

## A Ferradura de Medida Positiva A Horseshoe with Positive Measure

Anderson L. Maciel<sup>1</sup>; Alessandra Kreutz<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Professor Adjunto do Departamento de Matemática - UFSM - Santa Maria, RS, Brasil

<sup>2</sup>Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática - UFSM - Santa Maria, RS, Brasil

### Resumo

O presente artigo visa estabelecer as bases para a construção da ferradura de Smale com medida positiva, originalmente apresentada por Rufus Bowen em um artigo de 1975. Para isso, iniciaremos com a construção da clássica ferradura de Stephen Smale, apresentada por Smale em 1967. Considerando uma figura  $D$  em forma de estádio no plano, que contém um quadrado  $Q$ , faremos uma contração e expansão de  $D$  a fim de obter uma figura em forma de ferradura. As operações de contração e expansão definem uma função  $f : D \rightarrow D$ . Definimos então a ferradura de Smale como o conjunto  $\Lambda$  dos pontos  $q \in Q \subset D$  que permanecem em  $Q$  após iterações futuras e passadas da aplicação  $f$ . Esse conjunto  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor. A ferradura de Bowen, ou seja, a ferradura de Smale de medida positiva, é um conjunto que duplica a ferradura de Smale.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos, ferradura de Smale, Conjunto de Cantor.

### Abstract

The present paper aims to establish the bases for the construction of the Smale's Horseshoe with positive measure, originally presented by Rufus Bowen in an article from 1975. To attain this, we start with the construction of Stephen Smale's classical horseshoe, presented by Smale in 1967. Considering figure  $D$  in the shape of a stadium on the plane, which contains one square,  $Q$ , we will make one contraction and one expansion of  $D$  to obtain a figure which looks like a horseshoe. The operations of contracting and expanding define one function, that is,  $f : D \rightarrow D$ . We define Smale's horseshoe as set  $\Lambda$  of points  $q \in Q \subset D$  which belong to  $Q$  after future and past interactions of function  $f$ . This set  $\Lambda$  is a Cantor set. Bowen's horseshoe, i.e., Smale's horseshoe of positive measure, is a set which duplicates Smale's horseshoe.

**Keywords:** Dynamical systems, Smale's horseshoe, Cantor set.

# 1 Introdução

Sejam  $M$  um conjunto não vazio de pontos e  $f : M \rightarrow M$  uma função. O par  $(M, f)$  é chamado de *sistema dinâmico*.

Seja  $x \in M$  um ponto qualquer. A *órbita positiva* de  $x$  com relação a  $f$  é o conjunto

$$O_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\},$$

onde  $f^j(x) = f(f^{j-1}(x))$ , para  $j$  um inteiro positivo. Portanto,  $O_f^+(x)$  é o conjunto dos pontos de  $M$  que são iterações sucessivas de  $x$  pela função  $f$ . Se  $f$  é inversível, definimos a *órbita negativa* de  $x$  com relação a  $f$  por  $O_f^-(x) = \{f^{-m}(x); m \in \mathbb{N}\}$ . A *órbita completa* de  $x$ , ou simplesmente *órbita* de  $x$ , com relação a  $f$ , é o conjunto  $O_f(x) = O_f^+(x) \cup O_f^-(x)$ .

De maneira geral, um dos objetivos da teoria de sistemas dinâmicos é o estudo dos conjuntos  $O_f(x)$  para todo  $x \in M$ , ou seja, é uma teoria que dá elementos para prever o que ocorrerá no futuro de um determinado sistema, bem como trata do passado desse sistema. Referências para um estudo mais aprofundado desse assunto são Brin (2002), Devaney (1994), Nitezcki (1971), Palis (1982), e Smale (1967).

Dizemos que  $x$  é um *ponto periódico* de  $f$  se o conjunto  $O_f^+(x)$  for finito, ou seja, se existir  $n$  o menor inteiro positivo tal que  $f^n(x) = x$ . Nesse caso, dizemos que o ponto  $x$  é *periódico de período  $n$* . O conjunto  $Per(f)$  é o conjunto de todos os pontos periódicos de  $f$ , de qualquer período. O estudo de pontos periódicos é um assunto importante seja pelas aplicações ou pelo conhecimento da dinâmica da função envolvida. Porém, descobrir a quantidade de pontos periódicos de uma aplicação e quais os períodos desses pontos pode ser um trabalho não trivial. Um resultado interessante que nos auxilia nesse aspecto é o conhecido Teorema de Sarkovskii. Esse teorema afirma que, considerando a ordem de Sarkovskii dos números naturais, dada por

$$\begin{aligned} &3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 11 \triangleright \dots \triangleright 2n + 1 \triangleright \dots \triangleright \\ &\triangleright \dots \triangleright 2.3 \triangleright 2.5 \triangleright 2.7 \triangleright 2.11 \triangleright \dots \triangleright 2(2n + 1) \triangleright \dots \triangleright \\ &\triangleright \dots \triangleright 2^2.3 \triangleright 2^2.5 \triangleright 2^2.7 \triangleright 2^2.11 \triangleright \dots \triangleright 2^2(2n + 1) \triangleright \dots \triangleright \\ &\vdots \\ &\triangleright \dots \triangleright 2^{k+1} \triangleright 2^k \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1 \end{aligned}$$

e sendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua que possui um ponto periódico de período  $m$ , e se  $m \triangleright l$ , na ordem de Sarkovskii, então  $f$  também possui um ponto periódico de período  $l$ .

Portanto, pelo teorema de Sarkovskii, se uma função real contínua tem um ponto periódico de período 3, então ela tem pontos periódicos de todos os períodos. A força do Teorema de Sarkovskii se dá na hipótese,

bastando que a função seja real a valores reais e contínua, porém sua fraqueza é sentida caso queiramos saber a quantidade de pontos periódicos de determinado período. Outro fato é que não há um equivalente ao Teorema de Sarkovskii para dimensões maiores.

Em Devaney (1994) há um estudo de  $Per(F_\mu)$ , onde  $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a família a um parâmetro,  $\mu \in \mathbb{R}$ , de funções quadráticas dadas por  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ . Cada uma dessas funções é comumente chamada de *logística* e suas aplicações são evidenciadas, principalmente, na área de biomatemática. No seu livro Devaney apresenta por exemplo, a existência de um ponto periódico de período 3, para  $\mu > 4$ , e portanto, pelo Teorema de Sarkovskii, ocorre a existência de pontos periódicos de todos os períodos. Além disso, temos a existência de um conjunto  $\Lambda$ , para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , cujos pontos periódicos formam um conjunto denso em  $\Lambda$ . O conjunto  $\Lambda$  é na verdade um conjunto de Cantor. Esse exemplo nos dá uma ideia da complexidade que pode apresentar o conjunto dos pontos periódicos de um sistema dinâmico

Outro tipo de ponto particularmente interessante, é chamado de *ponto fixo* de  $f$  e satisfaz  $f(x) = x$ , para  $x \in M$ . O conjunto de todos os pontos fixos de  $f$  é denotado por  $Fix(f)$ . Um resultado útil para verificar a existência e unicidade de ponto fixo para uma função  $f$ , é o Teorema da Contração. O ponto chave desse resultado é considerar que a função  $f$  envolvida contraia intervalos, ou seja, a função  $f : M \rightarrow M$  deve ser uma *contração*. Dizemos que  $f$  é uma contração se existe um número  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \lambda < 1$ , tal que para todos  $x, y \in M$  vale que  $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$ , onde utilizamos a norma usual do plano.

**Teorema 1** (Teorema da Contração). Sejam  $M \subset \mathbb{R}^2$  um subconjunto fechado e  $f : M \rightarrow M$  uma contração. Então,  $f$  possui um único ponto fixo  $\bar{x} \in M$ . Além disso  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \bar{x}$ , para todo  $x \in M$ .

Além de  $Per(f)$  e  $Fix(f)$ , outro conjunto importante em um sistema dinâmico  $(M, f)$  é o *conjunto não-errante*  $\Omega(f)$ , que é formado pelos pontos que são, no sentido das vizinhanças do ponto em questão, quase um ponto periódico, ou seja, é periódico considerando que os pontos de uma vizinhança retornam em algum tempo para essa vizinhança. Formalmente, esse conjunto contém todos os pontos  $p$  de  $M$  tais que se  $U$  é uma vizinhança de  $p$  em  $M$  então existe um número inteiro  $n > 0$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ .

