HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Angeline Melchiors
Maricélia Soares
Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI
Matemática Licenciatura (MAD0071) – Trabalho de Graduação

RESUMO

O cálculo diferencial e integral é a mais poderosa ferramenta matemática da atualidade. Sua descoberta tem contribuído para a evolução de diversas outras ciências. Porém, para chegar a essa descoberta, a humanidade estuda o assunto há séculos, buscando respostas para problemas de áreas e tangentes, e atualmente, com a contribuição de diversos pensadores, percebe-se que a aplicação do cálculo é muito maior do que inicialmente imaginado. Os primeiros registros datam de 1.800 a.C., e desde a antiguidade, grandes nomes, como Arquimedes, Kepler e Fermat, deram sua contribuição ao estudo, até que no século XVII, Newton e Leibniz chegaram, independentemente, a fórmulas para utilizar o cálculo de maneira funcional. Após Newton e Leibniz, diversas outras personalidades matemáticas trabalharam para lapidar a ferramenta, como os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral. Cálculo Infinitesimal. História do Cálculo.

1 INTRODUÇÃO

O século XVII trouxe grandes avanços para a matemática, principalmente pelas novas áreas de pesquisa abertas. Porém a maior realização matemática do período foi a invenção do cálculo diferencial e integral, ou cálculo infinitesimal, na segunda metade do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, de maneira independente. De acordo com Eves (2004, p. 417), "... com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou", e complementa, dizendo que os conceitos principais do cálculo "... têm tanto alcance e tantas implicações no mundo moderno que talvez seja correto dizer que sem algum conhecimento deles dificilmente hoje uma pessoa poderia considerar-se culta."

O cálculo infinitesimal é o estudo do movimento e da mudança, e antes da sua descoberta, os matemáticos ficavam bastante restritos às questões estáticas de contar, medir e descrever as formas. Com o novo cálculo foi possível que os matemáticos estudassem

> "... o movimento dos planetas e a queda dos corpos na terra, o funcionamento das máquinas, o fluxo dos líquidos, a expansão dos gases, forças físicas tais como o magnetismo e a eletricidade, o voo, o crescimento das plantas e animais, a propagação das epidemias e a flutuação dos lucros. A matemática tornou-se o estudo dos números, da forma, do movimento, da mudança e do espaço". (DEVLIN, 2010, p. 24-25).

Inicialmente o cálculo foi dirigido para o estudo da física, pois muitos dos grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII também eram físicos. Porém, a partir de meados do século XVIII, aumentou o interesse nos aspectos teóricos da matemática, além do interesse nas suas aplicações, na medida em que se começou a compreender o enorme poder do cálculo, e diversos matemáticos deram suas contribuições no aprimoramento do cálculo diferencial e integral, o que facilitou a divulgação do cálculo no meio acadêmico e abriu caminho para novos estudos, ampliando sua gama de utilizações.

Neste trabalho será abordada a história do cálculo, levantada por meio de pesquisa bibliográfica, na sequência em que o cálculo surgiu: primeiramente serão descritos alguns fatos e contribuições de matemáticos, físicos e filósofos, que chegaram a ideias e criaram teorias relacionadas ao que hoje chamamos de cálculo; após será relatado o surgimento da integração, em seguida da diferenciação, e a junção de ambas, através do teorema fundamental do cálculo. A pesquisa bibliográfica culmina com um relato das descobertas de Newton e Leibniz, considerados os criadores do cálculo pela importância e aplicabilidade dos seus trabalhos, sendo feita uma breve análise das semelhanças e diferenças das obras de Newton e Leibniz, em função das discussões acerca da autoria da descoberta. O aperfeiçoamento e a difusão do cálculo tiveram a colaboração de outros nomes, cujo trabalho relacionado ao cálculo será descrito brevemente.

2 O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O desenvolvimento do cálculo ocorreu em ordem inversa àquela que se costuma estudar o cálculo nos meios acadêmicos: o cálculo integral surgiu muito antes que o cálculo diferencial.

> A ideia da integração teve origem em processos somatórios, ligados ao cálculo de certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra. (EVES, 2004, p. 417).

2.1 CÁLCULO INTEGRAL

Eves (2004) coloca que os primeiros problemas da história do cálculo estavam relacionados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. As formas determinadas por linhas retas já são calculadas há milênios, porém cálculos precisos para formas compostas por linhas curvas são relativamente recentes.

Piehowiak, (2011, p. 191) enuncia o problema da área como: “dada uma função *f* contínua e não negativa em um intervalo [a, b], qual a área da região entre o gráfico de *f* e o intervalo [a, b] no eixo *x*?”

