

生命保険数理と近似多項式

経営システム工学専攻

12N7100035H

吉越 宇宙

1. 研究背景

分割払込の場合の生命年金現価の近似計算をどうするかが生命保険数学のなかで1つの課題になっている。構造が単純な分割払込生命年金 $(\ddot{a}_{x:n}^{(k)})$ の近似式は存在するが、複雑なもの $(I\ddot{a}_{x:n}^{(k)})$ に対しては現在文献等で精密な近似式が明示されていない。具体的には、二見の近似式、ウールハウスの公式、ステファンセンの公式を使って求める。

2. 生命年金の記号

2.1 期始払い生命年金の現価

x 歳加入, n 年契約, 期始払い年金年額 1 の生命年金の現価を $\ddot{a}_{x:n}$ で表し, 会社側の支出金額の現価を Z とする. このとき,

$$\ddot{a}_{x:n} = Z$$

として $\ddot{a}_{x:n}$ が定められる.

まず, Z を n 個の確率変数の和として表す. m 年度の始め, 時点 $(m-1)$ における会社側の支出金額の現価を Z_m とすると, 時点 $(m-1)$ で年金支給が行われるための条件は被保険者が生存していることなので

$$Z_m = \begin{cases} v^{m-1} & (X \geq m-1) \\ 0 & (X < m-1) \end{cases}$$

となり, この Z_m の期待値 $E[Z_m]$ は

$$E[Z_m] = v^{m-1}P(X \geq m-1) = v^{m-1}{}_{m-1}p_x$$

会社側の支出金額の現価 Z は Z_1, Z_2, \dots, Z_n の和となるので, 期始払い生命年金現価は

$$\ddot{a}_{x:n} = \sum_{m=0}^{n-1} v^m {}_m p_x$$

となる.

2.2 年 k 回払い, 連続払い生命年金の現価

x 歳加入, n 年契約, 期始払い, 年金年額 1, 年 k 回払いの生命年金の現価 $\ddot{a}_{x:n}^{(k)}$ を同様に求める. 年額が 1 で年 k 回払いなので, 1 回ごとの支給金額は $\frac{1}{k}$ となる. 時点 $\frac{m-1}{k}$ における会社側の支出金額の現価 Z_m は

$$Z_m = \begin{cases} \frac{1}{k} v^{\frac{m-1}{k}} & (X \geq \frac{m-1}{k}) \\ 0 & (X < \frac{m-1}{k}) \end{cases}$$

であるから, $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{nk}$ の期待値を求めることにより

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:n]^{(k)}} &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{nk} v^{\frac{m-1}{k}} P\left(X \geq \frac{m-1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{nk} v^{\frac{m-1}{k}} {}_{\frac{m-1}{k}}p_x\end{aligned}$$

となる. またこの式において, $k \rightarrow \infty$ とすると,

$$\bar{a}_{x:n]} = \int_0^n v^t {}_t p_x dt$$

となる. これを連続払い生命年金の現価とよぶ.

2.3 累加年金

ここで, 今回対象としている累加年金について述べる.

x 歳加入, n 年契約, 期始払いの生命年金で, 1 年度の年金年額が 1, 2 年度の年金年額が 2, \dots , n 年度の年金年額が n となる生命年金の現価を $(I\ddot{a})_{x:n]}$ とすると

$$(I\ddot{a})_{x:n]} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)v^t {}_t p_x$$

となる. これが期始払い累加年金の現価である.

次に, 連続払いの累加年金について考える. x 歳加入, n 年契約の連続払いの生命年金で, 時点 $(x+t)$ での支払い額が t となる生命年金の現価を $(\bar{I}\ddot{a})_{x:n]}$ とすると

$$(\bar{I}\ddot{a})_{x:n]} = \int_0^n t v^t {}_t p_x dt$$

となる. そして, 今回近似式を求めたい x 歳加入, n 年契約, 期始払い, 年 k 回払いの累加年金の現価 $(I\ddot{a})_{x:n]}^{(k)}$ は

$$(I\ddot{a})_{x:n]}^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{nk-1} (t+1)v^{\frac{t}{k}} {}_{\frac{t}{k}}p_x$$

と表される.

3. 各近似式の紹介と計算結果

3.1 二見の近似式

ある曲線 $f(t), t \in [0, 1]$ を考えるとき, $\bar{f}_1(t) = f(0) + f(1) - f(0) \cdot t$ は 1 次式による近似を与える. この $\bar{f}_1(t)$ を種として次の 3 次式の近似を行う. この方式の考え方は端点で値を一致させ, その端点での微係数を一致させるという方法である.

$$\bar{f}_3(t) = \bar{f}_1(t) + \beta_1 t - \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

ここで

$$\beta_1 = \{f(0) - f(1)\} + f'(0)$$

$$\beta_2 = 3\{f(0) - f(1)\} + 2f'(0) + f'(1)$$

$$\beta_3 = 2\{f(0) - f(1)\} + f'(0) + f'(1)$$

とすると近似多項式を与える.

