# (11) 正規PARAMETERSの比の推定について

樋口 伊佐夫

数理統計学の問題の中には，*Parameters*の比を推定するという問題に帰着するものが散見せられる．

正規分布に基礎を置き，*Student's ratio* による區間推定法を一應纒めて置く。

正規分布を假定することは応用上適用範囲が狹くなるとの誹りは免れないけれど，*small sample theory* が正確に展開出來ることは何といっても妙味がある．

## § 1. 一変数の正規分布に基礎を置くもの。

$x_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ を夫々 $N(x_i;\xi_i,\sigma^2)$ に従って互いに独立に分布する *variate* とする．

即ち $x\equiv(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$，$\xi\equiv(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n)$，$I$ を単位 $n\,n$ *matrix* として

$$E(x)=\xi \qquad E[(x-\xi)'(x-\xi)]=\sigma^2 I$$

が成立つ。 ＇は今後とも *transposed* をあらわすものとする。

次に $\theta\equiv(\theta_1,\cdots\cdots,\theta_s)$ $(s<n)$ を *unknown parameters* の $s$ *vector*，$C$ を *known constants* の $s\,n$ *matrix*，

*rank* $C=s$ とし

$$\xi = \theta C$$

とする。 更に

$b \equiv (b_1, \cdots\cdots, b_s)$ $b^* = (b_1^*, ---, b_s^*)$ を known constants の $s$ vector とする。 さて問題は，

$$\eta \theta b' = \theta b^{*\prime}$$

を満たす様な unknown な scalar 量 $\eta$ を推定することである。

$$\hat{\theta} \equiv x C' (CC')^{-1} \qquad \hat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{n} x (I - C'(CC')^{-1} C) x$$

とし[1]

$$t \equiv \frac{(\eta \hat{\theta} b' - \hat{\theta} b^{*\prime}) / \sqrt{E[(\eta \hat{\theta} b' - \hat{\theta} b^{*\prime})^2]}}{\sqrt{n \hat{\sigma}^2 / \{(n-s)\sigma^2\}}}$$

とする。 すると $t$ は自由度 $n-s$ の $t$ 分布に従う。 何故なら，第一に $\eta \hat{\theta} b' - \hat{\theta} b^{*\prime}$ は正規 variate の linear form だから正規分布に従い，且つ $E(\eta \hat{\theta} b' - \hat{\theta} b^{*\prime}) = \eta \theta b' - \theta b^{*\prime} = 0$.

第二に $x(I - C'(CC')^{-1} C) x' = (x - \xi)(I - C'(CC')^{-1} C)(x - \xi)'$ で $I - C'(CC')^{-1} C$ は idempotent symmetric で rank は $n-s$ であるから $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ は自由度 $n-s$ の $\chi^2$ 分布に従い，又 $(C'(CC')^{-1}(CC')^{-1}C)(I - C'(CC')^{-1}C) = 0$ であるから $\hat{\theta}$ と $n\hat{\sigma}^2$ とは独立に分布する。[2] 故に $t$ は自由度 $n-s$ の student の $t$ である。

今 $t_\alpha$ を自由度 $n-s$ の $t$ 分布の $100\alpha$ %点とする。 即ち $P_r(|t| > t_\alpha) = \alpha$ となる様な正数とするとき，

$P_r(t^2 \leqq t_\alpha^2) = 1-\alpha$ により $\eta$ の $100(1-\alpha)$ %信頼区間を求めることが出来る。

$$E[\{\eta \hat{\theta} b' - \hat{\theta} b^{*\prime}\}^2] = \sigma^2 \{\eta^2 b (CC')^{-1} b' - 2\eta b (CC')^{-1} b^{*\prime} + b^* (CC')^{-1} b^{*\prime}\}$$

であるから G を

$$G \equiv \frac{n-s}{n\hat{\sigma}^2}\begin{pmatrix} (\hat{\theta}b')^2 & b^*\hat{\theta}'\hat{\theta}b' \\ b\hat{\theta}'\hat{\theta}b^{*\prime} & (b^*\hat{\theta})^2 \end{pmatrix} - t_\alpha^2 \begin{pmatrix} b(CC')^{-1}b' & b^*(CC')^{-1}b' \\ b(CC')^{-1}b^{*\prime} & b^*(CC')^{-1}b^{*\prime} \end{pmatrix}$$

なる 2,2 matrix とし $h(\eta)$ を

$$h(\eta) \equiv (\eta, -1)\, G\, (\eta, -1)'$$

なる $\eta$ の二次式とすると, $t^2 \leqq t_\alpha^2$ は $h(\eta) \leqq 0$ ということであるから, $h(\eta) \leqq 0$ ならしめる $\eta$ の範囲が信頼区間である。ところで $h(\eta)$ の $\eta$ の二次の係数が正であれば, $h(\eta) = 0$ なる二次方程式は, 二実根 $\beta_1, \beta_2$ $(\beta_1 \leqq \beta_2)$ を有し従つて信頼区間は次の三通りの型の何れかになる(3)

1) $\beta_1 \leqq \eta \leqq \beta_2$

2) $\beta_1 > \eta$ or $\beta_2 < \eta$

3) $-\infty < \eta < \infty$

$\eta$ を推定するにあたつては大低の場合 1) の型で得られることが望ましい。 sample value が $h(\eta)$ の $\eta^2$ の係数を正にする様なものでありさえすれば 1) の形になるわけであるから, そういう sample が小であれば方法として有効なものではない。

$$E[\hat{\theta}b' - E(\hat{\theta}b')]^2 = \sigma^2 b(CC')^{-1}b'$$

であるから 1) の型が得られるという條件は

$$\frac{(n-s)(\hat{\theta}b')^2 / E[\hat{\theta}b' - E(\hat{\theta}b')]^2}{n\hat{\sigma}^2/\sigma^2} > t_\alpha^2$$

となる。 $\hat{\sigma}^2$ と $\hat{\theta}b'$ とは独立だからこの左辺の平方根は自由度 $n-s$ の non central t 分布に従う。

この noncentral t を characterize するものは, P. C. Tang によれば,

$$\lambda = \frac{(\theta b')^2}{2\sigma^2 b(CC')^{-1}b'}$$

である。[(4)]　（又は $\phi \equiv \sqrt{\lambda}$ なる記号をTangは用いている。）

今我々の問題にしている確率は mean 0（$\theta b' = 0$）なる帰無仮説を t で test する際の第二種の誤りを犯さぬ確率に相当するので，Tang の表を用いると直ちに求まる。