O primeiro registro que se tem do que parece ser uma estimativa primitiva da área de uma superfície curva, é o Papiro Egípcio de Moscou (ou Golonischev), escrito aproximadamente em 1890 a.C., onde o escriba pede a área da superfície de um cesto, e resolve a questão com um cálculo semelhante a uma fórmula de integração. Além disso, o mesmo papiro traz, entre outros problemas matemáticos da vida quotidiana dos egípcios, o cálculo do volume de um tronco de pirâmide (BOYER, 2010).

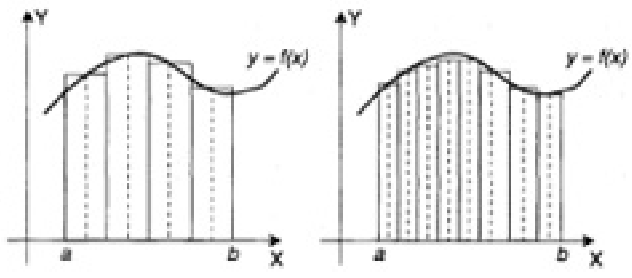
Outra contribuição importante e antiga ao problema da área é a questão da quadratura do círculo datada de 430 a. C, por Antífon, um filósofo do período pré-socrático. Ele teria antecipado a ideia de que era possível exaurir a diferença entre a área de um círculo e um polígono regular inscrito nele, através de sucessivas duplicações do número de lados do polígono, e como é possível construir um quadrado com área igual à de qualquer polígono, seria possível construir um quadrado com área igual à do círculo. O argumento de Antífon foi criticado, sob alegação de que jamais se esgotaria a área do círculo. Apesar disso, a abordagem do filósofo continha os primórdios do famoso *método da exaustão* grego (EVES, 2004).

Segundo Eves, (2004), os gregos da antiguidade tinham grande conhecimento acerca de áreas de triângulos, círculos e configurações relacionadas, mas calcular a área de qualquer outra figura era um problema sem solução.

O matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.) desenvolveu o método do equilíbrio para calcular a área de regiões limitadas por parábolas, espirais e várias outras curvas. De acordo com Eves (2004, p. 422), o método que Arquimedes utilizava estabelecia que deveria ser feito o seguinte procedimento para se determinar uma área ou volume de uma forma:

> ... corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (...) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos.

FIGURA 1 – DIVISÃO DA ÁREA SOB A CURVA EM FATIAS PARALELAS



FONTE: Flemming; Gonçalves (2006, p. 358)

Arquimedes usava o **método do equilíbrio**, que se utilizava do momento de um corpo para auxiliar no cálculo da área ou volume, e usava o método da exaustão em seguida para conseguir uma demonstração rigorosa dos seus resultados.

O método da exaustão é o equivalente grego do cálculo integral, e foi creditado por Arquimedes a Eudoxo de Cnides (370 a. C), discípulo de Platão (BOYER, 2010). Afirma que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, baseando-se na proposição de que:

> *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie*. (grifo do autor) (EVES, 2004, p. 419)

chegando com isso aos infinitésimos.

Entre os matemáticos antigos, quem aplicou da melhor maneira o método da exaustão, chegando muito próximo da atual integração, foi Arquimedes. Eves (2004) diz que Arquimedes chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que são utilizadas atualmente, para o cálculo de áreas e volumes.

Apenas por volta do início do século XVII as ideias de Arquimedes tiveram novos desdobramentos na Europa Ocidental. O engenheiro belga Stevin usou um método semelhante ao de Arquimedes em suas atividades na área da hidrostática, para determinar a força exercida pela pressão de um fluido sobre um dique vertical:

> Basicamente a ideia consistia em dividir o dique em faixas horizontais e então fazer cada uma girar em torno de suas bordas superior e inferior, até que elas se tornassem paralelas ao plano horizontal. Fundamentalmente é esse o método usado hoje em dia em nossos textos elementares de cálculo. (EVES, 2004, p. 424).

Dos primeiros europeus modernos que desenvolveram ideias sobre infinitésimos em trabalhos com a integração, merece destaque o matemático alemão Johann Kepler (1571–1630). Ele utilizou o processo de integração para calcular as áreas envolvidas na sua segunda lei do movimento planetário, e também para calcular os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho. Kepler tinha pouca paciência com o extremo rigor do método da exaustão, porém, apesar das objeções levantadas sobre seu trabalho do ponto de vista do rigor matemático, conseguiu resultados corretos, e de maneira bem simples, e seus métodos são utilizados até hoje por físicos e engenheiros para armar problemas. (EVES, 2004, p. 424).

