数学をどのように学んだらよいのか
—研究者として思うこと

（2014 年度　始業講演）

吉　荒　　　聡

4 月 9 日の始業講演では（1）数学の重要性（2）高校までの数学と大学までの数学との違い、（3）大学で学ぶ数学の特徴、（4）大学での数学の学び方、等について触れた。本稿では（2）、（3）に関して多少具体的に述べる。言うまでもなく、以下に展開されるのは、私の体験に基づく個人的見解である。

初めに、（1）で言及したことをまとめておく。数学という学問の持つ特質をまとめれば次の 3 点に絞られるだろう。

（A）数学現象という自然現象の研究としての数学（数学が自然科学の一分野として位置付られる根拠である）

（B）自然科学の基礎言語としての数学（数学において定式化された抽象概念は、自然現象を厳密に記述するのに適した言語として使用され続けている）

（C）諸般の応用に適した手段・技巧の集大成としての数学（現実問題を処理する際の簡便な補助手段を提供する）

1.　大学からの数学と高校までの数学

1.1　高校までの数学学習で強調されないこと

高校までの数学学習では、初めに述べた数学の持つ特色のうち、（C）の「実用面」に主眼が置かれている。特に、大学入試に出題される数学の問題の解決のためには、問題の解決に対して最適な方法を見出し、その方法に基

づき、手早く正確に計算することにより、解を見出すという**処理能力**が必要となる。しかし、処理能力の鍛錬を過度に重視するため、繰り返しによる技法の習得のみに終始する傾向がある。得られた解が正しいかどうか慎重に検査する態度（**批判的態度**）や、あらかじめどのような解が得られるのか予想する態度（**多様なアプローチ**）が強調されないため、これらのより重要な態度が身に付いていない大学新入生が多い。

工学や社会科学における応用に際して、既存の数学公式などを用いた計算を行う必要が生じたときには、計算機に頼るのが良い。なぜならば、計算は計算機のほうがはるかに速く正確だから。従って、応用においても重要なのは、処理能力そのものではない。より重要な能力を挙げれば以下のようになるだろう。

・正解が得られているかどうか確認する力（**検証する力**）
・計算機に正しいやり方で尋ねているかどうか確認する力（**吟味する力**）
・計算機にむやみにかける前に、ある程度正解を予測する力（**想像力**）
・正しい公式を適用する力（対象物を統制する理論と数学理論への**理解力**）

1.2　大学からの数学―真の数学世界への旅立ち

まず、大学からの数学の学習内容は、高校までの数学と相当に異なることを認識する必要がある。大学では、問題処理能力の訓練から徐々に脱却し、高校までに学んだ事柄も一般的な観点から見直されるのである。大学からの数学において、強調されるのは**言葉と論理**である。**厳密な定式化**に基づく**新しい概念**が導入され、この概念に基づく**厳密な論理展開**で示される**理論とその応用**を学ぶことになる。

従って、高校までの数学が苦手と感じていた方々にも、改めて真の数学世界に触れる機会が開かれている。大学から始まる、真の数学世界の持つ魅力に取りつかれた結果、数学という自然現象を探究する道にのめり込んでいく者もいるのである。

1.3　大学で学ぶ数学

大学で学ぶ数学においては、初めに述べた数学の持つ特色のうち、(B)「自然現象を正確に記述するための有用な言語体系」としての数学の学習が開始される。中心となるのは

一般化・抽象化された概念の習得と抽象概念を基盤とした精密な論理展開による命題の証明

である。大学の数学においては、実例を計算することから始まって、抽象概念を消化して自家薬籠中の物とするために、初学者には相当な努力が要求される。更に、論理的な説明を与えるための文章力が求められる。そのため、次のような事態が見受けられる。

・高校までの学習では登場していない概念も多く、なじめないと感じる初学者が多い。
・概念を習得するまでにかかる時間には、学習者によるばらつきが大きい。
・論理展開についていけない初学者が多い。