注意 1)．$k$, $k^*$ を known scalar constants として，

$$\eta(\theta b' + k) = \theta b^{*\prime} + k^*$$

をみたす $\eta$ を推定しようとするときは，Dの中で

$$\begin{pmatrix} (\hat{\theta} b')^2 & b^*\hat{\theta}'\hat{\theta} b' \\ b\hat{\theta}'\hat{\theta} b^{*\prime} & (b^*\hat{\theta}')^2 \end{pmatrix} \text{ を } \begin{pmatrix} (\hat{\theta} b' + k)^2 & (b^*\hat{\theta}' + k^*)(\hat{\theta} b' + k) \\ (\hat{\theta} b' + k)(\hat{\theta} b^{*\prime} + k^*) & (b^*\hat{\theta}' + k^*)^2 \end{pmatrix}$$

で置きかえたものを用いればよい。この場合もやはり，信頼区間の形について同じようなことがいえて non centralt を characterize する $\lambda$ は

$$\lambda = \frac{(\theta b' + k)^2}{2\sigma^2 b(CC')^{-1}b'}$$

となることは明かである。

2)．$x_i$ の分散はすべて $\sigma^2$ としたが，known weight をつけても，少し modify すれば同じ様に出来る。即ち，$x_i$ を $N(x_i; \xi_i, w_i\sigma^2)$ に従うとするとき，（但し $w_i > 0$ known weight）$y_i \equiv x_i/\sqrt{w_i}$ が $N(y_i; \xi_i/\sqrt{w_i}, \sigma^2)$ に従うことから出発すれば，$\xi_i^* \equiv \xi_i/\sqrt{w_i}$ 又 $C$ の $i$ 列を $\sqrt{w_i}$ で割った（$i = 1, 2, \cdots, n$）行列を $C^*$ とすると

$$\xi^* = \theta C^*$$

この $y$ と $C^*$ とを用いればよい。

例 題

i) 二つの正規母集団の mean の比[5]

$x_1, \cdots, x_{n_1}$ は正規母集団 $N(x;\mu_1,\sigma^2)$ からの size $n_1$ の sample $y_1,\cdots,y_{n_2}$ は正規母集団 $N(y;\mu_2,\sigma^2)$ からの size $n_2$ の sample とするとき、$\eta=\mu_1/\mu_2$ を推定すること。

$y_1, y_2, \cdots, y_{n_2}$ を $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \cdots, x_{n_1+n_2}$, $n_1+n_2\equiv n$ とし $\mu_1$ を $\theta_1$, $\mu_2$ を $\theta_2$ とすると

$$C'=\Big(\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix}}_{n_1\text{個}}\quad\underbrace{\begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{matrix}}_{n_2\text{個}}\Big)\qquad b=(0,1)\quad b^*=(1,0)$$

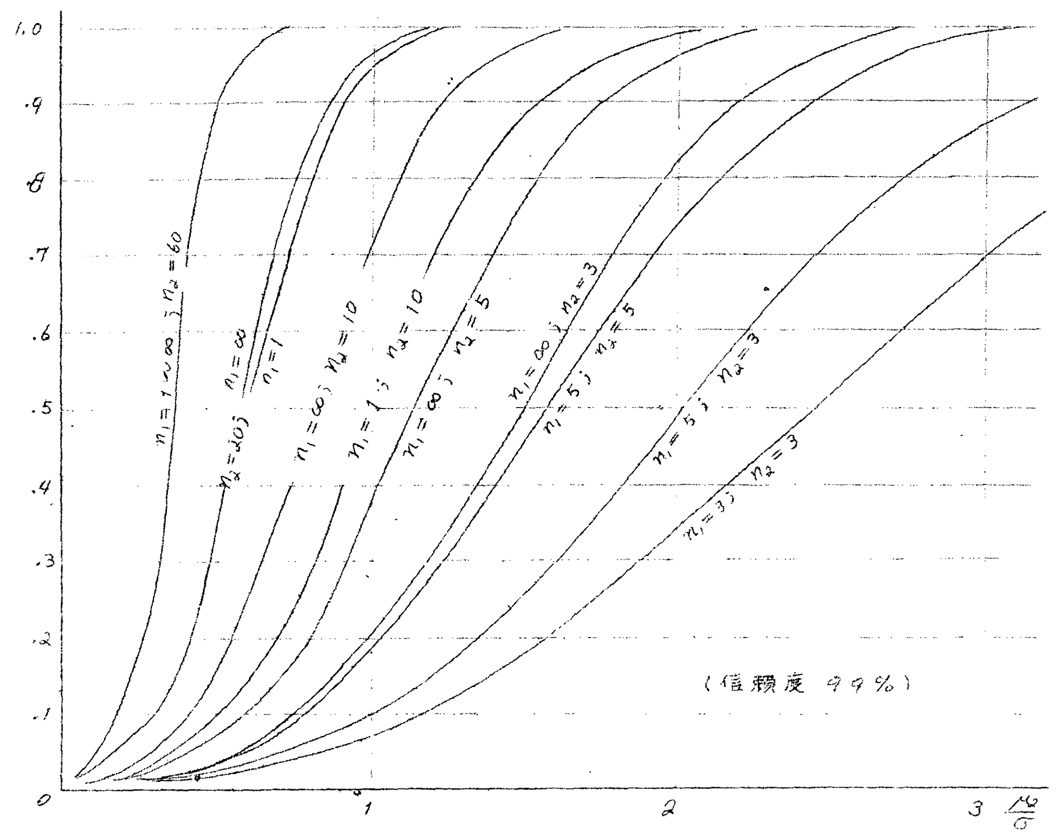
とすれば得られる。$\frac{1}{n_1}\sum_1^{n_1}x_i\equiv\bar{x}$　$\frac{1}{n_2}\sum_{n_1+1}^{n}x_i\equiv\bar{y}$ とすると

$$h(\eta)=\left(\frac{n-2}{n\hat{\sigma}^2}\bar{y}^2-\frac{1}{n_2}t_\alpha^2\right)\eta^2-2\frac{n-2}{n\hat{\sigma}^2}\bar{x}\bar{y}$$
$$+\left(\frac{n-2}{n\hat{\sigma}^2}\bar{x}^2-\frac{1}{n_1}t_\alpha^2\right)$$

（但し　$n\hat{\sigma}^2=\sum_1^{n_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_1^{n_2}(y_i-\bar{y})^2$　）

又　$\lambda=n_2\mu_2^2/(2\sigma^2)$

$\beta_1<\eta<\beta_2$ なる形で得られる確率は図の如し。




ii）二つの回帰直線の交点[6]