$\ddot{a}_{x:n}^{(k)}$ の近似多項式を求めるため、 $f(t) = v^t {}_t p_x$ においてこれを行うことにより、

$$\ddot{a}_{x:n}^{(k)} = \ddot{a}_{x:n} - \frac{k-1}{2k}((1 - v^n {}_n p_x)) - \frac{k^2-1}{12k^2} \{ \delta(1 - v^n {}_n p_x) + (\mu_x - v^n {}_n p_x \mu_{x+n}) \}$$

を得る。

3.2 ウールハウスの公式

関数 $f(x)$ を一般的に定義するが、連続性、微分可能性など、ほどよい性質はすべて持っている素直な関数と仮定しておく。

$f(x) = f(0) + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots$ と展開できるとして、

$$\frac{df}{dx} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \dots \quad \left(\frac{df}{dx} \right)_0 = A$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right) = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + 20Ex^3 + \dots \quad \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_0 = 2B$$

$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right) = 6C + 24Dx + 60Ex^2 + \dots \quad \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_0 = 6C$$

これより、

$$f(0) + f(x) = 2f(0) + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots$$

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_0 - \left(\frac{df}{dx} \right)_x = -2Bx - 3Cx^2 - 4Dx^3 - 5Ex^4 + \dots$$

$$\left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_0 - \left(\frac{d^3 f}{dx^3} \right)_x = -24Dx - 60Ex^2 + \dots$$

いま考えたいのは次の積分である。

$$\int f(x) dx = f(0)x + \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Bx^3 + \frac{1}{4}Cx^4 + \frac{1}{5}Dx^5 + \frac{1}{6}Ex^6 + \dots$$

これを上記の微分式で置き換え、 $x = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots$ とおき順次の近似式を得たあと、 $f(t) = l_{x+t} v^{x+t}$ とおき計算すると、

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta)$$

が得られる。

ここで、 $f(t) = (mt+1)l_{x+t} v^{x+t}$ とおいて $(I\ddot{a})_{x:n}^{(k)}$ の近似式を同様に求めると、

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = (I\ddot{a})_x - \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{12m^2}(1 - \mu_x + \delta)$$

という計算結果を得た。

3.3 ステファンセンの公式

オイラーの和公式より、ベルヌーイ定数を用いて関数 f は次のように表現できる。

$$\sum_{s=0}^{k-1} f(s) = \int_0^k f(s) ds - \frac{1}{2}[f(x)]_0^k + \sum_{u=1}^{r-1} \frac{B_{2u}}{(2u)!} [f^{(2u-1)}(x)]_0^k + R$$

$$\left(R = - \int_0^k \frac{\Delta \bar{B}_{2r}(0)}{(2r)!} f^{(2r)}(t) dt \right)$$

と表現しておき、 $k \rightarrow \infty$ としておく。すると、

$$\int_0^\infty f(s) ds = \sum_{s=0}^\infty f(s) + \frac{1}{2} [f(x)]_0^\infty - \sum_{u=1}^{r-1} \frac{B_{2u}}{(2u)!} [f^{(2u-1)}(x)]_0^\infty - R$$

ここで、 $k \rightarrow \infty$ のとき、 $f(k) \rightarrow 0, f'(k) \rightarrow 0$ などと仮定しておくと、

$$\int_0^\infty f(s) ds = \sum_{s=0}^\infty f(s) - \frac{1}{2} f(0) - \sum_{u=1}^{r-1} \frac{B_{2u}}{(2u)!} f^{(2u-1)}(0) + R$$

$$\left(R = - \int_0^\infty \frac{\Delta \bar{B}_{2r}(0)}{(2r)!} f^{(2r)}(t) dt \right)$$

ここで、 $f(s) = {}_s p_x v^s$ とおき、 $s = 0, 1, 2, \dots$ としていたものを、 $s = \frac{0}{m}, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots$ とすることによって、

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2} (\mu_x + \delta) + \dots$$

を得る。ウールハウスと同様に $(I\ddot{a})_{x:n}^{(k)}$ の近似式を求めるため、 $f(s) = (s+1)v^s {}_s p_x$ として同様に計算すると、

$$(I\ddot{a})_x^{(m)} = (I\ddot{a})_x - \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{12m^2} (1 - \mu_x + \delta) + \dots$$

という計算結果を得た。

4. 考察と課題

以上より、ウールハウス、ステファンセンを用いた計算結果から $(I\ddot{a})_x^{(m)} = (I\ddot{a})_x - \frac{m-1}{2m} + \frac{m^2-1}{12m^2} (1 - \mu_x + \delta) + \dots$

が近似式として濃厚と考えられる。二見による近似式は今回明確な式を求めるところまで至らなかったため記載しなかった。

正確にはこの式において数値実験を行い、実際の生命表と照らし合わせ比較を行いたいところだったが、今回は行うことができず、この2点が今後の課題である。

5. 参考文献

- 二見 隆, 「生命保険数学 上巻」 生命保険文化研究所, 1992
- 二見 隆, 「生命保険数学 下巻」 生命保険文化研究所, 1992
- 黒田耕嗣, 「生保年金数理」, 培風館, 2007
- 山内恒人, 「生命保険数学の基礎 アクチュアリー数学入門」 東京大学出版会, 2009
- Steffensen, J.F., Some Recent Researchers in the Theory of Statistics and Actuarial Science, Cambridge U.P., 1930.
- Woolhouse, W.S.B., Interpolation, Summation, and the Adjustment of Numerical Tables, Charles and Edwin Layton, 1865