BLOCK-SYMMETRIC MODELS AND METHODS: NEW CLASS OF DISCRETE PROGRAMMING TASKS

G. Kaziyev, Doctor of Technical sciences, Full Professor
G. Nabieva, Candidate of Technical sciences, Associate Professor
B. Dautova, Doctor of Technical sciences, Lecturer
Kazakh National Technical University named after K. Satpayev, Kazakhstan

A new class of tasks in setting and solving application-oriented tasks is developed and offered in this paper – block-symmetric models and methods of discrete programming.

The general setting of block-symmetric tasks is demonstrated. It differs from the known tasks by the block properties, symmetry and existence of different types of variables. The algorithm of iterative imaging of polynomial computing complexity, allowing to solve the application-oriented tasks of high dimensionality, is developed for solving tasks of this class. The clustering task is stated as an example of setting of the application-oriented task of the discrete programming.

Keywords: block-symmetric models and methods, discrete programming, application-oriented tasks, clustering, computing complexity.

Conference participants,
National Research Analytics Championship

БЛОЧНО-СИММЕТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ НОВЫЙ КЛАСС ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Казиев Г.З., д-р техн. наук, проф.
Набиева Г.С., канд. техн. наук, доцент
Даутова Б.М., д-р техн. наук, преподаватель
Казахский национальный технический университет им. К.И. Сатпаева, Казахстан

В работе разработан и предложен новый класс задач постановки и решения прикладных задач: блочно-симметричные модели и методы дискретного программирования.

Приведена общая постановка блочно-симметричных задач, отличающаяся от известных задач свойствами блочности, симметричности и наличием различных типов переменных. Для решения задач этого класса разработан алгоритм итеративных отображений полиномиальной вычислительной сложности, обеспечивающий решении прикладных задач большой размерности. Приведена постановка задачи кластеризации, как пример постановки прикладной задачи дискретного программирования.

Ключевые слова: блочно-систематические модели и методы, дискретное программирование, прикладные задачи, кластеризация, вычислительная сложность.

Участники конференции,
Национального первенства по научной аналитике

http://dx.doi.org/10.18007/gisap:tsca.v0i8.1427

Введение. Большое число прикладных задач в различных отраслях экономики сводится к задачам дискретного программирования. Классические постановки и методы решения прикладных задач дискретного программирования успешно используются для решения многих практических задач в различных областях науки, техники и технологий.

Вместе с тем, задачи дискретного программирования весьма сложны и имеют существенные ограничения для широкого решения многочисленных приложений. Прежде всего к таким ограничениям относятся экспоненциальная вычислительная сложность решения прикладных задач, точность решения, размерность решаемых задач и другие.

Попытки устранить эти трудности не всегда успешны и нет единого подхода и теоретических основ преодоления этой ситуации в области дискретного программирования. Поэтому исследователи идут по пути разработки точных методов для модельных примеров не большой размерности, эвристических и приближенных методов постановки и решения дискретных задач. Каждый результат, полученный в данной области требует пристального внимания.

В настоящей работе рассматривается постановка и решение нового класса задач дискретного программирования, который нашел применение при решении различных прикладных задач: блочно-симметричные задачи дискретного программирования (БСЗ).

1. Общая постановка задачи

По мере развития моделей и методов дискретного программирования, постановки новых задач и других приложений появляется необходимость разработки новых подходов и методов решения задач. Одним из таких подходов является блочно-симметричные модели и методы [1,2].

Рассмотрим общую постановку и решение блочно-симметричных задач дискретного программирования.

Пусть задано множество объектов $A=\{a_i; i=\overline{1,I}\}$ и множество объектов $B=\{b_j; j=\overline{1,J}\}$ с элементами различных типов, а также взаимосвязи между элементами этих множеств, которые определяются матрицей

$$W=\|\omega_{ij}\|,\ i=\overline{1,I},\ j=\overline{1,J},$$

элементы которой целочислены или булевы. Необходимо объединить элементы множества A в непересекающиеся подмножества A_n, $n=\overline{1,N}$, а элементы множества B - в непересекающиеся подмножества B_m, $m=\overline{1,M}$, таким образом, чтобы доставить экстремум целевой функции F ($A_n, B_m,$).

Для формализованной постановки задачи введем следующие переменные. Пусть $X=\|x_{in}\|,\ i=\overline{1,I};\ n=\overline{1,N}$ – булева матрица, где $x_{in}=1$, если i-й элемент распределяется в n-ю группу, $x_{in}=0$, в противном случае. Аналогично $Y=\|y_{jm}\|,\ j=\overline{1,J};\ m=\overline{1,M}$, где $y_{jm}=1$, если j-й элемент распределяется в m-ю группу и $y_{jm}=0$, в противном случае. В общем случае матрицы переменных X и Y могут быть целочисленными.

