obtención de la coordenada  $Y_T$ .

$$\frac{y_2'}{Y_T} = \frac{\sqrt{f^2 + x_2'^2}}{\sqrt{(X_T - \frac{b}{2})^2 + Z_T^2}} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_2'}{Y_T} &= \frac{\sqrt{f^2 + x_2'^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} \frac{(x_1' + x_2')}{x_1' - x_2'} - 1\right)^2 + \left(\frac{fb}{x_1' - x_2'}\right)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{f^2 + x_2'^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} \left(\frac{2x_2'}{x_1' - x_2'}\right)\right)^2 + \left(\frac{fb}{x_1' - x_2'}\right)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{f^2 + x_2'^2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} \frac{4x_2'^2 + 4f^2}{(x_1' - x_2')^2}}} = \frac{\sqrt{f^2 + x_2'^2}}{\sqrt{b^2 \frac{(x_2'^2 + f^2)}{(x_1' - x_2')^2}}} = \\ &= \frac{\sqrt{f^2 + x_2'^2}}{\frac{b}{x_1' - x_2'} \sqrt{x_2'^2 + f^2}} = \frac{x_1' - x_2'}{b} \end{aligned} \quad (16)$$

$$Y_T = \frac{by_2'}{x_1' - x_2'} \quad (17)$$

Y, de esta manera, quedan establecidas las ecuaciones que definen las coordenadas tridimensionales del marcador en función de su proyección bidimensional en dos planos con sensores CCD así como de los datos conocidos  $b$  (distancia entre lentes) y  $f$  (distancia focal).

## CONCLUSIONES

Se han deducido, de manera pormenorizada y paso a paso, las ecuaciones de detección de posición y movimiento de un sistema de visión artificial con el fin de facilitar su comprensión e ilustrar su desarrollo dentro de un ámbito docente. Para ello, se han utilizado las propiedades que subyacen tras los triángulos semejantes y se ha desarrollado la mencionada deducción matemática por medio de triangulación geométrica.

---

### Bibliografía

- Davies, E. R. (2005). *Machine Vision: Theory, Algorithms, Practicalities*, 3rd ed., Academic Press.
- <https://www.ndigital.com/>
- Iocchi, L. (1998). *Stereo Vision: Triangulation*. Dipartimento di Informatica e Sistemistica. Università di Roma "La Sapienza", Italy.
- <http://www.dis.uniroma1.it/~iocchi/stereo/triang.html>.
- De la Escalera, A. (2001). *Visión por computador. Fundamentos y Métodos*, Practicalities. Prentice Hall.
- Sanders-Reed, J.N. (2002). Impact of tracking system knowledge on multi-sensor 3D triangulation. *Proc SPIE*, 4714.