O conjunto não-errante é invariante por  $f$ , ou seja  $f(\Omega(f)) \subseteq \Omega(f)$  e também é um conjunto fechado.

O *Closing Lemma* é um problema em aberto até os dias de hoje, e que relaciona pontos periódicos e o conjunto não-errante de  $f$ . Esse problema questiona a veracidade da igualdade  $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$  considerando  $f$  um dife-

omorfismo genérico de classe  $C^r$ ,  $r > 1$ ,<sup>1</sup> definido em uma variedade compacta de dimensão  $n$ . Detalhes sobre esse problema podem ser encontrados em Palis (1982).

Continuando com a análise dos elementos dinâmicos de uma função, vamos agora nos restringir ao sistema dinâmico  $(\mathbb{R}^2, f)$  onde  $f$  é um difeomorfismo. Assim, nesse caso, dizemos que o subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  é um *conjunto hiperbólico* para  $f$  se satisfizer:

1. Para cada  $p \in A$  existe um par de retas  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  no plano tangente em  $p$ , que são invariantes por  $Df(p)$ .
2.  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  variam continuamente com  $p$ .
3. Existe uma constante  $\lambda > 1$  tal que  $\|Df(p)(v)\| \geq \lambda\|v\|$  para todo  $v \in W^u(p)$  e  $\|Df^{-1}(p)(v)\| \geq \lambda\|v\|$  para todo  $v \in W^s(p)$ .

As retas  $W^s(p)$  e  $W^u(p)$  são chamadas de *conjunto estável* e *instável*, respectivamente, de  $p$ . Essas retas ditam o comportamento dos pontos próximos ao conjunto  $A$ , ou seja,  $W^s(p)$  é a direção de atração ao passo que  $W^u(p)$  é a direção de repulsão, considerando as iteradas da função  $f$ .

Dizemos que o difeomorfismo  $f$  satisfaz o *Axioma A de Smale*, ou simplesmente *Axioma A*, se valer

1.  $\Omega(f)$  é um conjunto hiperbólico;
2.  $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$ .

Se  $f$  satisfaz o Axioma A então  $\Omega(f)$  pode ser decomposto em uma união disjunta e finita de subconjuntos fechados chamados básicos. Essa decomposição é chamada de *decomposição espectral*, e o enunciado preciso bem como a demonstração do resultado que garante a existência dessa decomposição podem ser encontrados em Smale (1967) ou Niteczki (1971).

A ferradura clássica de Smale, nosso foco nesse artigo, é um exemplo de um difeomorfismo  $f$  que satisfaz o Axioma A e a condição de transversalidade, ou seja, os conjuntos estáveis e instáveis de pontos hiperbólicos são transversais entre si. Neste exemplo, temos que  $\Omega(f)$  é decomposto em três conjuntos básicos, a saber, um ponto fixo atrator, um ponto fixo repulsor e, por fim, um conjunto de Cantor onde os pontos periódicos de sela são densos.

Nosso objetivo nesse artigo é apresentar a construção da ferradura de medida positiva. Para isto, vamos seguir a referência Bowen (1975). No citado artigo, temos a prova da existência de um difeomorfismo de classe  $C^1$  satisfazendo o Axioma A e tal que  $\Omega(f)$  possui na sua

<sup>1</sup>Uma função  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$ , é um *difeomorfismo* se  $f$  é bijetora, de classe  $C^r$ , e sua inversa também é de classe  $C^r$ . É *genérico* no sentido topológico de ser um conjunto residual, ou seja, contém uma interseção enumerável de conjuntos abertos e densos na topologia  $C^r$ .

decomposição uma ferradura de Smale de medida de Lebesgue positiva.

Na segunda seção desse trabalho apresentamos uma introdução ao conjunto de Cantor com algumas propriedades básicas. A seção 3 está dedicada à construção da ferradura de Smale, onde utilizaremos Ferreira (2007) e principalmente Devaney (1994). Na última seção apresentamos o estudo da ferradura de Smale com medida positiva, seguindo Bowen (1975).

## 2 Conjunto de Cantor

Uma das várias contribuições do matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) foi a construção de um subconjunto de  $[0,1]$ , com várias propriedades interessantes, através de um processo iterativo. O resultado desse processo é chamado *Conjunto Ternário de Cantor*, ou *Conjunto do Terço Médio de Cantor*.

Iniciando com o intervalo  $[0,1]$ , vamos retirar o seu terço médio  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ . Teremos então dois intervalos fechados remanescentes. De cada um desses intervalos retiramos o terço médio aberto e obtemos quatro intervalos fechados remanescentes. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto dos pontos que permaneceram após esse processo é o *Conjunto Ternário de Cantor*  $K$ . Denotando por  $E_1, E_2, \dots$  os terços médios retirados, indicamos o conjunto de Cantor por  $K = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .

**Definição 1.** Um subconjunto  $K$  de um intervalo real  $I$  é um *Conjunto de Cantor* se ele é fechado, totalmente desconexo e um subconjunto perfeito de  $I$ . Um conjunto é totalmente desconexo se ele não contém intervalos, e é perfeito se todo ponto é um ponto de acumulação do conjunto.

**Proposição 1.**  $K$  é um conjunto de Cantor.

*Demonstração.*  $K$  é um conjunto fechado, pois estamos removendo intervalos abertos de um intervalo fechado, logo permanecemos com um conjunto fechado.

Para mostrar que  $K$  é totalmente desconexo, observamos que depois da  $(n)$ -ésima etapa de sua construção restam apenas intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$ . Portanto, dado qualquer intervalo  $I \subset [0,1]$  de comprimento  $c > 0$ , se tomarmos  $n$  tal que  $\frac{1}{3^n} < c$ , o intervalo  $I$  ficará dividido depois da  $(n)$ -ésima etapa de construção do conjunto de Cantor  $K$ . Assim,  $K$  não contém intervalos.

Provemos agora que  $K$  é perfeito. Suponhamos  $c \in K$ , obviamente, se  $c$  é um ponto extremo dos intervalos retirados então  $c$  é um ponto de acumulação de  $K$ . Agora, suponha que  $c \in K$  não é extremo de intervalo retirado de  $[0,1]$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c$  é um ponto interior de um intervalo  $[x_n, y_n]$  que restou depois da  $(n)$ -ésima

etapa de construção de  $K$ . Temos  $x_n < c < y_n$  com  $x_n, y_n \in K$  e  $y_n - x_n = \frac{1}{3^n}$ . Logo,  $c = \lim x_n = \lim y_n$  é ponto de acumulação de  $K$ . □

Se  $K$  é um conjunto de Cantor então uma de suas propriedades é que  $K$  é não enumerável, essa não enumerabilidade nos leva à conclusão que em  $K$  existem pontos que não são extremos de intervalos retirados no processo de construção do conjunto de Cantor. Além disso, quaisquer dois conjuntos de Cantor são homeomorfos entre si. Esse fato nos leva a considerar apenas o conjunto Ternário de Cantor para obter informações topológicas sobre um conjunto de Cantor mais geral. Essas e outras propriedades podem ser encontradas em Lima (2010) ou Lima (1970).

**Teorema 2.** A medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$  do Conjunto Ternário de Cantor é nula.

*Demonstração.* O Conjunto Ternário de Cantor é dado por  $K = [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , onde  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  é a união dos intervalos abertos retirados dos intervalos remanescentes a partir do intervalo  $[0,1]$ . Sendo um conjunto fechado, temos que ele é Lebesgue mensurável. Portanto,  $m(K) = m([0,1]) - m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ .

Como  $E_1, E_2, \dots$  é uma sequência disjunta de conjuntos Lebesgue mensuráveis, então  $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ , onde  $m(E_1) = 1/3, m(E_2) = 2(1/3^2)$ , e mais geralmente,  $m(E_n) = 2^{n-1}(1/3^n)$ , implicando que  $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$ . Logo, como  $m([0,1]) = 1$ , temos  $m(K) = m([0,1]) - m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 - 1 = 0$ . □

Para uma introdução à teoria da medida, que tem como exemplo de medida a medida de Lebesgue, indicamos o livro Tao (2011).