これらは数学の持つ抽象性に起因する自然な反応である。大学における講義では、概念が生まれるに至った背景や、概念の本質を伝える特別な場合を主体とした解説を行うなど、なるべく概念が身近に感じられるように、それぞれの教員により様々な工夫がなされている。しかし、この苦難を乗り越えるのに王道はなく、ただひたすら自分の知性と対峙して、本当に自分がそれぞれの概念を理解しているのかと突き詰めていくしかない。知的体力を有するものであれば、この作業は誰にでも行えるばかりか、この作業に慣れてくると、理解するまで苦闘すること自体が楽しくなる。

2.　扱い方の違いの例―方程式と数

2.1　（連立一次）方程式

先に言及した、大学での数学と高校までの数学の違いを示す例として「方

程式」を取り上げる。中学校で導入される方程式は $2x=1$ などの形をしている。x は求めたい数を便宜的にあらわす記号で、変数と呼ばれる。高等学校に入ると、この方程式は二つの方向に一般化される。一つは変数の「次数」が高くなる：例えば $2x^2-x-1=0$ などの形をした 2 次方程式などが本格的に扱われる。もう一つの方向は、変数の種類が増えることである：例えば、二つの方程式 $x+y=1$ と $2x-y=0$ を同時に満たす変数 x, y を求めることを考えたりする。

後者の一般化は大学において究極的に次の形に**一般化**される：ここでは変数の数は（自然数であれば）何でもよい。以下しばらく、変数は n 個あるとしてそれらを $x_1, x_2, \dots, x_n$ と書くことにする。これらの変数が満たす方程式の個数も（自然数であれば）何でもよい。ただし、どの方程式もすべての変数に関して 1 次以下の式であるとする。従って、i 番目の方程式は

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \tag{1}$$

という形をしている。ここで i は方程式の数 m 以自然数であり、$a_{i1}, \dots, a_{in}$, b_i はあらかじめ指定された何らかの数である。（大学 1 年次においては実数ないしは複素数であることが多い。）例えば次の問題の方程式（たちの集まり）においては変数の数は $n=5$ であり、方程式の数は $m=4$ で、第 $i=1$ 番目の方程式においては $a_{11}=1, a_{12}=2, a_{13}=-1, a_{14}=3, a_1=-2, b_1=1$ である。

問題：次の方程式を同時に満たす x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を**すべて**求めなさい。

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5&=1,\\
2x_1+4x_2+x_3+3x_4-3x_5&=2,\\
-x_1-2x_2+2x_3-4x_4-x_5&=1,\\
3x_1+6x_2+6x_4-5x_5&=3.
\end{aligned}$$

重要なことは、特定の変数の数 n や方程式の数 m に依存しない一般論を構築するために、式（1）の形に書くということである。これは、一般化・抽象化の第一歩であるのだが、早くもこの段階で心理的違和感を覚える初学者が多い。ここで $a_{i1}, \dots, a_{in}$, b_i などと記されたものは単なる記号ではなく、1, 2, −1, 3, −2, 1 などの具体的な数を表象しているだけなのだと気安く受け

止めてほしい。「一般化」や「抽象化」とは決して難しいものではなく、イメージに特定されない自由な心構えを持つための極めて自然な作業なのである。

まとめると、大学では、まず次の形の方程式（連立一次方程式）を扱う。（もちろんこの形ではないような方程式が数限りなく存在する。）

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad & \vdots \ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m .
\end{aligned}
$$

このような一般の形の（連立一次）方程式を満たす数 $x_1, \ldots, x_n$ をどのように求めるのかについて学ぶのであるが、重要なのは、一つの解を発見して終わりとするのではなく、解を**すべて**求めようとすることである。もう少し考えてみると、解が一つもないという事態だって想像しうる。これに応じて、大学の数学においては次のことを気に掛ける。これは**観点の厳密化**といえるだろう。

（観点の厳密化）ある連立一次方程式の解は、

- 少なくとも一つ存在するのか、（**存在・非存在**）
- 存在したとして、ただ一つなのか、それとも複数個か、（**一意性**）
- 解は一般にどのような形なのか、（**解全体のなす構造**）
- すべての解を統制している特別な解の集まりがあるのか。（**構造を規定する部分構造**）