Определим на множестве A x B функцию F(X.Y), зависящую от распределения элементов множеств A и B по подмножествам A_n, и B_m. Соответственно на множестве A – функции $\varphi_k(X), k=\overline{1,K}$, а на множестве B – функции $\psi_s(Y), s=\overline{1,S}$, определяющие ограничения соответственно на множествах A и B.

Блочно-симметричная задача дискретного программирования формулируется следующим образом:

$$F(X,Y)\to extr, \tag{1}$$

при ограничениях

$$\varphi_k(X)\le\varphi_{Ko}, k=\overline{1,K}, \tag{2}$$

$$\psi_s(Y)\le\psi_{so}, s=\overline{1,S}, \tag{3}$$

В множестве ограничений (2) и

(3) в зависимости от постановок задач знаки неравен ств могут меняться на противоположные.

В общем случае двухиндексные матрицы - переменные X и Y и заданная матрица W могут быть целочисленными.

Рассмотрим задачу при условии, когда переменные X, Y и W-булевы матрицы. В качестве функций F(X,Y) часто используют функцию вида F(Z), где

$$Z = XWY \tag{4}$$

Рассмотрим выражение (4), которое представляет собой произведение матриц переменных X и Y и заданной матрицы W, на которой определена целевая функция. В отличие от традиционных постановок задач дискретного программирования в данной постановке имеются два типа переменных X и Y, переменные X и Y симметричны относительно заданной матрицы W.

В задаче (1)-(3) можно выделить множество ограничений вида (2), которые зависят от переменной X, и множество ограничений вида (3), которые зависят от переменной Y.

Таким образом, задачу вида (1)-(3) назовем блочно-симметричной задачей дискретного программирования.

Рассмотрим выражение (4). Из него следует что переменные X и Y симметричны относительно заданной матрицы W и функция (4) может быть определена как слева направо, так и наоборот, т. е.

$$Z = XWY = YWX \tag{5}$$

На основе общей постановки определим основные свойства сформулированного класса задач, отличающие его от традиционных постановок задач дискретного программирования

Свойство 1. Наличие двух типов переменных X и Y различных типов, представленных в виде булевых матриц, которые определены на заданной матрице W.

Свойство 2. Блочность задачи заключается в выделении в постановке отдельных блоков функций вида (2) и (3), зависящие только от одной переменной X и Y.

Свойство 3. Симметричность задачи заключается в возможности вычисления (5) как в прямом так и обратном направлении.

2. Решение задачи.

Анализ особенностей и свойств сформулированной задачи позволяет предложить эффективные алгоритмы решения данного класса задач. Рассмотрим решение блочно-симметричных задач дискретного программирования при условии, что X, Y и W - булевы матрицы. Легко доказать следующее утверждение.

Утверждение. Распределение элементов множества A по непересекающим подмножествам A_n соответствует логическому сложению строк матрицы $\| \omega_{ij} \|, a$ распределение элементов множества B по непересекающимся подмножествам B_m -логическому сложению столбцов матрицы $\| \omega_{ij} |$.

Результаты данного утверждения позволяют просто вычислить оценки и направления поиска решения для разработки эффективных алгоритмов.

Введем понятие базиса решения задачи. Под базисом понимается заданный состав элементов подмножеств A_n и B_m на матрице W.

В матрице W базис находится как некоторая подматрица Z, элементы которой определены. Данную подматрицу путем перестановки номеров строки и столбцов матрицы W и их перенумеровки всегда можно определить в левом верхнем углу. Такое представление упрощает процедуру оценок и определения направления поиска решения.

Для решения блочно-симметричной задачи дискретного программирования при условии, когда X, Y и W - булевы матрицы, разработан и предложен эффективный алгоритм итеративных отображений. Алгоритм состоит из следующих основных этапов: [3].

1. В булевой матрице W выделим подматрицу $Z = \|z_{nm}\|, n = \overline{1,N}; m = \overline{1,M}$ и определим ее как базис решения задачи.

2. Определим матрицу $D = \|d_{i'n}\|, i^1 = n + \overline{1,I}; n = \overline{1,N}$ направления поиска решения X путем логического сложения небазисных строк матрицы W со строками базиса и вычислим значения оценок только по позициям базиса.