Z を確定変数として，$x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}$ は $N(x_i ; \theta_1+\theta_2 Z_i, \sigma^2)$ に，$x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \cdots, x_{n_1+n_2}$ は $N(x_i ; \theta_3+\theta_4 Z_i, \sigma^2)$ に従つて互いに独立に分布する時 交点の Z 坐標

$$\eta = -\frac{\theta_1-\theta_3}{\theta_2-\theta_4}$$

を推定するこ..　$n = n_1 + n_2$　$s = 4$　である。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Z_{n_1+1} & Z_{n_1+2} & \cdots & Z_{n_1+n_2} \end{pmatrix}$$

$$b = (0, 1, 0, -1) \quad b^{*} = (-1, 0, 1, 0)$$
ととればよい。

iii) *Simple normal discrimination problem*[7]

X なる量と Z なる量が一次関係にある時（又はXなる量と一次関係にある様に適当にZを選んだ場合を考えても同じ）数個の *known* な Z に対応する X の測定値を基にして，未知な或る $Z_0$ に対応する X の測定値から，その未知な値 $Z_0$ を推定するという形の問題である。

$Z_i$ を *known* とし，$x_1, x_2, ----, x_{n_1}$ は互いに独立に，$N(x_i ; \theta_1 + \theta_2 \eta, \sigma^2)$ に従うとして

$$\theta_1 + \theta_2 \eta = \theta_3$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad b(0, 1, 0), b^{*} = (-1, 0, 1)$$

として解けばよい。

感想： 個々の場合に論ずるのはあまり多岐にわたるので省略するが，幾つかの計算の結果を通観して言えることは，$\eta$ の分母にくる *parameter* を推定するための *sample* の *size* が，30 位になると $(\theta b)^2$ が $\sigma^2$ より小さくなければ $\beta_1 < \eta < \beta_2$ の型以外のものが得られることは殆んどない。（99%信頼区間の場合）

又 *sample size* が十五六でも，大低の場合間に合うように思われる。（95%信頼区間の場合は尚更目的に適う） 依ってこの方法は *small sample* に対しても一応役立つ方法である。

たも巾をせまくといつた要求には満足に答えないであろう。
それは何も我々がここで取扱っている場合に限ったことでなく，一般に small sample で信頼區間をつくる場合はそういう要求には仲々答えられない。 先に角我々の場合，巾は sample size のみならず，母数 $\theta b'/\sigma^2$ に依存することを附言して置く。

§. 2. 多変数の正規分布に基礎を置くもの。

多変数の場合 Student の $t$ を或る場合には，Hotteling の Generalized Student's ratio で置きかえることにより一変数の場合と平行して，方法がみつかるわけであるが，多変数の正規理論は一変数のそれ程 popular でないから，必要な事柄を一通り挙げて置く。 以下の諸定理は，$t$ を形式的につくるのに役立つから，我々の場合のみならず，一般に應用は廣いものと思う。即ち多変数の場合も，機械的に $t$ を間違いなくつくるための memo である。

定理 i） $x' \equiv (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k)$ なる変量の $k$ vector が，$k$ 変数の正規分布，$N_k(0, \Phi)$

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} (\det \Phi)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} x' \Phi x\right\}$$

に従うとき，A を constant $s, k$ matrix $(s \leqq k)$ rank$A = s$，$a$ を constant $s$ 縦 vector とし $y \equiv Ax + a$ とすれば $y$ は $N_s(y\,;\,a, (A\Phi^{-1}A')^{-1})$ 即ち

$$f(y) = (2\pi)^{-\frac{s}{2}} \left[\det(A\Phi^{-1}A')\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y-a)'(A\Phi^{-1}A')^{-1}(y-a)\right\}$$

に従う。

定理 ii)　$x$ が $N_k(x; 0, \Phi)$ に従うとき，A, B を symmetric constant $k, k$-matrices $a, b$ を constant 縦 $k$ vector とする時，$x'Ax$ と $x'Bx$，$a'x$ と $b'x$，及び，$a'x$ と $x'Ax$ が独立なるための必要且十分条件は夫々 $A\Phi B = 0$　$a'\Phi b = 0$　及び　$A\Phi a = 0$　である。[8]

定理 iii)　$x_i' \equiv (x_{1i}, x_{2i}, \text{----}, x_{ki})$ が互いに独立に $N(x_i; 0, \Phi)$ に従うとき X を $X \equiv (x_1, x_2, \text{----}, x_n)$ なる変量の $k\,n$ matrix $(n > k)$ とすれば $XX'$ は Wishart 分布 $W_{n,k}(XX'; \Phi)$

$$f(XX') = const\,(\det\Phi)^{\frac{n}{2}}\left(\det(XX')\right)^{\frac{n-k-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}XX':\Phi\right\}$$

に従う。[9]　ここで constant は $\Phi$ に independent，: は二つの matrix の間の double summation の記号[10]である。

簡単のために $f(XX')$ と書いたが，独立な argument は勿論 $\frac{k(k+1)}{2}$ 個である。

定理 iv)　H を rank $n-r$ の idenpotent symmetric な constant $n, n$ matrix とする時，$XHX'$ は $W_{n-r,k}(XHX'; \Phi)$ に従つて分布する。

證明.　X の同時分布は，

$$f(X) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\det\Phi)^{\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}XX':\Phi\right\}$$

である。　P を orthogonal constant $n\,n$ matrix として，$XP \equiv Y$ とした時 Y の分布も同じであることに注目すれば，一般に A を symmetric constant $n\,n$ matrix とし A の eigenvalue を $\alpha_1, \alpha_2, \text{-----}, \alpha_n$ とすれば $XAX'$ の moment generating function $\varphi_1(T) \equiv E[\exp\{XAX':T\}]$ は定理(i)を用

いれば

$$\varphi_1(T) = \frac{(\det \Sigma)^{\frac{n}{2}}}{\left[\prod_{i=1}^{n} \det(\Sigma - 2\alpha_i T)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

であることがわかる。（Tは勿論 *symmetric*，従って $\varphi_1(T)$ の *argument* は $\frac{k(k+1)}{2}$ 個である）又 $W_{m,k}(\Sigma)$ の *moment generating function* $\varphi_2(T)$ は

$$\varphi_2(T) = \int const\ (\det \Sigma)^{\frac{m}{2}} (\det M)^{\frac{m-k-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} M:(\Sigma - 2T)\right\} dM$$

（但し $\int dM$ はMの要素のうち $\frac{k(k+1)}{2}$ 個の独立 *argument* についての $\frac{k(k+1)}{2}$ 次元空間全体にわたる $\frac{k(k+1)}{2}$ 重積分の意）

$$= \frac{(\det \Sigma)^{\frac{m}{2}}}{\left[\det(\Sigma - 2T)\right]^{\frac{m}{2}}}$$ であるから証明出来る。(11)

