ボナチッチの２つの中心性概念について

On Two Bonacich's Centralities

藤山　英樹*
Hideki Fujiyama

Email: fujiyama@dokkyo.ac.jp

本稿では，ボナチッチの示した２つの中心性概念を整理する．これらの概念は社会学におけるネットワーク分析において定義されたが，その有用性が社会学を超えて，情報学や経済学においても確認できるからである．しかし，共にボナチッチにちなむ中心性概念のため，混同による理解の混乱も生じやすい．日本語の良書も出版されているとはいえ，その整理はまだ不十分であり，本稿では，それぞれの概念の数学的および社会科学的な意味づけを踏まえた整理をおこなう．

In this paper, we explain the relationship between Bonacich's two centralities that are defined in the network analysis in Sociology. Beyond Sociology, their usefulness is detected both in Informatics and Economics. As these are comes from two different Bonacich's papers (Bonacich 1972, 1987), some confusions arise. Although there are some good Japanese textbooks about them, it is not sufficient. This paper reviews the relationship between two centralities from the viewpoint of mathematical formulation and meaning in the social science.

*: 獨協大学経済学部

1．はじめに

ネットワークに対する研究が，情報学，社会学，経済学といったさまざまな領域で進展している．

一つの興味深い事実として挙げられるのは，数学的には共通の概念が，複数の領域の異なる文脈から指摘されていることである．つまり，情報学において，ウェッブページ検索ではPage Rankという指標が用いられる[1]．この概念は社会学におけるボナチッチ中心性の概念と共通の考え方となっている．他方で，経済学においても，最適な行動水準がボナチッチ中心性に依存して決まることが示されている．

以上においてやや不正確に記したが，最初の「ボナチッチ中心性」は「固有ベクトル中心性」に対応するものであり，後者の「ボナチッチ中心性」は「ボナチッチのパワー中心性」に対応するものである．

以上の違いに注意をしないと，不必要な議論の混乱が生じてしまう．また，それぞれの中心性の概念が社会科学においてどのような意味をもつかについて解説した入門書，専門書もそれほど多くない[2]．

したがって,２つの概念の数学的な意味と社会科学的な意味の双方についての見取り図を示すことを本稿の目的とする．

なお，よりひろく容易に読解可能なように，線形代数に関する基本的な議論もできるかぎり本稿内で自己充足的になるように説明する[3]．

2．固有ベクトル中心性

2.1　基本的な考え方

はじめに，例を用いて中心性の考え方を説明していく．ここで企業といった組織を考えてみよう．組織内には複数の主体が存在して，それらの主体は必ずしも同じの影響力を持っているものではない．影響力の大きい主体もいれば，小さい主体もいる．この影響力を中心性(centrality)と呼んでおく．組織内の重要人物ほど中心性が高いということである．

さらに，自然な仮定として，組織内の有力人物とつながりがあるならば，その人物の影響力が増すことということを考えることができる．つまり，有力者の知人となることの利益である．以上は次のように表現することができる.すなわち,各主体iの中心性をc_iとする．さらに，主体jから受ける主体iの影響力に対する係数をr_{ij}として定義すると，主体 iの中心性の総和は,

$$r_{i1}c_1 + r_{i2}c_2 + \cdots + r_{in}c_n$$

となる．ここで，この総和自身は定義よりc_iに他ならず

$$c_i = r_{i1}c_1 + r_{i2}c_2 + \cdots + r_{in}c_n$$

なる再帰的な中心性の定義を得る．以上を行列表記するならば,

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Rc}$$

という定義式となる．

なお，この$\boldsymbol{R}$は各主体の関係性を示しており，隣接行列(adjacent matrix)と呼ばれる[4]．

しかしながら，以上の定義は単純にはうまくいかない．定義自身が再帰的に定義されており，

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Rc} \iff (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

となり，$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})$が逆行列を持つ場合，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$となるからである．以上から，上記のように定義をするためには，$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})$が逆行列を持たないような，いくつかの工夫をする必要がある[5]．

2.2　対処法１

隣接行列の第i列をみると，主体iがどの主体へ影響を与えているかがわかる．ここで，主体ごとの影響力を一定(ここでは1)と仮定しよう．この仮定を満たす隣接行列は，元の隣接行列の各列の要素の総和で各列の要素を割ることによって得られる．

以上で基準化した隣接行列を$\widetilde{\boldsymbol{R}}$と表記しておく．すると，$(\boldsymbol{I} - \widetilde{\boldsymbol{R}})$ は逆行列を持たない．

これは次のように確認できる．線形代数の復習も兼ねて，説明をしておく．方針は行列式が0であることを示すことである．いま，第1行から第$n-1$行までを全て第n行に加える操作をする．すると任意のjに対して，第nj要素は$1 - \sum_s r_{sj} = 1 - 1 = 0$となる．なお，行や列どうしを加えることによって行列式は変化しないこと，および，列もしくは行の要素が全て0となる行列の行列式は0となることから，$|\boldsymbol{I} - \widetilde{\boldsymbol{R}}| = 0$ となる[6]．