### 3 Ferradura de Smale

A ferradura de Smale, devida a Stephen Smale, foi o primeiro exemplo de um difeomorfismo contendo um número infinito de pontos periódicos e estruturalmente estável. A dinâmica da ferradura é muito semelhante a da família quadrática  $F_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$ , cujas propriedades podem ser encontradas em Devaney (1994).

Em entrevista a Jacob Palis, Stephen Smale afirma que a ferradura é seu trabalho mais famoso e que o desenvolveu nas praias do Rio de Janeiro, na mesma época que resolveu parte da Conjectura de Poincaré, veja Smale (1990). Smale recebeu a *medalha Fields* em 1966, por suas contribuições em topologia.

Vamos à construção da Ferradura de Smale. Consideremos um quadrado unitário  $Q$ , um semicírculo  $A$  de raio  $1/2$ , e um semicírculo  $B$  também de raio  $1/2$ . Vamos considerar o conjunto  $D = A \cup Q \cup B$  onde  $Q$  fica entre  $A$  e  $B$ , ou seja,  $D$  tem a forma de um estádio conforme mostra a Figura 1. Definimos a função  $f : D \rightarrow D$  por:

Primeiramente, contraímos  $D$  por um fator  $0 < \delta < 1/2$  na direção horizontal e expandimos na direção vertical pelo fator  $\frac{1}{\delta}$ . Assim,  $f(Q)$  é um retângulo longo e estreito. Em seguida, colocamos  $f(Q)$  em forma de ferradura dentro de  $D$ , conforme a próxima figura. Note que  $f(Q) \cap Q$  é formado por duas componentes conexas, dadas por retângulos verticais de altura 1 e largura  $\delta$ , que denotamos por  $V_0$  e  $V_1$ . As regiões semicirculares  $A$  e  $B$  estão contraídas e mapeadas dentro de  $A$  como ilustrado na Figura 1.

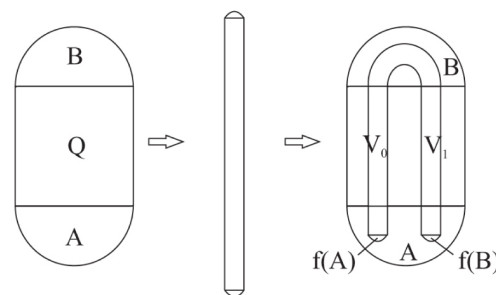


Figura 1: Primeira iteração positiva da  $f$ .

Dessa forma, obtemos  $f(D)$ , que está contida em  $D$ . Logo,  $f$  é claramente injetora, mas não é sobrejetora e portanto  $f^{-1}$  não está definida globalmente.

Para obtermos  $f^2(D)$ , repetimos o processo, contraído horizontalmente, expandindo na vertical e dobrando em forma de ferradura. E repetimos esse processo a cada iteração da  $f$ .

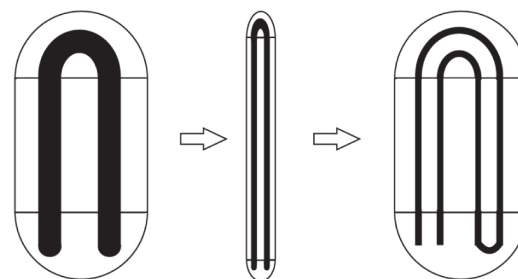


Figura 2: Segunda iteração positiva da  $f$ .

Para estudarmos a dinâmica de  $f$  precisaremos também das pré-imagens. É usual utilizarmos o conjunto das pré-imagens de pontos em funções que não são inversíveis. Assim, nesse caso,  $f^{-j}(x)$  é a  $j$ -ésima pré-imagem de  $x$  por  $f$ , ou seja, são os pontos  $y \in M$  tais

que  $f^j(y) = x$ . Logo, para as obtermos, fazemos a seguinte construção: partindo da mesma figura  $D$ , vamos contraí-la na direção vertical pelo fator  $0 < \delta < 1/2$  e expandí-la na direção horizontal por  $\frac{1}{\delta}$ . Em seguida, do-  
bramos em forma de ferradura e colocamos sobre  $D$  na posição horizontal. Note que a contração e a expansão ocorrem em direções diferentes da iteração positiva da  $f$ .

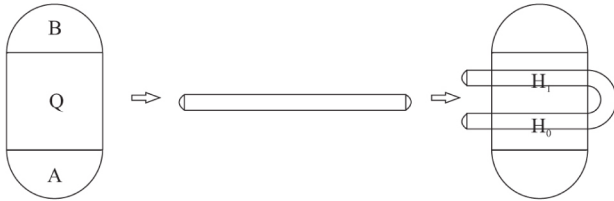


Figura 3: Primeira iteração negativa da  $f$ .

Note primeiro que a pré-imagem de  $Q$  consiste em dois retângulos horizontais  $H_0$  e  $H_1$ , conforme a Figura 3, que podemos assumir serem mapeados linearmente sobre as duas componentes verticais  $V_0$  e  $V_1$  de  $f(Q) \cap Q$ . Observe que a altura de  $H_0$  e  $H_1$  e a largura de  $V_0$  e  $V_1$  são ambas dadas por  $\delta$ .

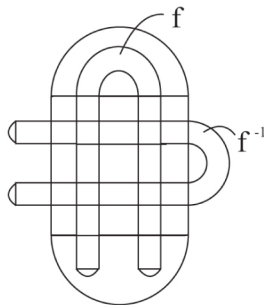


Figura 4: Iterações de  $f$ .

Note que  $f$  é uma contração em  $A$ . Assim, pelo Teorema da Contração,  $f$  tem um único ponto fixo  $p$  em  $A$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$  para todo  $q \in A$ , ou seja,  $p$  é um ponto fixo atrator em  $A$ . Além disso, como  $f(B) \subset A$ , toda órbita positiva em  $B$  se comporta da mesma forma, ou seja, se  $q \in B$ , temos que  $f(q) \in A$  e portanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(q) = p$ .

Analogamente, se  $q \in Q$  mas  $f^k(q) \notin Q$  para algum  $k > 0$ , então devemos ter que  $f^k(q) \in A \cup B$  e portanto  $f^n(q) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 2.** Sejam  $D = A \cup Q \cup B$  e  $f : D \rightarrow D$  a função construída acima. A ferradura de Smale  $\Lambda$ , relacionada a  $f$ , é o conjunto dos pontos de  $Q$  cuja órbita está contida em  $Q$ , ou seja,

$$\Lambda = \{q \in Q : f^k(q) \in Q, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Vamos estudar a dinâmica de  $\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$  analisando separadamente os subconjuntos  $\Lambda_+ = \{q \in Q : f^k(q) \in Q, \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\Lambda_- = \{q \in Q : f^{-k}(q) \in Q, \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots\}$ .

**Afirmção 1.** O conjunto  $\Lambda_+$  é o produto cartesiano do intervalo horizontal  $[0,1]$  por um conjunto de Cantor  $K_1$ . E o conjunto  $\Lambda_-$  é o produto cartesiano de um conjunto de Cantor  $K_2$  pelo intervalo vertical  $[0,1]$ .

*Demonstração.* Se a órbita positiva de  $q$  está em  $Q$ , devemos ter, em primeiro lugar, que  $q \in H_0 \cup H_1$ , os outros pontos em  $Q$  são mapeados para fora de  $Q$  e dentro de  $A \cup B$ . Se  $f^2(q) \in Q$ , então, da mesma forma,  $f(q) \in H_0 \cup H_1$ , isto é,  $q \in f^{-1}(H_0) \cup f^{-1}(H_1)$ .

Observe que, indutivamente, se  $H$  é um retângulo horizontal,  $f^{-1}(H)$  consiste em um par de retângulos horizontais menores. Consequentemente,  $f^{-1}(f^{-1}(H_i)) = f^{-2}(H_i)$  consiste em quatro retângulos, cada um com altura  $\delta^2$ ,  $f^{-3}(H_i)$  consiste em oito retângulos horizontais de altura  $\delta^3$ , e assim por diante.

Observe, também, que na construção de  $\Lambda_+$ , dividimos o quadrado  $Q$  em cinco partes e tomamos as partes pares (os dois retângulos  $f^{-1}(Q)$ ). Em seguida, dividimos cada um desses retângulos horizontais em cinco partes e tomamos as partes pares (os quatro retângulos  $f^{-2}(Q)$ ) e assim sucessivamente, como se observa na figura abaixo. Ou seja, o que se faz é um processo de construção análogo ao do conjunto ternário de Cantor, obtemos portanto um conjunto de Cantor.