O matemático italiano Boaventura Cavalieri (1598–1647) publicou, em 1635, um dos livros mais influentes do início do período moderno: *Geometria indivisibilibus continuorum*, onde afirma que "... uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e que volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos." (BOYER, 2010, p. 226). Foi o mesmo tipo de raciocínio que Arquimedes usou em "o método", obra onde descreveu a forma que utilizava para deduzir suas descobertas, e que na época estava perdida, ou seja, não era de conhecimento de Cavalieri.

Boyer (2010, p. 227) afirma que o princípio geral do método dos indivisíveis pode ser resumido pelo *teorema de Cavalieri*: "Se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão."

Os princípios de Cavalieri diziam para considerar uma porção plana como formada de uma infinidade de cordas paralelas e um sólido formado de uma infinidade de secções planas paralelas. Aí, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas da porção plana ao longo de seu próprio eixo, para que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana será a área da figura original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. E para o cálculo do volume de um sólido, se faz o mesmo com as secções planas deste sólido. (BOYER, 2010).

Dessa forma, podemos escrever os princípios de Cavalieri, que permitem resolver intuitivamente muitos problemas de mensuração (EVES, 2004, p. 426):

> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
> 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

Também muito importante no desenvolvimento do cálculo integral, foi o matemático inglês John Wallis (1616–1703) que fez uso sistemático das séries em análise, foi o primeiro a considerar as cônicas como curvas de segundo grau, ao invés de considerá-las como secções de um cone, e também explicou de maneira razoavelmente satisfatória o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários, e introduziu o atual símbolo do infinito (∞), entre outras importantes contribuições à matemática e muitas publicações em diversas áreas da física (EVES, 2004).

2.1.1 Os infinitésimos

Há evidências que na Grécia antiga algumas escolas trabalhavam com as premissas de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente, ou que é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis, suposições das quais se originou o método da exaustão de Eudoxo (EVES, 2004).

O filósofo grego Zenão de Eleia, que viveu por volta de 450 a.C., questionava essas premissas, e criou alguns paradoxos, através dos quais afirma que o movimento da divisão é impossível. Eves (2004, p. 418) traz dois desses paradoxos:

> *A Dicotomia*: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, e antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad inifinitum*. Segue-se, então, que o movimento jamais começará.
> *A Flecha*: Se o tempo é formado de instantes atômicos indivisíveis, então uma flecha em movimento está sempre parada, posto que em cada instante ela está numa posição fixa. Sendo isto verdadeiro em cada instante, segue-se que a flecha jamais se move.

Esses questionamentos tiveram grande influência nos rumos da matemática toda. Originalmente, os pitagóricos usavam elementos discretos (como pedrinhas, ou cálculos, de onde surgiu o nome Cálculo) para representar as grandezas. Na época de Euclides, com “Os Elementos”, as grandezas passaram a ser representadas por segmentos de reta, e os matemáticos passaram a considerar as grandezas contínuas, evolução essa que é atribuída em grande parte à busca de resposta aos paradoxos de Zenão (BOYER, 2004).

2.2 DERIVAÇÃO

A diferenciação se originou de problemas relativos ao traçado de tangentes a curvas e de questões que buscavam determinar máximos e mínimos de funções, na Grécia antiga, porém a primeira manifestação realmente clara do método diferencial data de 1629 (EVES, 2004).

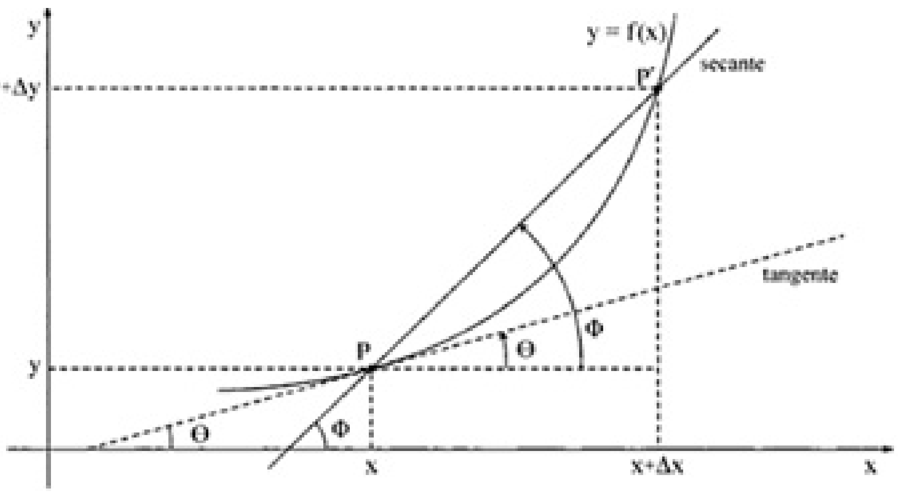
O alemão Johannes Kepler (1571–1630) já tinha observado que os incrementos de uma função tornam-se infinitesimais nas proximidades de um ponto de máximo ou de mínimo comum. Porém foi o matemático francês Pierre de Fermat (1601–1665) quem primeiramente manifestou com clareza o método diferencial. Considerando a ideia de Kepler, Fermat estabeleceu um procedimento para determinar os pontos de máximo ou de mínimo:

> Se *f(x)* tem um máximo ou mínimo comum em *x* e se e é muito pequeno, então o valor de *f(x-e)* = *f(x)* e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de *x* para os quais *f(x)* assume um máximo ou mínimo. (EVES, 2004, p. 429).

Esse método é conhecido como método de Fermat. O método é incompleto, pois ignorou que a condição de a derivada de *f(x)* se anular não é suficiente para que se tenha um máximo ou mínimo comum e também não fazia distinção entre valor máximo e valor mínimo (EVES, 2004).

Outra descoberta de Fermat foi um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. O método consistia em achar a *subtangente* relativa ao ponto de tangência sobre o eixo *x* e a intersecção da tangente com esse eixo (EVES, 2004).

FIGURA 2 – MÉTODO DE FERMAT PARA DETERMINAÇÃO DA TANGENTE



FONTE: Garbi (2009, p. 198)

2.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

No século XVII, os matemáticos costumavam utilizar limites para calcular a área de figuras com contornos curvos. Newton e Leibniz mostraram que é possível chegar muito mais facilmente ao resultado, usando a integração, pois se uma quantidade pode ser calculada por exaustão, então também pode ser calculada com o uso de antiderivadas. “Esse importante resultado é denominado Teorema Fundamental do Cálculo.” (PIEHOWIAK, 2011, p. 191).

O matemático inglês Isaac Barrow (1630–1677) criou uma abordagem do cálculo diferencial muito próxima da atualmente usada, chamada de *triângulo diferencial,* e

> ...considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra. Essa importante descoberta é conhecida como *teorema fundamental do cálculo* e aparece enunciada e provada nas *Lectiones* de Barrow. (EVES, 2004, p. 435).

Vidal (2012, ed. 14, p.23) diz, em termos atuais, que Barrow percebeu que “... se a derivada de uma função f é uma função g, então, para calcular a integral da função g no intervalo entre a e b, basta calcular $f(a)$ e $f(b)$ e tirar $f(a)$ de $f(b)$.” Em notação matemática moderna:

$$g(x) = f'(x) \Leftrightarrow \int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a).$$

O Teorema fundamental do cálculo é a base das duas operações centrais do cálculo, diferenciação e integração, que são considerados como inversos um do outro. Isto significa que se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada, volta-se na função original. (WIKIPÉDIA, 2011). Para Possani (apud VIDAL, 2012, ed. 14, p.24), “a existência dessa ligação é surpreendente (...) e essas duas ideias (derivação e integração) são importantes e ricas de consequências e aplicações”.

Nesta época, já haviam sido feitas muitas descobertas na área do cálculo diferencial e integral: muitas curvaturas, quadraturas e retificações já haviam sido efetuadas, já começava a surgir um processo de diferenciação e muitas tangentes a curvas haviam sido construídas, a ideia de limite já estava difundida e o teorema fundamental do cálculo era reconhecido. Porém “... faltava a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria.” (EVES, 2004, p. 435).

Newton e Leibniz sabiam que existia uma ligação entre coeficientes angulares de retas tangentes e áreas entre curvas. A descoberta desta ligação “juntou o cálculo diferencial e integral, tornando-os a ferramenta mais poderosa que os matemáticos já tiveram para entender o universo.” (PIEHOWIAK, 2011, p. 173).

Foi na “... criação de um cálculo manipulável e proveitoso, que Newton e Leibniz, trabalhando independentemente, deram suas contribuições” (EVES, 2004, p. 435), motivo pelo qual são considerados os criadores do cálculo em geral, apesar de terem tido vários precursores.

2.4 ISAAC NEWTON

O físico inglês Isaac Newton (1642–1727) interessou-se pela matemática lendo obras de diversos matemáticos, e acabou “criando a sua própria matemática” para provar que a sua teoria física sobre a gravitação universal e a força centrípeta estava correta (GAYO, 2010), primeiramente “... descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual *cálculo diferencial*.” (EVES, 2004, p. 436).