以上より，

$$\boldsymbol{c} = \widetilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{c}$$

においてゼロベクトルではない$\boldsymbol{c}$を定義できる.要素を明らかにすると，

$$c_i = \sum_{s=1}^{n} \tilde{r}_{is}\, c_s$$

となる．つまり，主体iは各主体sの持つ影響力c_sのうちr_{is}の割合を得ることができて，その総和が自分の影響力と定義される．

以上が，逆行列をもたないようにする対処の一つである．

2.3　対処法２

他にも対処法は存在する.ここでも$\boldsymbol{R}$を適切に変換し,逆行列をもたないようにする．

ここでは天下り式だが，固有値と固有ベクトルの関係を用いる．いま，固有値をλと固有ベクトルを$\boldsymbol{c}$とする． このとき

$$\lambda\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Rc}$$

を得る．ここで,

---

1 よりPage Rankの高いページが検索においてより上位に示されるということである．

2 例外としては，鈴木 (2009), 安田 (2001)，金光 (2003)が挙げられる．海外の代表的なテキストとしては Wasserman and Faust (1994)が挙げられる．それぞれ良書であり部分的な記述はあるが，ボナチッチの２つの中心性の概念の解説について，必ずしも十分とはいえない．

3 ただし，数学的な厳密性よりも，直感的な展開を重視する．

4 通常，隣接行列の対角要素は０と仮定することが多いが，以下の議論では特にその仮定をする必要はない．

5 $(I - R)$が逆行列をもつかどうかという点と２つの対処法という議論の流れは，Wasserman and Faust (1994, p.207)を参考とした．

6 ここで用いられる性質は適当な線形代数のテキストを参照されたい．例えば三宅(1991)など．

$$\widehat{\boldsymbol{R}}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{R}$$
とする．すると，
$$\boldsymbol{c}=\widehat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{c}$$
が定義できる．

さて一般には固有値と固有ベクトルは複数存在するが，　ここでは絶対値最大値の固有値(λ^*)と対応する固有ベクトル($\boldsymbol{c}^*$)をとることが望ましい．その理由は
$$\lim_{n\to\infty}\widehat{\boldsymbol{R}}^n\,1//\boldsymbol{c}^*$$
となることが知られているからである．ここで$//$とは２つのベクトルの方向が同じであることを示している．

以上における社会科学的な解釈は次のようになる．各主体のもともとの影響力を全て1として，各要素が全て１のベクトルを1と表記する．隣接行列 $\widehat{\boldsymbol{R}}$のもとで，各主体が得る影響力の総和を
$$\boldsymbol{c}^1=\widehat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{1}$$
と表記しておく．

この影響力$\boldsymbol{c}_1$をもとに，さらに，　隣接行列$\widehat{\boldsymbol{R}}$のもとで，各主体が得る影響力の総和は
$$\boldsymbol{c}^2=\widehat{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{c}^1)=\widehat{\boldsymbol{R}}\widehat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{1}=\widehat{\boldsymbol{R}}^2\boldsymbol{1}$$
とできる．

同様の手続きにより，$\boldsymbol{c}^n$が定義できて，作り方より，
$$\boldsymbol{c}^n=\widehat{\boldsymbol{R}}^n\boldsymbol{1}$$
となる．

$\boldsymbol{c}^n$は社会的な影響力を隣接行列から逐次的に定義したときの，n段階目の社会的な影響力の総和ということができる．

以上より，指標 $\hat{\boldsymbol{c}}$は無限段階目の社会的影響力($\lim_{n\to\infty}\widehat{\boldsymbol{R}}^n\,\boldsymbol{1}$)を示している．

また，
$$\boldsymbol{c}_n=\widehat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{c}_{n-1}$$
という定義からわかるように，指標$\boldsymbol{c}^*$は各段階において，(1) 各主体の社会的な影響力の相違と，(2) つながりからえられる間接的な社会的な影響を考慮している．

2.4　$\lim_{n\to\infty}\widehat{\boldsymbol{R}}^n\,\boldsymbol{1}//\boldsymbol{c}^*$の導出

ここでは，$\lim_{n\to\infty}\widehat{\boldsymbol{R}}^n\,1//\boldsymbol{c}^*$を導出する．初めに固有ベクトルを用いて，
$$1=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n$$
と表記する．全ての要素が正なので，全ての係数α_iは0ではない．