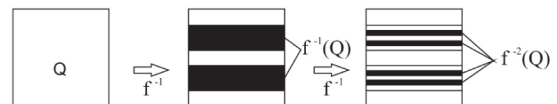


Figura 5: Construção de  $\Lambda_+$ .

Assim, mostra-se que  $\Lambda_+$  é o produto cartesiano do intervalo horizontal  $[0,1]$  com um conjunto de Cantor. Note ainda que os pontos  $q \in \Lambda_+$  são tais que  $q \in f^{-k}(Q)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , e, portanto, quando aplicamos as iterações positivas da  $f$  esses pontos  $q$  permanecem em  $Q$ .

Analogamente, verificamos que  $\Lambda_-$  consiste no produto cartesiano de um conjunto de Cantor com o intervalo vertical  $[0,1]$ . □

Com essa afirmação e sabendo que  $(A \times B) \cap (B \times C) = A \times C$ , temos portanto que o conjunto  $\Lambda = \Lambda_- \cap \Lambda_+$  é um conjunto de Cantor.

Assim, o conjunto  $\Lambda$  é constituído pelos pontos em  $Q$  que, após aplicações repetidas da função  $f$  e de sua inversa, permanecem em  $Q$ .

Outro fato de fácil verificação é que  $Q_n = \bigcap_{k=-n}^n f^k(Q)$  é a união disjunta de  $2^{2n}$  quadrados de lado  $\delta^n$ .

Para continuarmos na análise da dinâmica da Ferradura de Smale, vamos utilizar a dinâmica simbólica que discutiremos na próxima subseção.

### 4 Dinâmica Simbólica

Nesta seção iremos descrever algumas propriedades das sequências a dois símbolos. Os conceitos e resultados aqui apresentados podem ser generalizados para  $m$  símbolos quaisquer. Mais propriedades podem ser encontradas em Devaney (1994) ou Brin (2002).

Vamos considerar o conjunto  $\{0,1\}$ , e seja  $\Sigma_2^+$  o conjunto das sequências a dois símbolos  $s : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$  dadas por  $s(i) = s_i \in \{0,1\}, i \in \mathbb{N}$ .

Consideramos agora a função  $d^+ : \Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$d^+(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Deste modo definida, é fácil verificar que  $d^+$  é uma métrica. Assim, o par  $(\Sigma_2^+, d^+)$  é um espaço métrico das sequências a dois símbolos.

Passamos agora a generalização natural de  $\Sigma_2^+$ . Ao invés de nos atermos a sequências do tipo  $s : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ , vamos considerar as sequências do tipo  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \{0,1\}$ . Se  $s \in \Sigma_2$  então escrevemos

$$s = (\dots s_{-j} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots s_i s_{i+1} \dots).$$

O ponto  $(\cdot)$  indica que  $s$  está dividida em duas sequências, uma cuja imagem está em  $\Sigma_2^+$  e outra cujo domínio está em  $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ .

Do mesmo modo como em  $\Sigma_2^+$ , definimos uma função  $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada agora por

$$d(s,t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}.$$

Deste modo,  $d$  é uma métrica em  $\Sigma_2$ , implicando que  $(\Sigma_2, d)$  é um espaço métrico.

Definimos a função *shift*  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  por

$$\sigma(\dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots) = (\dots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \dots).$$

O espaço  $(\Sigma_2, \sigma)$  é chamado de *shift bilateral*, ao passo que  $(\Sigma_2^+, \sigma)$  é o espaço *shift unilateral*. Os espaços *shift* são espaços topológicos compactos considerando a topologia produto.

A função *shift* é um homeomorfismo em  $\Sigma_2$ , ou seja, uma é uma aplicação contínua e bijetora com inversa contínua. Além disso, o conjunto das suas órbitas periódicas é denso em  $\Sigma_2$ . Vamos analisar agora a quantidade de pontos periódicos da função *shift*, e provar que o conjunto das órbitas periódicas dessa função é um conjunto denso em  $\Sigma_2$ .

**Propriedade 1.** A função  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  possui  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$ .

*Demonstração.* Vamos provar por indução em  $n$ .

Para  $n = 1$  temos  $2^1$  pontos periódicos de período 1, ou seja, dois pontos fixos. São eles:  $(\dots 0000 \cdot 0000 \dots)$  e  $(\dots 1111 \cdot 1111 \dots)$ . Pois,

$$\sigma(\dots 0000 \cdot 0000 \dots) = (\dots 0000 \cdot 0000 \dots)$$

e

$$\sigma(\dots 1111 \cdot 1111 \dots) = (\dots 1111 \cdot 1111 \dots).$$

Vamos supor que o resultado é verdadeiro para  $n$ , temos então a existência de  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$ . Esses pontos são da forma:

$$(\dots s_{n-2} s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots).$$

Agora precisamos verificar quantos pontos de período  $n + 1$  existem. Para cada ponto periódico de período  $n$  precisamos acrescentar 0 ou 1 à sequência, logo temos duas possibilidades para cada um dos pontos e, pelo princípio multiplicativo, temos  $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$  pontos periódicos de período  $n + 1$ .

Portanto, existem  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$ . □

**Propriedade 2.** O conjunto das órbitas periódicas é denso em  $\Sigma_2$ .

*Demonstração.* Para provar que  $Per(\sigma)$  é denso em  $\Sigma_2$ , precisamos construir uma sequência de pontos periódicos  $\tau_n$  que converge para um ponto arbitrário  $s = (\dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots)$  em  $\Sigma_2$ . Vamos definir a sequência de sequências  $(\tau_n)_n, n \in \mathbb{N}$ , cujo termo geral é  $\tau_n = (\dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_n \dots, \dots s_{-n} \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_n \dots)$ , isto é,  $\tau_n$  é uma sequência periódica cujas entradas são iguais as de  $s$  da  $(-n)$ -ésima entrada até a  $(n)$ -ésima entrada. Assim, como vimos,  $d[\tau_n, s] \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , logo  $\tau_n \rightarrow s$ . □

Vamos agora escolher algum intervalo vertical  $l$  em  $\Lambda_-$ . Note que  $f^k(l)$  é um segmento vertical de comprimento  $\delta^k$  em  $V_0$  ou  $V_1$ . Por isso, vamos associar uma sequência  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2^+$  para algum ponto em  $l$  conforme a regra  $s_j = \alpha$  se, e somente se,  $f^j(l) \subset V_\alpha$ . Assim, o termo  $s_0$  indica em qual dos conjuntos  $V_0$  ou  $V_1$  que a linha  $l$  está localizada,  $s_1$  refere-se a posição de  $f(l)$  com relação a  $V_0$  ou  $V_1$  e, mais geralmente,  $s_n$  indica a posição de  $f^n(l)$  em  $V_0$  ou  $V_1$ .

Analogamente, podemos associar uma sequência de  $0$ 's e  $1$ 's para algum segmento de linha horizontal  $h \in \Lambda_+$ . Por conveniência, escrevemos essa sequência como  $\dots s_{-3} s_{-2} s_{-1}$ , indicando que  $s_{-j} = \alpha$  se, e somente se,  $f^{-j}(h) \subset V_\alpha$  para  $\alpha \in \{0,1\}$  e  $j \in \mathbb{N}$ .

A cada ponto  $q \in \Lambda_+ \cap \Lambda_-$  associamos uma sequência  $s = (\dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$  dada por  $s_j = \alpha$  se, e

somente se,  $f^{-j}(q) \in V_\alpha \forall j \in \mathbb{Z}$ . Isto posto, temos então a função  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  que a cada ponto  $q$  associa uma sequência  $s \in \Sigma_2$  que indica o itinerário do ponto  $q$ .

Vejam alguns exemplos:

Analisemos as sequências associadas aos pontos  $q$  em:

$$a) Q_1 = \bigcap_{k=-1}^1 f^k(Q) = f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q)$$

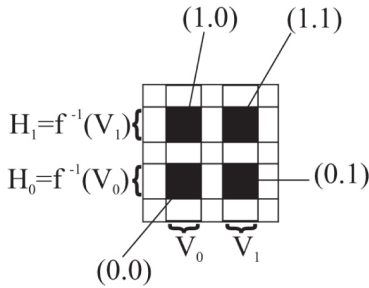


Figura 6: Exemplo a).

