# PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER TAK HOMOGEN

**Anggita Maya Kurniawati, Yunita Rachmawati**
*Universitas PGRI Yogyakarta*
Anggitamaya79@gmail.com
**Submitted: 22-07-2018, Reviewed:29-08-2018, Accepted: 27-11-2018**

**Abstrak**. Persamaan matematika tidak bisa terpisahkan dengan kehidupan sehari-hari. Suatu persamaan matematika perlu dianalisis. Bentuk persamaanya salah satunya adalah persamaan diferensial. Salah satu bentuk persamaan yaitu persamaan diferensial. Di lingkungan sehari-hari terdapat model matematika suatu masalah persamaan diferensial. Untuk memodelkan suatu permasalahan matematika harus menggunakan fakta yang ada. Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi atau turunan. Persamaan diferensial biasa linier tidak homogen bisa di ubah menjadi persamaan diferensial homogen jika direduksi.

**Kata kunci**: *Persamaan Diferensial, Model Matematika.*

## PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi dan turunan. Persamaan matematika tidak bisa terpisahkan dengan kehidupan sehari-hari. Suatu persamaan matematika perlu dianalisis. Bentuk persamaanya salah satunya adalah persamaan diferensial. Salah satu bentuk persamaan yaitu persamaan diferensial. Persamaan diferensial adalah suatu relasi yang menyangkut satu atau lebih turunan dari sebuah fungsi yang tak diketahui dan mungkin fungsi itu sendiri. Ada banyak cara untuk menganalisis persamaan diferensial contohnya analisiskualitatif, pendekatan metode numerik, dll.

Suatu persamaan biasa orde pertama linier dalam variabel tak bebas y danvariabel tak bebas x jika dalam hal itu dapat dituliskan dalam bentuk .(Utami, Persamaan Diferensial, 2016)

Di lingkungan sehari-hari terdapat model matematika suatu masalah persamaan diferensial. Untuk memodelkan suatu permasalahan matematika harus menggunakan fakta yang ada.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan diferensial biasa dengan koefisien linier. Bentuk umum PDB dengan koefisien linear adalah $(ax+by+c)\,dx+(px+qy+r)dy=0$. (2.2)

1. Bila c = 0 dan r = 0 maka bentuk (2.2) menjadi $(ax+by)dx+(px+qy)dy=0$, adalah PDB homogen sehingga dapat diselesaikan dengan mensubstitusikan $v=\frac{y}{x}$.
2. Bila $px+qy=k(ax+by)$ dimana k = konstanta, maka bentuk (2.2) menjadi
   $$(ax+by+c)\,dx+k(ax+by)+r\,dy=0 \qquad (2.3)$$
   Misalkan $ax+by=z$, sehingga diperoleh $a\,dx+b\,dy=dz$, dan $dy=\frac{dz-adx}{b}$.
   Akibatnya bentuk (2.3) menjadi
   $$(z+c)dx+(kz+r)dy=0$$
   $$(z+c)dx+(kz+r)(\frac{dz-adx}{b})=0$$
   $$b(z+c)dx+(kz+r)dz-a(kz+r)dx=0$$
   $$b(z+c)-a(kz+r)dx+(kz+r)dz=0,$$
   Merupakan PDB dengan variabel terpisah.
3. Bila $\frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}; c\neq 0\, dan\, r\neq 0.$
   Diselesaikan dengan memisalkan
   $$ax+by+c \quad =u$$
   $$px+qy+r \quad =v$$
   $$adx+bdy \quad =du$$
   $$pdx+qdy \quad =dv$$
   $$dx=\frac{\begin{vmatrix} du & b \\ dv & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}=\frac{qdu-bdy}{aq-bp}.$$
   Subtitusi pada persamaan (2.3), diperoleh PDB homogen.