以上の等式の両辺に$\widehat{\boldsymbol{R}}$を掛けると，
$$\widehat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{1}=\alpha_1\widehat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\widehat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{v}_n$$
が得られ，$\widehat{\boldsymbol{R}}$の作り方とそこでの固有値は最大のλ^*を用いていることを思い出すと，
$$\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}=\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}\alpha_n\boldsymbol{v}_n$$
となり，右辺において固有ベクトルの性質より，
$$\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}=\alpha_1\frac{\lambda_1}{\lambda^*}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\frac{\lambda_n}{\lambda^*}\boldsymbol{v}_n$$
が得られ，さらに両辺に$\widehat{\boldsymbol{R}}$を掛けると，
$$\widehat{\boldsymbol{R}}\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}1=\widehat{\boldsymbol{R}}\alpha_1\frac{\lambda_1}{\lambda^*}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\widehat{\boldsymbol{R}}\frac{\lambda_n}{\lambda^*}\alpha_n\boldsymbol{v}_n$$
が得られ，再び$\hat{R}$の作り方より，
$$\left(\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}\right)^2 1=\frac{1}{\lambda^*}\alpha_1\frac{\lambda_1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\frac{1}{\lambda^*}\frac{\lambda_n}{\lambda^*}\alpha_n\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_n$$
となり，再び右辺において固有ベクトルの性質より，
$$\left(\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}\right)^2 1=\alpha_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda^*}\right)^2\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda^*}\right)^2\boldsymbol{v}_n$$
を得る．

以上の作業をk回繰り返すと，
$$\left(\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}\right)^k 1=\alpha_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda^*}\right)^k\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda^*}\right)^k\boldsymbol{v}_n$$
となる．以上の右辺において，
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*}\right)^k=1$$
と，最大ではない固有値($\hat{\lambda}$)に対しては
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda^*}\right)^k=0$$
となりこと，　左辺に対しては$\widehat{\boldsymbol{R}}\equiv\frac{1}{\lambda^*}\boldsymbol{R}$を思い出して，
$$\lim_{k\to\infty}\widehat{\boldsymbol{R}}^k\,1=\alpha^*\boldsymbol{v}^*$$
を得る．以上で$\boldsymbol{v}^*$は最大固有値に対応する固有ベクトルであり，α^*はベクトル$\boldsymbol{1}$を固有ベクトルで表現したときの最大固有値に対応する係数である．この係数はスカラーなので，
$$\lim_{n\to\infty}\widehat{\boldsymbol{R}}^n\,1//\boldsymbol{v}^*$$
が示され，記号を変えれば証明すべき関係が示されたことになる．

補足的なコメントをしておくと，第一に，$\alpha^*\boldsymbol{v}^*$も固有ベクトルとなる．これは次の関係から確認できる．はじめに，$\boldsymbol{v}^*$が固有ベクトルであることから，
$$\boldsymbol{R}\alpha^*\boldsymbol{v}^*=\alpha^*\lambda^*\boldsymbol{v}^*$$
が得られる．これを整理すると，
$$\boldsymbol{R}(\alpha^*\boldsymbol{v}^*)=\lambda^*(\alpha^*\boldsymbol{v}^*)$$
となり，$\alpha^*\boldsymbol{v}^*$は$\boldsymbol{R}$の固有ベクトルとなる．

第二に，以上の証明で最初に固有ベクトルで表記するベクトルは$\boldsymbol{1}$であった．しかし，任意のベクトル($\boldsymbol{h}$)は
$$\boldsymbol{h}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n$$
と表現できて，最大固有値の係数が 0 でないものであれば，以上の議論は全て満たされる．なお，最大固有値の係数は 0 とないものにするためには，全ての要素が正であるようなベクトルを考えれば良い．

以上より，固有ベクトル中心性の指標は，各関係の連鎖を考慮する以前の各個人の影響力の初期値(すなわち，$\boldsymbol{i}$や$\boldsymbol{h}$)には依存せず，定まるのである．これは無限の関係性の連鎖を経ることで，初期値のウェイトが限りなく小さくなっていると解釈できる．

2.5　対処法 1 と対処法 2 の統一的視点

対処法 1 では各列の総和が 1 となるように基準化した．さらにここでは，行列の各要素は非負であると仮定する[7]．このように，隣接行列の各要素が非負の場合には，対処法 1 とは，最大固有値(1)に対応する固有ベクトルを求めていることに他ならず，この意味で，対処法 2 と共通の考え方といえる．

以下では，これを確認しておく．はじめに示すべき

[7] このような行列は推移確率行列と呼ばれる．各要素の解釈にしたがって，各行の総和を 1 とすることもある．

ことは,

- 対処法1の$\tilde{\boldsymbol{R}}$は固有値1をもつ

である.

以上を確認する. 作り方より,

$$1 = \tilde{\boldsymbol{R}}'1$$

となる. これより$\tilde{\boldsymbol{R}}'$の固有値は1であり対応する固有ベクトルは1となる.

また, 行列式は転置によって変化しないので, ともなって固有多項式も変化しない[8]. したがって, $\tilde{\boldsymbol{R}}$も1を固有値としてもつ.

次に示すべきことは,

- $\tilde{\boldsymbol{R}}$の任意の固有値は1以下である.

である.

以上を確認する. 固有値がλ_1からλ_nまで存在するとする. ここで任意の$i \in \{1,2,\dots,n\}$として, λ_iに注目する.

以下では, iは直接には議論と関係がないので, 表記せずに, ここでの固有値と固有ベクトルの関係を

$$\lambda \boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{v}$$

と表記しておく.

