

## SYNTHESIS OF REGULATORS OF PULSE SYSTEMS OF AUTOMATIC CONTROL USING THE NUMERICAL METHOD

V. Goncharov<sup>1</sup>, Doctor of Technical sciences, Full Professor  
V. Onufriev<sup>2</sup>, Student  
Tomsk State University of Control Systems and  
Radioelectronics, Russia<sup>1</sup>  
National Research Tomsk Polytechnic University, Russia<sup>2</sup>

In this paper a way to reach the robustness of pulse systems of automatic control is shown. The real interpolation method of calculation of dynamic systems, which is focused on the numerical methods and digital computing resources, is taken as the basis. The authors have also determined the instrumental variables, ensuring the correction of robustness of the synthesized system. The authors offer brief data about the method, the algorithm of correction of the solution in relation to overcorrection and robustness of the system, and the calculation example.

**Keywords:** real interpolation method, synthesis of pulse regulators of automatic control systems, robustness.

Conference participants

## СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ

Гончаров В.И.<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф.  
Онуфриев В.А.<sup>2</sup>, студент  
Томский Государственный Университет Систем  
Управления и Радиоэлектроники, Россия<sup>1</sup>  
Национальный Исследовательский Томский  
Политехнический Университет, Россия<sup>2</sup>

В статье предложен способ достижения робастности импульсных систем автоматического управления. За основу принят вещественный интерполяционный метод расчета динамических систем, ориентированный на численные методы и цифровые вычислительные средства. Установлены инструментальные переменные, обеспечивающие коррекцию свойства робастности синтезируемой системы. Приведены краткие сведения о методе, механизм коррекции решения по перерегулированию и робастности системы и расчетный пример.

**Ключевые слова:** вещественный интерполяционный метод, синтез импульсных регуляторов систем автоматического управления, робастность.

Участники конференции

 <http://dx.doi.org/10.18007/gisap:tsc.a.v0i8.1423>

## Введение

Современные системы автоматического управления (САУ) имеют, как правило, цифровые регуляторы. При их синтезе используют два пути [1-3]. Первый основан на косвенном способе решения задачи, когда сначала синтезируют непрерывный регулятор, затем преобразуют его в дискретный. Он снижает трудности задачи и потому пользуется вниманием в инженерной практике. Второй путь, называемый прямым, позволяет получать дискретные регуляторы непосредственно по исходным данным. Он несколько сложнее, но его можно рассматривать как перспективный с позиций развития. Для такого суждения имеются формальные основания. Во-первых, одноэтапные процедуры синтеза при прочих равных условиях могут приводить к меньшим погрешностям, включая вычислительные. Во-вторых, математические модели дискретных регуляторов, их реализации на микропроцессорных средствах, а также численные методы синтеза составляют единую среду, содержащую потенциальную возможность как для сокращения объемов вычислений, так и для повышения точности расчетов. В работе рассматривается прямой синтез дискретных регуляторов, частично реализующий эти возможности.

Задача синтеза регулятора линеаризованной импульсной системы может быть сведена к составлению и решению уравнения вида

$$W_{\text{ж}}^3(z) \cong \frac{W_p(z)W_{\text{мн}}(z)}{1+W_p(z)W_{\text{мн}}(z)k_{\text{oc}}}, \quad (1)$$

в которое входят передаточные функции  $W_{\text{ж}}^3(z)$  желаемой системы, ее приведенной непрерывной части  $W_{\text{мн}}(z)$ , регулятора  $W_p(z)$ , а также коэффициент обратной связи  $k_{\text{oc}}$ . В уравнении известны функции  $W_{\text{ж}}^3(z)$ ,  $W_{\text{мн}}(z)$ . Коэффициент  $k_{\text{oc}}$  также может быть отнесен к известным исходным данным, так как его всегда можно найти из условий конкретной задачи [1-3]. В отношении передаточной функции регулятора  $W_p(z)$  положим, что известна его структура:

$$W_p(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1}, \quad m \leq n, \quad (2)$$

В этих условиях задача сводится к определению коэффициентов  $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  функции (2). Уравнение синтеза (1) в целях сокращения числа операций переводят в форму

$$W_{\text{ж}}^P(z) \cong W_p(z)W_{\text{мн}}(z), \quad (3)$$

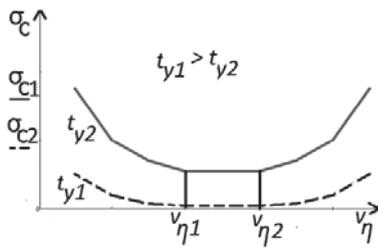
которая описывает поведение системы в разомкнутом состоянии. Под-

черкнем, что форма (3) полностью согласуется с методом обратных задач динамики [5].