Observe, na figura acima, que, por exemplo, podemos associar a um ponto  $q$  no quadrado superior esquerdo a sequência da forma  $(s_{-1} \cdot s_0)$ , dada por  $(1 \cdot 0)$ . De fato, para  $j = -1$ , como  $q \in f^{-1}(V_1)$  temos  $f(q) \in V_1$ , logo  $s_{-1} = 1$ . Analogamente, para  $j = 0$  temos  $f^0(q) = q \in V_0$ , logo,  $s_0 = 0$ . Logo, a um ponto  $q$  que está no quadrado superior esquerdo associamos a sequência  $(1 \cdot 0)$ . Na Figura 6 temos ainda as sequências associadas aos pontos dos outros quadrados.

$$b) Q_2 = \bigcap_{k=-2}^2 f^k(Q) = f^{-2}(Q) \cap f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$$

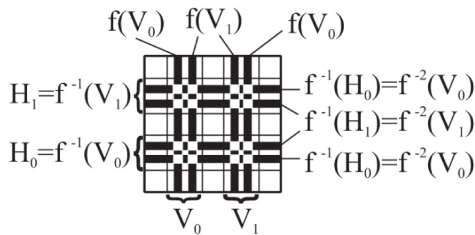


Figura 7: Exemplo b).

Note que agora a codificação de um ponto  $q$  no quadrado superior esquerdo se dá da mesma forma que anteriormenete acrescentando-se dois termos, assim a sequência é  $(s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1)$ , onde  $s_{-1}$  continua sendo 1 e  $s_0$  continua sendo 0. Analisemos agora  $s_{-2}$ , assim para  $j = -2$ , como  $q \in f^{-2}(V_0)$  temos,  $f(q) \in f^{-1}(V_0)$  e  $f^2(q) \in V_0$ , logo  $s_{-2} = 0$ . Analogamente, para  $j = 1$  temos  $q \in f(V_0)$  e portanto  $f^{-1}(q) \in V_0$ , logo  $s_1 = 0$ .

Portanto, a sequência associada ao ponto  $q$  que está no quadrado superior esquerdo é  $(01 \cdot 00)$ .

A figura abaixo indica as representações em  $\Sigma_2$  dos pontos contidos nos  $2^4$  quadrados de  $Q_2$ .

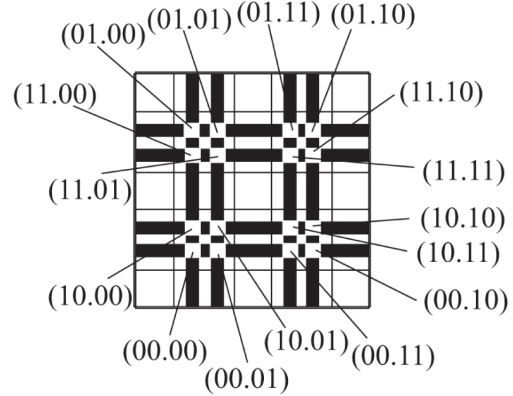


Figura 8: Sequências associadas aos pontos  $q$  no exemplo b).

Para utilizar o operador shift, precisamos de uma determinada equivalência entre a ferradura e o espaço das sequências a dois símbolos. Esta equivalência é obtida através de um homeomorfismo, isto é, uma aplicação que preserva as propriedades topológicas entre a ferradura e o shift.

**Definição 3.** Sejam  $f : M \rightarrow M$  e  $g : N \rightarrow N$  funções. Dizemos que  $f$  é topologicamente conjugada a  $g$ ,  $f \sim g$ , se existe um homeomorfismo  $h : M \rightarrow N$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ .

Não é difícil de verificar que se  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas então elas possuem, por exemplo, a mesma quantidade de pontos periódicos, pontos fixos, entre outras propriedades.

**Proposição 2.** A função  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  é uma conjugação topológica entre as funções  $f|_\Lambda$  e  $\sigma$ .

*Demonstração.* Começemos por verificar que  $\sigma \circ S = S \circ f$ . Consideremos um ponto  $q \in \Lambda$ . Deste modo, da definição da  $S$  temos que  $s_{-(j+1)} = i$  se, e só se,  $f^{j+1}(q) \in V_i$ , ou seja, se e só se,  $f^{j+1}(q) \in V_{s_{-(j+1)}}$ . Por outro lado,  $f^{j+1}(q) = f^j(f(q)) \in V_k$  se, e só se,  $t_{-j} = k$ , ou seja,  $f^{j+1}(q) \in V_{t_{-j}}$ . Assim, temos que  $f^{j+1}(q) \in V_{s_{-(j+1)}}$  e ao mesmo tempo,  $f^{j+1}(q) \in V_{t_{-j}} \forall j \in \mathbb{N}$ , logo  $V_{s_{-(j+1)}} = V_{t_{-j}}$ , ou seja,  $s_{-(j+1)} = t_{-j} \forall j \in \mathbb{N}$  e, portanto,  $\sigma(s) = t$ , pois  $s$  está deslocada apenas uma entrada para a esquerda em relação a  $t$ . Logo, ao aplicarmos a função shift temos  $\sigma(s) = t$ , isto é,  $\sigma(s) = \sigma(S(q)) = t = S(f(q))$ . Verificamos assim que  $(\sigma \circ S)(q) = (S \circ f)(q)$ .

Vejamos agora que  $S$  é contínua. Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(s,t) < \varepsilon$ . Consideremos a vizinhança  $N = \{t : t_j = s_j, j \in \{-n_0, \dots, n_0\}\}$  de  $s = S(q)$ . Para  $n_0$  fixo, a continuidade de  $f$  garante que existe  $\delta > 0$  tal que, para  $p \in \Lambda$  com  $|p - q| \leq \delta$ ,  $f^j(p) \in V_{s_{-j}}$ , para  $j \in \{-n_0, \dots, n_0\}$ . Assim, se  $t = S(p)$  e  $|p - q| \leq \delta$ , então  $t \in N$ , o que prova a continuidade de  $S$ .

Para concluirmos que  $S$  é sobrejetiva, comecemos por provar, por indução, que o conjunto  $\bigcap_{j=1}^n f^{-j}(V_{s_j})$  é uma faixa horizontal com largura  $\delta^n$ , para qualquer  $s \in \Sigma_2$ . Seja então  $s \in \Sigma_2$ . Para  $n = 1$ , temos que  $f^{-1}(V_{s_1}) = H_{s_1}$ , que é uma faixa horizontal de largura  $\delta$ . Fixado  $n$ , a hipótese de indução é que  $\bigcap_{j=1}^n f^{-j}(V_{s_j})$  é uma faixa horizontal com largura  $\delta^n$ . Vejamos então para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \bigcap_{j=1}^{n+1} f^{-j}(V_{s_j}) &= \\ &= f^{-1}(V_{s_1}) \cap \dots \cap f^{-n}(V_{s_n}) \cap f^{-n-1}(V_{s_{n+1}}) \\ &= f^{-1}(V_{s_1}) \cap f^{-1} \left( \bigcap_{j=2}^{n+1} f^{-j+1}(V_{s_j}) \right). \end{aligned}$$

Note que  $V_{s_j}$  será sempre  $V_0$  ou  $V_1$  e sua largura depende das iteradas negativas da  $f$ . Assim,  $f^{-1}(V_{s_j})$  tem largura  $\delta$ ,  $f^{-2}(V_{s_j})$  largura  $\delta^2$ , etc.

Assim,

$$\left( \bigcap_{j=2}^{n+1} f^{-j+1}(V_{s_j}) \right) = f^{-1}(V_{s_2}) \cap \dots \cap f^{-n}(V_{s_{n+1}})$$

e por hipótese de indução é uma faixa vertical de largura  $\delta^n$ .

Logo,

$$f^{-1} \left( \bigcap_{j=2}^{n+1} f^{-j+1}(V_{s_j}) \right)$$

tem largura  $\delta^{n+1}$  e portanto,

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} f^{-j}(V_{s_j})$$

tem largura  $\delta^{n+1}$ , concluindo nossa afirmação.

Fazendo  $n$  tender a infinito, concluimos que, pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes,  $\bigcap_{j=1}^{+\infty} f^{-j}(V_{s_j}) \neq \emptyset$  e, de fato é um segmento de reta horizontal. Analogamente  $\bigcap_{j=-\infty}^0 f^{-j}(V_{s_j}) \neq \emptyset$  é um segmento de reta vertical.