以上でのベクトルの等式の第k要素に注目すると,

$$\lambda \boldsymbol{v}_k = \sum_{s=1}^{n} r_{ks}\, \boldsymbol{v}_s \tag{1}$$

となる.

さて, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$のなかで, 最大のものを$\boldsymbol{v}_*$と表記しておく.

ここで$|\lambda \boldsymbol{v}_*|$に注目する, 以上はスカラーの積なので,

$$|\lambda \boldsymbol{v}_*| = |\lambda||\boldsymbol{v}_*| \tag{2}$$

となる.

式(1)において, $k = *$とすると同様に,

$$\lambda \boldsymbol{v}_* = \sum_{s=1}^{n} r_{*s}\, \boldsymbol{v}_s$$

が得られる.

両辺に対して絶対値をとって, 次のように整理ができる. なお整理についてのコメントは上から下へ読めるように, 当該の整理の間に挿入している.

$$|\lambda \boldsymbol{v}_*| = |\sum_{s=1}^{n} r_{*s}\, \boldsymbol{v}_s|$$

(総和の絶対値＜絶対値の総和より,)

$$\leq \sum_{s=1}^{n} |\, r_{*s} \boldsymbol{v}_s|$$

(隣接行列の各要素は正という仮定より,)

$$= \sum_{s=1}^{n} r_{*s}\, |\boldsymbol{v}_s|$$

(v_*の作り方より, $|\boldsymbol{v}_s| \leq |\boldsymbol{v}_*|$であり,)

$$\leq \sum_{s=1}^{n} r_{*s}\, |\boldsymbol{v}_*|$$

$$= |\boldsymbol{v}_*| \sum_{s=1}^{n} r_{*s}$$

(隣接行列の列の総和は 1 より,)

$$= |\boldsymbol{v}_*|$$

となる.

以上と, 式(2)より,

$$|\lambda||\boldsymbol{v}_*| \leq |\boldsymbol{v}_*|$$
$$\Leftrightarrow\ |\lambda| \leq 1$$

が示される.

以上において固有値に付されたiには関係なく議論が出来たから, 任意のiに対して,

$$|\lambda_i| \leq 1$$

が示された.

以上の二つの主張より,

- $\tilde{\boldsymbol{R}}$の最大固有値が1である

という主張が示された.

2.6 いくつかの問題点

上記の対処がなされたとしても, 以下のような問題点を挙げることができる.

$$\tilde{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{R}$$

の定義より, λが負の値を取る場合に, 直接的な影響力の流入が負に働く状況が出てくるのである. 後のボナチッチのパワー中心性の議論からもわかるように, こうした直接の関係が負となる状況についても社会科学的には意味のあるものである. しかし, それは通常つながりを示した隣接行列の性質から得られるものではなく, 社会的な影響力の実質的な意味合いから出てくるものであることには注意しなければならない. さらに固有値が複素数となる場合も同様に注意しなければならない. ただし, ペロン・フロベニウスの定理より非負行列ならば, 固有値は全て正となることが知られている.

第二に, 鈴木(2009, p.50)でまとめられるように, 隣接行列が既約ではない場合には, 主体が複数のグループに分かれることになる[9]. このとき, 最大のグループ以外の主体の中心性の値が 0 となるという問題が生じ, 実用上は注意しなければならない.

対処法 2 で示された概念は「固有ベクトル中心性」と呼ばれる. これはBonacich(1972)からの概念であり, 「ボナチッチ中心性」と呼ばれることもある[10].

2.7 PageRank について

PageRank とは各Web ページの重要度を測る指標である. 基本的な考え方は各Web ページのつながり方つまりリンクの状態から指標をつくる. つまり, 上記の主体をWeb ページと考え, 影響力を移動する確率と考

---

8 適当な線形代数のテキスト, 例えば三宅 (1991, p.49) を参照のこと.

9 既約とはr_{ij}を主体jから主体iへの推移の頻度と考え, 全ての主体から他の全ての主体へ推移可能という意味である. つまり, グループ全体がつながっているという状況である. したがって, 既約ではないとは, お互いに移行できない複数のサブグループが全体のグループの中に存在していることを意味する.

10 例えば, 安田(2001, p.87)が挙げられる.

える．対処法 1 での基準化とは，隣接行列が推移確率行列にする手順に他ならない．ただし，推移確率行列が既約にならないと指標が 0 となるページが多くなるので，この点は次のように工夫をする．

具体的に次のような既約な推移行列を作る(鈴木 2009, p.53)．すなわち，

$$\widetilde{\boldsymbol{R}} = (1-\varepsilon)\boldsymbol{R} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)_{n\times n}$$

とする．ここで$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\times n}$は全ての要素が$\frac{1}{n}$とする$n\times n$の正方行列である．なお，通常は$\varepsilon = 0.15$とする．

3. ボナチッチのパワー中心性

3.1 基本的な考え方

固有ベクトル中心性と同じように，社会的な影響力の指標としての中心性が再帰的に定義される．しかし，ここでは第 1 項に直接的な影響力の初期値が明示的に導入される．各主体の初期値を全ての要素を 1 とする大きさnのベクトル1を用いて，