Методы составления и поиска приближенных решений уравнений синтеза (1), (3) известны [1]-[3]. Трудности поиска связаны с тем, что аналитический путь решения затруднителен, а в общем случае, когда структурные параметры  $m, n$  ограничены, невозможен [4]. Поэтому в работе развивается численный подход к решению подобных задач, обозначенный в [6]. Он базируется на вещественном интерполяционном методе (ВИМ), который используется как инструмент в численных процедурах синтеза регуляторов. В предлагаемой работе развитие подхода обобщается на вопросы робастности регуляторов, синтезируемых численным методом. Для пояснения особенностей использованного в [6] метода ниже приведены краткие сведения о нем.

## Основы вещественного метода

Вещественный интерполяционный метод (ВИМ) позволяет получать модели динамических систем и оперировать ими в области изображений. В этом смысле он соответствует методу дискретного преобразования Лапласа и z-преобразованию, частным случаем которых его можно рассматривать. Принципиальное отличие связано с тем, что ВИМ приводит к математическим моделям в виде функций вещественной переменной. Последнее обстоятельство



**Рис. 1. График зависимости**

важно потому, что это дает возможность привлечь к описаниям динамических систем и действиям над ними хорошо разработанные методы функций вещественной переменной.

Техника получения вещественных изображений в своей основе определена аппаратом z-преобразования, из которого следует формула получения изображений, а также действия над такими функциями. Вещественные функции-изображения находят по правилу

$$F(v) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)v^{-k}, \quad v \in [c_v, \infty),$$

$$c_v \geq 1, \quad (4)$$

в котором параметр  $c_v$  выбирается из условия сходимости ряда. Выделим две главные особенности формулы (4). Первая, о которой уже было сказано, - функция  $F(v)$ ,  $v \in [c_v, \infty)$  имеет вещественную переменную. Вторая особенность вытекает из исходного положения, при котором формула (4) является частным случаем z-преобразования. Эта особенность важна в практическом отношении: принятая форма (4) позволяет получать изображения  $F(v)$  по z-изображению путем формальной замены переменной  $z$  на  $v$ . Это в свою очередь позволяет при решении практических задач использовать хорошо разработанные таблицы соответствия оригиналов и z-изображений.

Для привлечения численных методов действий над вещественными функциями  $F(v)$  предусмотрен переход к дискретной форме  $\{F(v_i)\}_\eta = \{F(v_1); F(v_2); \dots; F(v_\eta)\}$ , называемой численной характеристикой функции  $F(v)$ . Элементы  $F(v_i)$ ,  $i = \overline{1, \eta}$  определены как значения функции  $F(v)$  в узлах

$$c_v \leq v_1 < v_2 < \dots < v_\eta, \quad (5)$$

Рекомендации по выбору узлов имеются [4].

В приложении к задачам синтеза регуляторов с помощью ВИМ общая схема действий включает в себя несколько этапов. На первом из них находят элементы численной характеристики  $\{F(v_i)\}_\eta$  по функции времени  $f(kT_0)$  или известному z-изображению  $F(z)$ . В первом варианте, когда известна функция  $f(kT_0)$ , это можно сделать по соотношению

$$F(v_i) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_0)v_i^{-k}, \quad v_i \in [c_v, \infty),$$

$$c_v \geq 1, \quad (6)$$

следующему из (4). Во втором варианте задана не функция-оригинал  $f(kT_0)$ , а ее z-изображение  $F(z)$ . Тогда можно найти вещественное изображение  $F(v)$  формальным образом, выполняя подстановку  $z \rightarrow v$  [4] с последующим переходом к дискретной форме  $\{F(v_i)\}_\eta$ , задавая узлы (5).