このようにして自然に一つ一つの解ではなく、「それらを束ねる」という集合論的な考えに到達する。連立一次方程式の解をすべてまとめた集まりを考えると、解が少なくとも一つ存在するときには、この集まりは $n=2$ のときには平面の中の直線や点（ないしは平面全体）、$n=3$ のときには空間の中の平面や直線や点（ないしは空間全体）と似た構造を持っていることが観察できる。この集まりをシフトすると、ベクトルの和やスカラー倍に関して閉じている。この集まりは、単なる集まりではなく何らかの構造を備えている

のである。この構造の持つ性質を抽象化して「**ベクトル空間**」という重要な概念が生まれる。

2.2　構造を備えた集合

連立一次方程式の解だけではなく、一般に数学では**構造を備えた集合**と呼ばれる概念が重要視される：すなわち、

> 個々の対象ではなく、それらをひとまとめにしたもの（**集合**）を設定し、そこになんらかの構造（**代数的、幾何的、解析的**）が入るか検討し、その構造に関して集合をよく統制する部分に注目する。

別の例を挙げると、$1,\ -2,\ \sqrt{2}$ 等の個々の「数」ではなく、これらを全部集めた実数の集まりという集合 $\mathbb{R}$ を考えて、この集合 $\mathbb{R}$ が次の「代数的構造」を持っていることに注目するのである。

> どの二つの実数 a, b についても、a と b の和 $a+b$ および積 ab という**実数**（同じ集合に所属している対象）が定まり、和と積はそれぞれ結合法則、交換法則など計算に便利な条件を満たし、分配法則により関連している。

実数全体を集めて得られる集合 $\mathbb{R}$ は加減乗除が自由に行えるような代数的構造を備えており、これを抽象化して「（可換）**体**」という重要な概念が生まれる。

高校までに、整数、有理数（分数）、実数、複素数などの‘数’（の集合）が導入されているが、その導入は、これらの対象自体の構成を通じてなされている。しかし、大学で学ぶべき重要な事実の一つは、数学では「数」という言葉に厳密な定義を与えない、ということである。ある対象自身が‘数’と呼べるかどうかは、その対象を可換体というある代数構造を備えた集合の元とみなすか否か（という我々の観点）に依存するのであり、その対象自身

の性質ではない。このことは将来小中高で数学を教えようと志す学生には、特によく理解しておいてほしい。

高校までに導入されていないが、情報社会への応用などから欠かせない、‘数’の集合がある。それは**有限体**と呼ばれ、勝手に選んだ素数 p と自然数 n に対して p^n 個の対象から構成される可換体である。従って、有限体では、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と同様に加減乗除が自由に計算できる。通常、大学 2 年次以上で、この新しい数の世界での計算方法、この新しい数の世界における代数学や幾何学の展開、その応用としての様々な情報社会での技術処理（符号や暗号）との関連、などを学ぶことになる。

有限体は、ある代数構造の**剰余構造**として得られる。ここで剰余構造とは、構造を備えた集合から、等しいという観点を粗雑にする（些細な違いを無視する）ことで得られる構造である。実は、複素数全体のなす可換体も実数係数の整式（多項式ともいう）全体のなす集合の剰余構造であり、有限体の構成もこれと非常に似ている。整数全体のなす集合の剰余構造として得られる「素体」（それぞれの素数に応じて定まる）を係数とする多項式を考え、それらの全体が作る集合の剰余構造として有限体が得られる。また、有理数全体のなす集合も、ある形の整数の対から構成される集合の剰余構造である。このようにある構造を備えた集合から、剰余構造を作ることで新たな構造を備えた集合を作り出すという考えは極めて自然かつ重要であり、広く数学（のみならず数理科学）における基本的な思考法のひとつである。

キーワード
言葉と論理、抽象概念、方程式、集合、構造を持つ集合、剰余構造