**Contoh 2.6:**
Selesaikanlah PDB $(x+y+1)dx+(2x+2y+1)dy=0$
**Penyelesaian:**
Misal $x+y=z$, sehingga $dz=dx+dy\, atau\, dy=dz-dx$
PDB menjadi
$$(z+1)\,dx+(2z+1)(dz-dx)=0$$
$$(z+1)dx+(2z+1)dx-(2z+1)=0$$
$$-zdx+(2z+1)dz=0$$
Dengan pengintegralan diperoleh:
$$\int dx=\int\frac{2z+1}{2}dz$$
$$x=2z+\ln z+c$$
$$x=2(x+y)+\ln(x+y)=c,$$
Adalah penyelesaian PDB yang diminta.

Contoh 2.7:
Carilah solusi dari PDB $(x+2y-1)dx+(2x-y-7)dy=0.$

Penyelesaian:
Missal $x+2y-1=u, dan\, 2x-y-7=v$ , sehingga diperoleh

$$dx+2dy=du$$

$$2dx-dy=dv$$

$$dx=\frac{\begin{vmatrix} du & 2 \\ dv & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-du-2dv}{-1-4}=\frac{du+2dv}{5}$$

$$dy=\frac{\begin{vmatrix} 1 & du \\ 2 & dv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{dv-2du}{-1-4}=\frac{du-dv}{5}$$

Subtitusikan pada PDB semula, diperoleh:

$$u\frac{(du+2dv}{5}+v\frac{(dv-2du)}{-5}=0$$

$$\frac{udu+2udv+2vdu-vdu}{5}=0$$

$$(u+2v)du+(2u-v)dv=0$$

$$(2u-v)dv=-(u+2v)du$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{-(u+2v)}{(2u-v)}$$

Yang merupakan PDB homogen. Selanjutnya, dengan memisalkan

$$z=\frac{v}{u},\frac{dv}{du}=u\frac{dz}{du}+z,$$

PDB homogen ini dapat ditulis menjadi

$$\frac{dv}{du}=-\frac{(1+2\frac{v}{u})}{2-\frac{v}{u}}=(\frac{1+2z}{2-z})$$

$$z+\frac{udz}{du}=\frac{1+2z}{z-2}$$

$$\frac{udz}{du}=\frac{1+2z-z(z-2)}{z-2}$$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{1-z^2+4z}{z-2},$$

Dan dengan pengintegralan diperoleh

$$\int \frac{z-2}{1+4z-z^2}dz = \int \frac{du}{u}$$

$$-\frac{1}{2}(1+4z-z^2) = \ln u + c$$

$$\ln(1+4\frac{v}{u}-\frac{v^2}{u^2})^{1/2} u + c = 0$$

$$(u^2+4uv-v^2)^{1/2} = e^c$$

$$u^2+4uv-v^2 = A$$

$$(x+2y-1)^2+4(x+2y-1)(2x-y-7)$$

$$-(2x-y-7)^2 = A$$

$$x^2+4y^2+1+4xy-2x-4y+8x^2$$

$$-4xy-28x+16xy-8y^2$$

$$-s6y-8x+4y+28-4x^2-y^2$$

$$-49+4xy+28x-14y = A$$

$$5x^2+20xy-5y^2-10x-79y-20 = A$$

$$x^2+4xy-y^2-2x-4 = A$$

$$x^2+4xy-y^2-2x = B,$$

Penyelesaian tersebut adalah solusi PDB yang diminta.(Suprihatin, Bangun, & Arhami, 2013)

Persamaan diferensial sering digunakan dalam suatu keadaan yang mengandung VaR *(Value at Risk),* VaR dapat didefinisikan sebagai estimasi potensi kerugian maksimal pada periode tertentu dengan tingkat keyakinan tertentu dalam kondisi keadaan (pasar) yang normal. Nilai VaR selalu disertai dengan *probability* yang menunjukkan seberapa mungkin kerugian yang terjadi akan kurang dari nilai VaR.(Dwipa, 2016)

Persamaan diferensial dengan m(x,y) dan n(x,y) adalah linier tetapi tidak homogen.Pandang bentuk persamaan diferensial

$$(\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{c})\mathrm{dx}+(\mathrm{px}+\mathrm{qy}+\mathrm{r})\mathrm{dy}=0$$

Dimana a, b, c, p, q, r adalah suatu konstanta. Ada tiga kemungkinan yang dapat terjadi:

1. $\frac{\mathrm{a}}{p} = \frac{\mathrm{b}}{q} = \frac{\mathrm{c}}{r} = \alpha$

   Langkah-langkah penyelesaian:

   Karena $\frac{\mathrm{a}}{p} = \frac{\mathrm{b}}{q} = \frac{\mathrm{c}}{r} = \alpha$ maka menggunakan tranformasi $px+qy+r=u$, yang berarti bahwa ax+by+c=$\alpha$.u

   Bentuk persamaan tereduksi menjadi persamaan dengan variabel terpisah dan kemudian selesaikanlah.

2. $\frac{\mathrm{a}}{p} = \frac{\mathrm{b}}{q} \neq \frac{\mathrm{c}}{r}$

   Langkah-langkah penyelesaian:

Gunakan transformasi: $px+qy=u$ dan dari sini berarti $\mathrm{dy}=\dfrac{\mathrm{du}-\mathrm{qdy}}{\mathrm{q}}$ atau $\mathrm{dx}=\dfrac{\mathrm{du}\text{-}\mathrm{qdy}}{\mathrm{p}}$

Misalkan $\dfrac{\mathrm{a}}{p}=\dfrac{\mathrm{b}}{q}=\beta$ maka $\mathrm{ax+by}=\beta.\mathrm{u}$

Persamaan tereduksi menjadi persamaan variabel terpisah, $(\beta\mathrm{u+c})\mathrm{dx}+(\mathrm{u+r})(\dfrac{\mathrm{du\text{-}pdx}}{\mathrm{q}})=0$ atau $(\beta\mathrm{u+c})(\dfrac{\mathrm{du\text{-}pdy}}{\mathrm{q}})+(\mathrm{u+r})\mathrm{dy}=0$. selesaikanlah persamaan variabel terpisah ini dan kemudin gantilah $u=px+qy$ untuk mendapatkan solusi umumnya.

3. $\dfrac{\mathrm{a}}{p}\neq\dfrac{\mathrm{b}}{q}$

Langkah-langkah penyelesaian:

Gunakan transformasi:

$$\mathrm{ax+by+c=u}\Rightarrow a\,dx+b\,dy=du$$

$$\mathrm{px}+q\mathrm{y}+r=v\Rightarrow p\,dx+q\,dy=dv$$

Dari persamaan ini diperoleh bahwa:

$$dx=\frac{qdu-bdv}{aq-bp}\quad dan\quad dy=\frac{adv-pdu}{aq-bp}$$

Karena $aq-bp\neq 0$ maka bentuk PD tereduksi menjadi PD homogen $(qu-pv)du+(av-bu)dv=0$

Selesaikan persamaandiferensial homogeny itu dan kemudian gantilah kembali u dan v dengan transformasi semula untuk mendapatkan solusi umum persamaan diferensial semula.

Contoh 2.3

Selesaikan persamaan diferensial

$$(2x-5y+3)dx-(2x+4y-6)dy=0$$

Penyelesaian:

Karena $\dfrac{2}{2}\neq\dfrac{-5}{4}$ maka gunakan transformasi:

$$2x-5y+3=u\Rightarrow 2dx-5dy=du$$

$$2x+4y-6=v\Rightarrow 2dx+4dy=dv$$

Dari dua persamaan ini diperoleh:

$$dx=\frac{(4du+5dv)}{18}\quad dan\quad dy=\frac{(2dv-2du)}{18}$$

Bentuk persamaan diferensial tereduksi menjadi persamaan diferensial homogen, $(4u+2v)du+(5u-2v)dv=0$ (Kartono, 2012)

## KESIMPULAN

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung fungsi atau turunan. Persamaan diferensial biasa linier tidak homogen bisa di ubah menjadi persamaan diferensial homogen jika direduksi.

## DAFTAR PUSTAKA

Davis. (1992).

Dwipa, N. (2016). *Identifikasi model I-Garch* (*integrated generalized auto regressive conditionally heterocedartic*). Jurnal Derivativ, 3, 56-69.

Kartono. (2012). *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.