定理 V） $x$ を $N(x;\ 0,\ \Sigma)$ に従う $k$ 縦 *vector variate*，M を $W_{n,k}(M:\Sigma)$ に従う *symmetric* $kk$ *matrix variate*（*measure* 0 の集合をのぞいて，M は *positive matrix*）とし，$x$ とMとは互いに独立に分布するものとする。

$$t^2 \equiv n x' M^{-1} x$$

とする時，$t$ の分布は，（確率密度）(12)

$$f(t) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(t^2/n\right)^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{n}\left(1+t^2/n\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

である。 この $t$ が *generalized Student's ratio* である。

証明． $x$ と M との同時分布は

$$f(x, M) = const(\det \Phi)^{\frac{n+1}{2}}(\det M)^{\frac{n-k-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(xx' + M) : \Phi\right\}$$

$\Phi^{\frac{1}{2}}x = Z$ 　 $\Phi^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}} = N$ とする。（positive symmetric matrix $A$ に対しては $(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$ となる様な positive な $A^{\frac{1}{2}}$ が唯一つ存在し，それも亦 symmetric である。）又一般に

$$(ABC) : D = (A'DC') : B$$

なる関係が成立つことを利用すれば

$$\left|\frac{\partial x}{\partial Z}\right| = (\det \Phi)^{-\frac{1}{2}}$$

から Z と $NN'$ との同時分布は

$$f(Z, NN') = Const(\det NN')^{\frac{n-k-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(ZZ' + NN') : I\right\}$$

ここで I は $k$ $k$ 単位 matrix をあらわす。更に $(NN')^{-\frac{1}{2}}Z = w$ とすると $w$ と $NN'$ の分布は

$$f(w, NN') = const(\det NN')^{\frac{n-k}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(ww' + I) : NN'\right\}$$

Wishart 分布の知識から $A, X$ を任意の symmetric positive $k, k$ 　　　 matrix，$\alpha$ を $\alpha > k$ なる任意の整数とすると，

$$\int \det A^{\frac{\alpha}{2}} \det X^{\frac{\alpha-k-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} A : X\right\} dX = (A\text{に無関係な}Const)$$

なることを知っている。依って，上の $f(w, NN')$ を $NN'$ につき積分してしまうと

$$f(w) = const\left\{\det(ww' + I)\right\}^{-\frac{n+1}{2}}$$

となる。又 $ww'$ を diagonal form にする orthogonal matrix を $P(w)$ とすると，$ww'$ の rank は 1 であるから適当な $P(w)$ によつて，$P(w)ww'P'(w)$ が対角線上の唯一つ

の element だけが 0 と異り他は 0 である様な matrix となる。

$P(w)w$ は components のうち一つだけ 0 と異り他は 0 であるが，これを scalar と考えると $q^2 \equiv x'M^{-1}x$ とすると $w'w = q^2$ から $P(w) = q$ 又は $-q$ である。 $w$ なる変数の組を $q$ と $w^*$ なる変数の組にうつす一対一変換があることは明かで，$q$ と $w^*$ の同時分布は

$$f(q, w^*) = const\,(q^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} \left| \frac{\partial w}{\partial(q, w^*)} \right|$$

これを $w^*$ について積分してしまうと

$$f(q) = (q^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} \psi(q)$$

$\psi(q)$ は半径 $q$ の $k$ 次元球の表面積に比例するから，$const \times q^{k-1}$ である。 或いは，$\alpha$ を 0 ならざる任意の scalar constant として，$\alpha x = y$ とすると $(\alpha q)^2 = y'M^{-1}y$ $y$ と $M$ との同時分布から出発して $f(\alpha q) = \alpha^{-k}(q^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\psi(\alpha q)$

$$f(\alpha q) = (q^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} \psi(q) \frac{1}{\alpha}$$

であるこの二つから $q = 1$ とおけば

$\alpha^{-(k-1)}\psi(\alpha) = \psi(1)$ これは任意の $\alpha$ に対して成立つから $\psi(q) = \psi(1) q^{k-1}$ が成立つ。

上で $\alpha$ として $\sqrt{n}$ と置けば，所要の $t$ の分布が得られる．const は初等積分で求まる。

定理 vi) $M$ を $W_{n,k}(M; \Phi)$ に従う symmetric $k,k$ matrix variate ( measure 0 の集合をのぞいて positive とし $a$ を 0 ならざる constant $k$ 横 vector とする。

すると $aMa'/(a\Phi^{-1}a')$ は自由度 $n$ の $\chi^2$ 分布に従う。

証明. $aMa'/(a\Phi^{-1}a')$ の moment generating function を求めてみると，

$$\varphi(t)=\int const\,(\det\Phi)^{\frac{n}{2}}(\det M)^{\frac{n-k-1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}M:\Phi+\frac{aMa'}{(a\Phi^{-1}a')}t\right\}dM$$

ここで

$$\frac{aMa'}{a\Phi^{-1}a'}t=M:\frac{a'a}{a\Phi^{-1}a}t$$ とかけるから上式の

$$\exp\{\quad\}\text{ は }\exp\left\{-\frac{1}{2}M:\left(\Phi-2t\frac{a'a}{a\Phi^{-1}a'}\right)\right\}$$

と書ける。 $W_{n,k}(M;\Phi)$ の知識により直ちに

$$\varphi(t)=(\det\Phi)^{\frac{n}{2}}\left[\det\left(\Phi-2t\frac{a'a}{a\Phi^{-1}a'}\right)\right]^{-\frac{n}{2}}$$

となる。 ところが簡単な計算の結果

$$\det\left(\Phi-2t\frac{a'a}{a\Phi^{-1}a'}\right)=(1-2t)\det\Phi$$

となることがわかるから，$\varphi(t)=(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$ となる。
これは自由度 $n$ の $\chi^2$ 分布の m.g.f. である。

定理 Vii) $M$ を $W_{n,k}(M;\Phi)$ に従う symmetric matrix variate とし，$A$ を rank 1 の symmetric constant $k,k$ matrix とすると $(M:A)/(\Phi^{-1}:A)$ は自由度 $n$ の $\chi^2$ 分布に従う。

証明 前定理を少し一般化したものであつて

$$\det\{\Phi-2tA/(\Phi^{-1}:A)\}=(1-2t)\det\Phi$$

なることを注意すればよい。 $A$ の rank が 1 であることを用いればこの恒等式の検証は容易である。

定理 VIII)　定理 VI) に於て $A$ を rank $s$ の constant の $s, k$ matrix $(s \leqq k)$ とすると $AMA'$ は、

