A INTEGRAL INICIAL

Eleni Bisognin

Departamento de Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas. UFSM. Santa Maria, RS.

RESUMO

Neste trabalho define-se o que se entende por integral inicial e demonstra-se que a integral de Riemann sobre o conjunto R([a,b]; ℝ) das funções definidas no intervalo [a,b], integráveis, é uma integral inicial.

A seguir demonstra-se o teorema da convergência dominada de Arzelá no contexto da teoria de Riemann.

SUMMARY

BISOGNIN,E., 1981. The initial integral. Ciência e Natura (3):5-11.

The pourpouse of this work is to define what is understood by initial integral and also to demonstrate that Riemann's integral over the set R([a,b];ℝ) of the integrable defined functions in the compact interval [a,b], is an initial integral.

The Arzelá's Dominated Convergence Theorem in Riemann's theory context is demonstrated.

INTRODUÇÃO

As integrais clássicas, como por exemplo a integral de Riemann, gozam da propriedade de passagem ao limite. Seguindo as noções apresentadas por Luxemburg (4) é dada uma versão do teorema da convergência dominada, cujas idéias iniciais foram apresentadas por Arzelá (1) no contexto da teoria de Riemann.

Neste trabalho foi feito o estudo preliminar demonstrando que a integral de Riemann é uma integral inicial.

REVISÃO DA LITERATURA

Seja X um conjunto qualquer e F(X,ℝ) o conjunto de todas as funções reais definidas em X. Dizemos que E⊂F(X,ℝ) é um *clã* se as seguintes condições são verificadas:

a) E é um subespaço vetorial de F(X;ℝ).

b) Toda função f∈E é limitada.

c) Se F∈E e g:ℝ→ℝ é uma função contínua com g(0)=0, então g∘f∈E.

Como exemplo de *clãs* temos:

a) O conjunto C([a,b];ℝ) das funções reais contínuas no intervalo [a,b].

b) O conjunto Esc([a,b];ℝ) das funções reais escalonadas no intervalo [a,b].

c) O conjunto Reg($[a,b]$;$\mathbb{R}$) das funções reais reguladas, definidas em $[a,b]$. (Dizemos que uma função f definida no intervalo $[a,b]$ é uma função regulada se existe o limite à direita $f(x+)$ para todo $x \in [a,b[$ e existe o limite à esquerda $f(x-)$ para todo $x \in]a,b]$).

d) O conjunto D($[a,b]$;$\mathbb{R}$) das funções reais limitadas com um número finito de descontinuidades em $[a,b]$.

A verificação de que os conjuntos a) b) c) d) constituem *clãs* é simples. Estes conjuntos são também *clãs* de funções integráveis à Riemann.

e) O conjunto R($[a,b]$;$\mathbb{R}$) das funções reais limitadas, definidas em $[a,b]$, integráveis à Riemann, é um *clã* de funções que contém os *clãs* anteriores.

A demonstração de que R($[a,b]$;$\mathbb{R}$) é um *clã* encontra-se em (2) no Teorema 2.4.

f) O conjunto C(X;$\mathbb{R}$) de todas as funções reais, contínuas, definidas no espaço compacto X.

g) O conjunto BC(X;$\mathbb{R}$) de todas as funções reais, contínuas e limitadas sobre o espaço topológico X.

DESENVOLVIMENTO

Foi citado anteriormente que a integral de Riemann goza da propriedade de passagem ao limite. Exemplifica-se, desenvolvendo o caso particular da restrição da integral de Riemann ao conjunto C($[a,b]$;$\mathbb{R}$).

Teorema 1

Seja (f_n) uma seqüência decrescente de funções reais contínuas sobre o intervalo compacto $[a,b]$ pontualmente convergente para zero sobre $[a,b]$. Então $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt=0$.

Demonstração

O teorema de Dini (5), afirma que (f_n) converge para zero uniformemente. Então, pelo teorema 2.2 em (2), $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt=\int_a^b(t)dt=0$.

No teorema demonstrado está em jogo o funcional linear positivo $f \longmapsto \int_a^b f(t)dt$ sobre o *clã* C($[a,b]$;$\mathbb{R}$).