3. В соответствии с полученными оценками осуществим распределение элементов множества A по подмножествам A_n В результате зафиксируем решение X и промежуточную матрицу $П = \|\pi_{nj}\|, n = \overline{1,I}; j = \overline{1,J}.$

4. Определим матрицу $D = \|d_{j'n}\|,\ j^1 = \overline{m+1,I};\ \overline{m = 1,M},$ направления поиска решения Y путем логического сложения небазисных столбцов промежуточной матрицы $П = \|\pi_{nj}\|$ со столбцами базиса и вычислим значения оценок только по позициям базиса матрицы П.

5. В соответствии с полученными оценками матрицы П распределим элементы множества B по подмножествам B_m. В результате фиксируем решение Y и целевую матрицу Z, на которой определено значение целевой функции F (Z).

Следует отметить, что поиск решения задачи может осуществляться как в прямом направлении по схеме $DX\ \widetilde{D}Y$, так и в обратном направлении по схеме $\widetilde{D}Y\ DX$.

Рассмотрим пример постановки и решения задачи кластеризации функциональных задач и используемых ими документов при проектировании автоматизированных информационных систем.

3. Пример постановки прикладной задачи

Этап технического проектирования автоматизированных информационных систем является наиболее сложным и длительным. На данном этапе формируется общая функциональная структура, состав и последовательность решения прикладных задач, структура прикладного программного обеспечения структура базы данных, определяется общесистемное программное обеспечение проектируемой системы.

При большом числе прикладных задач и сложном документообороте возникает необходимость декомпозиции системы на кластеры.

Под кластером прикладных задач понимается объединение задач в подмножества, а кластерами документов - объединение документов в подмножества и установление взаимосвязей между соответствующими подмножествами. Взаимосвязи между ними отражают интегрированные связи между кластерами. Опыт проектирования систем обработки данных и проведенные исследования показали необходимость декомпозиции исходной системы, которая позволяет на этапе технического проектирования глубже проанализировать кластеры задач и документов, распараллелить объемы работ между проектировщиками, выделить процедуры обработки данных и информационные элементы для разработки прикладного программного обеспечения и базы данных автоматизированных информационных систем.

Поэтому в качестве критерия эффективности процесса декомпозиции исходной системы используем минимум информационных взаимосвязей между кластерами задач и документов.

Для математической постановки задачи декомпозиции системы введём следующие переменные и обозначения.

Пусть, $A=\left\{\alpha_i, i=\overline{1,I}\right\}$ и - множество прикладных задач обработки данных, подлежащие автоматизации; $B=\left\{b_j, j=\overline{1,J}\right\}$ - множество исходных документов, используемое для решения прикладных задач. Задана, матрица $W=\left\|\omega_{ij}\right\|$, $i=\overline{1,I}$, $j=\overline{1,J}$, где $\omega_{ij}=1$, если j-й исходный документ используется для решения i-ой прикладной задачи системы и $\omega_{ij}=0$, в противном случае. Введем переменные $X=\left\|x_{mi}\right\|$, $m=\overline{1,M}$, $i=\overline{1,I}$ - переменная отражающая распределенные i-ой прикладной задачи в m-ой кластер (группу) задач. В данном случае

$$x_{mi}=\begin{cases}1, \text{ если } i-\text{ая прикладная задача распределяется } m-\text{й кластер},\\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Аналогично введём переменную $Y=\left\|y_{jn}\right\|$, $n=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,J}$, где

$$y_{jn}=\begin{cases}1, \text{ если } j-\text{й документ распределен в } n-\text{й кластер документов},\\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

В ряде случаев на данном этапе определяются характеристики задач и документов. Введем t_i - время разработки i-ой задачи, v_j - объем j-ого документа, c_{ij} - общая стоимость разработки i-ой задачи и j-ого документа, τ_j - время разработки и подготовки j-го документа, c_i - стоимость разработки i-ой задачи, s_j - стоимость подготовки j-ого документа.

Необходимо разбить систему на подмножества прикладных задач и используемых ими документов таким образом, чтобы минимизировать взаимосвязи между кластерами прикладных задач и документов в процессе проектирования автоматизированной системы.

Определим дополнительные переменные следующим образом:

$$\alpha_{mj}=\begin{cases}1, \text{ если } \sum_{i=1}^{I} x_{mi}\,\omega_{ij}\geq 1,\\ 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{I} x_{mi}\,\omega_{ij}=0.\end{cases} \quad (6)$$

Данная переменная отражает использование j-го документа для решения задач m-го кластера.

$$\beta_{in}=\begin{cases}1, \text{ если } \sum_{j=1}^{J} \omega_{ij}\,y_{jn}\geq 1,\\ 0, \text{ если } \sum_{j=1}^{J} \omega_{ij}\,y_{jn}=0.\end{cases} \quad (7)$$

Переменная β_{in} отражает использование в процессе решения i-ой задачи n-го кластера документов.