На втором этапе вычисляются коэффициенты рациональной дроби

$$F(v) = \frac{b_m v^m + b_{m-1} v^{m-1} + \dots + b_1 v + b_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \dots + a_1 v + 1},$$

$$m \leq n, \quad (7)$$

Для этого на основе выражения (7) составляется дискретное соотношение

$$F(v_i) = \frac{b_m v_i^m + b_{m-1} v_i^{m-1} + \dots + b_1 v_i + b_0}{a_n v_i^n + a_{n-1} v_i^{n-1} + \dots + a_1 v_i + 1},$$

$$i = \overline{1, \eta}, \quad (8)$$

которое имеет смысл системы  $\eta$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В левой части СЛАУ (8) находятся значения  $F(v_i)$ ,  $i = \overline{1, \eta}$ , которые найдены по формуле (6) либо по изображению  $F(z)|_{z=v} = F(v) \rightarrow F(v_i)$ . В правой части равенства содержатся коэффициенты дроби  $F(v)$ , которые следует вычислить. Они найдутся как решение СЛАУ (8).

### Синтез регуляторов и обеспечение робастности

Аппарат ВИМ позволяет осуществить синтез регуляторов на основе уравнений [1], [3], численных процедур их решения и итерационного

приближения к искомому решению в соответствии с принятым критерием близости. Задачи в определенной степени были рассмотрены в работе [6]. Ниже обсуждаются возможности развития этого направления с целью удовлетворения еще одного требования – придания робастных свойств САУ.

В ВИМ узлы интерполирования  $v_1, v_2, \dots, v_\eta$  можно использовать как инструмент в процедуре приближения к приемлемому решению. В условиях равномерной сетки корректирующим параметром выступает последний узел  $v_\eta$ . Вторым инструментом, который существенно влияет на свойства синтезируемой САУ, является время установления  $t_y$ . Таким образом, величина перерегулирования  $\sigma_c$  синтезированной системы определяется параметрами  $v_\eta$  и  $t_y$ . Вид графика, характеризующего это изменение, приведен на Рисунке 1.

Полученные графики содержат участок с относительно малой производной, т.е. такой, где изменения функции  $\sigma_c = f(v_\eta)$  сравнительно незначительны. Например, для верхнего графика, полученного для значения  $t_{y2}$ , таким участком можно считать  $[v_{\eta1}; v_{\eta2}]$ . Смысл этого участка с позиций проектирования САУ состоит в малой чувствительности перерегулирования системы к изменениям параметра  $v_\eta$ . Это очевидно, но главное, как показано в [6], вариации узла  $v_\eta$  при определенных условиях можно рассматривать как вариации параметров элементов САУ (коэффициентов передачи, постоянных времени, ...). Такая взаимосвязь означает, что отрезок  $[v_{\eta1}; v_{\eta2}]$  в определенной мере является характеристикой робастности САУ. Поэтому требуемый уровень робастности можно задать на этапе расчета САУ, обеспечив достаточную величину отрезка  $[v_{\eta1}; v_{\eta2}]$ .

Из рассмотрения графиков на Рисунке 1 можно сделать еще один вывод: изменение второй управляющей переменной – времени установления переходного процесса желаемой системы  $t_y$  – приводит к изменению положения кривой  $\sigma = f(v_\eta)$ . При этом происходит существенное перемещение по оси абсцисс, а также некоторая деформация ее вида. Отметим,

что изменение вида кривой включает в себя изменение интересующего нас участка  $[v_{\eta 1}; v_{\eta 2}]$ . Эта зависимость дает возможность управлять величиной участка путем изменения параметра  $t_y$ . На основании отмеченных взаимосвязей можно составить следующий алгоритм синтеза регуляторов систем управления с контролем робастности.

Шаг 1. Синтез регулятора с назначением двух узлов -  $v_1, v_{\eta}$  - по рекомендациям [6] с использованием равномерной сетки для остальных.

Шаг 2. Сравнение значения перерегулирования  $\sigma_c$  на отрезке стабильности графика с требуемым значением  $\sigma_s$ .