Teorema 2

Seja X um conjunto e $E \subset F(X;\mathbb{R})$ um espaço vetorial. Se $\mu: E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo, são equivalentes as proposições seguintes:

I) Se $(f_n) \subset E$ é uma seqüência crescente e pontualmente convergente para $f_0 \in E$, então $\mu(f_n)$ converge para $\mu(f_0)$.

II) Se $(g_n) \subset E$ é uma seqüência decrescente e pontualmente convergente para $g_0 \in E$ então $\mu(g_n)$ converge para $\mu(g_0)$:

III) Se $(g_n) \subset E$ é uma seqüência decrescente pontualmente convergente para zero, então $\mu(g_n)$ converge para zero.

IV) Se $(h_n) \subset E$ é uma seqüência de termos positivos com $\sum_{n=1}^{\infty} h_n = h_o, h_o \in E$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(h_n) = \mu(h_o)$.

Demonstração

(I) implica (II). Como $(g_n) \subset E$ é uma seqüência decrescente, então $(g_1 - g_n) \subset E$ é uma seqüência crescente e $(g_1 - g_n)$ converge para $(g_1 - g_o)$. Por (I), segue-se que $\mu(g_1 - g_n)$ converge para $\mu(g_1 - g_o)$; logo $\mu(g_n)$ converge para $\mu(g_o)$.

(II) implica (III). A condição (III) é um caso particular de (II).

(III) implica (IV). Temos que $(h_o - \sum_{j=1}^{n} h_j)$ é uma seqüência de E que decresce para zero. Por hipótese $\mu(h_o - \sum_{j=1}^{n} h_j)$ converge para zero, então $(\mu(h_o) - \sum_{j=1}^{n} \mu(h_j))$ converge para zero, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(h_n) = \mu(h_o)$.

(IV) implica (I). Seja $\sum_{n=1}^{\infty} h_n = h_o$ com $h_n \geq 0$, para todo n tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(h_n) = \mu(h_o)$ e $(f_n) \subset E$, uma seqüência crescente de funções com f_n convergindo para f_o, $f_o \in E$.

Tomando-se $h_1 = f_1$, $h_2 = f_2 - f_1, \ldots h_n = f_n - f_{n-1}$ a seqüência das reduzidas será: $s_1 = f_1$, $s_2 = f_2, \ldots$ $s_n = f_n$. Como a série dada converge a seqüência das reduzidas é convergente, então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(h_n) = \mu(f_o); \text{ logo } \mu \text{ converge para } \mu(f_o).$$

As proposições equivalentes do teorema anterior são as condições de Lebesgue-Daniell.

Definição

Seja $E \subset F(X;\mathbb{R})$ um espaço vetorial e $\mu: E \to \mathbb{R}$ um funcional. μ é uma *integral inicial* em X se:

i) E é um *clã* em X.

ii) $\mu . E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear positivo em E.

iii) μ satisfaz as condições de Lebesgue-Daniell.

Exemplo

Seja X um espaço localmente compacto de Hausdorff e $K(X;\mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas de suporte compacto definidas em X. Todo funcional linear positivo $\mu: K(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma integral inicial.

Com efeito, tem-se que $K(X;\mathbb{R})$ é um *clã* e μ um funcional linear positivo, logo basta mostrar que μ satisfaz uma das condições de Lebesgue-Daniell.

Seja $(f_n) \subset K(X;\mathbb{R})$ uma seqüência crescente de funções tal que $\sup f_n = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_o$, $f_o \in K(X;\mathbb{R})$. O suporte de f_n, $n=0, 1, 2\ldots$ é um compacto contido na união dos suportes de f_1 e f_o.

Seja K=suporte f_1 união suporte f_o. K é um compacto contido em X e suporte de f_n está contido em K. Seja $x \in X$ tal que $f_n(x) \neq 0$. Se $f_n(x)<0$, então $f_1(x)<0$ logo x pertence ao suporte discreto de f_1; se $f_n(x)>0$ então $f_o(x)>0$, logo x pertence ao suporte discreto de f_o.

A seqüência (f_n) é crescente e $(f_{n/K})$ isto é, f_n restrita ao conjunto K converge para $f_{o/K}$, logo pelo teorema de Dini, a convergência é uniforme em K. Como K é um compacto em X, existe um compacto K' contido em X tal que K está contido no interior de K' e existe uma função $g: X \to \mathbb{R}$, contínua de suporte compacto $0 \leq g \leq 1$, tal que:

$g(x)=1$ para todo $x \in K$ e

$g(x)=0$ para todo $x \in \overline{CK}'$.