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} + \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{c}$$

と定義する．ここでαとβはパラメータである．

解釈とすると，第 1 項は直接的な他者の影響力の活用と見なすことができる．第 2 項は他者が得た間接的な影響力の利用といえる．以上の重みづけの違いとしてαとβというパラメータが導入される[11]．

以上は再帰的な定義式であり，具体的にボナチッチのパワー中心性cを求めるには，以上の連立方程式としての定義式を解かなければならない．

cについて整理して，解くと，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} + \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{c}\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{c} - \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}\\ \Leftrightarrow\ &(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}\\ \Leftrightarrow\ &\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})^{-1}(\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1})\end{aligned}$$

が得られる．

したがって，$\boldsymbol{c}$が定義できるかどうかは，逆行列$(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})^{-1}$が定義できるかどうかという問題に帰着される．適当な線形代数のテキストで示されるように，次に議論する級数の収束によって逆行列の存在は保証される[12]．

すなわち，次のような級数を含んだ等式考察する：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})^{-1}(\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1})\\ &= \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\boldsymbol{R}^{k+1}\boldsymbol{1}\\ &= \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} + \alpha\beta\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{1} + \alpha\beta^2\boldsymbol{R}^3\boldsymbol{1} + \alpha\beta^3\boldsymbol{R}^4\boldsymbol{1} + \cdots.\end{aligned}$$

これより，解釈としては，ボナチッチのパワー中心性とは，間接的なすべての他の主体の効果を含めた上での影響力の総和といえる．

以上の等式の導出は次のようになる．最初の等式は既に議論が終わっているもので，半ば定義式であり，最後の≡は定義式そのものなので，実質的に証明しなければならないのは，真ん中の

$$(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})^{-1}(\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}) = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\boldsymbol{R}^{k+1}\boldsymbol{1}$$

という等式である．

さて，やや天下り式であるが，等比数列の和の公式の導出のように，次の和を考える．すなわち，

$$\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{1} + \beta\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{1} + \cdots + \beta^{n-1}\boldsymbol{R}^n\boldsymbol{1}$$

である．ここで両辺にβRを左から掛けると，

$$\beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_n = \beta\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{1} + \cdots + \beta^{n-1}\boldsymbol{R}^n\boldsymbol{1} + \beta^n\boldsymbol{R}^{n+1}\boldsymbol{1}$$

以上の二つの等式を差し引きすると，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{S}_n - \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{1} - \beta^n\boldsymbol{R}^{n+1}\boldsymbol{1}\\ \Leftrightarrow\ &(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{1} - \beta^n\boldsymbol{R}^{n+1}\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\lim_{n\to\infty}\beta^n\boldsymbol{R}^{n+1}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{0}$$

の成立は前提として，主たる主張を先に導出しておく．なお，この等式の導出はあとでおこなう．すると，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})\boldsymbol{S}_n = \lim_{n\to\infty}[\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} - \beta^n\boldsymbol{R}^{n+1}\boldsymbol{1}]\\ \Leftrightarrow\ &(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{S}_n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{1} - \lim_{n\to\infty}\beta^n\boldsymbol{R}^{n+1}\boldsymbol{1}\\ \Leftrightarrow\ &(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\boldsymbol{R}^{k+1}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{1}\\ \Leftrightarrow\ &\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\boldsymbol{R}^{k+1}\boldsymbol{1} = (\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

が成立する．両辺にαを掛けて，左辺と右辺を入れ替えると，

$$\begin{aligned}&\alpha(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\boldsymbol{R}^{k+1}\boldsymbol{1}\\ \Leftrightarrow\ &(\boldsymbol{I}-\beta\boldsymbol{R})^{-1}(\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}) = \alpha\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\boldsymbol{R}^{k+1}\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

と目的の式が成立する．

最後に，残されていた，

$$\lim_{k\to\infty}\beta^k\boldsymbol{R}^{k+1}\boldsymbol{1} = \boldsymbol{0}$$

を示しておく．ここで次の仮定をしておく，すなわち$\boldsymbol{R}$は対角化可能であるとする[13]．対角化により，

$$\boldsymbol{R}^k = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}$$

となり，$\boldsymbol{A}^k$はその対角要素がk乗となっている．これより，

$$\beta^k\boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{P}^{-1}(\beta^k\boldsymbol{A}^{k+1})\boldsymbol{P}$$

となる．ここでの$\beta^k\boldsymbol{A}^{k+1}$の対角要素は

---

11 しかし，後で見るボナチッチのパワー中心性の展開式において，αは全ての項につくことになる．したがって，Wsserman and Faust (1994, p.209)で述べられるようにこれは指標の大きさを調整するスケールパラメータと解釈した方が良い．またスケールパラメータを導入するメリットととしては，ボナチッチのパワー中心性の値を基準化するときにこのパラメータを調整すればよいことがある．統計ソフト R の sna パッケージでなされる標準化は，各中心性の２乗和が主体数となるようにするものである．この標準化のメリットは真ん中の値を 1 とできる点である．ネットワーク分析ソフトである UCINET でなされる標準化は，各中心性の２乗のルートの和が主体数となるようにすることである．この標準化のメリットは，ユークリッドの距離の概念で，距離の和を主体数として解釈できることである．なお，UCINET で標準化しないときには$\alpha = 1$であり，βの値のみ求められる．