O método dos fluxos, a descoberta mais importante, embora publicado em1736, já havia sido escrito em 1671, e antes disso, em 1669, Newton já comunicara a essência do método a Barrow. (EVES, 2004).
De acordo com Eves (2004, p. 439), nas conclusões de Newton,

> ... uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo de fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. [...] Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal.

Eves (2004) coloca que Newton tratou de dois tipos de problemas com o método dos fluxos:

- No primeiro, considerando uma relação entre alguns fluentes, buscou uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, que é o que hoje chamamos de diferenciação.
- No segundo, estudou a relação inversa: considerando a relação entre os fluentes e seus fluxos, buscou encontrar uma relação envolvendo apenas os fluentes. É o processo de diferenciação.

Newton encontrou diversas e importantes aplicações para o método dos fluxos: “Determinou máximos e mínimos, tangentes e curvas, curvatura de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas”, e demonstrou uma habilidade extraordinária para integrar algumas curvas diferenciais. (EVES, 2004, p. 439-440).

> Newton não foi o primeiro a diferenciar ou a integrar, nem a ver a relação entre essas operações no teorema fundamental do cálculo. Sua descoberta consistiu na consolidação desses elementos num algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas sejam transcendentes[1]. (BOYLER, 2010, p. 274).

1 “Uma **equação transcendente** é uma equação que contém alguma função que não é redutível a uma fração entre polinômios, e cuja solução não pode ser expressa através de funções elementares. Ex.: espiral.” (FONTE: <http://pt. wikipedia.org/wiki/ Equa%C3%A7%C3%A3o_transcendente>.)

2.5 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

O cientista alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) é considerado o último sábio que obteve o conhecimento universal. (BOYER, 2010), e criou o seu cálculo entre 1673 e 1676. (EVES, 2004).

Leibniz declarou que ao ler a carta *Traite des sinus du quart de cercle*, de Amos Dettonville (pseudônimo sob o qual Pascal escrevia nos anos finais de sua vida), sobre os *indivisíveis* (GARBI, 2009, p. 211), "teve uma luz jorrada sobre ele". Foi quando percebeu que

> ... a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que formam a área. (BOYER, 2010, p. 276).

Leibniz foi o primeiro a utilizar o símbolo de integral, um *S* alongado, derivado da primeira letra da palavra *summa*, (soma), tendo feito isso em 29 de outubro de 1675, com o objetivo de indicar uma soma de indivisíveis. "Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como fazemos hoje, assim como escrevia $\int x\,dy$ e $\int y\,dx$ para integrais." (EVES, 2004, p. 443).

Para achar tangentes fez uso do *calculus differentialis* e para encontrar quadraturas utilizou o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, de onde se originou a nomenclatura atualmente utilizada. (BOYER, 2010).

Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial foi publicado em 1684, onde Leibniz define *dx* como um intervalo finito e arbitrário e *dy* pela proporção *dy* : *dx* = *y* : subtangente. (EVES, 2004).[

Em 1986 Leibniz fez outra importante publicação, onde enfatizou a relação inversa entre derivação e diferenciação no teorema fundamental do cálculo. (BOYER, 2010, p. 278).

O matemático alemão deduziu muitas das regras da diferenciação que atualmente são utilizadas nos cursos de cálculo. Como exemplo, a fórmula da derivada enésima do produto de duas funções, que é conhecida como *regra de Leibniz*. Eves (2004, p. 443-444) afirma sobre Leibniz que ele "tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton".

2.5 NEWTON *VERSUS* LEIBNIZ

Leibniz foi o primeiro a publicar suas descobertas relativas ao cálculo diferencial e integral, porém Newton já havia desenvolvido sua teoria muitos anos antes, o que levou à disputa sobre a paternidade do cálculo. A Royal Society, composta pelos principais cientistas da Inglaterra, acusou Leibniz de plágio, o que marcou profundamente a carreira do alemão. (GAYO, 2010).

Segundo Gayo (2010), a ordem cronológica dos fatos foi a seguinte:

QUADRO 1 – CRONOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO E PUBLICAÇÃO DO CÁLCULO

1666	Ano milagroso da ciência, Isaac Newton desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral.
1676	Gottfried Willhelm Leibniz desenvolve o Cálculo Diferencial e Integral com uma simbologia diferente da utilizada por Newton e sem conhecer seu trabalho.
1684	Leibniz faz sua primeira publicação sobre o assunto no periódico mensal *Acta Eroditorum* com o título *Nova methodus pro maximis ET mínimos, itemque tangentibus, qua Nec irrationales quantitaes moratur* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes que não é obstruído por quantidades irracionais).
1686	Newton publica *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), obra que contém, além de Cálculo, Fundamentos da Física.