Então, dado $\epsilon>0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x)-f_o(x)|<\epsilon$ para todo $x \in X$ e $n \geq n_o$, dai $|f_n - f_o| \leq \epsilon . g$. Como μ é um funcional linear positivo tem-se que $|\mu(f_n)-\mu(f_o)| \leq \mu(|f_n - f_o| \leq \epsilon\mu(g)$.

Exemplo

Seja X um espaço compacto de Hausdorff e $C(X;\mathbb{R})$ o *clã* das funções reais contínuas definidas em X. Todo funcional linear positivo $\mu: C(X;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é uma integral inicial em X.

Este exemplo é um caso particular importante do exemplo anterior.

Na terminologia de Bourbaki (3), μ é a medida de Radon positiva em X.

Teorema 3

Seja $E \subset F(X;\mathbb{R})$ um *clã* e $\mu: E \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo. São equivalentes as duas seguintes condições:

I) μ é uma integral inicial.

II) Se $(f_n) \subset E$ converge pontualmente para $f_o \in E$ e existe $g \in E$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n=1, 2, \ldots$ então $\mu(f_n) \to \mu(f_o)$.

Demonstração

(I) implica (II). Sem perda de generalidade assume-se $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e para todo n e $f(x)=0$ para todo $x \in X$.

Seja $g_{n,m} = \max(f_n, f_{n+1}, \ldots, f_m)$ para cada par de índices $m \geq n$. Então $0 \leq g_{n,m} \in E$ e $g_{n,m} \leq g$ para todo $m \geq n$, $g \in E$.

Para cada n, a seqüência $(g_{n,m})$ é crescente e limitada em $m > n$. Para cada $\epsilon > 0$ e para cada n, existe um $m_n > m$ tal que $m_n < m_{n+1}$ e $0 \leq \mu(g_{n,K}) - \mu(g_{n,m_n}) \leq \epsilon/2^n$ para todo $K \geq m_n$.

Para simplificar põe-se $g_{n,m_n} = u_n$. Então $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup u_n(x)$ $\leq \lim\limits_{n\to\infty} \sup f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in X$. Para cada n, tem-se:

$$0 \leq f_n \leq u_n \leq \min(u_1, \ldots u_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (\max(u_i, \ldots u_n) - u_i)$$

Esta desigualdade é verdadeira porque para $1 \leq i \leq n$, $0 \leq u_n = u_i + (u_n - u_i) \leq u_i + (\max(u_i, \ldots u_n) - u_i) \leq u_i + \sum_{K=1}^{n-1} (\max(u_k, \ldots, u_n) - u_K)$.

Visto que $\max(u_i, \ldots u_n) - u_i = \max(f_i, \ldots f_{m_n}) - u_i = g_{i,m_n} - g_{i,m_i}$ e $m_n > m_i$ para $n > i$ conclui-se que, $\mu(\max(u_i, \ldots u_n) < \epsilon/2^i$ para $1 \leq i \leq n$ e então para cada n, $0 \leq \mu(f_n) \leq \mu(\min(u_i, \ldots u_n) + \epsilon \frac{1}{2^{n-1}}$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$ para todo $x \in X$, tem-se que a seqüência $(\min(u_1, \ldots, u_n))$ decresce para zero, logo para todo $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu$ (min $(u_1, \ldots u_n)) = 0$. Segue-se então que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n) = 0$.

(II) implica (I). É imediato.

O tipo de convergência considerada no ítem (II) do teorema anterior é chanada de convergência dominada.

A integral de Riemann como uma integral inicial

Prova-se que a integral de Riemann sobre $[a,b]$ é uma integral inicial. Arzelã chegou a esse resultado, mas a denominação é posterior.

Preliminarmente, mostra-se que as integrais de Riemann das funções contínuas e das funções escalonadas sobre $[a,b]$ podem ser usadas para calcular a integral superior e a integral inferior de uma função limitada f sobre $[a,b]$.

Esse é o conteúdo essencial do lema que segue.

Lema

Para cada função limitada $f \geq 0$ e cada $\epsilon > 0$ existe uma função contínua $g \in C([a,b]; \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leq g \leq f$ e $\underline{\int_a^b} f \leq \int_a^b g + \epsilon$.