Assim, o conjunto  $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} f^{-j}(V_{s_j})$  é formado apenas por um ponto  $q$  dado pela interseção das retas horizontais e verticais descritas acima. Em particular, esse conjunto é não-vazio. Para esse ponto  $q$ , resulta que  $S(q) = s$  e, portanto,  $S$  é sobrejetiva.

Por último, mostremos que  $S$  é injetiva. Suponhamos que  $S(q) = S(p) = s$ . Para qualquer  $j$ , temos que  $f(p), f(q) \in V_{s_j}$ , uma vez que  $p, q \in f^{-j}(V_{s_j})$ . Como  $j$  é qualquer, resulta que  $p, q \in \bigcap_{j=1}^{+\infty} f^{-j}(V_{s_j})$ , e portanto,  $p$  e  $q$  estão no mesmo segmento de reta vertical; resulta também que  $p, q \in \bigcap_{j=-\infty}^0 f^{-j}(V_{s_j})$  e, portanto,  $p$  e  $q$  estão no mesmo segmento de reta horizontal. Assim, e do fato que o conjunto  $\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} f^{-j}(V_{s_j})$  é composto de um único elemento, concluímos que  $p = q$ , o que termina a demonstração.  $\square$

Para analisar mais propriedades da dinâmica da feradura de Smale, precisamos descrever os conjuntos de atração e repulsão de pontos. Dizemos que os pontos  $p_1$  e  $p_2$  são *futuramente assintóticos* ou simplesmente *assintóticos*, se  $f^n(p_1), f^n(p_2) \in D$ , para todo  $n \geq 0$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n(p_1) - f^n(p_2)\| = 0$ . Respectivamente, são *assintóticos para trás* se  $f^n(p_1), f^n(p_2) \in D$ , para todo  $n \leq 0$  e  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \|f^n(p_1) - f^n(p_2)\| = 0$ .

**Definição 4.** O conjunto estável de  $p$  é dado por

$$W^s(p) = \{z \in D; \|f^n(z) - f^n(p)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}.$$

E o conjunto instável de  $p$  é dado por

$$W^u(p) = \{z \in D; \|f^{-n}(z) - f^{-n}(p)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}.$$

Equivalentemente, o ponto  $z$  está em  $W^s(p)$  se  $p$  e  $z$  são futuramente assintóticos.

Os conjuntos estável e instável de pontos em  $\Lambda$ : Consideremos o ponto fixo  $p^*$  que está em  $V_0$  e tem associado a sequência  $(\dots 00 \cdot 00 \dots)$ . Note que  $p^*$  está em algum segmento vertical  $l_s$  e que qualquer outro ponto em  $l_s$ , como vimos, é futuramente assintótico para  $p^*$ , logo este ponto está em  $W^s(p^*)$ . Mas existem outros pontos em  $W^s(p^*)$  que não estão em  $l_s$ . Suponha que o ponto  $q$  eventualmente tende a  $l_s$ . Então existe um inteiro  $n$  tal que  $\|f^n(q) - p^*\| < 1$ . Portanto, como  $p^*$  é tal que  $f^k(p^*) = p^*$  para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , temos que  $\|f^{n+k}(q) - f^k(p^*)\| = \|f^{n+k}(q) - p^*\| < \delta^k$ , onde  $\delta < 1$  é o fator inicial da definição de  $f$ . Isto implica que  $\|f^n(q) - f^n(p^*)\|$  tende a zero quando  $n$  vai para infinito e portanto temos que  $q \in W^s(p^*)$ . Assim, a união de intervalos verticais dado por  $f^k(l_s)$  para  $k = 1, 2, \dots$  estão todos em  $W^s(p^*)$ .



Desde que  $f(D) \subset D$ , o conjunto instável de  $p^*$  assume uma forma um pouco diferente, "como uma cobra". O segmento de linha horizontal  $l_u$  através de  $p^*$  em  $D$ , claramente está em  $W^u(p^*)$ , pois qualquer ponto em  $l_u$  é assintótico para  $p^*$ , desde que  $p^*$  está em  $l_u$  também. Os outros pontos desse conjunto instável estão em algum intervalo horizontal  $f^{-k}(l_u)$ .

Agora, vamos descrever os conjuntos estável e instável utilizando a noção do operador shift. Seja  $s^* = (\dots s_{-2}^* s_{-1}^* \cdot s_0^* s_1^* \dots) \in \Sigma_2$ . Se  $t$  é uma sequência que coincide com  $s^*$  a partir de algum termo, então  $t \in W^s(s^*)$ . Ou seja, dado  $t \in W^s(s^*)$  se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $t_i = s_i^*$  para todo  $i \geq k$ , então  $t \in W^s(s^*)$ . De fato, para mostrar que  $t \in W^s(s^*)$  basta verificar que  $d[\sigma(s^*), \sigma(t)] \rightarrow 0$ , isto é

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|\sigma(s_i^*) - \sigma(t_i)|}{2^{|i|}} \rightarrow 0.$$

Note que podemos aplicar a função shift nos pontos  $t$  e  $s^*$  de modo que tenhamos  $t_i = s_i^*$  para  $i \in \{-m, -m+1, \dots, m-1, m\}$ , já que por hipótese  $t_i = s_i^*$  para  $i \geq k$ , logo, vale que  $d[s^*, t] \leq \frac{1}{2^{m-1}}$  e portanto tende a 0 quando  $m \rightarrow \infty$ . A recíproca também é verdadeira.

Isso finaliza uma descrição elementar da dinâmica da ferradura de Smale. Um próximo passo para o entendimento aprofundado da ferradura de Smale pode ser dado pela análise dos textos clássicos como Palis (1982), Niteczki (1971) e Smale (1967).

## 5 Ferradura de Bowen

Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo em um subconjunto compacto do  $\mathbb{R}^2$ . Vamos supor que  $f$  satisfaz o Axioma A de Smale. Assim, o conjunto não-errante de  $f$ ,  $\Omega(f)$ , é decomposto em conjuntos básicos, conforme Smale (1967). Seja  $\Omega$  um desses conjuntos básicos, definimos  $W^s(\Omega) = \{x \in M : f^n(x) \rightarrow \Omega \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}$ .

Um resultado conhecido atribuído a R. Bowen e D. Ruelle afirma que se  $f$  é uma aplicação de classe  $C^2$  então o conjunto  $W^s(\Omega)$  terá medida de Lebesgue nula, a menos que  $\Omega$  seja um atrator.

O restante desse trabalho está dedicado à prova do seguinte resultado.

**Teorema 3.** Existe uma ferradura de classe  $C^1$  com medida de Lebesgue positiva.

Sejam  $I$  um intervalo fechado não degenerado da reta real e  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números onde  $\alpha_n > 0$  números tais que  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \leq l(I)$ , onde  $l(I)$  é o comprimento do intervalo  $I$ .

Seja  $\underline{a} = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma_2^+$  uma sequência de 0's e 1's de comprimento  $n = n(\underline{a})$ . Podemos permitir que a

sequência  $\underline{a}$  seja vazia, desde que o comprimento  $n(\underline{a})$  seja nulo.

Definimos  $I = I_{\emptyset} = [a, b]$  e deste intervalo removemos o interior do intervalo  $I_{\emptyset}^* = \left[ \frac{a+b}{2} - \frac{\alpha_0}{2}, \frac{a+b}{2} + \frac{\alpha_0}{2} \right]$ , note que  $I_{\emptyset}^*$  é tal que  $I_{\emptyset}^* \subset I_{\emptyset}$ .

Ao removermos o interior do intervalo  $I_{\emptyset}^*$  de  $I_{\emptyset}$ , restam um intervalo fechado a esquerda e outro a direita, os quais denotamos, respectivamente, por  $I_0$  e  $I_1$ .

De cada um desses intervalos  $I_k$  ( $k = 0, 1$ ) removemos o interior dos intervalos  $I_k^*$  de comprimento  $\frac{\alpha_1}{2}$  e com o mesmo centro de  $I_k$ .

Assim, teremos quatro intervalos remanescentes que denotaremos, da esquerda para a direita, respectivamente, por  $I_{00}, I_{01}, I_{10}$  e  $I_{11}$ .