12 例えば，Meyer (2000, p.618)を参照のこと．

13 対角化とは，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$(ただし$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$)と分割できることに他ならない．$n\times n$の正方行列においてどのような行列が対角化可能であろうかという点については，以下の条件が満たされれば十分であることが知られている．つまり，(1)対称行列である，もしくは，(2) n個の固有値がすべて相異なる，もしくは，(3)固有値に重複がある場合は，その重複度と固有空間の次元が同じになる，ということである．なお，上記のAは対角要素以外はすべて0となり，対角要素には固有値が並ぶことが知られている．

$$\beta^k \cdot a_{ii}^{k+1}$$

となっている．ここでa_{ii}は固有値であるから，βを十分に小さくとり，

$$\frac{1}{\beta} > \text{固有値の最大値}$$

となるようにする．すると，任意のiで，

$$|\beta \cdot a_{ii}| = \left|\frac{a_{ii}}{\frac{1}{\beta}}\right| < 1$$

とすることができる．以上より，任意の$1 \leq i \leq n$で，

$$\lim_{k\to\infty} \beta^k \cdot a_{ii}^{k+1} = \lim_{k\to\infty} a_{ii} (\beta \cdot a_{ii})^k = 0$$

が得られる．すなわち，

$$\lim_{k\to\infty} \beta^k \boldsymbol{R}^{k+1} = \boldsymbol{0}$$

が示された．これより，

$$\lim_{k\to\infty} \beta^k \boldsymbol{R}^{k+1} 1 = \boldsymbol{0}$$

が示された．

逆行列の存在についても十分に小さなβをパラメータとして取れば良いことがわかる．

3.2　解釈

以上より，

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} + \alpha\beta\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{1} + \alpha\beta^2\boldsymbol{R}^3\boldsymbol{1} + \alpha\beta^3\boldsymbol{R}^4\boldsymbol{1} + \cdots$$

という関係式が得られた．この式に基づくと社会科学的な意味を取りやすい．第 1 項の$\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}$は各主体の影響力の総和である．第２項については，

$$\alpha\beta\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{1} = \beta\boldsymbol{R}(\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}) = \beta\boldsymbol{R} \times \text{第１項}$$

からわかるように，第 1 項で示された社会的な影響力から，さらに各主体の関係性を経て得ている影響力である．第３項も同様に，

$$\alpha\beta^2\boldsymbol{R}^3\boldsymbol{1} = \beta\boldsymbol{R}\beta\boldsymbol{R}(\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1}) = \beta^2\boldsymbol{R}^2 \times \text{第１項}$$

と，より高次の影響力と解釈できる．パラメータの解釈としては，αは全ての項にかかっているので，単に指標の絶対値を調整しているにすぎない．他方で，βは絶対値を１より小とすると，２次，３次とより高次の影響力を考えるときの影響力の減衰率と解釈できる．

このように，ボナチッチのパワー中心性は，初期の影響力を 1 として，より高次の影響力を全て足しあわせたものと解釈できる．

これは，Bonacich(1987)からの中心性概念であり，「ボナチッチのパワー中心性」と呼ばれる．また，後にみる経済学の文献で用いられるものであり，そこではしばしば単に「ボナチッチ中心性」と呼ばれる．

ここで補足的なコメントをしておく．第一にβについてであるが，負の値を仮定することがある．こうすることで，他者からの負の影響を考慮することができる．研究の発展の経緯からは，このような他者からの負の影響を考慮するために考察された中心性概念がボナチッチのパワー中心性である．しかし，級数に展開したときのβの累乗が奇数の場合にのみ，負の値となるので，この点についてはやや不自然な状況ともいえ，注意しなければならない．

第二に，以上の定義では，各主体の影響力の初期値は全て1とした．しかし，各主体iについてv_iとし，

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

としてことなる値とすることもできる．

このとき，ボナチッチのパワー中心性の定義は，

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{c}$$

となる．

先と全く同じ議論より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= (\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1}(\alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}) \\ &= \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} + \alpha\beta\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{v} + \alpha\beta^2\boldsymbol{R}^3\boldsymbol{v} \\ &\quad + \alpha\beta^3\boldsymbol{R}^4\boldsymbol{v} + \cdots\end{aligned}$$

が得られる．以上の級数の収束は$\lim_{n\to\infty} \beta\, \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{0}$に依存しており，1が$\boldsymbol{v}$に変化してもその性質は変化しない．

全ての項に$\boldsymbol{v}$が含まれており，

$$\lim_{n\to\infty} \beta\, \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{v} = (\lim_{n\to\infty} \beta\, \boldsymbol{R}^n) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