$W_{n,s}(AMA';\ A\Phi^{-1}A'^{-1})$ に従う。

証明　$AMA'$ の moment generating function は、

$$\varphi(T) = \int const\,(\det\Phi)^{\frac{n}{2}}(\det M)^{\frac{n-k-1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}M:\Phi + AMA':T\right\}dM$$

$$= \frac{(\det\Phi)^{\frac{n}{2}}}{\{\det(\Phi - 2A'TA)\}^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\{\det(I - 2\Phi^{-1}A'TA)\}^{\frac{n}{2}}}$$

ここで $I$ は単位 $k, k$ matrix をあらわす。

ところで、$J$ を単位 $s, s$ matrix　$B$ を $k, s$ matrix とすれば $A, B$ の rank 如何にかゝわらず

$$\det(I - BA) = \det(J - AB)$$

なる関係があるから、

$$\det(I - 2\Phi^{-1}A'TA) = \det(J - 2A\Phi^{-1}A'T)$$

ところが定理では rank $A = s \leqq k$ としてあるから

$$\varphi(T) = \frac{\{\det(A\Phi^{-1}A')^{-1}\}^{\frac{n}{2}}}{\det\{(A\Phi^{-1}A')^{-1} - 2T\}^{\frac{n}{2}}}$$

これは $W_{n,s}\{(A\Phi^{-1}A')^{-1}\}$ の moment generating function である。

以上の準備により本論に入る。

$x_i' \equiv (x_{1i}, x_{2i}, \cdots\cdots, x_{ki})\ (i = 1, 2, \cdots\cdots n)$ は夫々 $k$ 変数の正規分布 $N(x_i;\ \xi_i, \Phi)$ に従って互いに独立に分布する vector variates とする。即ち

$$X \equiv (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\quad \Xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_n)$$

とすると　$E(X) = \Xi$

$$E[(X - \Xi)(X - \Xi')] = n\Phi^{-1}$$

が成立つ。$\Theta$ を unknown parameters の $ks$ matrix ($s < n-k$) として $\Xi = \Theta C$ がみたされているものとする。

茲に $C$ は known constants の $sn$ matrix で $\mathrm{rank}\, C = s$ とする。

問題を考察する前に次のことを注意しておこう。

$$\hat{\Theta} \equiv X C'(CC')^{-1}$$

$$\hat{\Phi}^{-1} \equiv \frac{1}{n} X(I - C'(CC')^{-1}C)X' \quad (I \text{ は単位 } nn \text{ matrix})$$

とすると(12)

$$E[\hat{\Theta}] = \Theta$$

又 $X(I - C'(CC')^{-1}C)X' = (X - \Xi)(I - C'(CC')^{-1}C)(X - \Xi)'$

なることに注意すれは，定理 iv) により $n\hat{\Phi}^{-1}$ は，$W_{n-s,k}(n\hat{\Phi}^{-1}; \Phi)$ に従うことがわかる。更に定理 ii) により $\hat{\Theta}$ と $n\hat{\Phi}^{-1}$ とは独立である。

さて簡単な場合から始めよう。$s=1$ のとき即ち $\Theta$ が一つの縦 vector $\theta$ である場合 $d, d^*$ を known constant の $k$-横 vector として

$$\eta d\theta = d^*\theta$$

をみたす scalar $\eta$ を推定する場合である。

この場合には，$C$ は横 vector だからこれを $c$ とすると，

$$t \equiv \sqrt{n-1}\sqrt{\frac{(cc')}{n}}\ \frac{(\eta d - d^*)\hat{\theta}}{\{(\eta d - d^*)\hat{\Phi}^{-1}(\eta d - d^*)'\}^{\frac{1}{2}}}$$

が，自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従うことが定理 vi) からわかる。つまり $(\eta d - d^*)\hat{\theta}$ は $N(0, (cc')^{-1}\{(\eta d - d^*)\Phi^{-1}(\eta d - d^*)'\})$ に従うからである。このtをつかって信頼区間を求めればよい。

§1. の場合と同じ事情である。やはり

$$\frac{(n-1)(cc')}{n}(d\hat{\theta})^2 > t_\alpha^2\, d\hat{\Phi}^{-1}d'$$

であることが $\eta$ の信頼区間が $\beta_1 \leqq \eta \leqq \beta_2$ なる形になるための必要十分條件である。 又

$\dfrac{\sqrt{(n-1)(CC')}}{\sqrt{n d \Phi^{-1} d'}}(d\hat{\theta})$ は自由度 $n-1$ の noncentral $t$ に従いこれを characterize する $\lambda$ は,

$$\lambda = \frac{(d\theta)^2}{2(CC')^{-1} d \Phi^{-1} d'}$$

である。 應用例として, 二變數正規分布

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

からの標本 $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ ------ $(x_n, y_n)$ を基にして, $\mu_1/\mu_2$ を推定すること, これは

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (= \underbrace{(1, 1, \cdots, 1)}_{n\text{個}})$$

$d = (0, 1)$ $\quad d^* = (1, 0)$ の場合である

この例については, 阪大小川先生が実際に即して研究なさつている。

次に $s > 1$ のとき, $b$, $b^*$ を known constants の $s$ vector として

$$\eta d \circledH b' = d^* \circledH b^{*\prime}$$

をみたす $\eta$ を推定することを考えよう。 この場合

$$\eta d \hat{\circledH} b' - d^* \hat{\circledH} b^{*\prime} \text{ の分散は}$$

$$\eta^2 d \Phi^{-1} d' b (CC')^{-1} b' - 2\eta d \Phi d^{*\prime} b (CC') b^{*\prime} + d^* \Phi^{-1} d^{*\prime} b^* (CC')^{-1} b^{*\prime}$$

$$= \{(\eta b' d - b^{*\prime} d^*) \Phi^{-1} (\eta b' d - b^{*\prime} d^*)'\} : (CC')^{-1}$$

$$= \Phi^{-1}: \{ (\eta d' b - d^{*} b^{*})(CC')^{-1}(\eta b' d - b^{*\prime} d) \}$$

と計算されるから，最後の式の｛　｝の中の行列の rank が 1 であることに注目すれば定理 VII) により

$$t \equiv \frac{\sqrt{n-s}\,(\eta d \hat{H} b' - d^{*} \hat{H} b^{*\prime})}{\sqrt{n \hat{\Phi}^{-1}: \{ (\eta d' b - d^{*\prime} b^{*})(CC')^{-1}(\eta b' d - b^{*\prime} d^{*}) \}}}$$

として自由度 $n-s$ の Student の $t$ をつくることが出来る。

この場合も $\eta$ に関する二次方程式を解いて信頼限界を得るし，$\beta_1 \leqq \eta \leqq \beta_2$ なる形に得られるための條件は

$$(n-s)(d \hat{H} b')^2 > t_\alpha^2\, n\, \Phi^{-1}: \{ d' b (CC')^{-1} b' d \}$$