Repetimos o processo e o definimos recursivamente. Considerando a sequência  $\underline{a}$ , de comprimento  $n = n(\underline{a})$  definimos  $I_{a_0}$  e  $I_{a_1}$  os intervalos à esquerda e à direita remanescentes quando o interior de  $I_{\underline{a}}$  é removido de  $I_{\underline{a}}$ . E, temos que  $I_{a_k}^*$  ( $k = 0, 1$ ) tem comprimento  $\frac{\alpha_{n(ak)}}{2^{n(ak)}}$  e o mesmo centro de  $I_{a_k}$ .

Assim, o conjunto de Cantor  $K_I$  é dado por

$$K_I = \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n(\underline{a})=m} I_{\underline{a}},$$

onde os intervalos que foram removidos do intervalo  $I$  tem comprimentos distintos. A medida de Lebesgue de  $K_I$  é  $m(K_I) = l(I) - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ . Note que esse conjunto

de Cantor pode ter medida nula, já que  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \leq l(I)$ .

Para que esse conjunto tenha medida positiva, bastaria considerar  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I)$ .

Suponha que são dados outro intervalo não degenerado  $J$  e uma sequência de números  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $\beta_n > 0$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \leq l(J)$ . Podemos construir  $J_{\underline{a}}, J_{\underline{a}}^*$  e  $K_J$  da mesma forma que fizemos para o intervalo  $I$ .

Vamos assumir agora que  $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \rightarrow \gamma \geq 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Escolha uma sequência de números  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\delta_n \rightarrow 0$ , quando  $n$  tende a infinito, e para cada  $\underline{a}$  considere  $g_{\underline{a}} : I_{\underline{a}}^* \rightarrow J_{\underline{a}}^*$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  que preserva a orientação.

Assim, fixado o comprimento de uma sequência  $\underline{a}$ , consideramos um difeomorfismo  $g_{\underline{a}} : I_{\underline{a}}^* \rightarrow J_{\underline{a}}^*$ . Por exemplo, fixado  $n(\underline{a}) = 1$ , temos que  $I_{\underline{a}}^* = I_{\emptyset}^* \cup I_0^* \cup I_1^*$  e  $J_{\underline{a}}^* = J_{\emptyset}^* \cup J_0^* \cup J_1^*$ . Um exemplo de  $g_{\underline{a}}$  está apresentado na próxima figura.

Além disso, supomos que  $g_{\underline{a}}$  satisfaz

- $g_{\underline{a}}'(x) = \gamma$  para  $x$  em uma extremidade de  $I_{\underline{a}}^*$ ;
- $g_{\underline{a}}'(I_{\underline{a}}^*)$  está contido em um intervalo gerado por

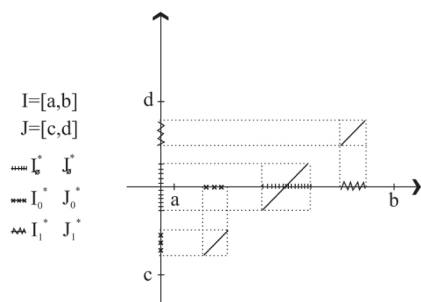


Figura 9: Exemplo de difeomorfismo que preserva orientação

$\gamma \pm \delta_n$  e  $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \pm \delta_n$ . Considerando todas as seqüências  $\underline{a}$ , temos então a função  $g : \bigcup_{\underline{a}} I_{\underline{a}}^* \rightarrow \bigcup_{\underline{a}} J_{\underline{a}}^*$ .

Então, estendemos  $g$  de  $\bigcup_{\underline{a}} I_{\underline{a}}^*$  por continuidade para uma aplicação  $G : I \rightarrow J$ . Pelo Teorema da Extensão, veja Lima (1970) temos que a função  $G$  existe e é tal que  $G|_{I_{\underline{a}}^*} = g$ .

Vamos verificar que  $G$  é de fato um homeomorfismo. Para isso, vamos analisar os diagramas abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
 I_{\underline{a}}^* & \xrightarrow{g} & J_{\underline{a}}^* & & I_{\underline{a}}^* & \xleftarrow{g^{-1}} & J_{\underline{a}}^* \\
 Id_{I_{\underline{a}}^*} \downarrow & & \downarrow Id_{J_{\underline{a}}^*} & & Id_{I_{\underline{a}}^*} \downarrow & & \downarrow Id_{J_{\underline{a}}^*} \\
 I & \xrightarrow{G} & J & & I & \xleftarrow{G^{-1}} & J
 \end{array}$$

Pelo Teorema da Extensão, existe  $G : I \rightarrow J$  de classe  $C^0$ . E, como  $g$  é um difeomorfismo, temos que existe  $g^{-1} : J_{\underline{a}}^* \rightarrow I_{\underline{a}}^*$  e assim, podemos estender  $g^{-1}$  para uma função  $G^{-1} : J \rightarrow I$  também de classe  $C^0$ . Resta saber se  $G^{-1}$  é a função inversa de  $G$ . Para isso, vamos verificar que  $G^{-1} \circ G = Id_I$  e  $G \circ G^{-1} = Id_J$ .

De fato, pelos diagramas acima temos  $Id_{J_{\underline{a}}^*} \circ g = G \circ Id_{I_{\underline{a}}^*}$  e  $Id_{I_{\underline{a}}^*} \circ g^{-1} = G^{-1} \circ Id_{J_{\underline{a}}^*}$ . Pela primeira igualdade temos que  $Id_{J_{\underline{a}}^*} = G \circ G^{-1}$ , e partindo da segunda igualdade obtemos  $Id_{I_{\underline{a}}^*} = G^{-1} \circ G$ .

Exatamente como queríamos. Logo,  $G^{-1}$  é a função inversa de  $G$ , ambas de classe  $C^0$ . Portanto,  $G$  é um homeomorfismo.

Na verdade, temos que  $G$  é de classe  $C^1$  com derivada  $\gamma$  em cada ponto do conjunto de Cantor  $K_I$ . Vamos verificar abaixo que  $G'(x) = \gamma$  para  $x \in K_I$ .

Primeiramente, note que os extremos dos intervalos  $I_{\underline{a}}^*$  são pontos do conjunto de Cantor  $K_I$ , já que, em sua construção, removemos apenas o interior de cada  $I_{\underline{a}}^*$ . Logo, pelo item (a) acima, temos  $G'(x) = \gamma$  para  $x$  nos extremos de  $I_{\underline{a}}^*$ .

Mas, além desses pontos, existem outros infinitos pontos no conjunto de Cantor. Tomemos então uma

seqüência de pontos extremos  $x_n$  tal que  $x_n \rightarrow x \in K_I$ , onde  $x$  não é extremo. Isso é possível, visto que todos os pontos do conjunto de Cantor são pontos de acumulação. Da continuidade de  $G$  temos que  $G(x_n) \rightarrow G(x)$ . Note que, por um lado

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(x_n + h) - G(x_n)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \gamma = \gamma$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(x_n + h) - G(x_n)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x + h) - G(x)}{h} = G'(x).
 \end{aligned}$$

Logo,  $G'(x) = \gamma$  para  $x \in K_I$ .

Agora, iremos construir a ferradura com medida positiva. Primeiro, seja a seqüência  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $\beta_n > 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < 2$  e  $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \rightarrow 1$ .

Sejam  $J = [-1,1], I = \left[-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right]$  e consideremos a seqüência  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $\alpha_n = \frac{\beta_{n+1}}{2}$ . Então,  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < l(I)$  e  $\gamma = 2$ .

Assim, obtemos um difeomorfismo  $G : I \rightarrow J$  de classe  $C^1$  como anteriormente.

Para construirmos a ferradura com medida positiva, devemos levar em consideração as propriedades da função  $G$ . Nesse caso, a principal delas é a preservação da orientação. Portanto, faremos os passos análogos da Ferradura de Smale: contrairemos o quadrado  $S$  na direção vertical, esticaremos na direção horizontal e, por último, dobraremos em forma de ferradura intersectando com  $S$ . Essa noção geométrica do que deve acontecer com  $S$  está traduzida na definição do difeomorfismo  $f$  dada a seguir.

Consideramos um difeomorfismo  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $S = J \times J$ , por:

1.  $f(x,y) = (G(x), G^{-1}(y))$ , para  $(x,y) \in I \times J$ ,
2.  $f(x,y) = (G(-x), -G^{-1}(y))$ , para  $(x,y) \in (-I) \times J$  e
3.  $f(T) \cap (J \times J) = \emptyset$ , onde  $T = \left(-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right) \times J$ .