Взаимосвязи между кластерами прикладных задач и документов определяются из выражения:

$$\gamma_{mn}=\begin{cases}1, \text{ если } \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\alpha_{mj}\,\beta_{in}\geq 1,\\ 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\alpha_{mj}\,\beta_{in}=0.\end{cases} \quad (8)$$

Задачу кластеризации проектируемой автоматизированной системы сформулируем следующим образом.

Необходимо минимизировать функцию вида

$$\min \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{n=1}^{N} x_{mi}\,\omega_{ij}\,y_{jn} \quad (9)$$

При ограничениях на:

- включение каждой прикладной задачи только в один кластер

$$\sum_{m=1}^{M} x_{mi}=1,\ i=\overline{1,I}; \quad (10)$$

- включение документа только в один кластер документов

$$\sum_{n=1}^{N} y_{jn}=1,\ j=\overline{1,J}; \quad (11)$$

- время разработки каждого кластера задач

$$\sum_{i=1}^{I} t_i\,x_{mi}+\sum_{j=1}^{J}\tau_j\,\alpha_{mj}\leq \mathrm{T}_m,\ m=\overline{1,M}; \quad (12)$$

- стоимость проектирования каждого кластера задач

$$\sum_{i=1}^{I} c_i\,x_{mi}+\sum_{i=1}^{J}s_j\,\alpha_{mj}\leq \mathrm{R}_m,\ m=\overline{1,M}; \quad (13)$$

- число прикладных задач в кластере

$$\sum_{i=1}^{I} x_{mi}\leq p_o,\ m=\overline{1,M}; \quad (14)$$

- число исходных документов в кластере

$$\sum_{j=1}^{J} y_{jn}\leq g_o,\ n=\overline{1,N}. \quad (15)$$

Поставленная задача (6-15) относится к блочно-симметричным задачам дискретного программирования.

Выводы

Разработан и предложен новый класс задач – блочно-симметричные задач дискретного программирования, отличающихся от традиционных постановок свойствами: наличием различных типов переменных, блочности и симметричности.

Разработан новый алгоритм итеративных отображений полиномиальной вычислительной сложности при заданном базисе позволяющий решать практическое задачи большой размерности.

Предложенные блочно-симметричные модели и методы использованы при постановке и решении ряда прикладных задач.

References:

1. Kaziev G.Z. Sintez modul'nyh blok-shem v avtomatizirovannyh sistemah upravlenija [Synthesis of modular flowcharts in automated control systems]., Avtomatika i telemehanika [Automatic equipment and telemechanics]., 1992. No. 11., pp. 160-171.

2. Kaziev G.Z. Blochno-simmetrichnye modeli i metody postanovki i reshenija zadach diskretnogo programmirovanija [Block and symmetric models and methods of statement and solution of the discrete programming tasks]., Vestnik inzhenernoj akademii Respubliki Kazahstan [Bulletin of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan]., No. 2(10) 2003., pp.55-59.

3. Kaziev G.Z., Nabieva G.S., Satmagambetova Zh.Z., Abylhasenova D.K. Modeli i metody diskretnogo programmirovanija [Models and methods of discrete programming]., Blochno-simmetrichnye modeli - jeffektivnyj klass zadach diskretnogo programmirovanija [Block and symmetric models are an effective class of the discrete programming tasks]. «Vestnik KBTU» [«KBTU bulletin»], No. 3, 2010., pp.61-68.

Литература:

1. Казиев Г.З. Синтез модульных блок-схем в автоматизированных системах управления// Автоматика и телемеханика. 1992. №11. С. 160-171.

2. Казиев Г.З. Блочно-симметричные модели и методы постановки и решения задач дискретного программирования.// Вестник инженерной академии Республики Казахстан, №2(10) 2003, с. 55-59.

3. Казиев Г.З., Набиева Г.С., Сатмагамбетова Ж.З., Абылхасенова Д.К. Модели и методы дискретного программирования. Блочно-симметричные модели - эффективный класс задач дискретного программирования. // «Вестник КБТУ», №3, 2010. С.61-68.

Information about authors:

1. Galim Kaziyev - Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Kazakh National Technical University named after K. Satpayev; address: Kazakhstan, Almaty city; e-mail: saribaeva_@mail.ru

2. Nabieva Gulnaz - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kazakh National Technical University named after K. Satpayev; address: Kazakhstan, Almaty city; e-mail: gulnaz_nc@mail.ru

3. Bakhyt Dautova - Doctor of Technical Sciences, Lecturer, Kazakh National Technical University named after K. Satpayev; address: Kazakhstan, Almaty city; e-mail: saribaeva_@mail.ru