となることに注意すると[14]，初期値の効果が中心性の指標に最後まで残ることがわかる．特にβがより小さいときにその効果はより大きくなる．

3.3　経済学の均衡概念での中心性

Ballester et al. (2006)ではボナチッチのパワー中心性がナッシュ均衡における行動水準と関係があることが示された．ただし，そこでの指標は$\alpha = 1$としたときのボナチッチのパワー中心性をアフィン変換した指標であり

$$\hat{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{1} \tag{36}$$

となる．

より具体的には，係数としてβを掛け，定数に1を加えたアフィン変換である．つまり，

$$\begin{aligned}&1 + \beta\boldsymbol{c} \\ &= 1 + \beta(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} \\ &= [\boldsymbol{I} + \beta(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{R}]\boldsymbol{1} \\ &= [\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1}(\beta\boldsymbol{R})]\boldsymbol{1} \\ &= [(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1}(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R}) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1}(\beta\boldsymbol{R})]\boldsymbol{1} \\ &= [(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1}(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R} + \beta\boldsymbol{R})]\boldsymbol{1} \\ &= [(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1}]\boldsymbol{1} \\ &= \hat{\boldsymbol{c}}\end{aligned}$$

となる．以上ではcが$\alpha = 1$の時のボナチッチのパワー中心性である．

形式的には以上の通りであるが，社会科学的な意味はどうであろうか．ボナチッチのパワー中心性をアフィン変換した指標は，

$$(\boldsymbol{I} - \beta\boldsymbol{R})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\boldsymbol{R})^k$$

にも注意すると，

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{c}} &\equiv \boldsymbol{1} + \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{c} \\ &= \boldsymbol{1} + \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} + \beta^2\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{1} + \cdots\end{aligned}$$

となる．これとボナチッチのパワー中心性の定義

$$\boldsymbol{c} \equiv \alpha\boldsymbol{R}\boldsymbol{1} + \beta\boldsymbol{R}\boldsymbol{c}$$

14　固有ベクトル中心性の議論により，$\lim_{n\to\infty} \beta\, \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{v}$ の値において初期値vの影響はなくなる．

$$= \alpha \boldsymbol{R1} + \beta \boldsymbol{R}(\alpha \boldsymbol{R1}) + \beta^2 \boldsymbol{R}^2(\alpha \boldsymbol{R1}) + \cdots$$

と比較すると，各主体の初期値としての影響力の置き方の違いとわかる．Ballester et al. (2006)では，単に全て 1 として 1 を用いている．しかし，ボナチッチのパワー中心性では，はじめに 1 として，さらに，隣接行列の効果を加えた$(\alpha \boldsymbol{R1})$を初期値としている．

先に述べたようにボナチッチのパワー中心性においては，初期値の効果は中心性の値に影響を与えるので，この意味で Ballester et al. (2006)とボナチッチのパワー中心性とで値は実質的に異なってくる．ただし，その大小関係だけに注目するならば[15]，上記の 2 つの指標はアフィン変換の関係なので実質的な違いはない．

他にも，Calvo-Armengol and Beltran (2009)の knowledge index の概念もこのアフィン変換したボナチッチのパワー中心性の概念である．数学的にはアフィン変換かどうかであるが，社会科学的な意味合いとすると，初期値の影響力の違いが異なるということである．加えて，Fujiyama (2012)では，初期値が1ではなく，各主体で異なる値を持つような形で定義された knowledge index が用いられている．

4. 固有ベクトル中心性とボナチッチのパワー中心性

固有ベクトル中心性$(\boldsymbol{c}^E)$とボナチッチのパワー中心性$(\boldsymbol{c}^B)$の相違について確認する． 形式的には，

$$\boldsymbol{c}^E = \frac{1}{\lambda^*} \boldsymbol{R} \boldsymbol{c}^E$$

$$\boldsymbol{c}^B = \beta \boldsymbol{R} \boldsymbol{c}^B + \alpha \boldsymbol{R1}$$

となる．固有ベクトル中心性と比較して，ボナチッチのパワー中心性はパラメータにより自由度を持たせて，かつ，初期値の項を加えたものとなる[16]．

以上のように，両者の定義は形式上は似ているが，その解釈は大きく異なる．というのも，固有ベクトル中心性の考え方とは，初期のパワーベクトルの$\boldsymbol{R1}$に対してどんどん$\boldsymbol{R}$を掛けていき，社会的関係を考慮していき，その極限としての

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{1}$$

をその影響力としての指標とすることであった．そして，そこでは，上記で便宜上用いた$\boldsymbol{1}$は他の一般的な$\boldsymbol{v}$とおいてもその値は変わらず，得られたベクトルの方向性という意味では，影響力の初期値に依存しない指標が得られた．例えば，$\boldsymbol{1}$ではなく$\alpha \boldsymbol{R1}$を用いても，

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{1} // \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}^n (\alpha \boldsymbol{R1})$$