Шаг 3. Если требуемое значение перерегулирования  $\sigma_s$  больше (меньше) получившегося  $\sigma_c$  на шаге 1, то повторяем шаг 1 с уменьшенным (увеличенным) значением времени  $t_y$  установления желаемой системы. Если полученное значение совпадает с заданным с достаточной точностью, то обсуждаемая часть задачи считается решенной. Отметим, что здесь не рассматриваются количественные показатели робастности. Это отдельная тема, требующая самостоятельного обсуждения.

#### 4. Расчетный пример

Для пояснения сказанного обратимся к конкретной задаче синтеза регулятора с обеспечением заданного перерегулирования САУ. Задана передаточная функция объекта управления

$$W_{ov}(z) = \frac{2.718z^2 + 0.646z - 0.581}{2.718z^2 - 0.935z + 1}. \text{ Требу-}$$

ется получить регулятор вида (2) при  $m = 1, n = 2$ , обеспечивающий перерегулирование  $\sigma = 25\%$  с допустимым отклонением  $\Delta\sigma_s = 5\%$ . Исходное желаемое время установления  $t_y$  определено по параметрам объекта управления и равно 4,49 с. В качестве дополнительных условий примем: закон распределения узлов равномерный закон, первый узел имеет единичное значение, начальной инструментальной переменной выступает последний узел  $v_{\eta}$ . Поиск приемлемого решения будем осуществлять на основе получения и анализа зависимости  $\sigma = f(v_{\eta})$  для различных значений желаемого времени установления  $t_y$ . Параметр  $t_y$  имеет

смысл роль второй инструментальной переменной.

По исходным данным ( $\sigma = 25\%$ ,  $2 < t_y < 3$ ) найдена желаемая передаточная функция  $W(z) = \frac{16.5z + 2}{15.5z^2 + 2z + 1}$ .

$$W(z) = \frac{16.5z + 2}{15.5z^2 + 2z + 1}$$

Для узлов первой итерации  $v_1 = 1, v_2 = 1.01, v_3 = 1.02, v_4 = 1.03$

получены численные характеристики желаемой системы  $\{W_{xc}(v_i)\}_4 = \{1, 0.987, 0.974, 0.962\}$ , объекта управления  $\{W_{ov}(v_i)\}_4 = \{1, 1.006, 1.011, 1.016\}$ . Они позволяют найти модель регулятора:

$$\{W_p(v_i)\}_4 = \left\{ \frac{b_1 + b_0}{a_2 + a_1 + 1}, \frac{1.01b_1 + b_0}{1.0201a_2 + 1.01a_1 + 1}, \frac{1.02b_1 + b_0}{1.404a_2 + 1.02a_1 + 1}, \frac{1.03b_1 + b_0}{1.0609a_2 + 1.03a_1 + 1} \right\}$$

Теперь найдутся модели регулятора

$$W_p(z) = \frac{1.434z - 0.428}{2.831z^2 - 3.329z + 1},$$

$$W_c(z) = \frac{1.434z - 0.428}{2.831z^2 - 3.329z + 1}$$

$$\frac{2.718z^2 + 0.646z - 0.581}{2.718z^2 - 0.935z + 1}$$

Полученная переходная характеристика фиксирует перерегулирование  $\sigma_{c1} = 46\%$ . Это решение обозначено точкой А на Рисунке 2. Подобным же образом были получены другие точки зависимости  $\sigma = f(v_{\eta})$  для значения  $t_{y1} = 2.04$  с. Видно, что график не содержит участка, отвечающего двум требованиям – по робастности и перерегулированию. Из анализа также следует, что для достижения цели следует переместить кривую вниз. Этого можно достичь за счет увеличения желаемого времени установления. Примем:  $t_{y2} = 2.7$  с. Прежняя процедура позволит получить все необходимые данные, начиная с желаемой передаточной функции  $W_{xc2}(p)$  до графика  $\sigma_{c2} = f(v_{\eta})$ . Последний представлен на Рисунке 2.

Полученные результаты удовлетворительны, окрестность точки В отвечает условиям задачи. При необходимости можно продолжить изменение параметра  $t_y$  для дальнейшей коррекции графика  $\sigma = f(v_{\eta})$ . В данном иллюстративном примере ограничимся двумя приведенными итерациями и полученными результатами.