である。例えば $x = \theta_{11} + \theta_{12} Z \quad y = \theta_{21} + \theta_{22} Z$

なる関係を假定する。Z を確定変数として $n$ 個の Z の値 $(Z_1, \cdots, Z_n)$ に対する測定値の組 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ から交点

$$\eta = \frac{\theta_{11} - \theta_{21}}{\theta_{22} - \theta_{12}}$$

を推定することを考えよう。Z の異る値に対するものは互に独立であると假定し，Z の同じ値に対する $x$ と $y$ との測定量は独立でないとし，すべての Z に対して同じ分散 matrix をもつ二変数の正規分布を假定しよう。その時は

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_n \end{pmatrix}$$

$$d = (-1, 1) \quad d^{*} = (1, -1) \quad b = (0, 1) \quad b^{*} = (1, 0)$$

として自由度 $n-2$ の $t$ をつくればよい。

$$\frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x} \quad \frac{1}{n}\sum Z_i = \bar{Z} \quad \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})(Z_i - \bar{Z}) = cov(x, Z)$$

$\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = var(x)$ 等とあらわすと

$$(n-2)\left\{(\bar{x}-\bar{y})+(\eta-\bar{z})\left(\frac{cov(x,z)-cov(y,z)}{var(z)}\right)\right\}^2$$

$$\leqq t_\alpha^2\left\{(\eta+\bar{z})^2+var(z)\right\}\left\{\frac{var(x)-2cov(x,y)+var(y)}{var(z)}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{cov(x,z)-cov(y,z)}{var(z)}\right)^2\right\}$$

によつて$\eta$の信頼区間が得られる。　この場合

$$(n-2-t_\alpha^2)(cov(x,z)-cov(y,z))^2$$

$$>t_\alpha^2\, var(z)(var(x)-2cov(x,y)+var(y))$$

であれば，信頼区間は $\beta_1 \leqq \eta \leqq \beta_2$ の型になる。

次に $D, D^*$ を known constants の $r, k$ matrices とし

$$\eta D \textcircled{H} b' = D^* \textcircled{H} b^{*\prime}$$

をみたす unknown な scalar 量の $\eta$ の信頼区間をつくれないものであろうか？　残念ながらまだわからない。　それは次の様な事情による。　即ち

$$\eta D\hat{\textcircled{H}} b' - D^*\hat{\textcircled{H}} b^{*\prime}$$

は一般に平均が $0$ の $r$ 変数正規分布に従う量であるが，その分散 matrix は，計算すると

$$\eta^2 D\Phi^{-1}D' b(CC')^{-1}b' - \eta D\Phi^{-1}D^{*\prime} b(CC')^{-1}b^{*\prime}$$

$$-\eta D^*\Phi^{-1}D' b^*(CC')^{-1}b' - D^*\Phi^{-1}D^{*\prime}b^*(CC')^{-1}b^{*\prime}$$

となる。　この逆 matrix を parameter にもつ Wishart 分布に従う量を sample からつくることがむづかしいので，Student's ratio が出来ないのである。

然し次の様な場合には簡単につくれる。　即ち $D=D^*$ とか，$b=b^*$ とかの場合である。　先づ $D=D^*$ の場合

rank $D = r$ とすると，

$$\eta D\hat{\textcircled{H}}b' - D\hat{\textcircled{H}}b^{*\prime} \text{ の分散行列は}$$

$$D\Phi^{-1}D'\{\eta^2 b(CC')^{-1}b' - 2\eta b(CC')^{-1}b^{*\prime} + b^*(CC')^{-1}b^{*\prime}\}$$

となる。 上の { } の中を$\mathcal{K}$を書くと，この量は，

$N_r(0, (\mathcal{K}D\Phi^{-1}D')^{-1})$ に従う。 定理 viii) により$\mathcal{K}D(n\hat{\Phi}^{-1})D'$ は $W_{n-s,r}(\mathcal{K}D(n\hat{\Phi}^{-1})D' ; (\mathcal{K}D\Phi^{-1}D')^{-1})$ に従う。

しかも $\hat{\Phi}^{-1}$ と $\hat{\textcircled{H}}$ とは独立だから，定理 V) により

$$t \equiv \sqrt{\frac{n-s}{\mathcal{K}}(\eta D\hat{\textcircled{H}}b' - D\hat{\textcircled{H}}b^{*\prime})'(Dn\hat{\Phi}^{-1}D')^{-1}(\eta D\hat{\textcircled{H}}b' - D\hat{\textcircled{H}}b^{*\prime})}$$

は Hotteling の $t_{n-s,r}$ に従う。 故に $t_{n-s,r}$ の $100\alpha$ % 点 $t_\alpha$ を用いて $\eta$ の信頼区間をつくることが出来る。 やはり $\eta$ の二次の不等式をとくことになるので簡單である。或いは，

$$\text{一般に} \quad \frac{p+1-q}{pq} t^2_{p.q}$$

が自由度 $q$. $p+1-q$ のF分布に従うことを利用して，自由度 $r$. $n-s+1-r$ のF分布の $100\alpha$ % 点 $F_\alpha$ を用いて

$$G \equiv (n-s+1-r)\begin{pmatrix} b\hat{\textcircled{H}}'D'(Dn\hat{\Phi}^{-1}D')^{-1}D\hat{\textcircled{H}}b' & b^*\hat{\textcircled{H}}'D'(Dn\hat{\Phi}^{-1}D')^{-1}D\hat{\textcircled{H}}b' \\ b\hat{\textcircled{H}}'D'(Dn\hat{\Phi}^{-1}D')^{-1}D\hat{\textcircled{H}}b^{*\prime} & b^*\hat{\textcircled{H}}'D'(Dn\hat{\Phi}^{-1}D')^{-1}D\hat{\textcircled{H}}b^{*\prime} \end{pmatrix}$$

$$- F_\alpha\begin{pmatrix} b(CC')^{-1}b' & b^*(CC')^{-1}b' \\ b^*(CC')^{-1}b' & b^*(CC')^{-1}b^{*\prime} \end{pmatrix}$$

$h(\eta) \equiv (\eta, -1)G(\eta, -1)'$ として

$h(\eta) \leqq 0$ なる範囲を求めるとこれが $100(1-\alpha)$ % 信頼区間になる。 特に，Dが $k$, $k$ 單位 matrix の時に応用はひろい。