となる．作り方より，その違いは，初期値ベクトルを固有ベクトルで表現したときの，最大固有値の係数の違いとなる．

このように，社会関係の無限の連鎖の収束値において社会的影響力を測ることが固有ベクトル中心性で特徴的な点となる．

他方において，ボナチッチのパワー中心性では，社会的な関係の連鎖を級数として，つまり，各段階の効果を割引を考えながら足し合わせることで考慮する．すなわち，

$$\alpha \boldsymbol{R1} + \beta \boldsymbol{R}(\alpha \boldsymbol{R1}) + \beta^2 \boldsymbol{R}^2(\alpha \boldsymbol{R1}) + \cdots$$

をその影響力としての指標とした．ここでは各主体の影響力の初期ベクトルである$(\alpha \boldsymbol{R1})$が値に大きな影響を与える．つまり，単に関係の連鎖の極限ではなく，その前の各ステップを考慮することにより，初期値の効果が有意な影響をあたえる中心性の指標が得られたのである．

以上のように，固有ベクトル中心性とボナチッチのパワー中心性とは，形式的な類似点以上の違いがある．すなわち，

- 固有ベクトル中心性は一つの項に注目した関係の無限連鎖の収束値である．
- ボナチッチのパワー中心性は関係の無限連鎖を各項ごとに足し合わせることで得られる級数の収束値である．
- 単なる一つの項の収束値か級数かの違いは，初期値が中心性の指標に実質的に意味を与えるかどうかという違いに現れてくる．

がいえる．

固有ベクトル中心性と基本的に同じ考え方をもつ PageRank はインターネット上の Web ページの関係性について述べている．つまり，このようなマクロ的もしくはグローバルな関係を記述するときには，初期値にも依存しないより抽象度の高い指標が有効となっている．

他方で，ボナチッチのパワー中心性に準じた概念が経済学のモデルの均衡概念の中で導出されることは，よりローカルな状況の記述には，初期値の影響も重要であることを意味しているといえる．

5. むすび

本稿ではボナチッチにより提唱された 2 つの中心性概念について整理をした．これらは情報学や経済学でも用いられている概念である．

なお，Wasserman and Faust (1994, p.207) では，最初に述べた 対処 1 で得られる手法を推奨している．他の中心性の指標については，” such rifinements are unnecessarily complicated”と述べている．しかしながら，以上で確認したように，第一に「対処 1 および固有ベクトル中心性」と「ボナチッチのパワー中心性」はその社会科学的な意味が異なってくる．さらに，「対処 1」は「固有ベクトル中心性」と比較しても，各行の総和を 1 とすることで，各主体の影響力が均等化している．このような平等性が強い仮定がなされる上での指標である．したがって，「対処 1」は恣意的なパラメータや変換が少なく望ましい指標という解釈は必ずしもできない．

15 経済学の用語であれば基数ではなく序数の意味での大小関係に注目するならばという意味である．

16 固有ベクトル中心性において最大固有値が 1 となる場合，

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{Rc}$$

が得られ，本節のもともとの問題意識にあう定式化が可能である．

こうした理解を得るには，ひとつひとつ定義にさかのぼり考察していかなければならない．こうした観点から，本稿では，元々の定義と数学的な展開と社会科学的な解釈について概念整理を試みたのである．

謝辞

獨協大学情報学研究所の研究員として助成を受けている．最後に，査読者より，コメントをいただき，読みやすさについて改善ができた．ここに記して謝意を表する．もちろん，残りうる問題は全て筆者の責任である．

参考文献

(1) Ballester, C., A. Calvo-Armengol, and Y. Zenou(2006) "Who's who in networks. wanted: the key player," Econometrica, pp. 1403{1417.

(2) Bonacich, Philip (1972) "Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification," Journal of Mathematical Sociology, Vol. 2 (1), pp. 113-120.

(3) Bonacich, Philip (1987) "Power and centrality: a family of measures," American Journal of Sociology, Vol. 29 (5), pp. 1170-1182.

(4) Calvo-Armengol, Antoni and Joan de Marti Beltran (2009) \Information gathering in organizations: equilibrium, welfare, and optimal network structure," Journal of the European Economic Association, Vol. 7, No. 1, pp. 116-161.

(5) Fujiyama, Hideki (2012) "Information Structure and Coordination in Organization." (The Fifth Joint Japan-North America Mathematical Sociology Conference, Colorado Convention Center).

(6) Meyer, Carl D. (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM.

(7) Wasserman, Stanley and Katherine Faust (1994) Social Network Analysis: Methods and Applications (Structural Analysis in the Social Sciences), Cambridge University Press.

(8) 安田雪(2001) 『実践ネットワーク分析- 関係を解く理論と技法』，新曜社.

(9) 金光淳(2003) 『社会ネットワーク分析の基礎- 社会的関係資本論にむけて』，勁草書房.

(10) 三宅敏恒(1991) 『入門線形代数』，培風館.

(11) 鈴木努(2009) 『ネットワーク分析(R で学ぶデータサイエンス 8)』，共立出版.

(2012 年 9 月 21 日受付)
(2012 年 12 月 19 日採録)