FONTE: Gayo (2010, p. 150)

As representações utilizadas pelos dois matemáticos eram absolutamente diferentes. As únicas semelhanças existentes originaram-se do aproveitamento de simbologias criadas por outros matemáticos (GAYO, 2010, p. 151):

> "- a adoção das letras x e y para os eixos cartesianos (conforme Descartes);
> - a extensão destes eixos para os lados negativos;
> - a utilização do atual sinal de igual." (criado por Robert Record, em 1557).

Por ter sido o primeiro a desenvolver o seu raciocínio, Newton é chamado de pai do cálculo, porém

> ... a opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético e embora inferior (...) como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. (EVES, 2004, p. 444).

3 DIFUSÃO DO CÁLCULO

> As descobertas de um grande matemático (...) não se tornam automaticamente parte da tradição matemática. Podem ficar perdidas para o mundo a menos que outros cientistas as compreendam e se interessem suficientemente para encará-las de vários pontos de vista, esclarecê-las e generalizá-las, indicar suas implicações. (BOYER, 2010, p. 286).

Newton era pouco comunicativo, e os seus estudos sobre o método dos fluxos não eram bem conhecidos fora da Inglaterra. Leibniz, porém, "encontrou discípulos dedicados que estavam ansiosos por aprender o cálculo diferencial e integral e transmitir o conhecimento a outros". (BOYER, 2010, p. 286). O cálculo Leibniziano passou a ser difundido a partir da publicação dos artigos dos dois irmãos italianos Jacques (1654–1705) e Johann (1667–1748) Bernoulli, na *Acta Eruditorum*[1]. Eles foram os primeiros a estudar o trabalho de Leibniz, e o fizeram entre os anos de 1687 e 1690.

> A determinação da equação da catenária[2] foi o primeiro problema importante resolvido por Johann Bernoulli. Esse problema existia há mais de cinquenta anos (...). O problema era determinar sua equação. Utilizando o Cálculo Leibniziano, Johann Bernoulli resolveu o problema e esse foi o primeiro sucesso público do novo Cálculo. (E-cálculo, apud PIEHOWIAK, 2008, p. 64).

Os irmãos Bernoulli contribuíram muito no desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e ampliaram o campo de aplicações destas, como, por exemplo, a resolução de diversos problemas em mecânica com ajuda do cálculo, formulando-os como equações diferenciais (BOYCE, 2010).

Em 1692, Johann Bernoulli foi contratado pelo matemático francês Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hospital (1661–1704) para lhe ensinar cálculo. O contrato também previa que L'Hospital poderia utilizar os conhecimentos do seu professor da forma como desejasse (PIEHOWIAK, 2008).

Pickover (2011, p. 160) relata que foi o Marquês de L'Hospital quem publicou o primeiro livro sobre cálculo, em 1969, sob o título *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, que pode ser traduzido como "Análise dos infinitamente pequenos, para a compreensão das curvas".

---

1 **Acta Eruditorum**: revista científica alemã, fundada por Leibniz e Otto Mencke, que alcançou grande circulação na Europa Continental. (FONTE: EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004).

2 **Equação da catenária**: "descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeita à ação da gravidade." (FONTE: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Caten%C3 %A1ria>.).

Um dos assuntos do livro de L'Hospital é a apresentação de um método que permite calcular o valor limite de uma fração onde o denominador e o numerador tendem simultaneamente a zero ou ao infinito, que ficou conhecida como *Regra de L'Hospital*. O objetivo do autor com a sua obra era "... que o livro fosse um veículo para promover a compreensão das técnicas do cálculo diferencial".

Devlin (apud PICKOVER, 2011, p. 160) declara que "De facto, até ao aparecimento do livro de L'Hôpital, Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli eram realmente as únicas pessoas à face da Terra que tinham sólidos conhecimentos em cálculo". Outro matemático que enaltece a obra de L'Hospital é Ball (apud PICKOVER, 2011, p.160): "O crédito de juntar o primeiro tratado que explicava os princípios e a utilização do método é devido a L'Hôpital... Este trabalho foi amplamente difundido; generalizou o uso da notação diferencial em França, e contribuiu para torná-lo conhecido na Europa".