例えば §1. 例3 の拡張がある。各觀測が $k$ 個の components $(x_1, x_2, \text{----}, x_k)$ から成り，これがZを確定変数として平均 $\alpha_1+\beta_1 Z$, $\alpha_2+\beta_2 Z$, -----, $\alpha_k+\beta_k Z$ の $k$ 変数 normal distri -

bution に従う。　観測の sample $(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ki})$
$(i=1, 2, \cdots, n)$ にもとづき，$\alpha$ 及び $\beta$ の estimate が与えられた時，一つの観測 $(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{k0})$ に対する $Z_0$ を estimate しようとする場合は，

$$Ⓗ = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{10} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & x_{20} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} & x_{k0} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = (0,\ 1,\ 0) \quad b^* = (-1,\ 0,\ 1)$$

と置いて，$D$, $D^*$ は単位 matrix として解けばよい。

次に $b = b^*$ の場合，$\eta D \hat{Ⓗ} b' - D^* \hat{Ⓗ} b'$ の分散行列は，

$$b(CC')^{-1}b'(\eta D - D^*)\Phi^{-1}(\eta D - D^*)'$$

となるから $\eta D - D^*$ の rank が $r$ のときは

$$t = \sqrt{\frac{n-s}{b(CC')^{-1}b'}\, b\hat{Ⓗ}'(\eta D - D^*)'\{(\eta D - D^*)n\hat{\Phi}(\eta D - D^*)'\}^{-1}(\eta D - D^*)\hat{Ⓗ}b'}$$

が $t_{n-s, r}$ に従うことを用いればよい。　しかし一般には未知数 $\eta$ を含む行列の逆行列を計算せねばならないから面倒である。

又 $\eta D - D^*$ が non singular の時は始めから問題にならない。　又 $D$, $D^*$ $b$, $b^*$ が異っていても $b(CC')^{-1}b^{*\prime} = 0$ の時等にはとけるが応用例もないから止める。

次に $d$, $d^*$ を known constants の $k$ vectors $B$, $B^*$ を known constants の $r$, $s$ matrices $(r \leq s)$ とするとき

$$\eta d Ⓗ B' = d^* Ⓗ B^{*\prime}$$

をみたす scalar $\eta$ を推定したい。

この場合も一般には困難である。しかし $B=B^*$ で rank $B=r$ の時は簡単で，$\eta d\hat{H}B'-d^*\hat{H}B'$ は平均 0，分散行列が，$(\eta d-d^*)\Phi^{-1}(\eta d-d^*)'B(CC')^{-1}B'$ の $r$ 変数正規分布に従う。故に

$$\frac{(\eta d\hat{H}B'-d^*\hat{H}B')(B(CC')^{-1}B')^{-1}(\eta d\hat{H}B'-d^*\hat{H}B')'}{(\eta d-d^*)\Phi^{-1}(\eta d-d^*)'}$$

は自由度 $r$ の $\chi^2$ 分布に従う。[13] 又一方定理 VI) により

$$\frac{(\eta d-d^*)(n\hat{\Phi}^{-1})(\eta d-d^*)'}{(\eta d-d^*)\Phi^{-1}(\eta d-d^*)'}$$

は自由度 $n-s$ の $\chi^2$ 分布に従う。このニつは互いに独立だから

$$F=\frac{(n-s)(\eta d-d^*)\hat{H}B'(B(CC')^{-1}B')^{-1}B\hat{H}'(\eta d-d^*)'}{r(\eta d-d^*)(n\hat{\Phi}^{-1})(\eta d-d^*)'}$$

が自由度，$r$, $n-s$ の F 分布に従うことを用いればよい。

これは $\eta$ の二次式となる。

$d=d^*$ rank $(\eta B-B^*)=r$ の時も同様に

$$F=\frac{(n-s)d\hat{H}(\eta B-B^*)'\{(\eta B-B^*)(CC')^{-1}(\eta B-B^*)'\}^{-1}(\eta B-B^*)\hat{H}'d'}{r\cdot d(n\hat{\Phi}^{-1})d'}$$

が自由度 $r$, $n-s$ の F に従うことを使って求まるが，一般に未知数 $\eta$ を含む行列の逆を計算しなければならないので厄介である。

§3. 今迄推定すべき $\eta$ を scalar として来たが，$\eta \equiv (\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots, \eta_p)$ を unknown constant の $p$ vector とし §1 の假定の下で更に B を known constants の $p, s$ matrix として

$$\eta B\theta' = b^*\theta'$$

をみたす $\eta$ の Components の（$p$ 次元空間に於ける）信頼領域を求める場合も全く同様である。

即ち，

$$t \equiv \frac{(\eta B\hat{\theta}' - b^*\hat{\theta}')\sqrt{n-s}}{\left[n\hat{\sigma}^2\left\{\eta B(CC')^{-1}B'\eta' - 2\eta B(CC')^{-1}b^{*\prime} + b^*(CC')^{-1}b^{*\prime}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

が自由度 $n-s$ の $t$ 分布に従うことを用いればよい。　二つの回帰超平面の交りを推定する場合とか Discrimination を行う際 $\alpha+\beta Z$ という一次形式を用いる代りに，$\alpha_0+\alpha_1 Z_1+\alpha_2 Z_2+\cdots\cdots+\alpha_p Z_p$ なる形を用いる場合とかがこれである。

例えば §1 bis i）の例に於て $X = \alpha+\beta Z$ のかわりに $X = \alpha+\beta U+\gamma V$ なる関係を假定しよう。

既知の $(u_i, v_i)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots n_1)$ に対応する測定値，$x_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n_1)$ と未知の $(u_0, v_0)$ に対応する測定値 $x_i$ $(i=n_1+1, n_1+2, \cdots\cdots, n_1+n_2)$ とから $(u_0, v_0)$ の信頼領域を求めるのが問題である。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_1 & v_2 & \cdots\cdots & v_{n_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & \underbrace{1 & \cdots & 1}_{n_2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b^* = (-1, 0, 0, 1)$$

として解いてみる。

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\Delta}\{cov(x,u)\,var(v) - cov(x,v)\,cov(u,v)\}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{\Delta}\{cov(x,v)\,var(u) - cov(x,u)\,cov(u,v)\}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{x} - \hat{\beta}\bar{u} - \hat{\gamma}\bar{v}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}u_i - \hat{\gamma}v_i)^2 + \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(x'_j - \bar{x}')^2$$

但し　$\bar{x} \equiv \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i$　　$\bar{u} \equiv \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} u_i$　等

$x'_j \equiv x_{n_1+j}$　　$\bar{x}' \equiv \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} x'_j$

$var(u) \equiv \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(u_i - \bar{u})^2$　$cov(x,u) = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})(u_i - \bar{u})$