Demonstração

Para cada $\epsilon > 0$, existe uma função escalonada s em $[a,b]$ satisfazendo $0 \leq s \leq f$ e $\underline{\int_a^b} f \leq \int_a^b s + \epsilon/2$.

A função escalonada s pode ser transformada na função tra pezoidal g tal que, $0 \leq g \leq s$ e $\int_a^b \leq \int_a^b + \varepsilon/2$. segue-se então que existe uma função contínua g com $0 \leq g \leq f$ e $\underline{\int}_a^b f \leq \int_a^b g + \varepsilon$.

Teorema 4

Seja (f_n) uma seqüência decrescente de funções integráveis em $[a,b]$. Se $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$ então $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx=0$, ou seja, a integral de Riemann $f \to \int_a^b f$ é uma integral inicial sobre $R([a,b]; \mathbb{R})$.

Demonstração

Segue do lema anterior que para cada $\varepsilon>0$ e para cada n, existe uma função contínua g_n tal que $0 \leq g_n \leq f_n$ e $\int_a^b f_n(x)dx \leq \int_a^b g_n(x)dx + \varepsilon/2^n$.

Para cada n, seja $h_n=\min(g_1,\ldots g_n)$. Então $0 \leq h_n \leq f_n$, h_n é contínua, n=1,2... e a seqüência (h_n) decresce para zero para todo $x \in [a,b]$. Pelo teorema de Dini, a seqüência (h_n) decresce para zero uniformemente em $[a,b]$, logo $\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)dx=0$.

A prova do teorema estará concluida se for provada a desigualdade:

$$0 \leq \int_a^b f_n(x)dx \leq \int_a^b h_n(x)dx + \varepsilon(1 - \frac{1}{2^n}).$$

Como a seqüência (f_n) é decrescente tem-se que para cada n, $f_n = \min(f_1,\ldots,f_n)$ e então:

$$0 \leq f_n - h_n=\min(f_1,\ldots, f_n)- \min(g_1,\ldots,g_n) \leq \sum_{i=1}^{n}(f_i-g_i).$$

Segue-se que para cada n,

$$0 \leq \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b h_n(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} \int_a^b(f_i(x) - g_i(x))dx \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon/2^i =$$

$$= \varepsilon(1 - \frac{1}{2^n}),$$ o que conclui a demonstração.

Isso prova que a integral de Riemann $f \to \int_a^b f$ sobre $R([a;b]; \mathbb{R})$ satisfaz as condições de Lebesgue-Daniell, logo é uma integral inicial pois $R([a,b]; \mathbb{R})$ é um *clã*.

CONCLUSÃO

Ficou comprovado neste trabalho que a restrição da integral de Riemann a todo *Clã* E contido no *clã* $R([a;b];\mathbb{R})$ das funções reais definidas em $[a,b]$ integráveis à Riemann, é uma integral inicial. Como os conjuntos $C([a,b];\mathbb{R})$; $D([a;b];\mathbb{R})$; $Reg([a,b] ; \mathbb{R})$e

Esc$[a,b]$;$\mathbb{R}$) são *clãs* de funções integráveis, então a integral de Riemann elementar é uma integral inicial.

Num estudo posterior poderá obter-se a integral inicial associada a uma medida de Lebesgue, o prolongamento de Darboux de uma integral inicial e o teorema de Representação de Riesz, o qual afirma que, toda integral inicial é a restrição de uma Integral de Riemann Abstrata, definida por uma medida inicial (2).

BIBLIOGRAFIA

1. ARZELÃ, C. *Sulli Integrazione per Serie, Atti Acc.* Lincei Rend, Rome, (4) 1(1885), 532-537.
2. BISOGNIN, E. *A Integral de Riemann Abstrata e o Teorema de Representação de Riesz.* Rio de Janeiro. 1979. (Tese de Mestrado - UFRJ).
3. BOURBAKI, N. *Integration, Chap. I, II, III, IV.* Paris. 1952.
4. LUXEMBURG, W.A.J. *Arzelã's Dominated Convergence Theorem for the Riemann Integral.* American Mathematical Monthly, 78(1971),970-979.
5. RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition.Mc. Graw-Hill.

Recebido em maio, 1981; aceito em novembro, 1981.