Após o falecimento de L'Hospital, Johann Bernoulli, tornou público o acordo realizado entre ambos, sobre o uso dos estudos de Bernoulli, reclamando que muitas das descobertas publicadas por L'Hospital eram suas (PICKOVER, 2011). Como Johann já possuía várias desavenças que eram de conhecimento do público, inclusive com seu irmão Jacques, não lhe foi dado crédito. O reconhecimento de que Johann foi autor da Regra de L'Hospital aconteceu somente em 1922, quando foi encontrada uma cópia do curso de Bernoulli para o marquês (PIEHOWIACK, 2008).

Piehowiak (2008) traz mais um nome importante da família Bernoulli para a história do cálculo. É Daniel Bernoulli (1700–1782), filho de Johann Bernoulli. Daniel foi um grande matemático, apesar de ser formado em medicina, como o pai, e aplicou a física-matemática para se doutorar em medicina. O seu maior mérito na área do cálculo foi o fato de ter aceito e utilizado as teorias de Newton em conjunto com o cálculo de Leibniz, o que contribuiu muito para o desenvolvimento da Física-Matemática. Daniel também foi um precursor no campo das equações diferenciais parciais.

Por volta de 1700, a maior parte do cálculo que hoje se vê nos cursos de graduação já havia sido estabelecida, juntamente com alguns tópicos mais avançados. (EVES, 2004).

4 APERFEIÇOAMENTO DO CÁLCULO

Com a descoberta do cálculo diferencial e integral, muitos problemas anteriormente insolúveis se tornaram passíveis de serem resolvidos. A sua aplicabilidade a inúmeras situações em diferentes áreas atraiu grande parte dos pesquisadores em matemática, que produziram uma profusão de artigos, a grande maioria sem preocupação com sua fundamentação. Eves (2004, p. 462) menciona que "Os processos empregados eram frequentemente justificados com o argumento de que eles funcionavam".

Após terem surgidos muitos absurdos e contradições, nos últimos anos do século XVIII percebeu-se a necessidade de rever as bases do cálculo para dar-lhe uma fundamentação lógica rigorosa. "O cuidadoso esforço que se seguiu, visando a essa fundamentação, foi uma reação ao emprego descontrolado da intuição e do formalismo[1] no século anterior." (EVES, 2004, p. 462). Esse processo ocupou praticamente os cem anos que sucederam o início do movimento. O trabalho foi expandido para os outros ramos da matemática, refinando muitos conceitos importantes. A ideia de função foi esclarecida, e foram cuidadosamente

1 **Formalismo**: De acordo com o formalismo, a matemática consiste apenas em axiomas, definições e teoremas em fórmulas, existindo regras pelas quais se deduz uma fórmula a partir de outra. Mas as fórmulas não são acerca de coisa alguma: são apenas combinações de símbolos. (FONTE: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/fundmat/formalismo.htm>.).

definidos os conceitos de limites, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade, espaço, dimensão, convergência etc.

O italiano Joseph Louis Lagrange (1736–1813) foi o primeiro grande matemático a reconhecer a precariedade dos fundamentos da análise, e se empenhou para atingir o rigor necessário, influenciando as pesquisas matemáticas posteriores (EVES, 2004).

O cálculo de variações é considerado a maior contribuição de Lagrange para o cálculo. Tratava-se de um novo ramo da matemática que, em síntese, busca determinar uma relação *y - f(x)* para que a integral a $\int_a^b g\,(x,y)dx$ seja máxima ou mínima, o que serve para determinar problemas como de isoperimetria[2] ou de mais rápida queda. (BOYER, 2010). Lagrange publicou sua obra apoiado pelo suíço Leonhard Euler (1707–1783), matemático que deixou diversos trabalhos significativos em muitos ramos da matemática. Euler e Lagrange são considerados os maiores matemáticos do século XVIII (GARBI, 2009).

O matemático francês Jean Le Rond D'Alembert (1717–1783) afirmou que fora dada "maior atenção a aumentar o edifício (da Matemática) do que a iluminar sua entrada, a elevá-lo mais alto do que fortalecer suas fundações" (GARBI, 2009, p. 299). D'Alembert foi um dos primeiros a afirmar que a ideia das grandezas infinitesimais como fundamento para os cálculos era muito frágil, e tentar substituí-la pelo conceito de limites. Conhecido como "Apóstolo do Cálculo", pelo seu rigor nas demonstrações matemáticas, o também francês Augustin Louis Cauchy (1789–1857), provou que D'Alembert estava correto, mostrando que era possível fundamentar o cálculo sem utilizar as grandezas infinitesimais utilizando a noção de limite, que, de acordo com Garby, Cauchy definiu como: "Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo de modo que difiram dele por uma quantidade tão pequena quanto quisermos, aquele valor é chamado limite de todos os outros." (2009, p. 299).