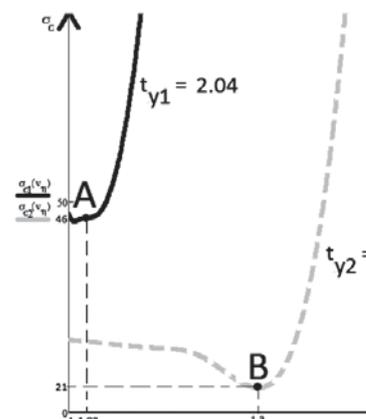


Рис. 2. Графики зависимостей

$$\Delta\sigma = f(v_{\eta})$$

#### Заключение

В работе рассмотрена возможность использования желаемого времени установления  $t_y$  для придания синтезируемой САУ заданного перерегулирования и свойства робастности. Показано, что два инструмента – узлы интерполирования и время установления – позволяют итерационным способом достичь цели.

#### References:

1. Kuo B. Digital Control Systems. Holt, Rinehart and Winston, INC. - New York., 1980.
2. Besekerskij V.A., Popov E.P. Teorija sistem avtomaticheskogo regulirovanija [Theory of automatic control systems]. Izdanie tret'e [Issue 3]. - Moskva., Nauka [Science], 1975. - 768 p.
3. Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija: Uchebnik v 5-i tt. [Methods of the classical and modern theory of automatic control: the textbook in 5 vol.], T. 3: Sintez reguljatorov sistem avtomaticheskogo upravlenija [Vol. 3: Synthesis of regulators of automatic control systems], Edited by K.A. Pupkova i N.D. Egupova. - Moskva., Izd-vo MGTU im. N.Je. Baumana [Publishing house of N.E. Bauman], 2004. - 616 p.
4. Kiselev O.N. Minimizacija pereregulirovanija v linejnyh diskretnyh sistemah reguljatorami nizkogo porjadka [Minimization of overcorrection in linear discrete systems by lower-

order regulators], Avtomatika i telemekhanika [Automatic equipment and telematics], No. 4, 2001., pp. 98-108.

5. Krut'ko P.D. Obratnye zadachi dinamiki upravlyaemyh sistem: Linejnye modeli [Return tasks of dynamics of the managed systems: linear models]. – Moskva., Nauka [Science], 1987. – 304 p.

6. Goncharov V.I. Sintez jelektromehaničeskikh sistem promyshlennyh robotov [Synthesis of electromechanical systems of industrial robots]. – Tomsk., TPU, 2002. – 100 p.

### Литература:

1. Kuo B. Digital Control Systems. Holt, Rinehart and Winston, INC. New York. 1980.

2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. Издание третье. - М.: Наука, 1975. – 768 с.

3. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления/ Под. Ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 616 с.

4. Киселев О.Н. Минимизация перерегулирования в линейных дискретных системах регуляторами низкого порядка// Автоматика и телемеханика, №4, 2001. – С. 98 – 108.

5. Крутько П.Д. Обратные задачи

динамики управляемых систем: Линейные модели. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

6. Гончаров В.И. Синтез электро-механических систем промышленных роботов. - Томск: ТПУ, 2002. – 100 с.

### Information about authors:

1. Valeriy Goncharov – Doctor of Technical sciences, Full Professor, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics; address: Russia, Tomsk city; e-mail: gvi@tpu.ru

2. Vadim Onufriev – Student, National Research Tomsk Polytechnic University; address: Russia, Tomsk city; e-mail: ovavadim@gmail.com



International multilingual social network  
for scientists and intellectuals.

International intellectual portal «Platonick» is a multilingual, open resource intended to facilitate the organization of multifaceted communication of scientists and intellectuals, promulgate their authoritative expert conclusions and consultations. «Platonick» ensures familiarization of wide international public with works of representatives of scientific and pedagogic community. An innovation news line will also be presented on the «Platonick» portal.

Possibility of the informal communication with colleagues from various countries;

Demonstration and recognition of creative potential;

Promulgation and presentation of author's scientific works and artworks of various formats for everyone interested to review.



<http://platonick.com>