Observe na Figura 10 que, qualquer ponto  $(x,y) \in I \times J$  é levado pela  $f$  em um ponto  $(G(x), G^{-1}(y)) \in J \times I$ . Em particular<sup>2</sup>,  $f(1,y) = (G(1), G^{-1}(y))$ . Note que  $G(1) = 1$ , pois, caso contrário, existiria algum ponto  $c \in \left[\frac{\beta_0}{2}, 1\right)$  tal que  $G(c) = 1$ , mas dessa forma,  $G(c) >$

<sup>2</sup>Por simplicidade vamos denotar  $f(1,y)$  como sendo a imagem por  $f$  do conjunto  $\{1\} \times J$ .

$G(1)$ , o que contradiz o fato de  $G$  preservar a orientação. Portanto,  $f(1,y) = (1, G^{-1}(y))$ , como está indicado na figura abaixo.

Da mesma maneira, temos

$$f\left(\frac{\beta_0}{2}, y\right) = \left(G\left(\frac{\beta_0}{2}\right), G^{-1}(y)\right) = (-1, G^{-1}(y)).$$

Se  $G\left(\frac{\beta_0}{2}\right)$  fosse diferente de  $-1$ , haveria um  $c \in \left(\frac{\beta_0}{2}, 1\right]$  tal que  $G(c) = -1 < G\left(\frac{\beta_0}{2}\right)$ , o que novamente contradiz o fato de  $G$  preservar a orientação. Assim, do fato de  $G$  ser contínua e preservar a orientação temos que a imagem por  $f$  de  $I \times J$  está apresentada na Figura 10.

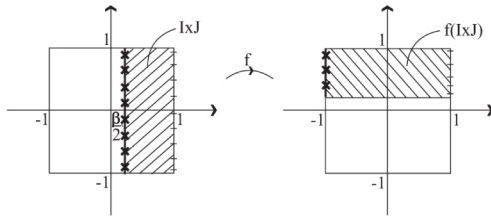


Figura 10: Construção Ferradura de Bowen 1.

Analogamente, analisamos o caso em que  $(x,y) \in (-I) \times J$ . Nesse caso, temos  $f(x,y) = (G(-x), -G^{-1}(y)) \in J \times (-I)$ . E, em particular,  $f(-1,y) = (G(1), -G^{-1}(y)) = (1, G^{-1}(y))$  e  $f\left(-\frac{\beta_0}{2}, y\right) = \left(G\left(\frac{\beta_0}{2}\right), G^{-1}(y)\right)$ , como pode ser observado na Figura 11.

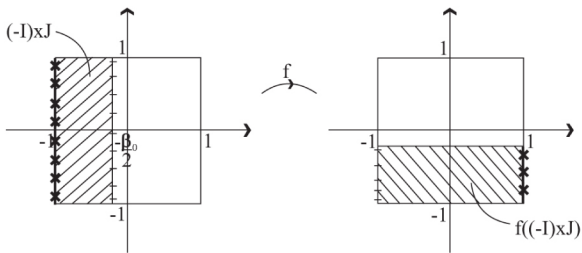


Figura 11: Construção Ferradura de Bowen 2.

Resta analisarmos o que ocorre com a região

$$T\left(-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right) \times J$$

quando aplicamos a função  $f$ . Para isso, vamos considerar um segmento de reta  $\overline{AB}$  onde  $A \in I \times J$  e  $B \in (-I) \times J$ . Note, na Figura 12, que quando aplicamos o difeomorfismo  $f$ , a curva  $f(\overline{AB})$  está ligada, sem interrupções, por um ponto em  $f(I \times J)$  e outro em  $f((-I) \times J)$ , e como  $f(T) \cap (J \times J) = \emptyset$  e  $G$  preserva a

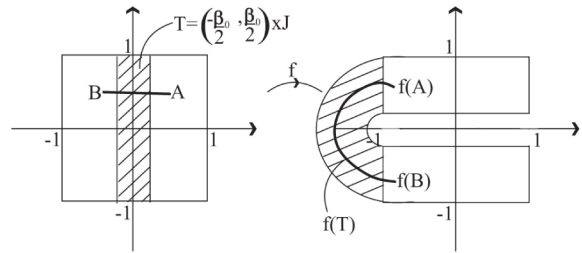


Figura 12: Construção Ferradura de Bowen 3.

orientação, concluímos que  $f(T)$  é uma região como a descrita na Figura 12.

Assim, definimos a ferradura  $\Omega$  como sendo o conjunto

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(S) = K_J \times K_J.$$

Note que, analogamente à construção da ferradura de Smale, as iteradas  $f^n(S)$  para  $n < 0$  serão dadas por ferraduras colocadas na posição vertical em  $S$ . Portanto, teremos de fato uma ferradura de Smale ao fazer a interseção de todos esses conjuntos.

A ferradura de Bowen  $\Omega$  tem medida de Lebesgue dada por

$$m(\Omega) = m(K_J \times K_J) = (m(K_J))^2.$$

Mas  $m(K_J) = 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n > 0$  uma vez que utilizamos  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n < 2$ . Logo,

$$m(\Omega) = \left(2 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right)^2 > 0.$$

Finalizando assim a construção da ferradura de Bowen.

**Exemplo 1.** Outro exemplo de ferradura com medida positiva é dado quando permitimos que a função  $G$  não preserve a orientação. Nas condições da construção de  $\Omega$  dadas acima, seja o difeomorfismo  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

1.  $f(x,y) = (G(x), G^{-1}(y))$ , para  $(x,y) \in I \times J$ ,
2.  $f(x,y) = (G(x), -G^{-1}(y))$ , para  $(x,y) \in (-I) \times J$  e
3.  $f(T) \cap (J \times J) = \emptyset$ , onde  $T = \left(-\frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_0}{2}\right) \times J$ .

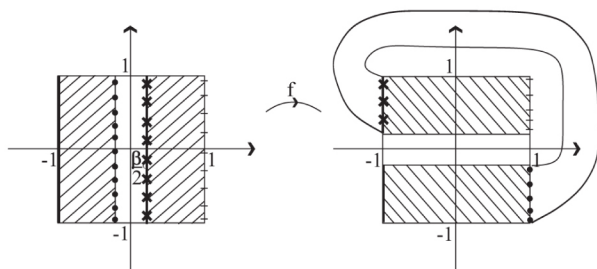


Figura 13: Exemplo.

Observe, na figura acima, que qualquer ponto  $(x, y) \in I \times J$  é levado pela  $f$  em um ponto  $(G(x), G^{-1}(y)) \in J \times I$ , da mesma forma que anteriormente. Mas, os pontos  $(x, y) \in (-I) \times J$  são levados pela  $f$  em pontos do tipo  $(G(x), -G^{-1}(y))$ , ou seja,  $f(-1, y) = (-1, -G^{-1}(y))$  e  $G$  não preserva a orientação.

## Agradecimentos

Ambos os autores agradecem aos revisores pelas sugestões. A autora agradece ao Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática da UFSM.

## Referências

- Bowen, R., 1975. A horseshoe with positive measure. *Inventiones Mathematicae* 29 (3), 203–204.
- Brin, M., S. G., 2002. *Introduction to Dynamical Systems*, 1st Edition. Cambridge University Press.
- Devaney, R., 1994. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd Edition. Addison-Wesley Publishing Company.
- Ferreira, F., 2007. Dinâmica simbólica e ferradura de smale. *Revista de Estudos Politécnicos* 5, 183–199.
- Lima, E., 1970. *Elementos de Topologia Geral*, 1st Edition. Livro Técnico S.A.
- Lima, E., 2010. *Curso de Análise Volume 1*, 12th Edition. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
- Nitecki, Z., 1971. *Differentiable Dynamics - An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms*, 1st Edition. M. I. T. Press.
- Palis, J., M. W., 1982. *Geometric Theory of Dynamical Systems - An Introduction*, 1st Edition. Springer-Verlag.

Smale, S., 1967. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of American Mathematical Society* 73, 447–817.

Smale, S., 1990. Entrevista a Jacob Palis e Laura Martignon. *Revista Matemática Universitária* 12, 3–16.

Tao, T., 2011. *An Introduction to Measure Theory*, 1st Edition. American Mathematical Society.