Na sua obra *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (Resumo das lições sobre cálculo infinitesimal), publicada em 1823, Cauchy apresenta um desenvolvimento rigoroso do cálculo e demonstra o Teorema Fundamental do Cálculo.

> O tratado de Cauchy abre com uma definição clara da derivada. (...) Segundo Stephen Howking escreveu: 'Cauchy (...) definiu a derivada de *f* em *x* como o limite da diferença do coeficiente $\frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{[f(x+i)-f(x)]}{i}$, à medida que *i* se aproxima de zero, que é a nossa definição moderna e não geométrica da derivada. (PICHOVER, 2011, p. 220).

A definição de limite de Cauchy ainda continha expressões vagas, e foi aperfeiçoada pelo alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897), chegando à definição *f(x)* que é utilizada ainda hoje: "uma função *f(x)* tem por limite o valor *L* no ponto $x = x_0$ se, dado ε tão pequeno quanto se queira, existir δ > 0 tal que, para todo $0 < | x - x_0 | < \delta$, $| f(x) - L | < \varepsilon$,." (GARBY, 2009, p. 299). "Weierstrass tornou-se sinônimo de 'raciocínio extremamente cuidadoso' (...) e tornou-se conhecido como 'o pai da análise moderna'" (EVES, 2004, p. 613).

Eves (2004) afirma que o responsável pela definição de integral que é utilizada até hoje é o alemão Bernhard Riemann (1826-1866), de maneira que o cálculo das integrais parciais – onde existe um intervalo delimitado e sua área é encontrada pela soma das divisões desse intervalo em espaços menores – é conhecido como "integral de Riemann".

2 **Problema de isoperimetria:** "... trata da determinação de figura de máxima área, dentro de um elenco de possibilidades, todas com o mesmo perímetro, ou do sólido de volume máximo, dentro de um conjunto de alternativas, dada sua área exterior constante." (FONTE: GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009, p. 126).

5 CONCLUSÃO

As coisas parecem fazer mais sentido a partir do momento que se conhece a sua origem, a necessidade que levou à sua criação e até as dificuldades encontradas até se obter o resultado esperado. No caso do cálculo diferencial e integral, desde as primeiras evidências de estudos sobre o assunto até a atualidade, já se passaram 38 séculos, e ainda não se sabe tudo sobre ele, e sabe-se muito menos sobre a extensão potencial de aplicabilidade dessa poderosa ferramenta da matemática, pois continuamente estão sendo descobertas novas utilidades.

Atualmente, além dos usos que levaram à sua criação, nas áreas de física e astronomia, o cálculo é fundamental para as engenharias, na formulação de modelos matemáticos que permitem prever a evolução de doenças no corpo humano, efeito de medicamentos na farmacologia, a reprodução de bactérias em biologia, crescimento populacional para planejamentos de políticas sociais, acompanhamento de movimentos migratórios, entre outros tantos.

Analisando a história, percebe-se que todas as descobertas se deram com muito estudo e fazendo uso de descobertas feitas por matemáticos que viveram anteriormente, como se cada nova descoberta fosse apenas mais uma etapa da construção de um conhecimento universal. Isso reforça a necessidade do estudo da teoria, do conhecimento de obras de vários autores e da pesquisa.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

DEVLIN, Keith. **O gene da matemática**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FLEMMING, Diva Marília, GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**. 6. ed. São Paulo: Makron Books, 2006.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências**. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GAYO Jairo. **Fundamentos e história da matemática**. Indaial: Uniasselvi, 2010.

PICKOVER, Clifford A. **O livro da matemática**. Kerkdriel, Holanda: Librero, 2011.

PIEHOWIAK, Ruy. **Equações diferenciais**. Indaial: Uniasselvi, 2008.

________________. **Cálculo diferencial e integral**. Indaial: Uniasselvi, 2011.

VIDAL, Amanda. **Matemáticos e seus queridinho**s. Cálculo, São Paulo: Segmento, 2012, ed. 14, p. 22-28, março de 2012.

WIKIPÉDIA – **TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**. Disponível em: <http:// pt. wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_do_c%C3%A1lculo >. Acesso em: 19 nov.2011.

UNIASSELVI - Centro Universitário Leonardo da Vinci
Rodovia BR 470, Km 71, no. 1040, Bairro Benedito
Caixa Postal: 191 - 89.130-000 - Indaial / SC
Fone (47) 281-9000/281-9090
www.uniasselvi.com.br
editora@uniasselvi.com.br