等及び　$\Delta \equiv var(u)\,var(v) - (cov(u,v))^2$

とす。

信頼領域は　$u, v$　平面で

$$\pi_1 u^2 + 2\pi_2 uv + \pi_3 v^2 + 2\pi_4 u + 2\pi_5 v + \pi_6 \leqq 0$$

但し，$\pi_1 = (n-4)\hat{\beta}^2 - \frac{n\hat{\sigma}^2}{\Delta} n_1 t_\alpha^2\ var(v)$

$\pi_2 = (n-4)\hat{\beta}\hat{\gamma} + \frac{n\hat{\sigma}^2}{\Delta} n_1 t_\alpha^2\ cov(u,v)$

$\pi_3 = (n-4)\hat{\gamma}^2 - \frac{n\hat{\sigma}^2}{\Delta} n_1 t_\alpha^2\ var(u)$

$\pi_4 = (n-4)(\hat{\alpha} - \bar{x}')\hat{\beta} - \frac{n\hat{\sigma}^2}{\Delta} n_1 t_\alpha^2 \{\bar{u}\,var(v) - \bar{v}\,cov(u,v)\}$

$\pi_5 = (n-4)(\hat{\alpha} - \bar{x}')\hat{\gamma} - \frac{n\hat{\sigma}^2}{\Delta} n_1 t_\alpha \{\bar{v}\,var(u) - \bar{u}\,cov(u,v)\}$

$\pi_6 = (n-4)(\hat{\alpha} - \bar{x}')^2 - n\hat{\sigma}^2 t_\alpha^2 \Big[\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{\Delta}\{n_1\bar{u}^2 var(v)$

$+ n_1\bar{v}^2 var(u) - n_1\bar{u}\bar{v}\,cov(u,v)\}\Big]$

（こゝで　$n \equiv n_1 + n_2$　）

と與えられる。 この領域はせいぜい双曲線の中側といつた形で(悪くゆくと $u, v$ 平面全体にわたつたりするが)決して楕円の中側といつた都合のよい形にはならない。

もつと *Discrimination* の目的にかなえるためには,

$$\mathbb{X}_1 = \alpha_1 + \beta_1 \mathbb{U} + \gamma_1 \mathbb{V}$$

$$\mathbb{X}_2 = \alpha_2 + \beta_2 \mathbb{U} + \gamma_2 \mathbb{V}$$

といつた具合な *linearly independent* な二つの関係が用いられることが望ましい。 この場合同じ $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ に対する $\mathbb{X}_1$ と $\mathbb{X}_2$ との観測値の組が独立でなくても

$$\eta(u_0, v_0) \qquad \textcircled{H} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b^* = (-1, 0, 0, 1)$ として, 二変数正規分布を假定し,

$$\eta B \textcircled{H}' = b^* \textcircled{H}'$$

をみたす $\eta$ の *components* の信頼領域をつくればよい。
$\eta$ が *vector* であることを注意しながら §2 の方法で $t_{n-2,\alpha}$ をつくる事が出来る。 その他 §2 の種々の場合に同様に出来ることもあるが, *Methodik* に於て新しい事を用意しているわけでなく, どれ程応用があるかも疑問であまりに遊戯的になるからこの位で止めておく。

◎ 註と参考書 ◎

（1） この$\hat{\theta}$及び$\hat{\sigma}^2$は尤度

$$\log\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\xi)(x-\xi)'\right\}\right]$$

を最大にするものである。

（2） 有名な Craig. の定理. Ann. of the Institute of Math. St. Vol. 1. No. 1. 1949 に Matusita, Ogawa, Sakamoto 三氏の論文がある。

（3） この場合の信頼区間の意味，及び $\beta_1 \leqq \eta \leqq \beta_2$ の形で得られるための條件については，樋口伊佐夫"或る Discrimination について"講究録第六巻第九号にくわしく説明した。

（4） P. C. Tang : The power function of the Analysis of variance test with tables and illustrations of their use. Stat. Research Memoirs vol. II. （1938）講究録第五巻第三号（24年6月）に小川先生の紹介がある。

（5） R. A. Fisher : Statistical Methods for Research Workers に取扱われている。

（6） （5）にある。拙論（3）に於ては一般的見透しなく無意識に之を用いてしまった。 尚，林知己夫氏が Sampling の立場から新しく論じて居られる。（講究録第六巻十一号）

（7） A. Mood : Introduction to the theory of Statistics P299

（8） 上記（2）。参照 Nabeya 氏の elegant proof がある。

（9） G. Rash : A Functional Equation for Wishart Distribution. The Annals of Math. St. Vol 19 No2 June 1948. 小川先生の御紹介（講究録五巻一号24年

4月1日)がある。

(10)　$A=\{a_{ij}\}$　$B=\{b_{ij}\}$ とするとき $\sum_i\sum_j a_{ij}b_{ij}$ を意味する。　勿論，$A:B=B:A$　又 $(A+B):C=A:C+B:C$

この記号は Chapman & Cowling : The mathematical theory of non-uniform Gases によった。

(11)　尚 $k$ 変数の場合の Chochran の定理も容易に導かれるが，定理をそういう形に表現する必要はない。

(12)　この $\hat{H}$，$\hat{\Phi}^{-1}$ も (1)と同じく　尤度

$$\log\left[\left(\frac{\sqrt{\det\Phi}}{\sqrt{2\pi}^{k}}\right)^{n}\exp\left(-\frac{1}{2}\{(X-\Xi)(X-\Xi)'\}:\Phi\right)\right]$$

を最大ならしめるものである。

(13)　一般に　$x\equiv(x_1, x_2, \text{----}, x_k)$ が $k$ 変数正規分布 $N_k(0;\Phi)$ に従うなら　$x\Phi x'$ は 自由度 $k$ の $\chi^2$ 分布に従う。

(26年10月10日受付)

# PRI LA TAKSO DE RATIO DE PARAMETROJ EL NORMALAJ DISTRIBUOJ

Isao Higuĉi


## Resumo

Inter diversaj praktikaj problemoj de statistika dedukto, oni trovas ofte problemojn, kiuj estas nenio alia, ol problemoj, kiel taksi ration de liniaj formoj de ekspektoj de populacioj, el kiuj la observitaroj estas eltirita. En tiu ĉi traktato ni konsideras nur la kazon, kie la distribuoj de populacioj estas unu-aŭ plurvariantaj normalaj.

Ni intencas laŭ Fishera metodo konstrui, kun helpo de Studenta ratio kaj de ĝeneraligita Studenta ratio de Hotteling, tre komunajn formulojn por kalkuli la intervalan taksilon de ratio en demando.

Okaze de tio ni trovas, en simplaj kazoj, la probablon, ke la intervalo estas kalkulota kiel vera intervalo. Oni povas kalkuli la probablon el tabelo de necentra t-distribuo.